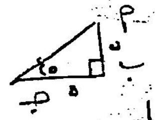
الوحدة الثانية

حساب المثلثات

ـــــــ((ملخص لأهم قوانين الوحدة الثانيـــة))ـــــــ

- العلاقــة $\frac{هـ^د}{\pi} = \frac{س^\circ}{١٨٠}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
- في المثلث القائم الزاوية جيب الزاوية = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جا أو sin
- جيب تمام الزاوية = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$ ويرمز له جتا أو cos
- قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$ حيث جتا أ $\neq$ ٠ ، قتا أ = $\frac{١}{\text{جا أ}}$ جا أ $\neq$ ٠.
- ظل الزاويـــة = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$ ويرمز لــه ظا أو tan
- ظتا أ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الضلع المقابل}}$.
- طول القوس ل = هـ^د × نــق
- مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ جـ × جا أ
- مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نــق = $\frac{١}{٢}$ هـ^د نق^٢.
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^د ـ جا هـ^د).
- زاوية الارتفاع : اذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي.
- زاوية الانخفاض : اذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي.

ص ٨١



ظا٤٥ = $\frac{\text{ب٥}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{٥}{\text{أجـ}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

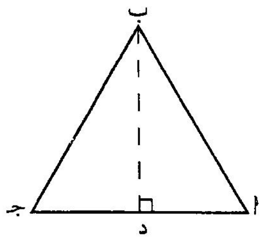
∴ الوتر = ٥√٢ سم

حاول أن تحل

١ Ⓐ أب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.

Ⓑ الحساب الذهني: إذا كان ظا جـ = ١ فكيف توجد ى (جـ^) دون استخدام الآلة الحاسبة؟

المثلث ثلاثيني ستيني 30° – 60° triangle



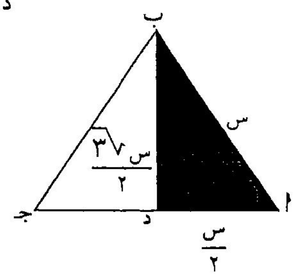
أب جـ مثلث متطابق الأضلاع.

ب د ⊥ أجـ.

لما كان المثلث أب جـ متطابق الأضلاع، إذًا ب د هي منصف الزاوية أبَ^جـ.

ومنه ى(أب^د) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°، ى(أ^) = ٦٠°

يسمى هذا المثلث: مثلث ثلاثيني ستيني (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).



إذا كان طول الضلع أجـ يساوي س فإن أد = $\frac{س}{٢}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث أب د نحصل على ب د = $\frac{س\sqrt{٣}}{٢}$.

كذلك ب د هي المنصف العمودي للقطعة أجـ.

في هذا المثلث: جا أ^ = جا٦٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا أ^ = جتا٦٠° = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ = $\frac{\frac{س}{٢}}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

ظا أ^ = ظا٦٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أد}}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{س}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$

جا٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا٦٠° = $\sqrt{٣}$

كذلك جا ب^ = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ = $\frac{\frac{س}{٢}}{س}$ = $\frac{١}{٢}$

جتا ب^ = جتا٣٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}}$ = $\frac{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}{س}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ب^ = ظا٣٠° = $\frac{\frac{س}{٢}}{\frac{س\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

لاحظ أن جا٦٠° = جتا٣٠°

جتا٦٠° = جا٣٠°

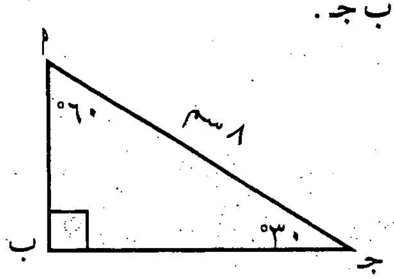
باستخدام الحاسبة يمكنك إيجاد كل من الجيب، جيب التمام والظل لكل زاوية ربعية. والجدول التالي يبيّن النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية.

الزاوية هـ		جاهـ	جتاهـ	ظاهـ
القياس الستيني	القياس الدائري			
°٠	٠ د	٠	١	٠
°٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
°٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١
°٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
°٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرّف
°١٨٠	π	٠	١-	٠
°٢٧٠	$\frac{٣\pi}{٢}$	١-	٠	غير معرّف
°٣٦٠	٢π	٠	١	٠

هل تعلم؟
وضعت جداول النسب المثلثية منذ أكثر من ٢٠٠٠ عام لتستخدم في علم الفلك.

مثال (٢)

أب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$.



الحل:

في Δأب جـ، جاجـ = جا°٣٠ = $\frac{أب}{أجـ}$

$\frac{١}{٢} = \frac{أب}{٨}$

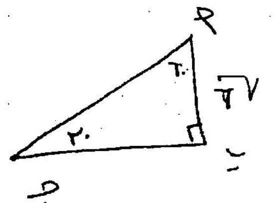
أب = ٤

جتاجـ = جتا(°٣٠) = $\frac{ب جـ}{أجـ}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{ب جـ}{٨}$

ب جـ = $٤\sqrt{٣}$

طول الضلع $\overline{أب}$ = ٤ سم وطول الضلع $\overline{ب جـ}$ = $٤\sqrt{٣} \simeq ٦,٩$ سم.



جا٦٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{أجـ} = \frac{١}{٢}$

$\boxed{أجـ = ٢\sqrt{٦}}$

ظا٣٠ = $\frac{\sqrt{٦}}{بجـ} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\boxed{بجـ = ٢\sqrt{٣}}$

حاول أن تحل

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$ سم، فأوجد طول الضلعين الباقيين.

ص ٨٣

مثال (٣) تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.

الحل:

طول العمود النازل من رأس مثلث متطابق الأضلاع إلى القاعدة = طول الضلع × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (أي ارتفاع المثلث)

= ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ٥٢ سم.

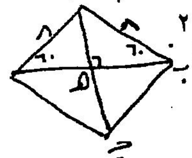
مساحة اللوحة = $\frac{\text{طول القاعدة × الارتفاع}}{٢}$ = $\frac{٦٠ \times ٥٢}{٢}$ = ١٥٦٠ سم^٢.

مساحة اللوحة تساوي حوالى ١٥٦٠ سم^٢.

جا ٦٠ = $\frac{م د}{٨}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، م د = $\frac{٨ \times \sqrt{٣}}{٢}$ = ٤$\sqrt{٣}$

ب د = ٨$\sqrt{٣}$

م = ½ ق١ × ق٢ = ½ × ٨ × ٨$\sqrt{٣}$ = ٣٢$\sqrt{٣}$ سم^٢

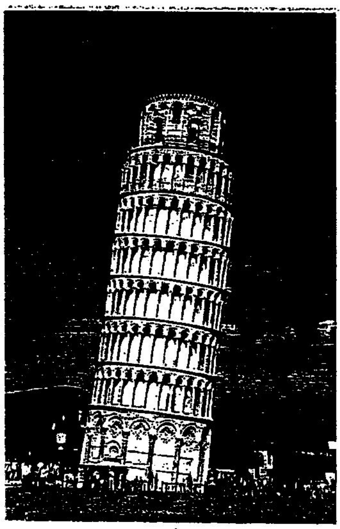


حاول أن تحل ص ٨٣

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.

ص ٨٣

مثال (٤) تطبيقات حياتية



برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. ($\overline{أد}$ في الرسم).

شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، جـ قمة البرج بزاويتين قياساهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب.

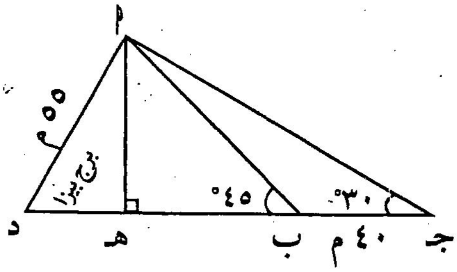
(أ) عبّر عن طول كل من $\overline{هـ ب}$، $\overline{هـ جـ}$ بدلالة طول $\overline{أهـ}$.

(ب) أوجد أهـ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، جـ تساوي ٤٠ مترًا.

(جـ) نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ - ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٤,٥ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس (أدهـ) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

الحل: (أ) في المثلث أهـ ب: ظا ٤٥° = $\frac{هـ أ}{هـ ب}$ = ١ ومنه هـ ب = هـ أ

في المثلث أهـ جـ: ظا ٣٠° = $\frac{هـ أ}{هـ جـ}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه هـ جـ = $\sqrt{٣}$ هـ أ



(ب) هـ جـ = هـ ب + ب جـ

$\sqrt{٣}$ أهـ = هـ أ + ٤٠ أي ($\sqrt{٣}$ - ١) أهـ = ٤٠

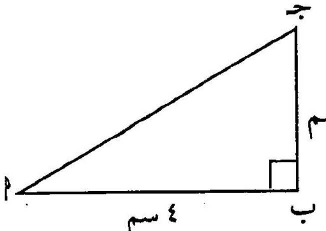
أهـ = $\frac{٤٠}{\sqrt{٣} - ١}$ ≃ ٥٤,٦٤

(جـ) قبل الأشغال: جتا(أدهـ) = $\frac{٤,٥}{٥٥}$ ، ق(أدجـ) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤,٥}{٥٥}\right)$ ≃ ٥٦″ ٢١′ ٨٤°

بعد الأشغال: جتا(أدهـ) = $\frac{٤}{٥٥}$ ، ق(أدجـ) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤}{٥٥}\right)$ ≃ ٤٦″ ٤٩′ ٨٥°

- ٥٨ -

حل المثلث القائم الزاوية



ظا أ = المقابل/المجاور = ٣/٤ = ٠,٧٥

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد ق(أ̂).

Shift | TAN | 0.75 | = | 36.869897

ق(أ̂) ≃ ٣٧°. ق(جـ̂) ≃ ٩٠° - ٣٧° ≃ ٥٣°

حاول أن تحل

ص٨٥

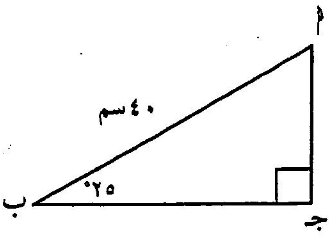
أب² = ١٢² + ١٥² ، أب = ١٩,٢ ، ظا ب = ١٢/١٥ ، ب ≃ ٣٩° ، ق(أ̂) = ٩٠° - ٣٩° = ٥١°

(١) حل المثلث أب جـ القائم الزاوية في جـ̂ حيث: ب جـ = ١٥ سم، أجـ = ١٢ سم

مثال (٢)

حلّ المثلث أب جـ القائم في (جـ̂) إذا علم أن: أب = ٤٠ سم، ق(ب̂) = ٢٥°

الحل:



ق(أ̂) = ٩٠° - ٢٥° = ٦٥°

جتا(ب̂) = ب جـ/أب ، جتا (٢٥°) = ب جـ/٤٠

ب جـ = ٤٠ × جتا(٢٥°) ≃ ٣٦,٢٥ سم

جاب = أجـ/أب ، جا (٢٥°) = أجـ/٤٠

أجـ = ٤٠ جا (٢٥°) ≃ ١٧ سم

ق(أ̂) = ٩٠° - ٧٥° = ١٥°

ظا ٧٥ = ٢٠/ب جـ ، ب جـ = ٥,٤

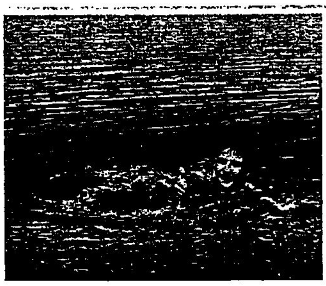
جا ٧٥ = ٢٠/أب ، أب = ٢٠,٧

حاول أن تحل

ص٨٥

(٢) حل المثلث أب جـ القائم في جـ حيث: أجـ = ٢٠ سم، ق(ب̂) = ٧٥°

مثال (٣)

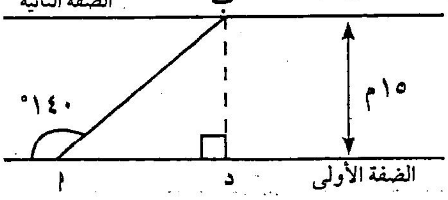


حاول أحد السباحين عبور النهر انطلاقًا من النقطة أ الموضحة بالشكل المرسوم جرفه التيار ووصل إلى النقطة ب.

ما المسافة التي قطعها السباح؟

الحل: ليكن ب د البعد العمودي بيّن الضفتين

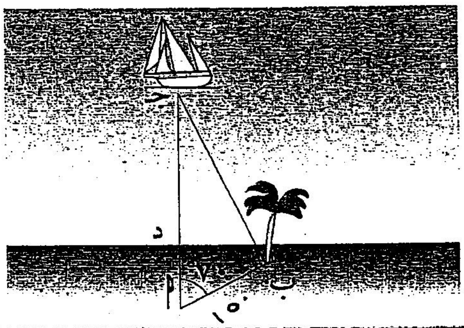
في المثلث أب د، ق(دأ̂ب) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠° قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠°.



جا(أ) = ب د/أب ، جا(٤٠°) = ١٥/أب بالتعويض

ص ٨٦

أب = $\frac{١٥}{\text{جا}(٤٠°)}$ ≃ ٢٣,٣ أي أن السباح قطع حوالى ٢٣,٣ مترًا.



حاول أن تحل

③ في الشكل المقابل إذا كان، أد = ١٠٠ متر، أب = ١٥٠ متر.

أوجد:

(أ) البعد بين الزورق والشجرة (ب) البعد بين الزورق والشاطيء

ظا ٧٠ = ب جـ / ١٥٠ ب جـ ≃ ٤١٢ متر

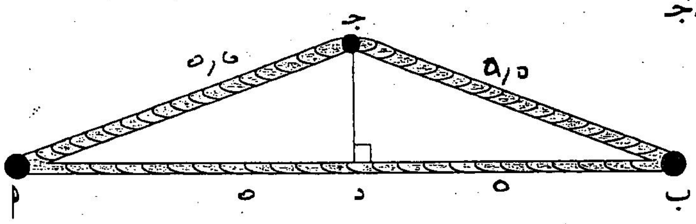
جتا ٧٠ = ١٥٠ / أ جـ أ جـ = ٤٣٨,٥ متر

البعد بين الزورق والشاطئ = ٤٣٨,٥ - ١٠٠ = ٣٣٨,٥ م

مثال (٤)

حبل طوله ١٠ أمتار مثبت في مسمارين عند النقطتين أ، ب. حبل آخر طوله ١١ مترًا مثبت في نفس النقطتين، شُدّ من وسطه (النقطة جـ) إلى أعلى.

Ⓐ أوجد ق(د$\hat{أ}$جـ) Ⓑ أوجد طول $\overline{دجـ}$



الحل:

أد = $\frac{أب}{٢}$ = ٥ أمتار.

أد = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ أمتار.

جتاأ = $\frac{أد}{أجـ}$ = $\frac{٥}{٥,٥}$ ≃ ٠,٩١

∴ ق($\hat{أ}$) ≃ جتا$^{-١}$ (٠,٩١)

ق(د$\hat{أ}$جـ) ≃ ٤١″ ٢٩′ ٢٤° باستخدام الحاسبة

Ⓑ باستخدام نظرية فيثاغورث (جـ د)^٢ + (أد)^٢ = (جـأ)^٢

أي (جـ د)^٢ = (جـأ)^٢ − (أد)^٢

(جـ د)^٢ = ٥,٥^٢ − ٥^٢ = ٥,٢٥

∴ جـ د = $\sqrt{٥,٢٥}$ ≃ ٢,٣

طول القطعة $\overline{جـ د}$ يساوي حوالي ٢,٣ متر.

حاول أن تحل ص ٨٦

④ في المثال السابق أوجد ($\hat{أ}$) إذا كان طول الحبل من أ إلى ب والمار بالنقطة جـ يساوي ١٢ مترًا.

جا أ = ٥/٦ ق(أ) = ٥٦,٤٤ ٣٣

- ٦٠ -

زوايا الارتفاع والانخفاض

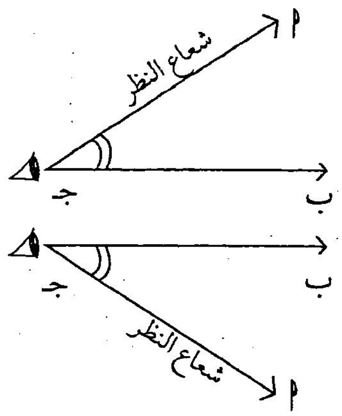
ص ٨٧

Angles of Elevation and Depression

سوف تتعلم

- زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
- استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية

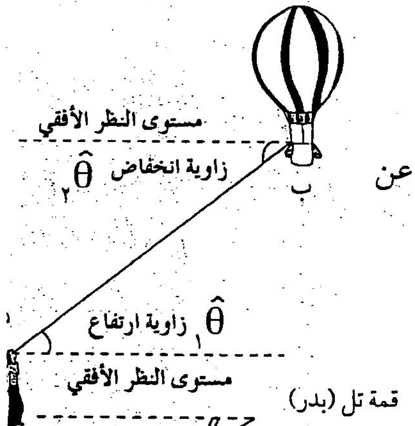
دعنا نفكر ونتناقش



١ - إذا رصد شخص (جـ) نقطة أ أعلى من مستوى نظره الأفقيّ $\overleftarrow{جـب}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{جـأ}$ ، $\overleftarrow{جـب}$ تسمى **زاوية ارتفاع** أ عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

٢ - وإذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي $\overleftarrow{جـب}$ فإن الزاوية التي يحددها $\overleftarrow{جـد}$ ، $\overleftarrow{جـب}$ تسمّى **زاوية انخفاض** د عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

ملاحظة:



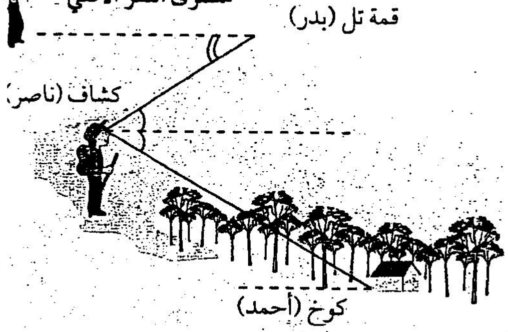
إذا كان أ شخصًا موجودًا على سطح الأرض، وكان ب شخصًا موجودًا في منطاد مرتفع عن سطح الأرض، ونظر كلّ منهما إلى الآخر فإنّ:

$\hat{\theta}_1$ هي زاوية ارتفاع ب عن المستوى الأفقيّ لنظر (أ).

$\hat{\theta}_2$ هي زاوية انخفاض (أ) عن المستوى الأفقيّ لنظر (ب)

ونلاحظ في هذه الحالة أنّ:

زاوية الارتفاع ($\hat{\theta}_1$) = زاوية الانخفاض ($\hat{\theta}_2$).



٣ - يقف بدر عند قمة التل ويقف ناصر عند الكشاف ويقف أحمد عند الكوخ.

صف كلّ زاوية في الشكل عندما ينظر:

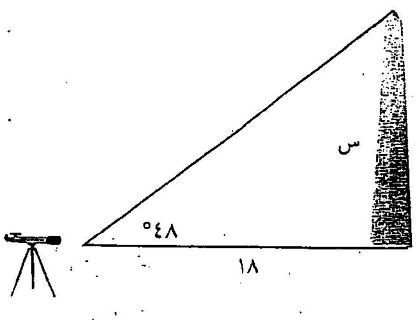
(أ) بدر إلى ناصر

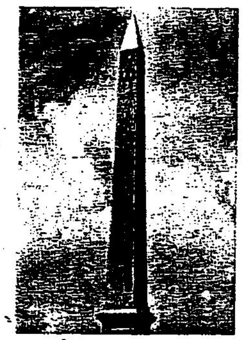
(ب) ناصر إلى أحمد

(جـ) ناصر إلى بدر

مثال (١)

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أنّ قياس زاوية الارتفا ٤٨°. إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.





الحل:

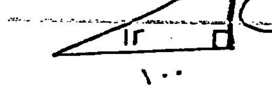
$ظا(٤٨)° = \frac{س}{١٨}$

س = ١٨ × ظا (٤٨)° ≃ ٢٠

ارتفاع المسلة: ٢٠ م تقريبًا

حاول أن تحل ص ٨٧

(١) **من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٢°. أوجد ارتف المئذنة عن سطح الأرض.** ظا ١٢° = $\frac{ع}{١٠٠}$



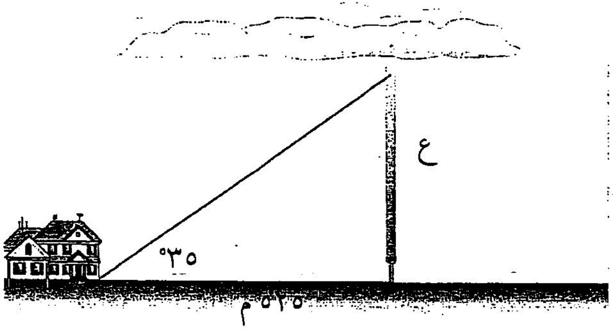
ارتفاع المئذنة = ١٠٠ × ظا ١٢ = ٢١,٣ متر

ص ٨٧

مثال (٢)

علم الأرصاد الجوية: لمعرفة ارتفاع طبقة من الغيوم عن سطح الأرض يستخدم علماء الفلك قياس زاوية الارتفاع في اللحظة التي يصل فيها البرق إلى الأرض. (يمكن نمذجة المسألة كما في الصورة).

أوجد قيمة تقريبية لارتفاع طبقة الغيوم عن سطح الأرض.



الحل:

$\text{ظا}\,(\text{٣٥}^\circ) = \dfrac{\text{ع}}{\text{٥٢٥}}$

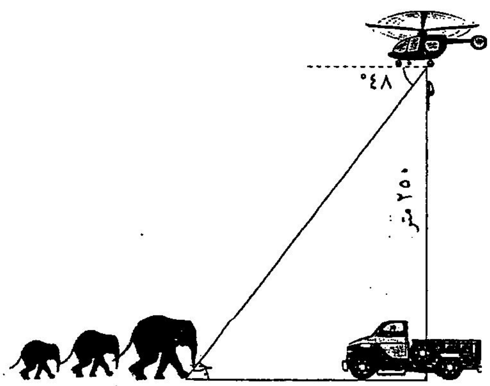
$\text{ع} = \text{٥٢٥} \times \text{ظا}\,(\text{٣٥}^\circ)$

$\text{ع} \simeq \text{٣٦٧,٦}$ مترًا

مثال (٣)

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطيعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨°. ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟

الحل:



لتكن أ موقع المروحية، ب موقع السيارة، جـ موقع القطيع.

$\text{جاجـ} = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\text{جا٤٨}^\circ = \dfrac{\text{٢٥٠}}{\text{أجـ}}$

$\text{أجـ} = \dfrac{\text{٢٥٠}}{\text{جا٤٨}^\circ} \simeq \text{٢٢٥}$

$\text{أجـ} \simeq \text{٣٣٦,٤}$ مترًا

يبعد قطيع الفيلة حوالى ٣٣٦ مترًا عن المروحية.

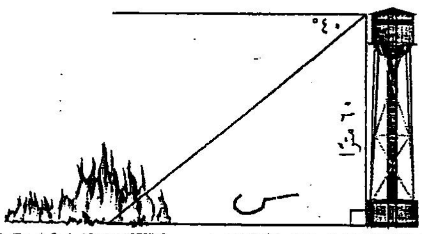
حاول أن تحل

ص ٨٨

(٣) يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٤٠°. ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟

ظا٤٠° = ٦٠ / س

المسافة = ٧١,٥ متر تقريبًا

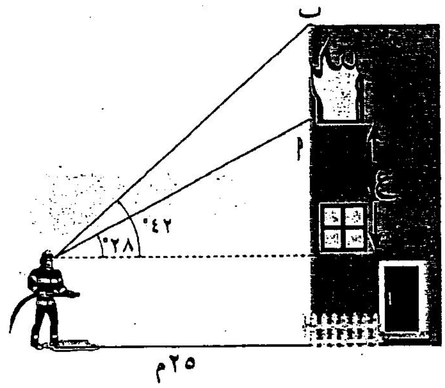


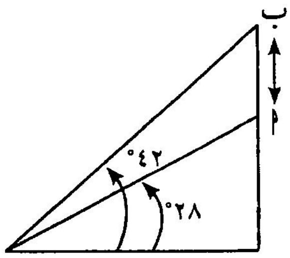
٨٩م

مثال (٤)

شاهد رجل إطفاء وهو يقف على سطح الأرض ألسنة النيران تنبعث من إحدى النوافذ القريبة من سطح البناء. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى القاعدة السفلية للنافذة (أ) حيث تندلع النيران هي ٢٨°، وزاوية الارتفاع من مستوى نظر إلى سطح البناء (ب) قياسها ٤٢°. علمًا أن رجل إطفاء يقف على مسافة ٢٥ مترًا من قاعدة البناء.

ما المسافة بين قاعدة النافذة (حيث ألسنة النيران) وسطح البناء؟





الحل: بفرض أن $ع_1$ هي البعد بين القاعدة السفلية للنافذة أ

ومستوى النظر الأفقي.

ظا٢٨° $= \frac{ع_1}{٢٥}$ ؛ $ع_1$ = ٢٥ ظا٢٨°.

بفرض أن $ع_2$ هي البعد بين سطح البناء والمستوى الأفقي للنظر.

ظا٤٢° $= \frac{ع_2}{٢٥}$ ؛ $ع_2$ = ٢٥ ظا٤٢°

ع = $ع_2 - ع_1$ = ٢٥(ظا ٤٢° − ظا ٢٨°)

≃ ٩,٢٢ أمتار

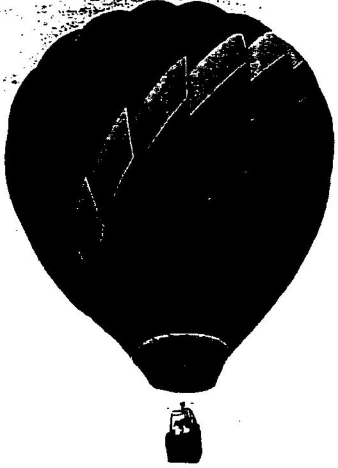
∴ المسافة المطلوبة ≃ ٩,٢٢ أمتار

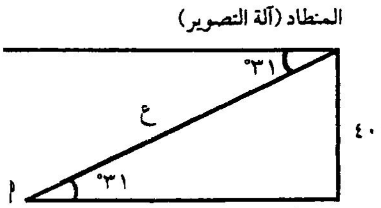
حاول أن تحل

٨٩م

٤ زُوِّد منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب عند النقطة أ بزاوية انخفاض ٣١°. يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ متر.

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟





ظا ٣١° = ٤٠٠ / ع

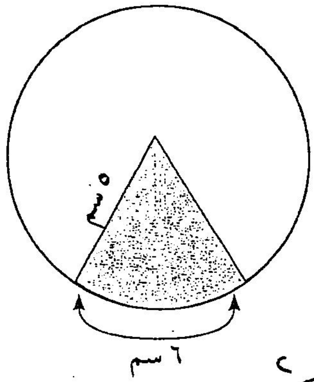
ع = ٦٦٦ متر تقريباً.

القطاع الدائري والقطعة الدائرية

ص ٨١

مثال (١)

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:



الحل:

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥

= ١٥ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي ١٥ سم^{٢}

حاول أن تحل مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٠ = ٢٠ سم^{٢}

(١) **أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.**

تعرّفت في بداية الوحدة الثانية أن طول القوس ل يساوي قياس الزاوية المركزية بالراديان مضروبًا في طول نصف القطر:

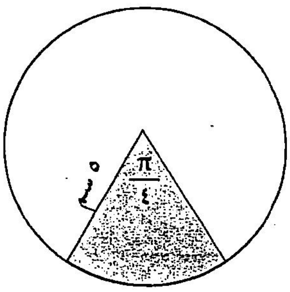
ل = هـ^{د} × نق

إذا عوّضنا عن ل بـ هـ^{د} × نق نحصل على:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق × نق = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢}

مثال (٢)

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



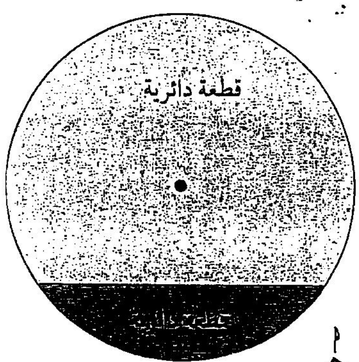
الحل:

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} نق^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\pi}{٤}$ × (٥)^{٢}

= $\frac{٢٥\pi}{٨}$ ≃ ٩,٨ سم^{٢}

مساحة القطاع الدائري تساوي حوالى ٩,٨ سم^{٢}

٢- القطعة الدائرية: Circular Segment

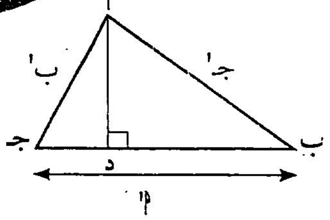


القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ د

لكن جا ب = $\frac{أ د}{أ ب}$ ∴ أ د = أ ب × جا ب



مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جا ب.

مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × ب ا × جا ب

= $\frac{1}{2}$ ب جـ × ا جـ × جا جـ

= $\frac{1}{2}$ ا ب × ا جـ × جا ا

أي أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

وباختصار نكتب مساحة المثلث ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ ا' جـ' جا ب

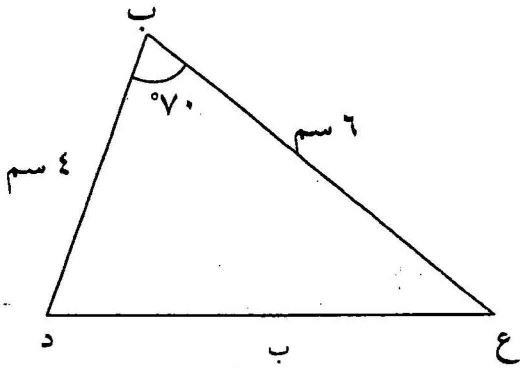
= $\frac{1}{2}$ ا' ب' × جا جـ

= $\frac{1}{2}$ ب' جـ' جا ا

مثال (٣)

ب ع د حيث ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق($\hat{ب}$) = ٧٠°

أوجد مساحة هذا المثلث.



الحل:

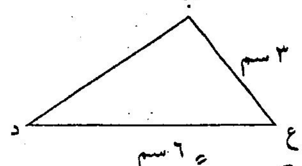
مساحة المثلث ب ع د = $\frac{1}{2}$ ب ع × ب د × جا($\hat{ب}$)

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤ × جا(٧٠°) ≃ ١١,٢٧٦

مساحة المثلث ب ع د هي حوالى ١١,٢٧٦ سم^2.

حاول أن تحل م = $\frac{1}{2}$ × ٣ × ٦ × جاع ∴ ٧ = ٩ جاع

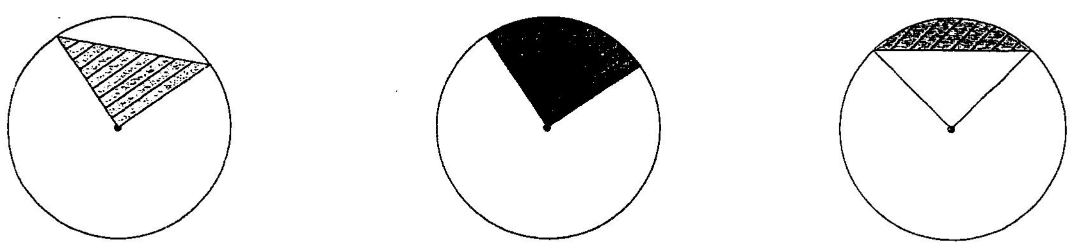
(٢) في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم^2. فأوجد ق($\hat{ع}$).



ق($\hat{ع}$) ≃ ٥١ ٣٥ تقريباً

٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

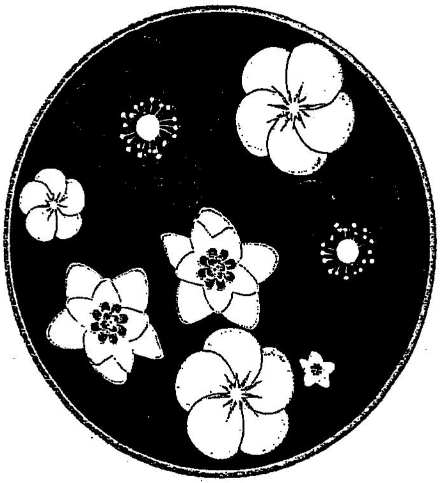
مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.



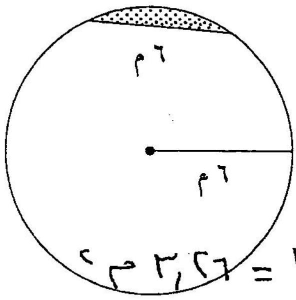
مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري - = مساحة المثلث

٩٤ ص

حاول أن تحل



٣ أ حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.



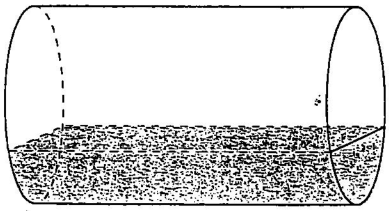
مثلث متطابق الأضلاع
الزاوية المركزية = ٦٠°
$هـ^د = ٦٠ \times \frac{١١}{١٨٠} \simeq ١,٠٤٧٢$
مساحة القطعة الدائرية
$= \frac{١}{٢} نق^٢ [هـ^د - جا هـ]$
$= \frac{١}{٢} \times ٣٦ [١,٠٤٧٢ - جا ٦٠] = ٣,٢٦$ م^٢

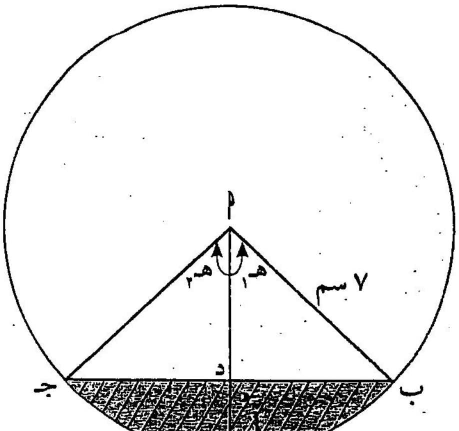
ب أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°. $هـ^د = ٧٠ \times \frac{١١}{١٨٠} = ١,٢٢١٧$

$م = \frac{١}{٢} نق^٢ [هـ^د - جا هـ] = \frac{١}{٢} \times ١٠٠ [١,٢٢١٧ - جا ٧٠°] = ١٤,١$ سم^٢

مثال (٥)

يبيّن الشكل المقابل مقطعًا في أنبوب أسطواني الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع.
إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم،
فأوجد مساحة الجزء المظلل باللون الوردي.





الحل: أد = ٥ سم

$هـ_١ = جتا^{-١}\left(\frac{٥}{٧}\right) \simeq ٠,٧٧٥^د = هـ_٢$

$هـ = هـ_١ + هـ_٢ \simeq ١,٥٥^د$

مساحة القطاع الأصغر $= \frac{١}{٢} \times هـ^د \times نق^٢$

$= \frac{١}{٢} \times ١,٥٥ \times ٧^٢ \simeq ٣٧,٩٧٥$ سم^٢

مساحة المثلث أب جـ $= \frac{١}{٢} \times$ أجـ $\times$ أب $\times$ جا$(١,٥٥^د) \simeq \frac{١}{٢} \times ٤٩ \times$ جا$(١,٥٥^د) \simeq ٢٤,٤٩٤٧$ سم^٢

مساحة الجزء المظلل $= ٣٧,٩٧٥ - ٢٤,٤٩٤٧ \simeq ١٣,٤٨$ سم^٢