10:29 21/10/2020 ص

(1 – 2) مجال الدالة

الأمثلة

حاول أن تحل

العلاقة والدالة

توضيحي

(1) a,b

(1) c,d

1

1

مجال الدالة

توضيحي

(2) a,b,c

(2) d

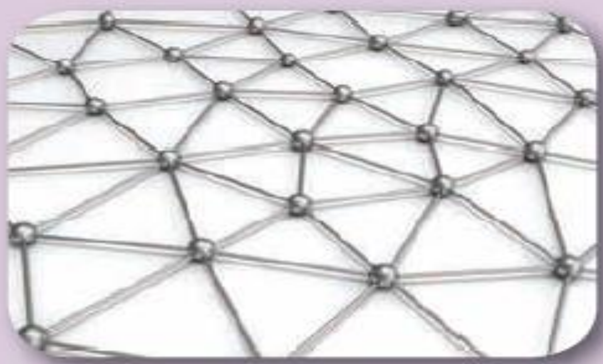
(2) e

(2) f

2a 2b 2c 2d

2a 2b 2c

الفهرس



دعنا نفكر ونتناقش

من أهم ما يميز حياة الإنسان العلاقات. مثل انتماء شخص إلى وطنه أو إلى نادي رياضي أو ثقافي أو انتماء نقطة إلى منحنى. يمكن تمثيل العلاقات أحيانًا بمخططات سهمية.

a اختر خمسة من أصدقائك، واكتب أسماءهم ثم صل كل اسم بسنة ولادته.

b أعد كتابة الأسماء الخمسة واكتب أسماء ثلاث رياضات ثم صل اسم كل شخص برياضته المفضلة.

في الفقرة **a** يرتبط كل اسم بسنة ولادته بينما في الفقرة **b** قد يرتبط الاسم الواحد بأكثر من رياضة أو قد لا يرتبط بأي رياضة.

قارن بين عملك وعمل زملائك في الفصل.

سوف نتعرف في هذا الدرس على العلاقات ونمثلها بيانيًا، وسوف نتعرف أيضًا متى تمثل العلاقة دالة مع التركيز على العلاقات في المستوى الإحداثي.

العلاقة والدالة Relation and Function

كثيرًا ما نحتاج في الرياضيات وتطبيقاتها إلى التعبير عدديًا أو جبريًا عن علاقة تربط بين متغيرين أو أكثر، والعلاقة رياضيًا هي أي مجموعة من الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، وتسمى مجموعة المساقط الأولى لهذه الأزواج (الإحداثيات الأفقية أي السينية) **مجال العلاقة**. وتسمى مجموعة المساقط الثانية (الإحداثيات الرأسية أي الصادية) **مدى العلاقة** وهي مجموعة جزئية من **المجال المقابل**

عندما يكون كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر واحد فقط من المجال المقابل، فإن العلاقة تسمى دالة.

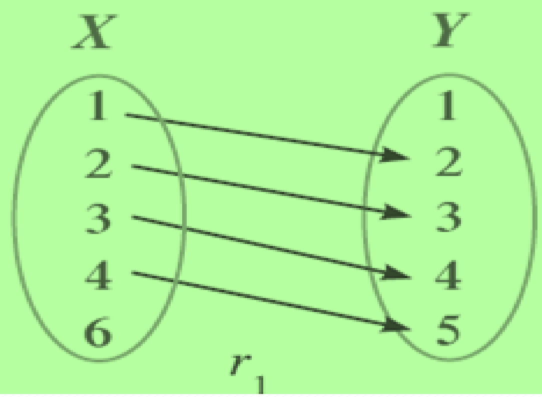
والدالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.

مثال توضيحي (1)

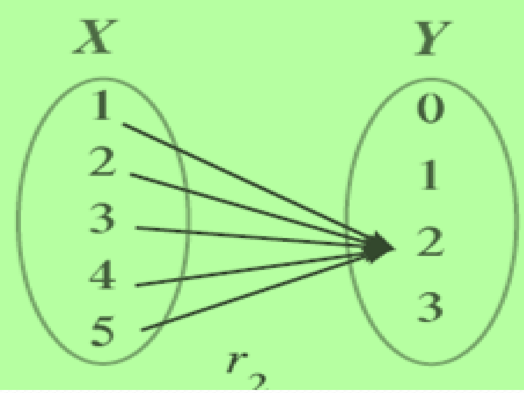
في المخططات السهمية التالية علاقات من: $X \longrightarrow Y$

1. حدّد المجال والمجال المقابل والمدى.
2. اكتب كل علاقة على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة.
3. بيّن أي من العلاقات يمثل دالة حقيقية وأيها لا يمثل دالة حقيقية مع ذكر السبب.

a



b



المجال= $\{1,2,3,4,6\}$

المجال المقابل= $\{1,2,3,4,5\}$

المدى= $\{2,3,4,5\}$

العلاقة $r_1=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

العلاقة r_1 لا تمثل دالة
لأن العنصر 6 من المجال
لم يرتبط بأي عنصر من المجال المقابل

المجال= $\{1,2,3,4,5\}$

المجال المقابل= $\{0,1,2,3\}$

المدى= $\{2\}$

العلاقة $r_2=\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

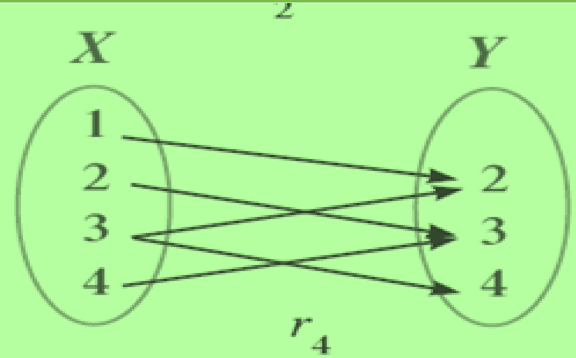
العلاقة r_2 تمثل دالة حقيقية
لأن كل عنصر من المجال
ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل

مثال توضيحي (1)

في المخططات السهمية التالية علاقات من: $X \longrightarrow Y$

1. حدّد المجال والمجال المقابل والمدى.
2. اكتب كل علاقة على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة.
3. بيّن أي من العلاقات يمثل دالة حقيقية وأيها لا يمثل دالة حقيقية مع ذكر السبب.

d



المجال= {1,2,3,4}

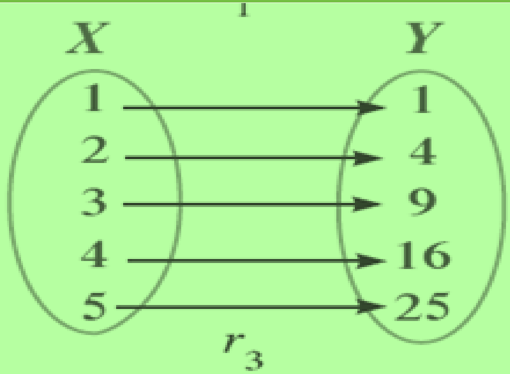
المجال المقابل= {2,3,4}

المدى= {2,3,4}

العلاقة $r_2=\{(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$

العلاقة r_4 لا تمثل دالة حقيقية
لأن العنصر 3من المجال
ارتبط بعنصرين من المجال المقابل

c



المجال= {1,2,3,4,5}

المجال المقابل= {1,4,9,16,25}

المدى= {1,4,9,16,25}

العلاقة $r_3=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$

العلاقة r_3 تمثل دالة حقيقية
لأن كل عنصر من المجال
ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل

الفهرس

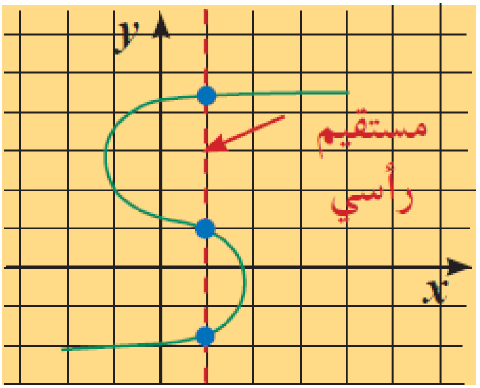
إذا كانت العلاقة ممثلة بيانيًا في المستوى الإحداثي، نستخدم في هذه الحالة اختبار المستقيم الرأسي (العمودي) لمعرفة إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا.

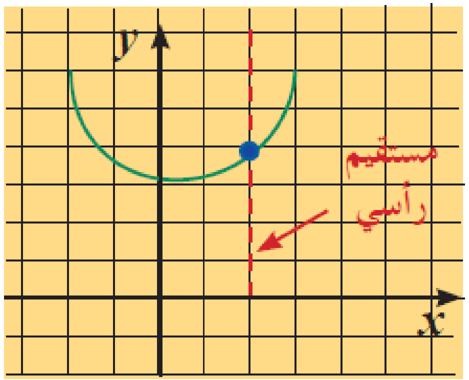
اختبار المستقيم الرأسي:

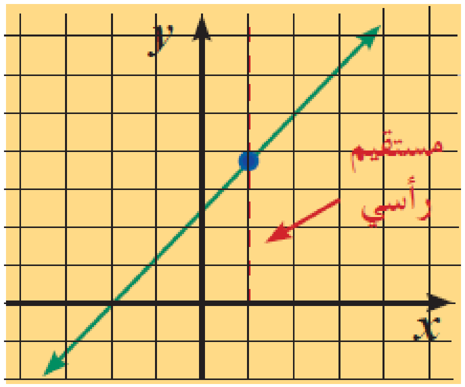
إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر، فإن هذه العلاقة تكون دالة.

مثال (1)

استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:

a


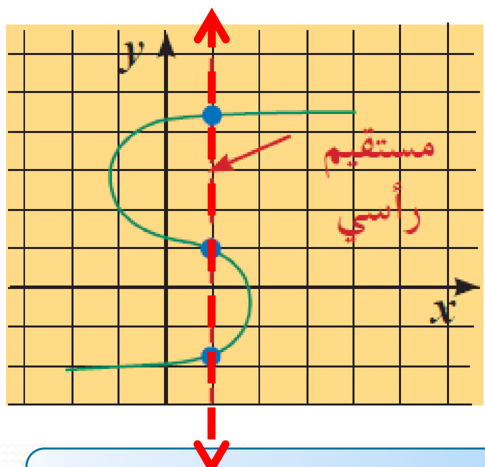
b


c


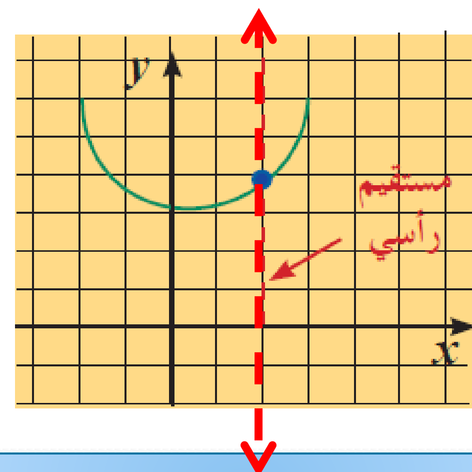
مثال (1)

استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:

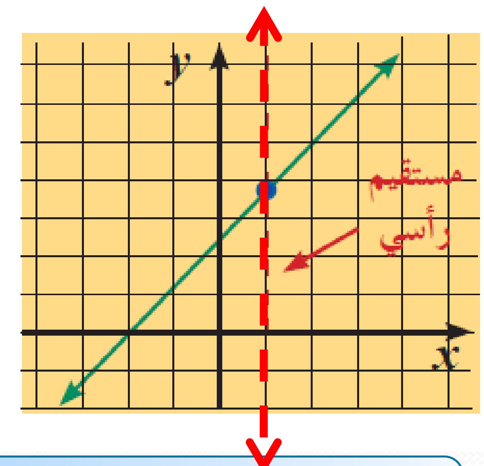
a



b



c



a يوجد على الأقل مستقيم رأسي واحد يقطع المنحنى بأكثر من نقطة واحدة ∴ البيان لا يمثل دالة

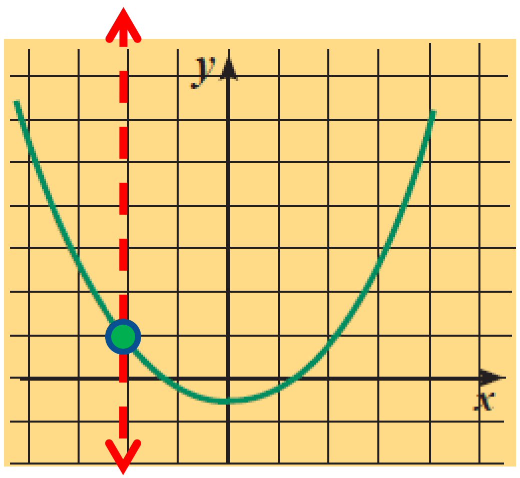
b كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر ∴ البيان يمثل دالة

c كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى في نقطة واحدة فقط ∴ البيان يمثل دالة

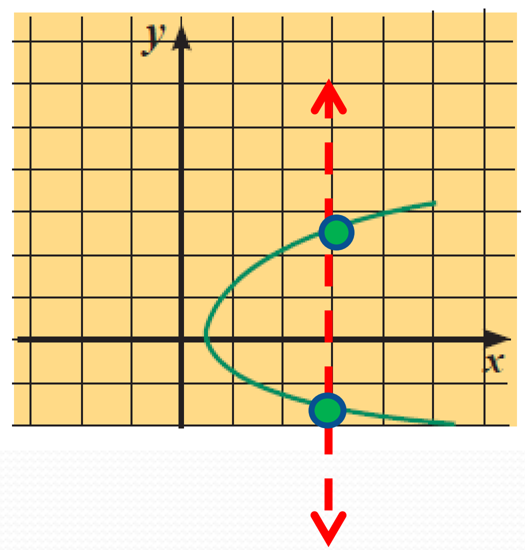
حاول أن تحل

1 استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل دالة أم لا:

a



b



a كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر .: البيان يمثل دالة

b يوجد على الأقل مستقيم رأسي واحد يقطع المنحنى بأكثر من نقطة واحدة .: البيان لا يمثل دالة

الفهرس

مجال الدالة Domain of the function

إذا كانت لدينا دالة: $y = f(x)$، فإن مجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يأخذها المتغير x ولتكن D هذه المجموعة، وينتج عنها قيم حقيقية للمتغير y ونقول أن الدالة معرّفة على المجال D.

مثال توضيحي (2)

حدّد مجال كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 2x + 1$

b $g(x) = x^2 + 3x + 1$

c $t(x) = \sqrt{3x - 4}$

d $h(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

e $u(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

f $v(x) = \dfrac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$

a الدالة f دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

b الدالة g دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

c الدالة t هي دالة جذرية دليلها زوجي ، المجال هو قيم x التي تجعل المجذور صفر أو عدد موجب

$$3x - 4 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 4 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

$$x \in [\frac{4}{3}, \infty)$$

أي أن مجال الدالة t هو $[\frac{4}{3}, \infty)$

مثال توضيحي (2) حدد مجال كل من الدوال الآتية

d $h(x)=\frac{x-2}{x-4}$

لنفرض أن $b(x)=x-4$ $a(x)=x-2$

فيكون $h(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$

الدالة h دالة كسرية يكون المجال هو تقاطع مجال البسط مع مجال المقام
ما عدا التي تجعل المقام = صفر

1) مجال دالة البسط: الدالة a دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة a(البسط) هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

2) مجال دالة المقام: الدالة b دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة b (المقام) هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

3) أصفار المقام

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

أي أن مجال الدالة h = (مجال دالة البسط ∩ مجال دالة المقام) / مجموعة اصفار دالة المقام

أي أن مجال الدالة h هو $R-\{4\}$

مثال توضيحي (2)

حدّد مجال كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 2x + 1$

b $g(x) = x^2 + 3x + 1$

c $t(x) = \sqrt{3x - 4}$

d $h(x) = \dfrac{x + 2}{x - 4}$

e $u(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

f $v(x) = \dfrac{\sqrt{3x - 4}}{x - 2}$

e

الدالة u هي دالة جذرية دليلها فردي، مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الفهرس

مثال توضيحي (2)

f $v(x) = \dfrac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$

f

الدالة V دالة كسرية يكون المجال هو تقاطع مجال البسط مع مجال المقام
ما عدا التي تجعل المقام = صفر

لنفرض أن $h(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$

الدالة n دالة جذرية دليلها زوجي ، المجال هو قيم x التي تجعل المجذور صفر أو عدد موجب

$$3x-4 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 4 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

$$x \in [\frac{4}{3}, \infty)$$

أي أن مجال الدالة n هو $[\frac{4}{3}, \infty)$

الدالة d دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة d (المقام) هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

نوجد أصفار المقام

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

أي أن مجال الدالة V هو $\left([\frac{4}{3}, \infty) \cap R\right)/\{2\} \Leftarrow [\frac{4}{3}, \infty)/\{2\}$

الفهرس

تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:

1 مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2 مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام.

3 مجال الدالة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x)\geq 0$.

4 مجال الدالة $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g.

5 مجال الدالة $f(x)=g(x)\pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.

أي أن مجال f = مجال g $\cap$ مجال h.

6 مجال الدالة $f(x)=g(x).h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقة المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.

أي أن مجال f = مجال g $\cap$ مجال h.

7 مجال الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g عدا أصفار المقام $(h(x)\neq 0)$.

أي أن مجال f = (مجال g $\cap$ مجال h)/مجموعة أصفار المقام.

مثال (2)

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x-6}$

b $g(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8-2x}$

c $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$

d $u(x) = \dfrac{4}{\sqrt{-x}}$

a

لنفرض أن $a(x) = 2x^3 - 4x$ ، $b(x) = \sqrt{2x-6}$

فيكون $f(x) = a(x) - b(x)$

الدالة a دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة a هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الدالة b هي دالة جذرية دليلها زوجي ، المجال هو قيم x التي تجعل المجذور صفر أو عدد موجب

$$2x - 6 \geq 0 \longrightarrow 2x \geq 6 \longrightarrow x \geq 3$$

أي أن مجال الدالة b هو $[3, \infty)$

مجال f = مجال a ∩ مجال b =

$$R \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

الفهرس

مثال (2)

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x-6}$

b $g(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8-2x}$

c $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$

d $u(x) = \dfrac{4}{\sqrt{-x}}$

b

لنفرض أن $a(x) = 2x^2 + x$ ، $b(x) = \sqrt{8-2x}$

فيكون $g(x) = a(x) \times b(x)$

الدالة a دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة a هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الدالة b هي دالة جذرية دليلها زوجي ، المجال هو قيم x التي تجعل المجذور صفر أو عدد موجب

$$8 - 2x \geq 0 \longrightarrow -2x \geq -8 \longrightarrow x \leq 4$$

أي أن مجال الدالة b هو $(-\infty, 4]$

مجال g = مجال a ∩ مجال b =

$$R \cap (-\infty, 4] = (-\infty, 4]$$

الفهرس

مثال (2)

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f(x)=2x^3-4x-\sqrt{2x-6}$

b $g(x)=(2x^2+x)\sqrt{8-2x}$

c $h(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$

d $u(x)=\dfrac{4}{\sqrt{-x}}$

C

لنفرض أن

$$b(x)=\sqrt[3]{1+x} \qquad a(x)=x^2-1$$

فيكون

$$h(x)=\frac{b(x)}{a(x)}$$

الدالة a دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة a هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الدالة b هي دالة جذرية دليلها فردي ، مجال الدالة b هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

نوجد أصفار المقام

$$x^2-1=0 \qquad (x-1)(x+1)=0$$

إما $x-1=0$ ، $x=1$ أو $x+1=0$ ، $x=-1$

مجال h =

$$(R\cap R)-\{\pm1\}=R-\{\pm1\}$$

مثال (2)

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f(x)=2x^3-4x-\sqrt{2x-6}$

b $g(x)=(2x^2+x)\sqrt{8-2x}$

c $h(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$

d $u(x)=\dfrac{4}{\sqrt{-x}}$

d

لنفرض أن $a(x)=4$ $b(x)=\sqrt{-x}$

فيكون $h(x)=\dfrac{a(x)}{b(x)}$

الدالة a دالة ثابتة ، مجال الدالة a هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الدالة b هي دالة جذرية دليلها زوجي ، المجال هو قيم x التي تجعل المجذور صفر أو عدد موجب

$$-x\geq 0 \Longrightarrow x\leq 0$$

أي أن مجال الدالة b هو $(-\infty,0]$

نوجد أصفار المقام $-x=0\Rightarrow \quad x=0$

مجال h = $\left(R\cap(-\infty,0]\right)-\{0\}=(-\infty,0)$

حاول أن تحل

2 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f_1(x)=\frac{2x+5}{x-4}$

b $f_2(x)=x^3-4x^2-4+\sqrt{x-9}$

c $f_3(x)=\frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

d $f_4(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

a

لنفرض أن $a(x)=2x+5$ $b(x)=x-4$

فيكون $f_1(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$

الدالة f_1 دالة كسرية يكون المجال هو تقاطع مجال البسط مع مجال المقام ما عدا التي تجعل المقام = صفر

الدالة a دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة a هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الدالة b دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة b هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

نوجد أصفار المقام $x=4$ $x-4=0 \Rightarrow$

مجال $f_1 =$ $R-\{4\}$ $= (R\cap R)-\{4\}$

الفهرس

حاول أن تحل 2 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f_1(x)=\frac{2x+5}{x-4}$

b $f_2(x)=x^3-4x^2-4+\sqrt{x-9}$

c $f_3(x)=\frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

d $f_4(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

b

لنفرض أن $a(x)=x^3-4x^2-4$ $b(x)=\sqrt{x-9}$

فيكون $f_2(x)=a(x)+b(x)$

الدالة a دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة a هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الدالة b هي دالة جذرية دليلها زوجي ، المجال هو قيم x التي تجعل المجذور صفر أو عدد موجب

$$x-9\geq 0 \longrightarrow x\geq 9$$

أي أن مجال الدالة b هو $[9,\infty)$

مجال f_2 = مجال a $\cap$ مجال b =

$$R\cap[9,\infty)=[9,\infty)$$

الفهرس

حاول أن تحل

2 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f_1(x)=\frac{2x+5}{x-4}$

b $f_2(x)=x^3-4x^2-4+\sqrt{x-9}$

c $f_3(x)=\frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

d $f_4(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

c

لنفرض أن

$$b(x)=\sqrt{5-4x} \qquad a(x)=x^2+4$$

فيكون

$$f_3(x)=\frac{b(x)}{a(x)}$$

الدالة a دالة كثيرة الحدود ، مجال الدالة a هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

الدالة b هي دالة جذرية دليلها زوجي ، المجال هو قيم x التي تجعل المجذور صفر أو عدد موجب

$$5-4x\geq 0 \Rightarrow -4x\geq -5 \Rightarrow x\leq \frac{5}{4}$$

أي أن مجال الدالة b هو $(-\infty,\frac{5}{4}]$

نوجد أصفار المقام

لا توجد قيم تجعل المقام = 0

$$x^2+4=0\Rightarrow x^2=-4$$

مجال f_3 = $R\cap(-\infty,\frac{5}{4}]=(-\infty,\frac{5}{4}]=$

13

$$h(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$$

لنفرض أن

$a(x)=\sqrt{x-2}$ $\quad b(x)=5$ $\quad c(x)=\sqrt{2x-1}$

فيكون

$$t(x)=\frac{a(x)}{b(x)+c(x)}$$

1) مجال دالة البسط

لتعيين مجال الدالة a:

$$x-2\geq 0 \Rightarrow \quad x\geq 2$$

مجال دالة البسط a هو

$$[2,\infty)$$

2) مجال دالة المقام

الدالة b دالة ثابتة ، مجال الدالة a هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

لتعيين مجال الدالة c :

$$2x-1\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 1 \Rightarrow x\geq 0.5$$

مجال الدالة c هو

$$[0.5,\infty)$$

مجال دالة المقام هو

$$R\bigcap[0.5,\infty)=[0.5,\infty)$$

3) أصفار دالة المقام

لا يوجد أصفار للمقام

$$5+\sqrt{2x-1}=0 \Rightarrow \sqrt{2x-1}=-5$$

أي أن مجال الدالة h =

(مجال دالة البسط ▯ مجال دالة المقام) / مجموعة اصفار دالة المقام

$$[2,\infty)\bigcap[0.5,\infty)= \ [2,\infty)$$