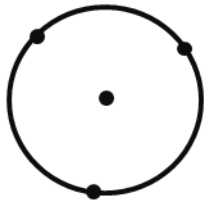
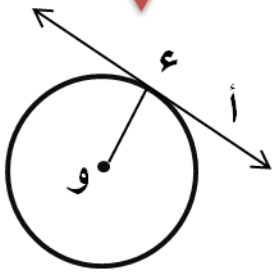
عاشر ترم ثاني

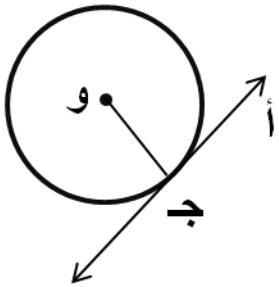
الدائرة



كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة

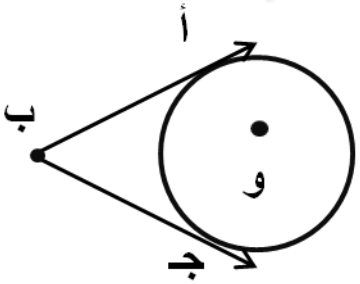


المماس $\overleftrightarrow{أء} \perp \overleftrightarrow{ءو}$ المماس عمودي على نصف قطر التماس



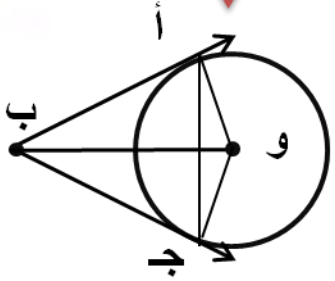
ق $\widehat{جـ}$ = ٩٠

$\therefore \overleftrightarrow{أ جـ}$ مماساً



$\overleftrightarrow{ب أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماسان

$\overline{ب أ} \cong \overline{ب جـ}$



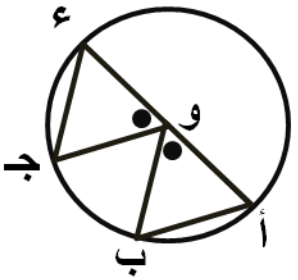
ب أ جـ مثلث متطابق الضلعين

$\overleftarrow{ب و}$ منصف $(أ \widehat{ب} جـ)$

$\overleftarrow{و ب}$ منصف $(أ \widehat{و} جـ)$

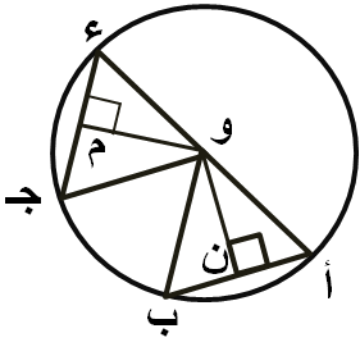
$\overline{و ب} \perp \overline{أ جـ}$

الأوتار والأقواس

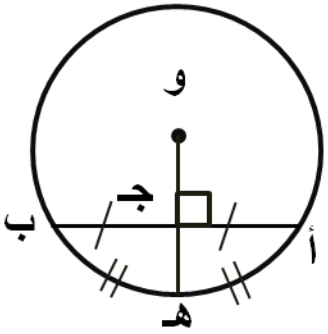


في دائرة او دوائر متطابقة

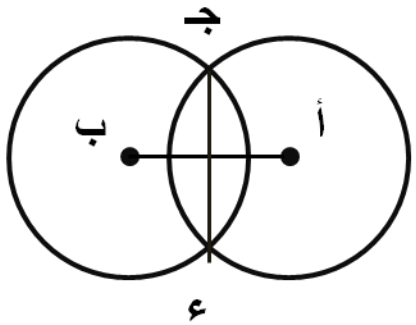
- للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة
- الأوتار المتطابقة تقابل أقواساً متطابقة
- للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة



أ ب = د جـ
أوتار متطابقة
ن و = م و
أبعاد متساوية



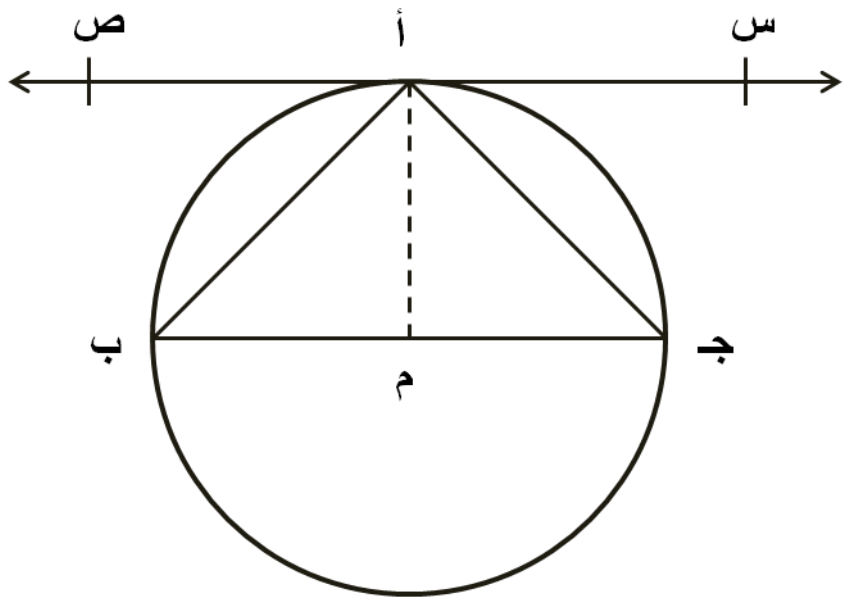
و جـ ⊥ أ ب
∴ أ جـ = جـ ب
أ هـ = هـ ب



خط المركزين لدائرتين يكون عمودياً على الوتر المشترك بينهم

أ ب ⊥ جـ د

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية والزوايا المماسية



- ق (أ م̂ ب) المركزية = ق $\overset{\frown}{أب}$ الأصغر

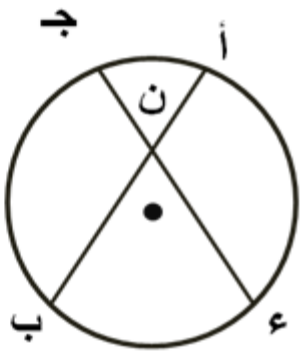
ق (أ ĵ ب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)الأصغر

ق (أ $\overset{\frown}{ب}$ جـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق (أ م̂ ب) المركزية المشتركة معها في نفس القوس

ق (ص أ̂ ب) المماسية = ق (أ ĵ ب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ $\overset{\frown}{أب}$

ق (جـ أ̂ ب) = ٩٠° زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة.

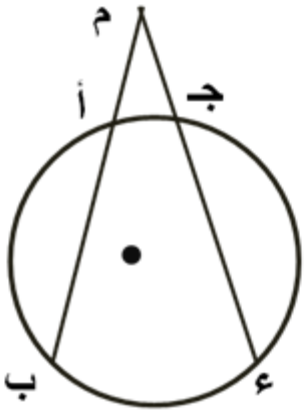
الدائرة، الأوتار المتقاطعة، المماس



أ ن × ن ب

=

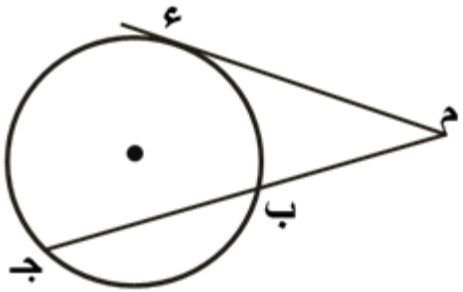
ن جـ × ن ء



م أ × م ب

=

م جـ × م ء

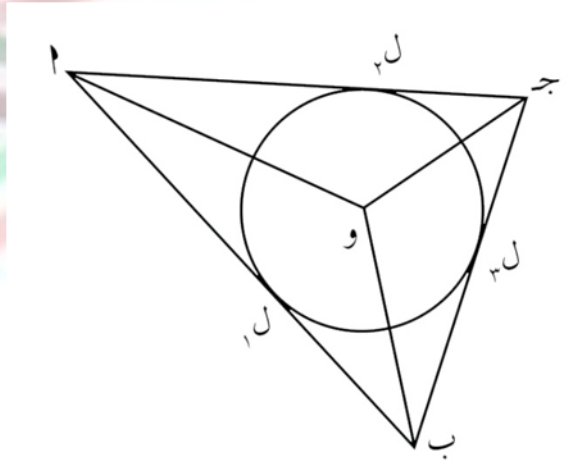


$(\text{م ء})^{٢}$

=

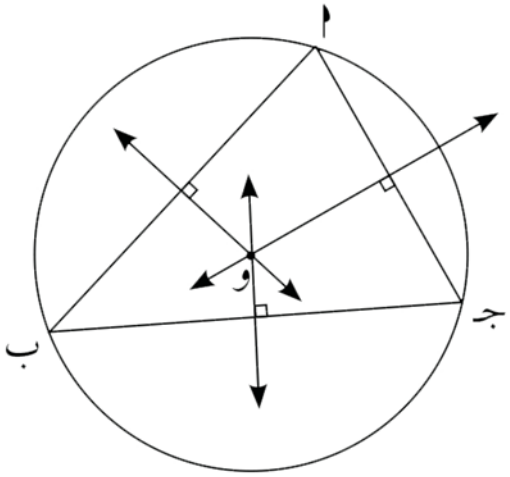
م ب× م جـ

الدائرة الداخلة



- محاطة بمثلث
- مركزها و نقطة تلاقي منصفات الزوايا

الدائرة الخارجة



- محيطة لمثلث
- مركزها و نقطة تلاقي المحاور

حساب المثلثات

دائرة الوحدة والدوال المثلثية

- دائرة الوحدة
- النقطة المثلثية
- زاوية الإسناد
  - ربع (١): $\theta = \alpha$
  - ربع (٢): $\theta = 180 - \alpha$
  - ربع (٣): $\theta = 180 + \alpha$
  - ربع (٤): $\theta = 360 - \alpha$
- الدوال المثلثية الدائرية
  - جا θ
  - جتا θ
  - ظا θ
- النسب المثلثية ل θ

العلاقات بين الدوال المثلثية

- النسب المثلثية
  - θ ، $-\theta$
  - θ ، $(\theta - \pi)$
  - θ ، $(\theta + \pi)$
  - θ ، $(\theta - 2\pi)$
  - θ ، $(\theta - \frac{\pi}{2})$
- حل معادلات مثلثية
  - جتا س = جتا θ
  - جتا س = جا θ
  - ظا س = ظا θ

الإحصاء والاحتمالات

- تحليل البيانات
  - مقاييس النزعة المركزية
    - متوسط
    - منوال
    - وسيط
- الانحراف المعياري
  - تباين
  - انحراف معياري
- طرق العد
  - مبدأ العد
  - التباديل
    $$\text{ن ل ر} = \frac{\text{ن !}}{\text{(ن – ر) !}}$$
  - التوافيق
    $$\text{(ن ر)} = \frac{\text{ن !}}{\text{ر! (ن – ر) !}}$$
- الاحتمال المشروط
  - $$\text{ل (أ)} = \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$$
  - مخطط فن
  - العمليات على الأحداث والاحتمالات
  - الأحداث المستقلة
  - الحدث التابع
  - الاحتمال المشروط

$$\frac{\text{ن !}}{\text{(ن – ر) !}}$$

المصفوفات

تنظيم البيانات في مصفوفات

* الرتبة م × ن
* عدد العناصر
ترميز العناصر أ م ن

*** أنواع المصفوفات**

- أفقية
- عمودية
- مربعة
- صفرية ٠
الوحدة و

* **تساوي مصفوفتين** أ = ب
* **محدد أ = Δ =**

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & ء \end{vmatrix}$$

= أ ء – ب جـ

* المنفردة ⇐ |أ| = صفر
المنفردة ليس لها نظير ضربي

جمع وطرح المصفوفات

*** شرط الجمع:** من نفس الرتبة

*** النظير الجمعي** لـ أ هو – أ

(وذلك بتغير إشارة كل مدخلات أ)

*** خواص الجمع:**

منغلقة: أ + ب من نفس

رتبة أ ، ب

إبدالية: أ + ب = ب + أ

تجميعية: (أ + ب) + جـ

= أ + (ب + جـ)

المصفوفة الصفرية هي

المحايد الجمعي: ٠ + أ = أ

ضرب المصفوفات

* الضرب في عدد حقيقي
* ضرب مصفوفة في أخرى

أ م×ن × ب ن×د

الشرط

الناتج

*** خواص الضرب**

منغلقة: ك أ ، أ × ب من نفس رتبة أ ، ب

تجميعية: (ك د) أ= ك (د أ)

أ × (ب × جـ) = (أ × ب) × جـ

توزيعية: ك (أ + ب) = ك أ+ ك ب

أ × (ب + جـ) = أ ب + أ جـ

الضرب في صفر= ٠ × أ = أ × ٠ = ٠

الوحدة هي المحايد الضربي:

أ × و = و × أ = أ

النظير الضربي أ$^{-١}$: أ × أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$×أ = و

حل المعادلات

حل نظام معادلتين خطيتين

١- باستخدام المعكوس الضربي
٢- قاعدة كرامر

الهندسة التحليلية

المستوى الإحداثي

- المسافة بين نقطتين.
- إحداثي منتصف قطعة مستقيمة.
- نقطة تقسيم قطعة مستقيمة.
- البعد بين نقطة وخط مستقيم.

ميل الخط المستقيم

- معدل التغير
- الميل $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$
- الميل ظا θ
- الميل = م $\Leftarrow$ ص = م س + جـ
- الميل = $\frac{-أ}{ب}$ $\Leftarrow$ أ س + ب ص + جـ = ٠
- ميل المستقيمان المتوازيان.
- ميل المستقيمان المتعامدان

معادلة الخط المستقيم

ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)

- معادلة المستقيم بمعلومية م، نقطة.
- معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين.
- معادلة المستقيم الموازي.
- معادلة المستقيم العمودي

معادلة الدائرة

- معادلة دائرة مركزها (٠،٠) س^{٢}+ص^{٢}=نق^{٢}
- معادلة دائرة مركزها (د، هـ)

(س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

- الصورة العامة لمعادلة الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} +ل س + ك ص + ب = ٠

- متى تكون الصورة العامة
  - دائرة
  - نقطة
  - ليست دائرة وليست نقطة

معادلة المماس

- هو معادلة مستقيم بمعلومية ميل ونقطة.

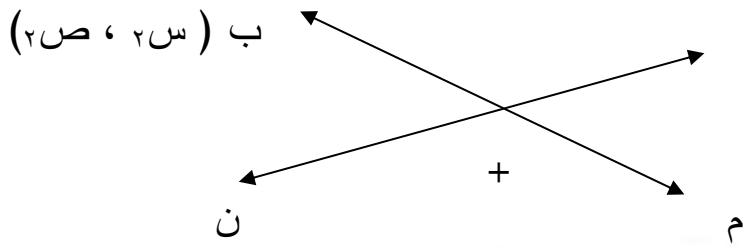
حيث النقطة هي نقطة التماس والميل هو الميل العمودي على نصف قطر التماس

المستوى الإحداثي

- **المسافة بين نقطتين أ، ب هي** $\overline{أ ب}$ = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

- **إحداثي المنصف لـ** $\overline{أ ب}$ **هو جـ =** $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

- **إحداثي نقطة تقسم** $\overline{أ ب}$ **هو جـ =** $\left(\frac{م س_2 + ن س_1}{م+ن} ، \frac{م ص_2 + ن ص_1}{م+ن} \right)$



– البعد بين نقطة ومستقيم

ف = $\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

ميل الخط المستقيم

١- م = معدل التغير = $\frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

٢- م = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

٣- م = ظا θ (حيث θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات)

- الزاوية حادة ⇐ الميل موجب
- الزاوية منفرجة ⇐ الميل سالب
- الزاوية قائمة ⇐ ليس له ميل
- الزاوية صفر (المستقيم أفقي) ⇐ الميل = صفر

٤- معادلة المستقيم ص = م س + جـ ⇐ الميل = م

٥- معادلة المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ ⇐ الميل = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

٦- المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل $\text{م}_١ = \text{م}_٢$

معادلة الدائرة

- معادلة دائرة مركزها (٠،٠) :

$س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

- معادلة دائرة مركزها (د، هـ) :

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$

- الصورة العامة لمعادلة الدائرة:

$س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = صفر$

$م (\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢})$

$نق = \frac{١}{٢} \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ ب > ٠$ ⇐ دائرة

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ ب = ٠$ ⇐ نقطة

$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ ب < ٠$ ⇐ ليست دائرة وليست نقطة

معادلة المماس للدائرة

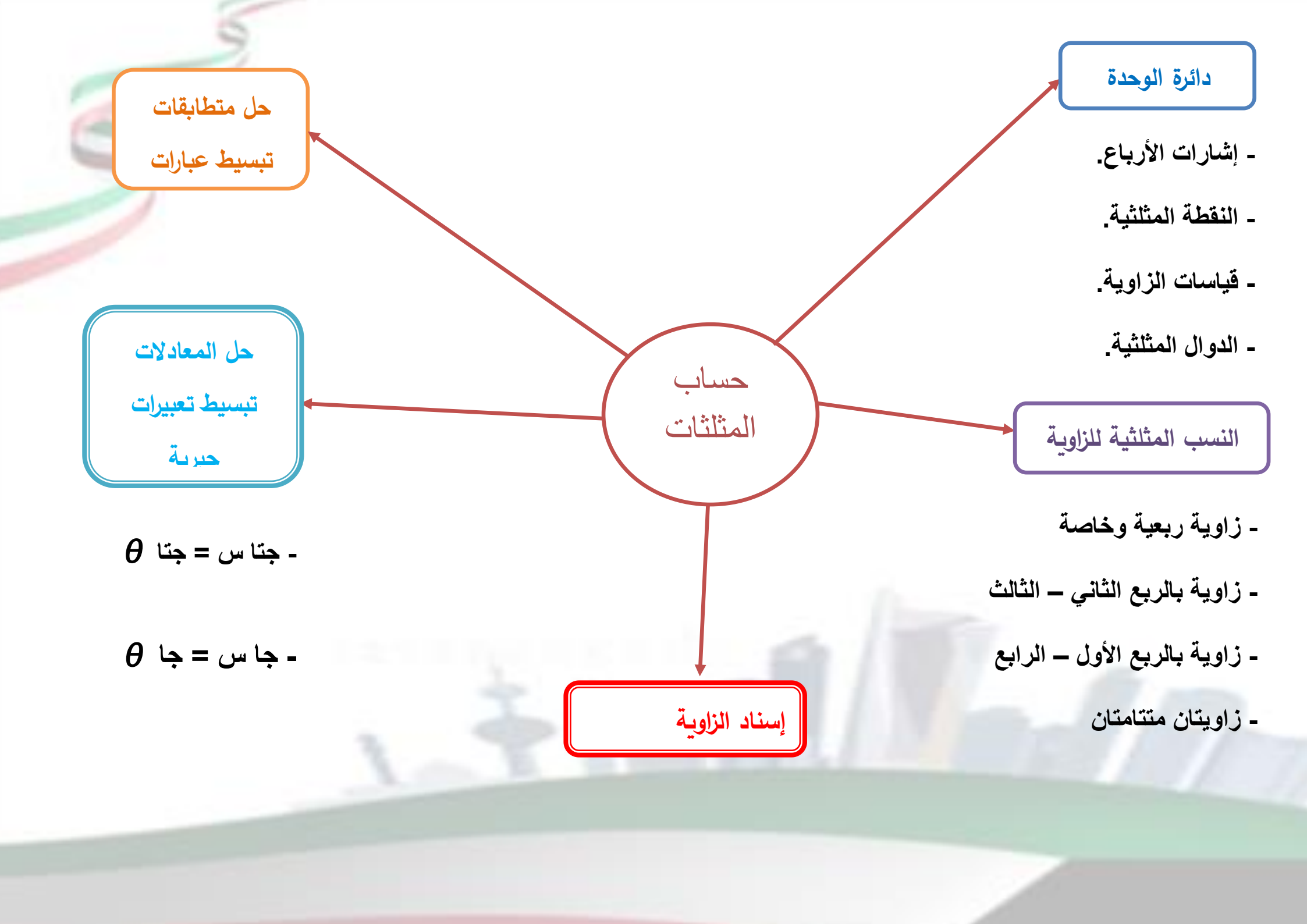
$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$

$(س_{١} ، ص_{١})$ ⇐ نقطة التماس

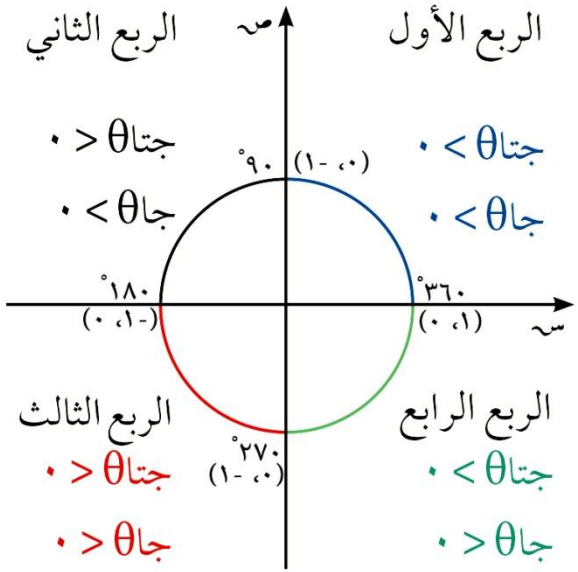
م ⇐ ميل المماس عمودي على ميل نصف قطر التماس

ميل نصف قطر التماس = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ (بين المركز ونقطة التماس)

$م_{المماس} \times م_{نصف\ قطر\ التماس} = -١$


حساب المثلثات
دائرة الوحدة
- إشارات الأرباع.
- النقطة المثلثية.
- قياسات الزاوية.
- الدوال المثلثية.
النسب المثلثية للزاوية
- زاوية ربعية وخاصة
- زاوية بالربع الثاني – الثالث
- زاوية بالربع الأول – الرابع
- زاويتان متتامتان
إسناد الزاوية
- جتا س = جتا θ
- جا س = جا θ
حل المعادلات
تبسيط تعبيرات
حدية
حل متطابقات
تبسيط عبارات

دائرة الوحدة



- دائرة مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠) ونصف قطرها الوحدة

- معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

- النقطة المثلثية: نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في وضع قياسي θ مع دائرة الوحدة (جتا θ ، جا θ)

- لا تتغير النقطة المثلثية للزاوية كلما زدنا أو طرحنا دورات كاملة على الزاوية الأصلية

حيث جا ($\theta + ٢ ك \pi$) = جا θ

جتا ($\theta + ٢ ك \pi$) = جتا θ

الدوال المثلثية للزاوية θ

جا θ = ص

جتا θ = س

ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

قتا θ = $\frac{1}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠

قا θ = $\frac{1}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

ظتا θ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠

- علاقات بين الدوال المثلثية:

جتا^{٢} θ + جا^{٢} θ = ١ ⇐

جا^{٢} θ = ١ - جتا^{٢} θ

جتا^{٢} θ = ١ - جا^{٢} θ

١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ

النسب المثلثية للزاوية

زوايا ربعية

(باستخدام الآلة)

الزاوية بالستيني	الزاوية بالدائري	النقطة المثلثية
30°	$\frac{\pi}{6}$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$
180°	π	$(-1, 0)$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	$(0, -1)$
360°	2π	$(1, 0)$

زوايا في الربع الثاني /الثالث

الثاني: $(\pi - \theta)$ ، θ

جتا $(\pi - \theta)$ = - جتا θ

جا $(\pi - \theta)$ = جا θ

ظا $(\pi - \theta)$ = - ظا θ

الثالث: $(\pi + \theta)$ ، θ

جتا $(\pi + \theta)$ = - جتا θ

زوايا في الربع الأول والرابع

الأول: $-\theta$ ، θ

جتا $(-\theta)$ = جتا θ

جا $(-\theta)$ = - جا θ

حيث جتا θ دالة زوجية

جا θ دالة فردية

الزاوية المتتامة

$(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ، θ

جتا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = جا θ

جا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = جتا θ

ظا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = ظتا θ

$(\frac{\pi}{2} + \theta)$ ، θ

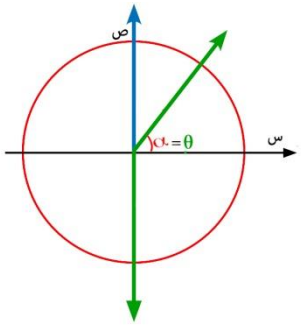
جتا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = -جا θ

جا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = جتا θ

إسناد الزاوية

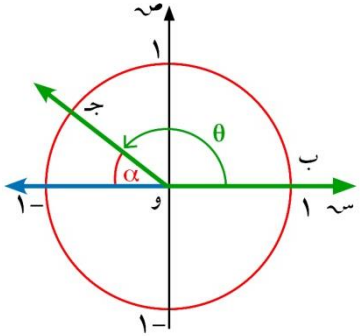
- زاوية الإسناد هي زاوية حادة α بين الضلع النهائي للزاوية ومحور السينات.

في الربع الأول



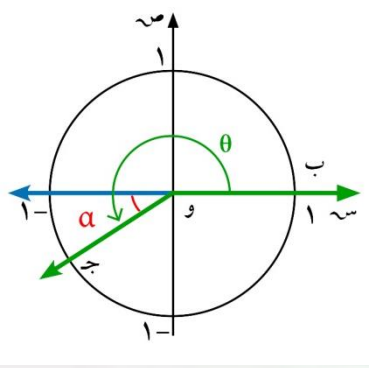
$\alpha = \theta$

في الربع الثاني



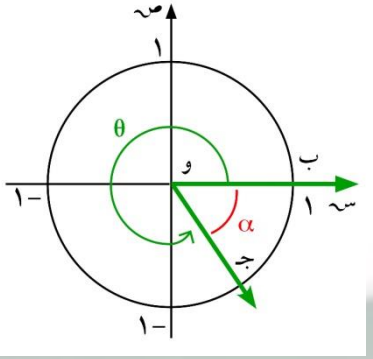
$\alpha - ١٨٠ = \theta$

في الربع الثالث



$\alpha + ١٨٠ = \theta$

في الربع الرابع



$\alpha - ٣٦٠ = \theta$

حل المعادلات

جا س = جا θ

س = θ + ٢ك π

أو

س = (π − θ) + ٢ك π

ك ∈ ص

يكون جيب الزاوية موجب عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع

جتا س = جتا θ

س = θ + ٢ك π

أو

س = −θ + ٢ك π

ك ∈ ص

يكون جيب الزاوية موجب عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثانى

ظا س = ظتا θ

س = θ + ك π

ك ∈ ص

يكون ظل الزاوية موجب عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث

حل المتطابقات

جتا² θ + جا² θ = ١

جتا² θ = ١ − جا² θ

١ + ظا² θ = قا² θ

ظا² θ = قا² θ − ١

١ + ظتا² θ = قتا² θ

ظتا² θ = قتا² θ − ١

المتوسط الحسابي $\overline{س}$

* قيم بدون تكرار $\overline{س} = \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن} س_ر$

* جدول ذو فئات $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$

التباين $ع^2$

* قيم بدون تكرار $ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن}$

* قيم مع تكرار $ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^2}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$

* جدول ذو فئات $ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^2}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{ع^2}$

طرق العد

* عملية مركبة تتم ب $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$ ....، $ع_ن$

$ع_1$ تتم ب $ر_1$ طريقة، $ع_2$ تتم ب $ر_2$ طريقة..

∴ عدد الطرق= $ر_1 \times ر_2 \times ر_3 \times .... \times ر_ن$

* الشجرة البيانية

التباديل npr

* الترتيب مهم

$ن ل_ر = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ ، حيث ر،ن 3 ص+، ر≤ن

* $ن ل_0 = 1$

التوافيق ncr

* الترتيب غير مهم

$ن ق_ر = \binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!ر!}$ حيث ر،ن 3 ص+، ر≤ن

* $\binom{ن}{0} = \binom{ن}{ن} = 1$

الاحتمال المشروط

* ل (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

* ٠ < ل (أ) <١

* ل (أ)= ٠ حدث مستحيل

* ل (أ) = ١ حدث أكيد

* ل (أ ∪ ب)= ل (أ) + ل(ب) – ل(أ∩ ب)

* ل(أ∩ ب) = ل (أ) + ل(ب) – ل(أ ∪ ب)

* المتنافيان ل (أ ∪ ب)= ل (أ) + ل(ب)

* المستقلان ل(أ∩ ب) = ل (أ) × ل(ب)

* الاحتمال المشروط ل(ب/أ)=$\frac{ل(أ∩ب)}{ل(أ)}$:ل(أ)≠٠

ل(أ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب/أ)