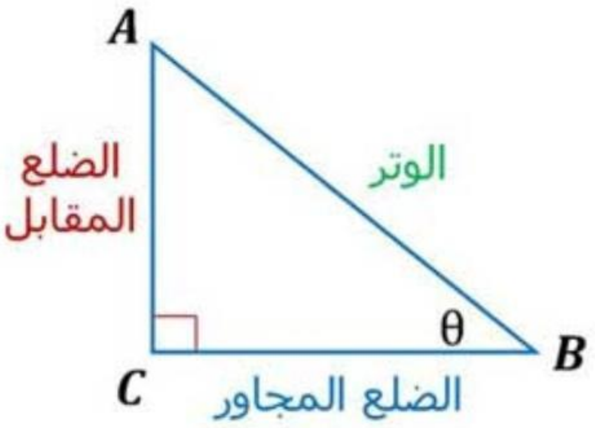
المقدمة

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\text{con } \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

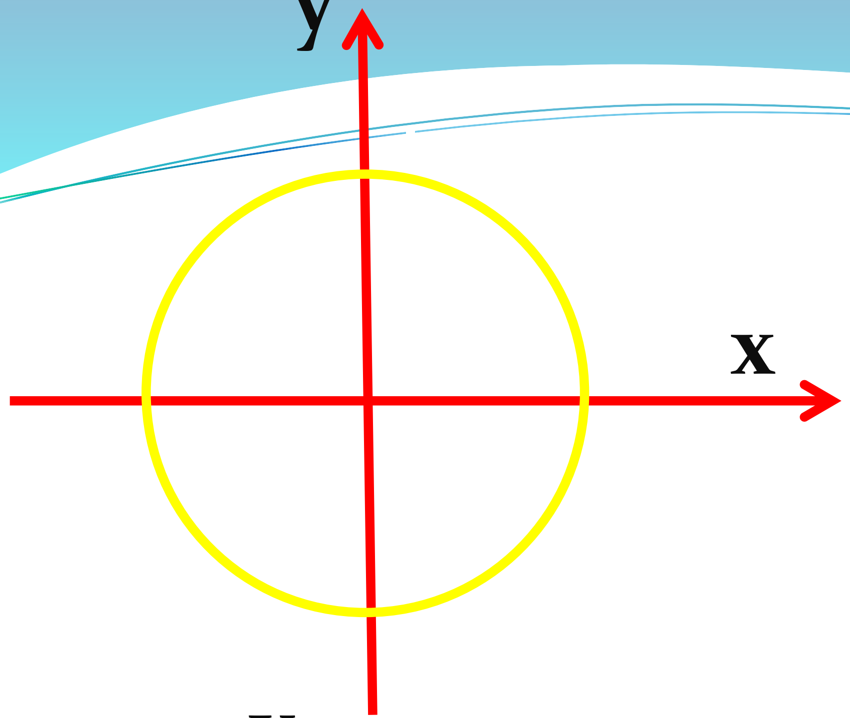
$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$



ملاحظة:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ ، } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ ، } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

التدريس



دائرة الوحدة :

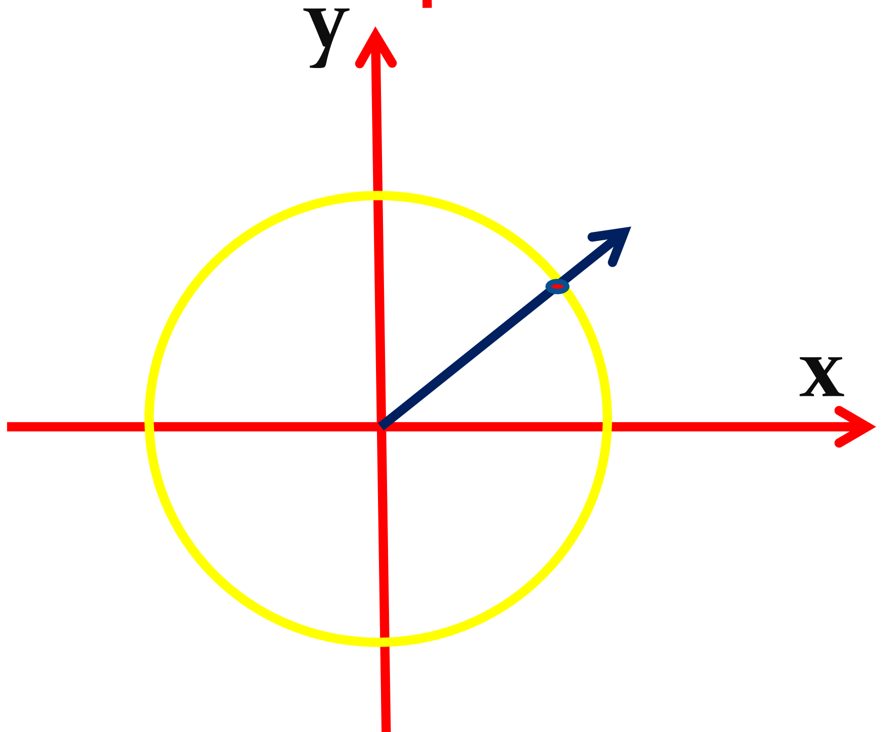
هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها
واحد وحدة

النقطة المثلثية :

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة

مثال :

في الشكل المقابل النقطة M نقطة مثلثية



ا / عبد السلام شتا

ملاحظه

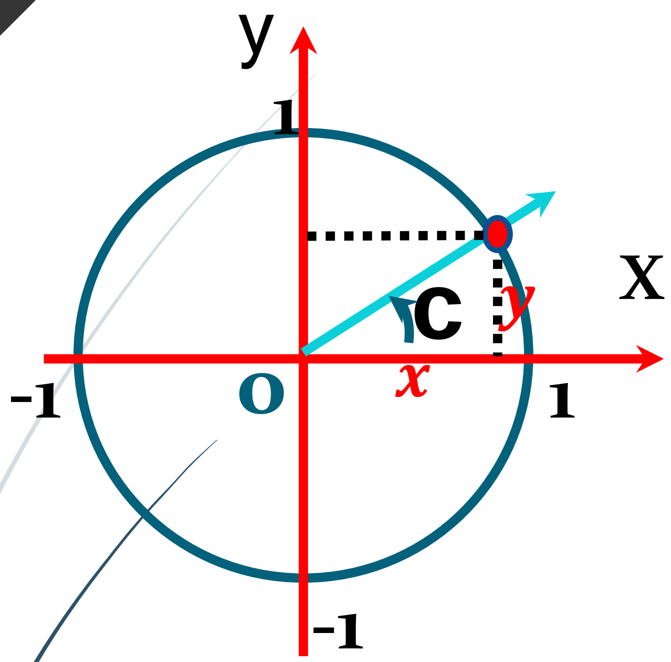
تكون النقطة $M(x,y)$ نقطه مثلثيه اذا وفقط اذا كان
$x^2 + y^2 = 1$

وسوف نستخدم الرمز θ لنرمز لقياس زاويه موجهه في وضع قياسي

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض ان زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ
وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة
M(x , y)



وتعرف من دراستك السابقة ان

$\cos \theta$ = المجاور الضلع / الوتر & sin θ = الضلع المقابل / الوتر

طول الوتر = نق = ١

$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$

وكذلك $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$

$\sec\theta = \frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$

$\csc\theta = \frac{1}{y}$ $\quad y \neq 0$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\quad x \neq 0$; $\cot\theta = \frac{x}{y}$ $\quad y \neq 0$

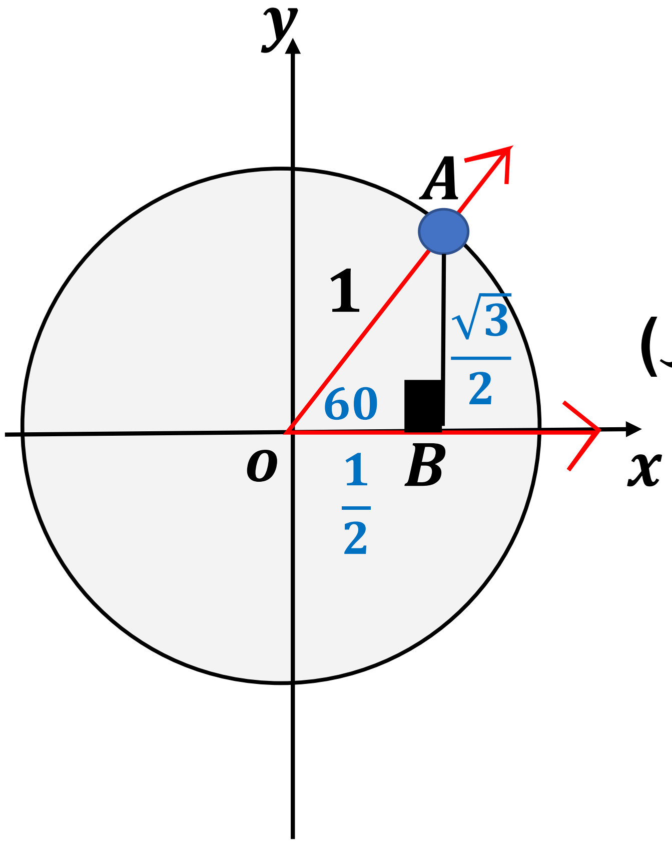
ا / عبد السلام شتا

مثال: باستخدام دائرة الوحدة أوجد $cos60^{\circ}$ ، $sin60^{\circ}$

الحل:

نرسم دائرة الوحدة ، ونرسم الزاوية الموجهة التي قياسها 60° في الوضع القياسي فيكون $OA = 1$

نسقط من A عمودا على المحور السيني وليكن $\overline{AB}$



ΔOBA قائم الزاوية في B

$$m(\widehat{OAB}) = 30^{\circ} \quad \Rightarrow \quad OB = \frac{1}{2}$$

(لأن في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي نصف طول الوتر)

من نظرية فيثاغورث $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$cos60^{\circ} = \frac{1}{2} \qquad sin60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

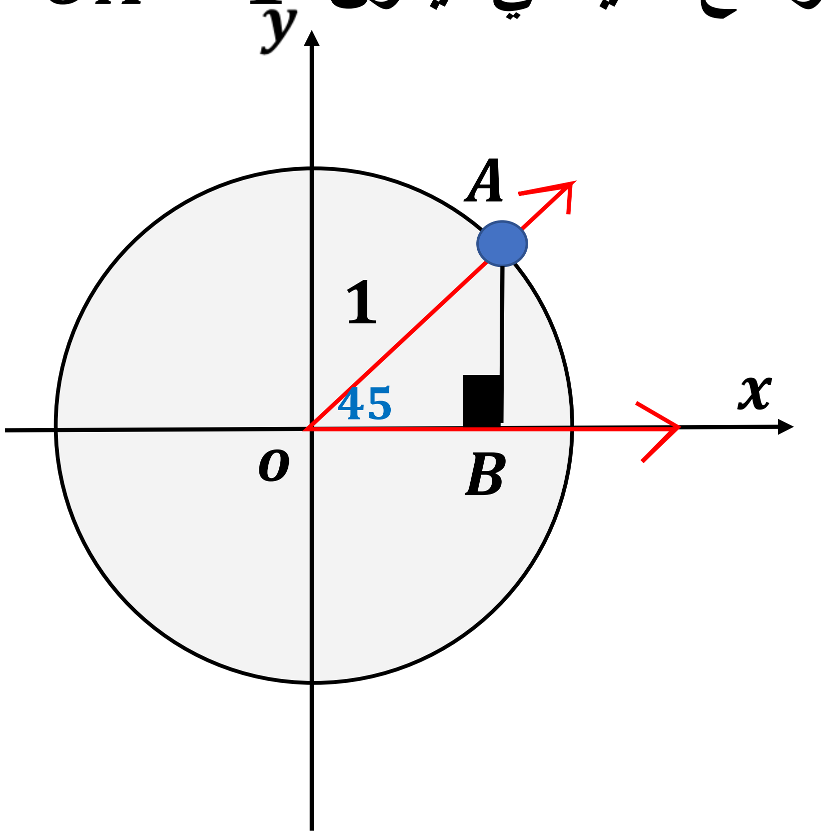
ا / عبد السلام شتا

التطبيق حاول ان تحل ١ ص ٨٩

على دائرة الوحدة ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها 45° ثم أوجد: $cos45^\circ$ ، $sin45^\circ$

الحل

نرسم دائرة الوحدة ، ونرسم الزاوية الموجهة التي قياسها 45° في الوضع القياسي فيكون $OA = 1$



نسقط من A عمودا على المحور السيني وليكن $\overline{AB}$

ΔOBA قائم الزاوية في B ومتطابق الضلعين

طول الضلع القائم $\sqrt{2}$ = طول الوتر

$$AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$COS45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sin45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ا / عبد السلام شتا

كيفيه استخدام الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية لزاويه معلومة القياس

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

ظل التمام	القاطع	قاطع التمام	الظل	جيب التمام	الجيب
$\cot 30° = \sqrt{3}$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\cot 45° = 1$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\tan 45° = 1$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ا / عبد السلام شتا

أكمل الجدول أدناه

القياس بالدرجات	45°	135°	-180°	-150°
القياس بالراديان	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$	$\frac{-5\pi}{6}$

$$45^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$135^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

$$-180^\circ \times \frac{\pi}{180} = -\pi$$

$$-150^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{-5\pi}{6}$$

ا / عبد السلام شتا

الدوال الدائرية (المثلثية)

تعريف

إذا كانت $(x ، y)$ هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث $0 \le \theta < 2\pi$ فإن:

١) دالة جيب: $f(\theta) = \sin\theta$ حيث $\sin\theta = y$

٢) دالة جيب التمام: $f(\theta) = \cos\theta$ حيث $\cos\theta = x$

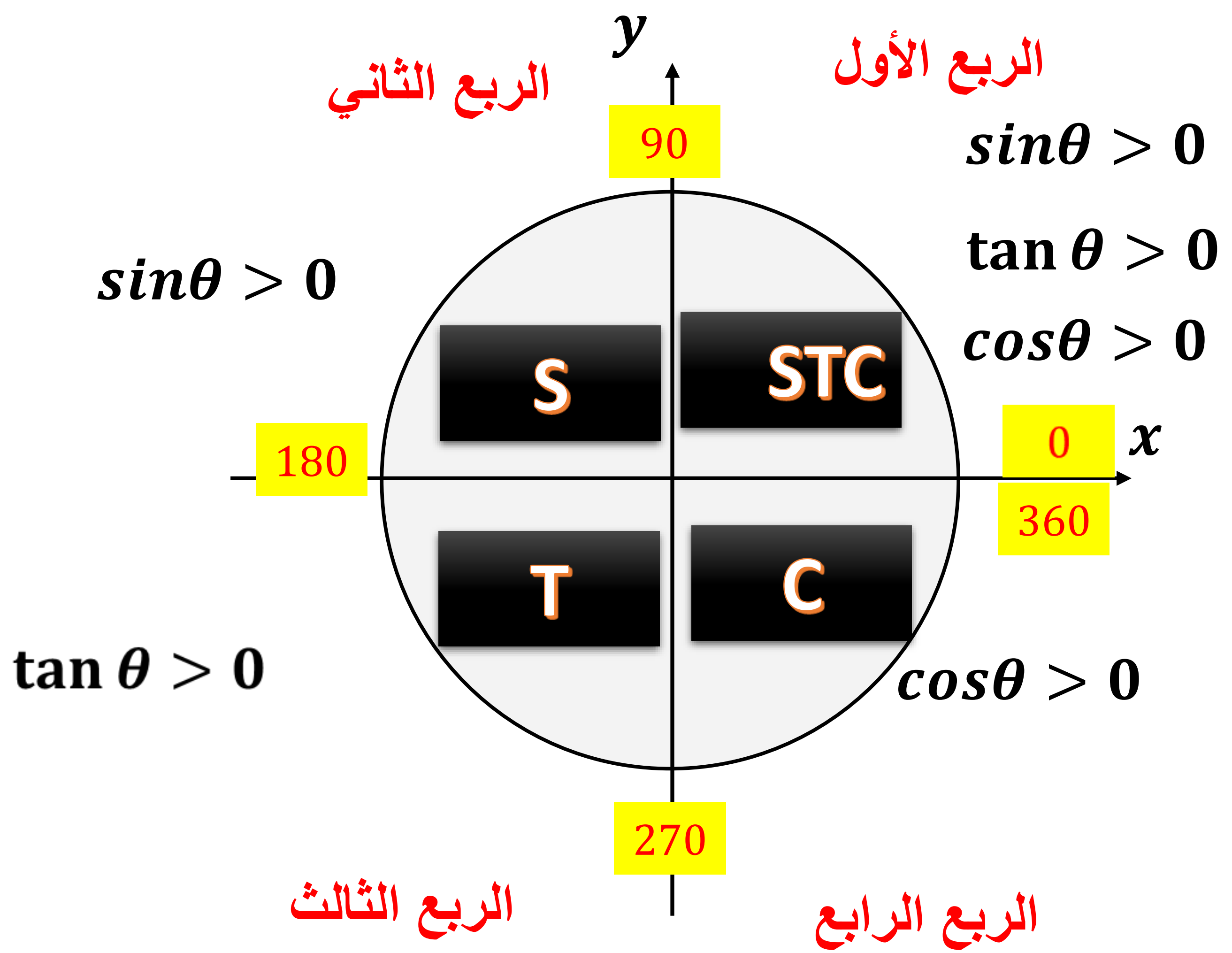
٣) دالة الظل: $f(\theta) = \tan\theta$ حيث $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ ، $x \ne 0$

٤) دالة القاطع: $f(\theta) = \sec\theta$ حيث $\sec\theta = \dfrac{1}{x}$ ، $x \ne 0$

٥) دالة قاطع التمام: $f(\theta) = \csc\theta$ حيث $\csc\theta = \dfrac{1}{y}$ ، $y \ne 0$

٦) دالة ظل التمام: $f(\theta) = \cot\theta$ حيث $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$ ، $y \ne 0$

ا / عبد السلام شتا



ا / عبد السلام شتا

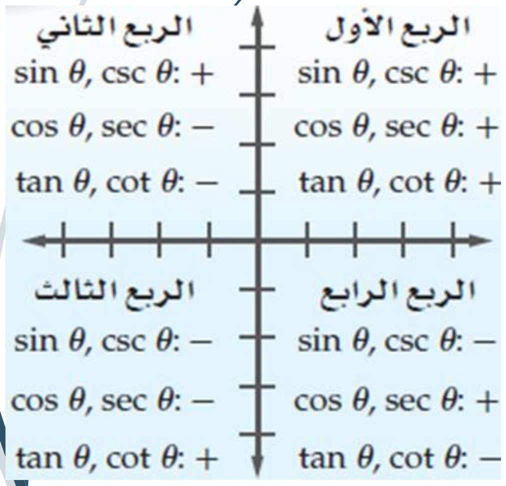
حدد اشاره كل من $\cos\theta$ و $\sin\theta$ فيما يلي

$a)\ \theta = 135$

الحل

$\theta = 135 \qquad \therefore \qquad 90 < \theta < 180$

اى ان θ تقع في الربع الثاني



$\sin\theta > 0$

$\cos\theta < 0$

ا / عبد السلام شتا

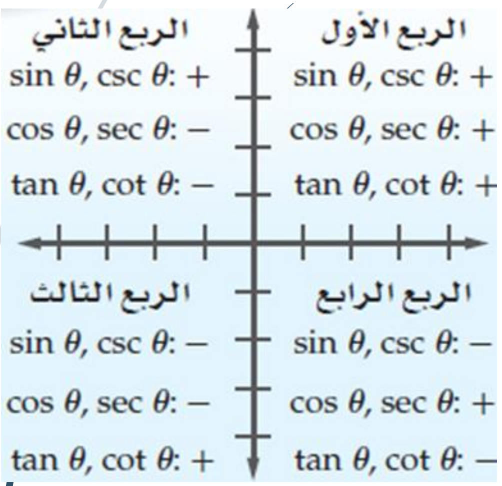
$$b\ )\ \theta = \frac{7\pi}{6}$$

الحل

$$\theta = \frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$$

$$\therefore \quad 180 < \theta < 270$$

اى ان θ تقع في الربع الثالث



$$\sin\theta < 0$$

$$\cos\theta < 0$$

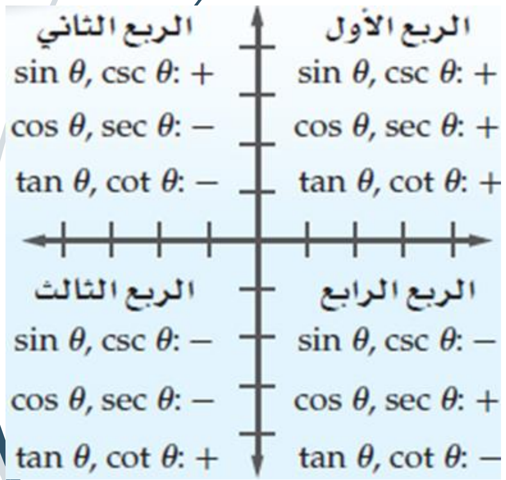
ا / عبد السلام شتا

$C)\ \theta = 305$

الحل

$\theta = 305 \qquad \therefore\ 270 < \theta < 360$

اى ان θ تقع في الربع الرابع



$\sin\theta < 0$

$\cos\theta > 0$

ا / عبد السلام شتا

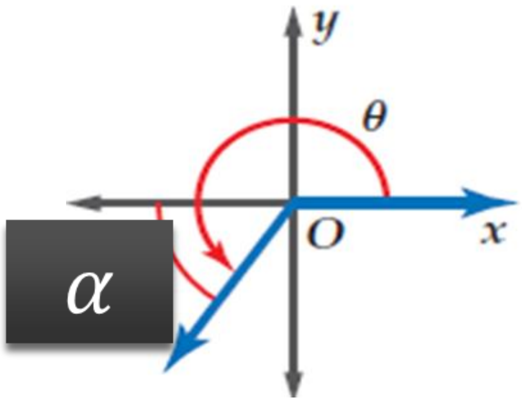
تعريف زاوية الاسناد:

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OA}\text{،}\overrightarrow{OB}\right)$ التي في وضع قياسي

هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن : $0 < \alpha < 90$

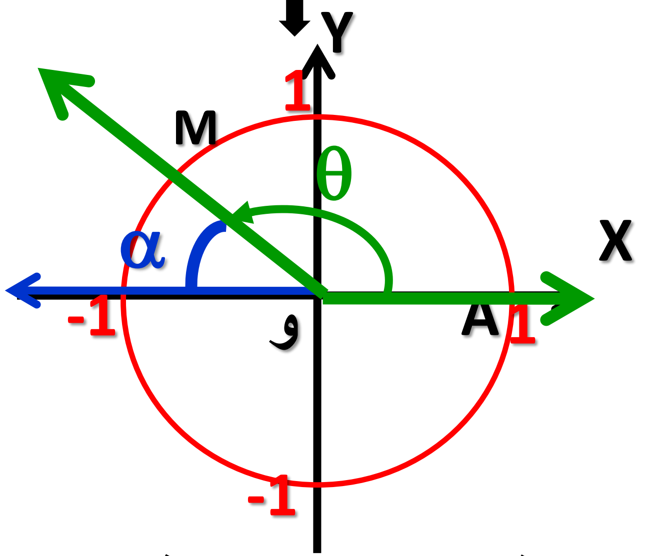
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$



ا / عبد السلام شتا

حالات إيجاد زاوية الإسناد

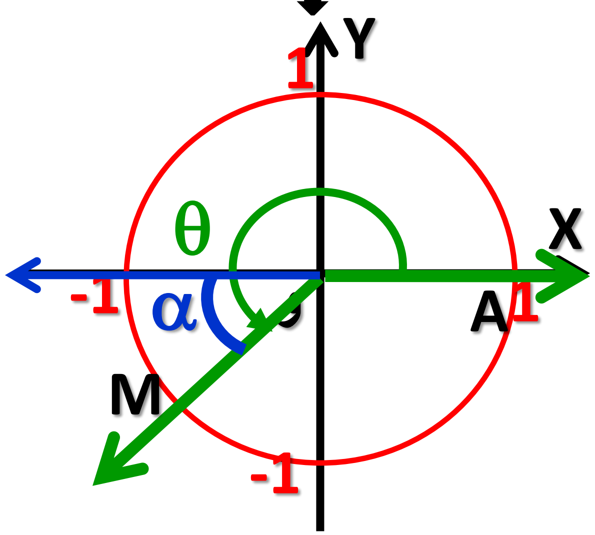
بالنسبة لموقع الزاوية الموجهة في الوضع القياسي ذات القياس الموجب



إذا كانت θ تقع في الربع الثاني فإن

$$\alpha = 180° - \theta$$

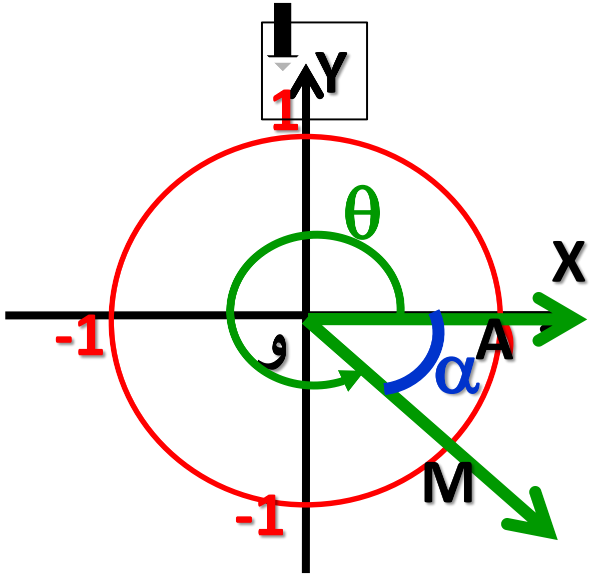
$$\alpha = \pi - \theta$$



إذا كانت θ تقع في الربع الثالث فإن

$$\alpha = \theta - 180°$$

$$\alpha = \theta - \pi$$



إذا كانت θ تقع في الربع الرابع فإن

$$\alpha = 360° - \theta$$

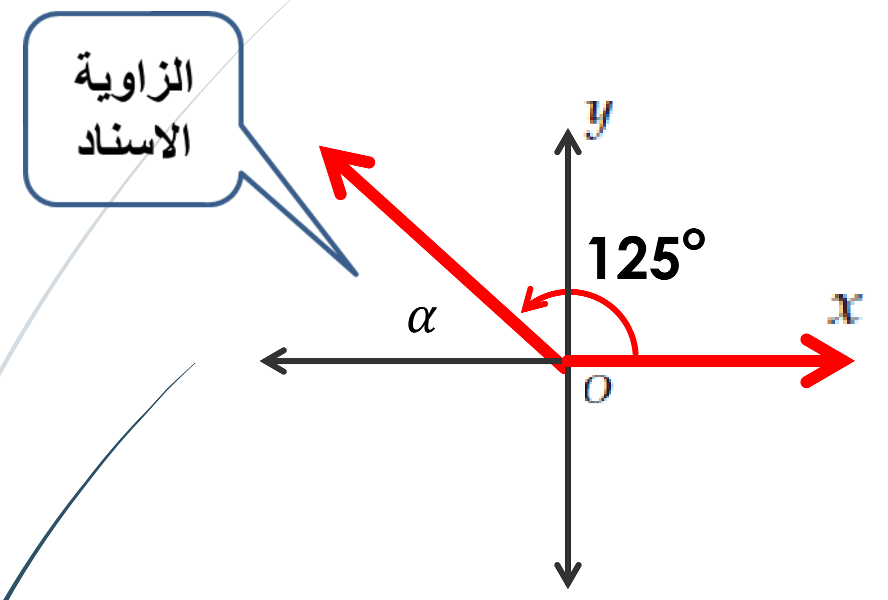
$$\alpha = 2\pi - \theta$$

مثال 3

ارسم كلا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ثم عين زاويه الاسناد وعين قياسها

125 (a

الحل

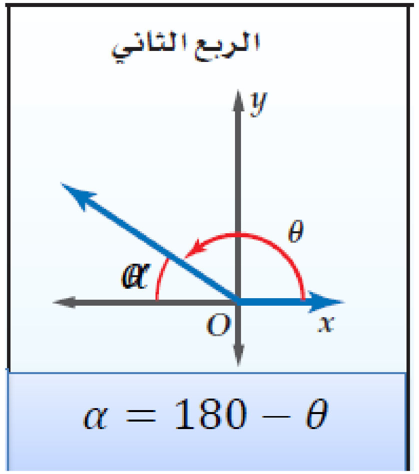


ضلع النهائي يقع في الربع الثاني

$$\alpha = 180^\circ - \theta$$

$$= 180^\circ - 135^\circ$$

$$= 45^\circ$$



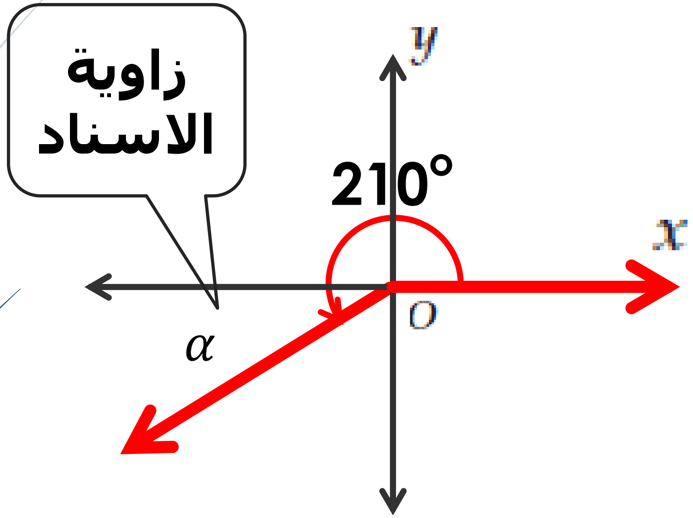
ا / عبد السلام شتا

مثال 3

ارسم كلا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ثم عين زاويه الاسناد وعين قياسها

210 (b

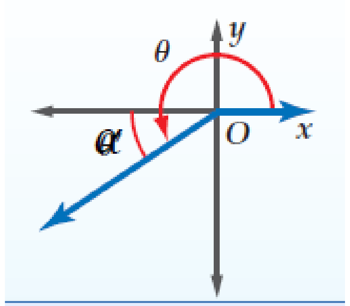
الحل



ضلع النهائى يقع في الربع الثالث

$$\alpha = \theta - 180^\circ$$

$$= 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$$



$\alpha = \theta - 180$

ارسم كلا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ثم عين زاويه الاسناد وعين قياسها

C) $\frac{11\pi}{6}$

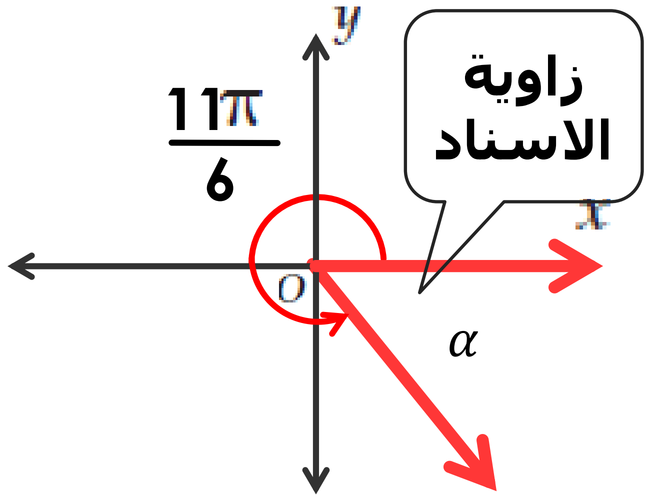
الحل

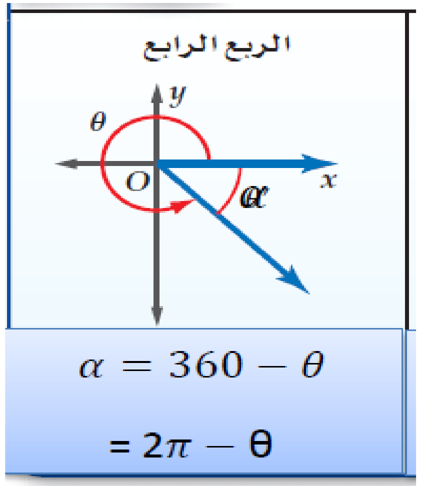
ضلع النهائي يقع في الربع الرابع

$$\alpha = 2\pi - \theta$$

$$= 2\pi - \frac{11\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$



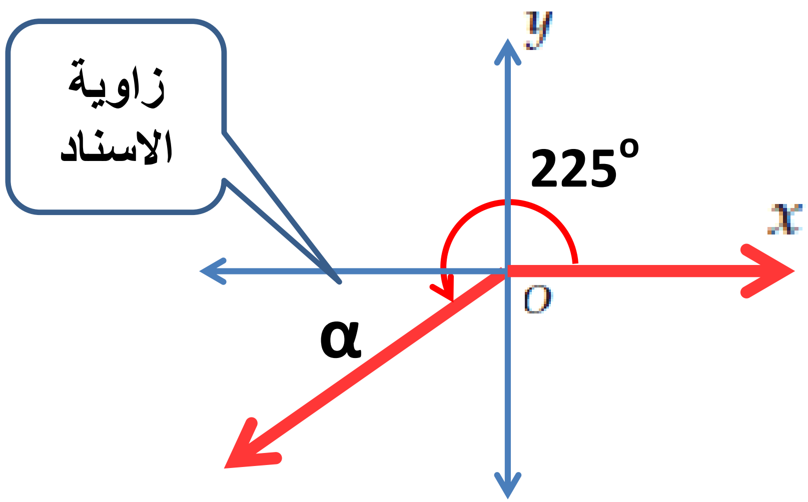


ارسم كلا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ثم عين زاويه الاسناد وعين قياسها

$(C \quad \frac{5\pi}{4}$

الحل

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \bullet \frac{180^{\circ}}{\pi} = 225^{\circ}$$

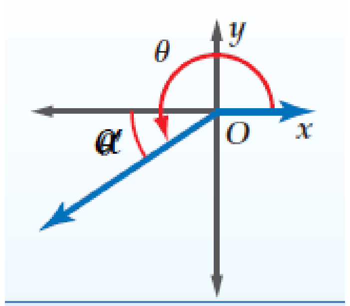


ضلع النهائى يقع في الربع الثالث

$$\alpha = \theta - 180^{\circ}$$

$$= 225^{\circ} - 180^{\circ} = 45^{\circ}$$

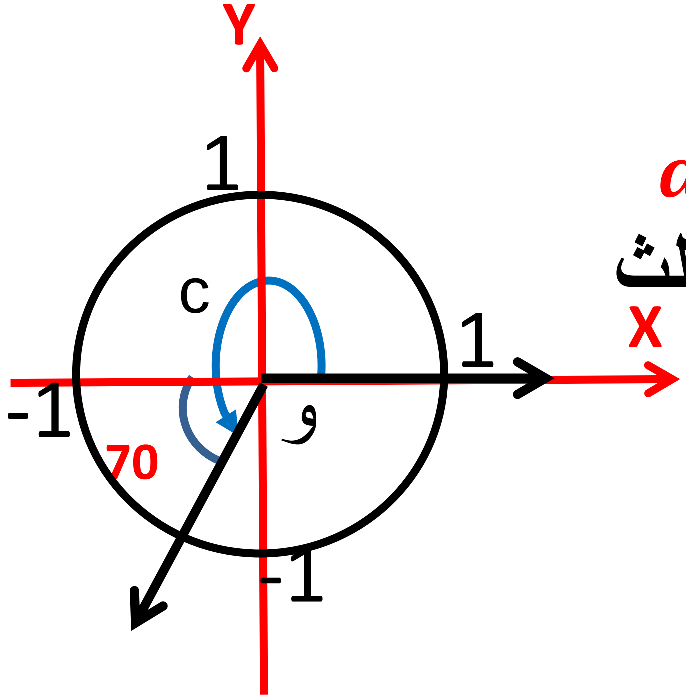
$$45^{\circ} = 45^{\circ} \bullet \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{4}$$



$\alpha = \theta - 180$

مثال2

يبين الشكل المقابل زاوية الإسناد α° للزاوية c° ، أوجد c°



الحل

لاحظ أن قياس زاوية الإسناد: $\alpha = 70°$

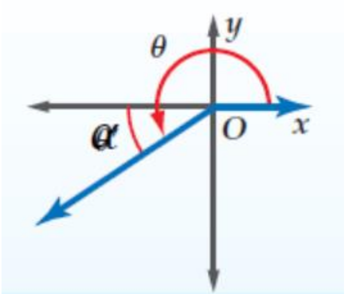
وأن الزاوية الموجهة c تقع في الربع الثالث

$$\alpha = \theta - 180°$$

$$70° = \theta - 180°$$

$$\theta = 70° + 180°$$

$$\theta = 250°$$



$\alpha = \theta - 180$

ا / عبد السلام شتا

التطبيق

- مستخدما المنقلة ، ارسم كلا من الزوايا التالية على دائرة الوحدة ، ثم عين زاوية الإسناد واوجد قياسها

a $315°$

b $\frac{3\pi}{4}$

ا / عبد السلام شتا

بند (٢٠٨) العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

تسمى $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ النسب المثلثية الأساسية

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$\tan\theta \in R$

(١) النسب المثلثية للزاويتين $(\theta, -\theta)$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ ، بشرط أن تكون $\tan\theta$ معرفة

ا / عبد السلام شتا

مثال (1) صفحة 96
أكمل ما يأتي :

(١) اذا كانت $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ فان $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) =$

الحل

$\cos\left(\frac{-3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(٢) اذا كانت $\sin 36 \cong 0.5875$ فان $\sin(-36) \cong$

الحل

$\sin(-36) =$ $-\sin(36) =$ $-0,5875$

(٣) اذا كانت $\tan 45 = 1$ فان $\tan(-45) =$

الحل

$\tan(-45) =$ $-\tan(45)$ $= -1$

ا / عبد السلام شتا

النسب المثلثية للزاويتين θ , $(\pi - \theta)$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\sin(180 - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ ، بشرط أن تكون $\tan\theta$ معرفة

$\tan(180 - \theta) = -\tan\theta$
بشرط ان $\tan\theta$ معرفة

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin\theta, \csc\theta: +$	$\sin\theta, \csc\theta: +$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: -$	$\tan\theta, \cot\theta: +$
الربع الثالث	**الربع الرابع**
$\sin\theta, \csc\theta: -$	$\sin\theta, \csc\theta: -$
$\cos\theta, \sec\theta: -$	$\cos\theta, \sec\theta: +$
$\tan\theta, \cot\theta: +$	$\tan\theta, \cot\theta: -$

مثال (2) صفحة 97 بدون استخدام الالة الحاسبة

(١) اذا كان $\cos 60 = \frac{1}{2}$ أوجد $\cos 120$

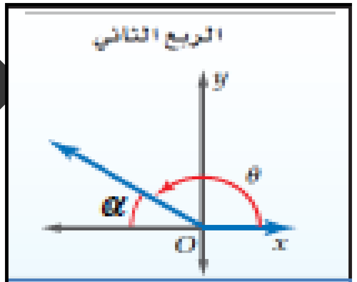
الحل

$\cos 120 = \cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

ا / عبد السلام شتا

(٢) اذا كان $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أوجد $\sin\frac{3\pi}{4}$

الحل



$\alpha = \pi - \theta$

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(٣) اذا كان $\tan\theta = \frac{3}{5}$ أوجد $\tan(\pi - \theta)$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta) = \frac{-3}{5}$$

ا / عبد السلام شتا

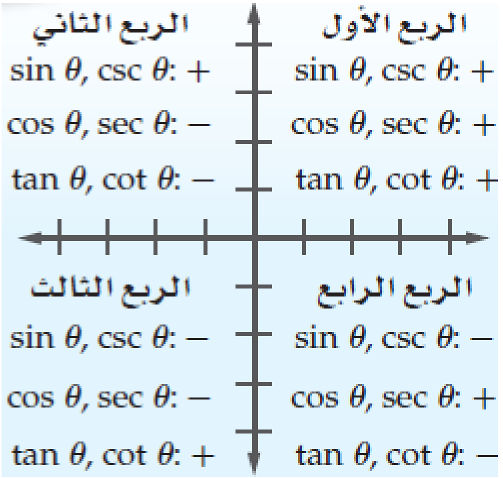
النسب المثلثية للزاويتين $(\theta + \pi)$, θ

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$

$$\sin(180 + \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\cos(180 + \theta) = -\cos\theta$$



$$\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$$

$$\tan(180 + \theta) = \tan\theta$$

بشرط ان $\tan\theta$ معرفة

ا / عبد السلام شتا

مثال٣:

بدون استخدام الالة الحاسبة إذا كان

1) $sin30 = \frac{1}{2}$ اوجد $sin210$

الحل

$$sin210 = sin(180 + 30) = -sin30 = -\frac{1}{2}$$

(٢) اذا كان $tan\frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$ أوجد $tan\frac{9\pi}{8}$

الحل

$$tan(\frac{9\pi}{8}) = tan(\pi + \frac{\pi}{8})$$

$$= tan(\frac{\pi}{8})$$

$$= -1 + \sqrt{2}$$

ا / عبد السلام شتا

مثال٤: بدون استخدام الالة الحاسبة أوجد:

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة					
الجيب	جيب التمام	الظل	قاطع التمام	القاطع	ظل التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$1)\sin 150 = \sin(180-30)$$
$$= \sin 30 = \frac{1}{2}$$

$$2)\cos 240 = \cos(180+60)$$
$$= -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

$$3)\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \tan\left(\frac{2\times180}{3}\right) = \tan 120$$
$$= \tan(180-60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$$

ا / عبد السلام شتا

التطبيق :

إذا كان $\sin 56 \approx 0.829$ بدون استخدام الالة الحاسبة أوجد $\sin 236$

$$\sin 236 = \sin(180 + 56)$$

$$= -\sin 56$$

$$\approx -0.829$$

ا / عبد السلام شتا

العلاقات بين الدوال المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية:

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

حيث المقام $\neq 0$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

متطابقة فيثاغورث:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \mp\sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin\theta = \mp\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

ا / عبد السلام شتا

مثال ١: بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $\cos\theta = 0.4$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

١) أوجد $\sin\theta$

٢) استنتج $\tan\theta$

الحل:

لأن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin\theta \approx 0.917$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{0.917}{0.4} = 2.29$$

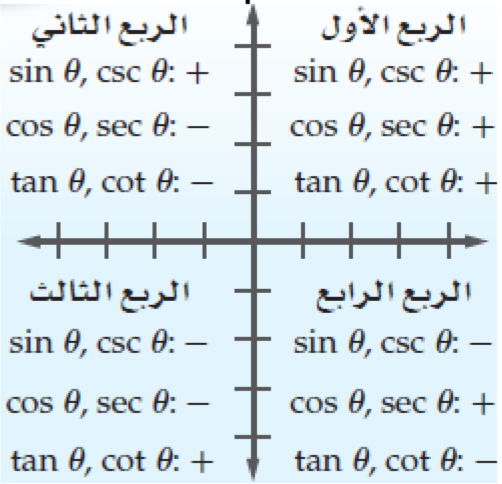
باستخدام متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin\theta = \mp\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\sin\theta = \mp\sqrt{1-(0.4)^2}$$

$$\sin\theta \approx \mp 0.917$$



ا / عبد السلام شتا

العلاقة بين $\tan\theta$, $\sec\theta$

من متطابقة فيثاغورث نحصل علي

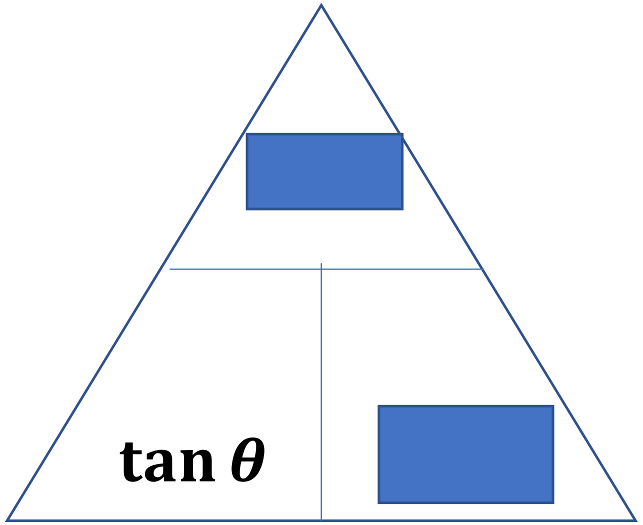
$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$1 = \sec^2 - \tan^2$$

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$\sec\theta = \mp\sqrt{1 + \tan^2\theta}$$

$$\tan\theta = \mp\sqrt{\sec^2\theta - 1}$$



$$\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\tan\theta}$$

$$\sin\theta = \sin\theta . \tan\theta$$

ا / عبد السلام شتا

مثال ٢: بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $tan\theta = 2\sqrt{2}$ ، $cos\theta < 0$

فأوجد: $sin\theta$ ، $cos\theta$

الحل:

$$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$$

$$sec\theta = \mp\sqrt{1 + \tan^2\theta}$$

$$sec\theta = \mp\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$sec\theta = \mp 3$$

$$cos\theta = \mp\frac{1}{3}$$

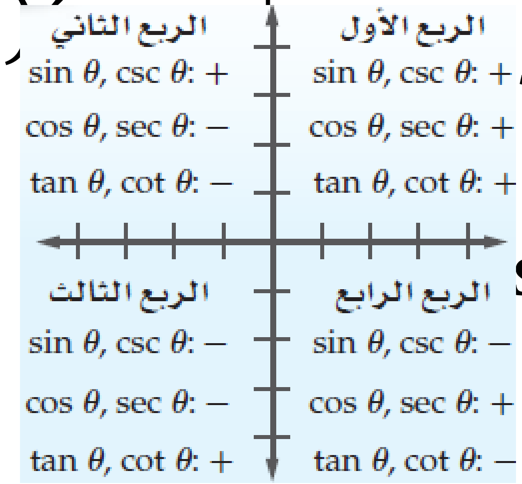
$$\because \cos\theta < 0$$

$$cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$$

$$sin\theta = tan\theta . cos\theta$$

$$sin\theta = 2\sqrt{2} \times -\frac{1}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



ا / عبد السلام شتا

مثال٣: بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $tan\theta = \frac{12}{5}$ ، $sin\theta > 0$

فأوجد: $sin\theta$ ، $cos\theta$

الحل:

$$\because tan\theta > 0 \text{ ، } sin\theta > 0$$

$$\therefore cos\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad cos\theta = \frac{5}{13}$$

$$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$$

$$sin\theta = tan\theta . cos\theta$$

$$sin\theta = \frac{12}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{12}{13}$$

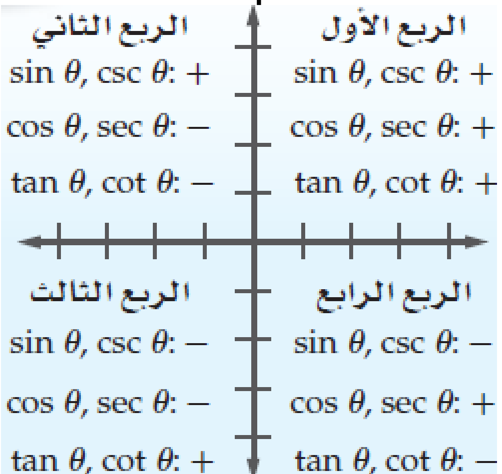
$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$sec\theta = \mp\sqrt{1 + \tan^2\theta}$$

$$\sec\theta = \mp\sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}$$

$$sec\theta = \mp\frac{13}{5}$$

$$cos\theta = \mp\frac{5}{13}$$



العلاقة بين $\csc\theta$ ، $\cot\theta$

من متطابقة فيثاغورث نحصل علي

$$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

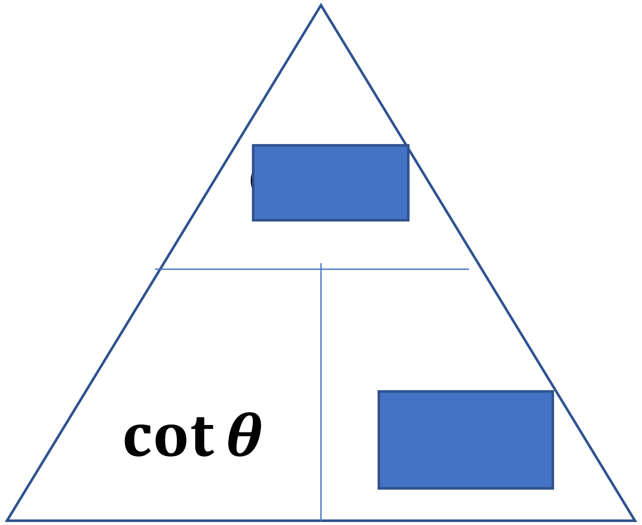
$$1 = \csc^2 - \cot^2$$

$$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$$

$$\csc\theta = \mp\sqrt{1 + \cot^2\theta}$$

$$\cot\theta = \mp\sqrt{\csc^2\theta - 1}$$

$$\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\cot\theta}$$



$$\cos\theta = \cot\theta . \sin\theta$$

ا / عبد السلام شتا

حاول أن تحل٤: بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $cot\theta = \frac{5}{8}$ ، $cos\theta > 0$

فأوجد: $sin\theta$

الحل:

$$\because \cot\theta > 0 \text{ ، } cos\theta > 0$$

$$\therefore sin\theta > 0$$

$$sin\theta = \frac{\sqrt{89}}{8}$$

$$csc^2\theta = 1 + cot^2\theta$$

$$\csc\theta = \mp\sqrt{1 + \cot^2\theta}$$

$$csc\theta = \mp\sqrt{1 + \left(\frac{5}{8}\right)^2}$$

$$csc\theta = \mp\frac{\sqrt{89}}{8}$$

$$sin\theta = \mp\frac{\sqrt{89}}{8}$$