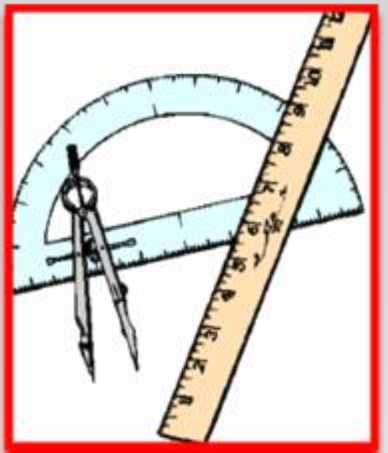
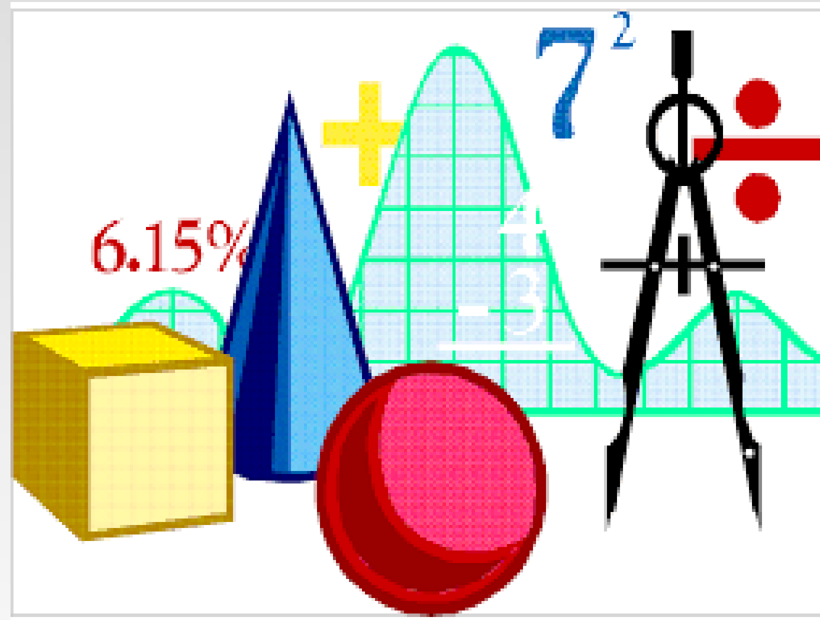
(1-6) نظريات الاتصال والدوال المركبة





دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

والدالة g : $g(x) = |x - 2|$

والدالة q : $q(x) = x^2 - 5$

1 ابحث اتصال كل من f , g عند $x=2$

2 ابحث اتصال كل من $f \cdot q , f + q$ عند $x = 2$

3 لتكن h : $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

a اكتب h دون استخدام رمز القيمة المطلقة

b هل الدالة h متصلة عند $x = 2$ ؟ ولماذا ؟

fppt.com

نظـــــرية (14) : خواص الدوال المتصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت g , f دالتين متصلتين عند $x=c$ فإن الدوال التالية

هي دوال متصلة عند $x=c$:

1. الجمع : $f + g$
2. الطرح : $f - g$
3. الضرب في ثابت $k \in \mathbb{R}$: $k \cdot g$
4. الضرب : $f \cdot g$
5. القسمة : $\frac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$

fppt.com

Continuous Functions دوال متصلة

1 لدالة f : $f(x)=\mathbf{k}$ حيث $\mathbf{k}$ ثابت متصلة عند كل $c\in\mathbb{R}$

2 الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c\in\mathbb{R}$

3 الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها

أي $c\in D$

4 الدالة f : $f(x)=|x|$ متصلة عند كل $c\in\mathbb{R}$

5 الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c\in D$

مثال 1

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كلا مما يلي

a $f(x) = x^2 + |x|$, $c = -1$

b $f(x) = \sin x - \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$

الحل:

a $f(x) = x^2 + |x|$, $c = -1$

لتكن الدالة g : $g(x) = x^2$

الدالة h : $h(x) = |x|$

الدالة g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

الدالة h دالة مطلق x متصلة عند $x = -1$

E دالة الجمع f حيث $f(x) = g(x) + h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = -1$

b $f(x) = \sin x - \cos x \ , \quad c = \frac{\pi}{2}$

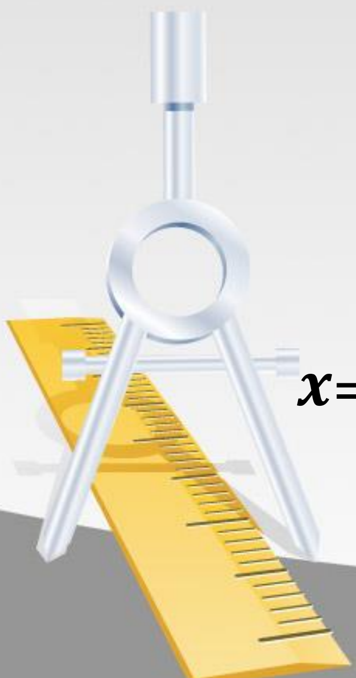
تابع للحل

لتكن الدالة g : $g(x) = \sin x$

الدالة h : $h(x) = \cos x$

الدالة g دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

الدالة h دالة مثلثية متصلة $x = \frac{\pi}{2}$



E الدالة f حيث $f(x) = g(x) - h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

حاول أن تحل 1

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كلا مما يلي

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$, $c = 3$

b) $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$ $\quad c = \frac{\pi}{4}$

الحل:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$, $c = 3$

لتكن الدالة g : $g(x) = x^2 - 4x + 3$

الدالة h : $h(x) = |x|$

الدالة g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 3$

الدالة h دالة مطلق x متصلة عند $x = 3$

دالة الجمع f حيث $f(x) = g(x) + h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = 3$

تابع للحل

b $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$ $\quad c = \frac{\pi}{4}$

$g(x) = \tan x$

مجال g هو $\mathbb{R} - \{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$

الدالة g دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$ $\quad (x \in D)$

$h(x) = x + 1$

الدالة h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1 \neq 0$$

دالة القسمة f حيث $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هي دالة متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

مثال 2

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

الحل:

لتكن الدالة g : $g(x) = \frac{x-2}{x^2+9}$

الدالة h : $h(x) = \frac{1}{x}$

الدالة g دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$
(لأن المقام لا يساوي الصفرعند $x = 3$)

الدالة h دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$
(لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x = 3$)

E دالة الطرح f حيث $f(x) = g(x) - h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = 3$

حاول أن تحل 2

ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2x}{x-2}$ عند $x=1$

الحل:

لتكن الدالة g : $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

الدالة h : $h(x)=\frac{2x}{x-2}$

الدالة g دالة حدودية نسبية متصلة عند $x=1$

(لأن المقام لا يساوي الصفرعند $x=1$)

الدالة h دالة حدودية نسبية متصلة عند $x=1$

(لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x=1$)

E دالة الطرح حيث f $f(x)=g(x)-h(x)$ هي دالة متصلة عند $x=1$

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$

متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}^+ :\ x = c\ ,\ n$ عدد صحيح زوجي موجب

ومتصلة عند كل $c \in \mathbb{R} :\ x = c\ ,\ n$ عدد صحيح فردي أكبر من 1

b إذا كانت f دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $f(c) > 0$

فإن الدالة : $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x = c$

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبين

مثال 3

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \quad , \; x = 1$

b $f(x) = \sqrt{x+3} \quad , \; x = -1$

الحل:

a لتكن الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$

الدالة h : $h(x) = x^2 + 1$

g دالة جذرية حيث $n = 3$ (عدد صحيح فردي) متصلة عند $x = 1$

h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 1$

حيث أن $h(1) = 2 , \quad 2 \neq 0$

E الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x = 1$

b $f(x) = \sqrt{x+3}$, $x = -1$

تابع للحل

نفرض أن g : $g(x) = x + 3$ حيث $x \geq -3$

g دالة متصلة عند $x = -1$

وحيث أن $g(-1) = 2$, $2 > 0$

Eالدالة f حيث $\sqrt{x+3} = \sqrt{g(x)} = f(x)$ متصلة عند $x = -1$

حاول أن تحل 3

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x = -2$

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

الحل:

a) لتكن الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$

الدالة h : $h(x) = x^2 + 4$

g دالة جذرية حيث $n = 3$ (عدد صحيح فردي) متصلة عند $x = -2$

h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -2$

حيث أن $0 \neq 8$, $h(-2) = 8$

E الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x = -2$

b $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

تابع للحل

نفرض أن g : $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R} - (1,3)$

g دالة متصلة عند $x = -2$

حيث أن $g(-2) = 15$, $15 > 0$

الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ متصلة عند $x = -2$

Composite Function الدالة المركبة

إذا كانت كل من g , f دالة حقيقية فإننا سنرى من خلال بعض الأمثلة أننا نستطيع

تعيين دالة جديدة تنتج من تركيب الدالتينg, f إذا تو افرت بعض الشروط

لنأخذ على سبيل المثال الدالتين الحقيقيتين :

$$f : \{1 ,2 ,3 ,4\} \to \mathbb{R}$$

حيث $f(x) = x - 1$

$$g : \{0 ,1,2 ,4\} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = 3x + 1$$

واضح أن :

تحت تأثيرالدالة الثانية g

$g(x) = 3x + 1$

$0 \rightarrow 3 \times 0 + 1 = 1$

$1 \rightarrow 3 \times 1 + 1 = 4$

$2 \rightarrow 3 \times 2 + 1 = 7$

$3 \rightarrow 3 \times 3 + 1 = 10$

تحت تأثيرالدالة الأولى f

$f(x) = x -$

$1 \rightarrow 1 - 1 = 0$

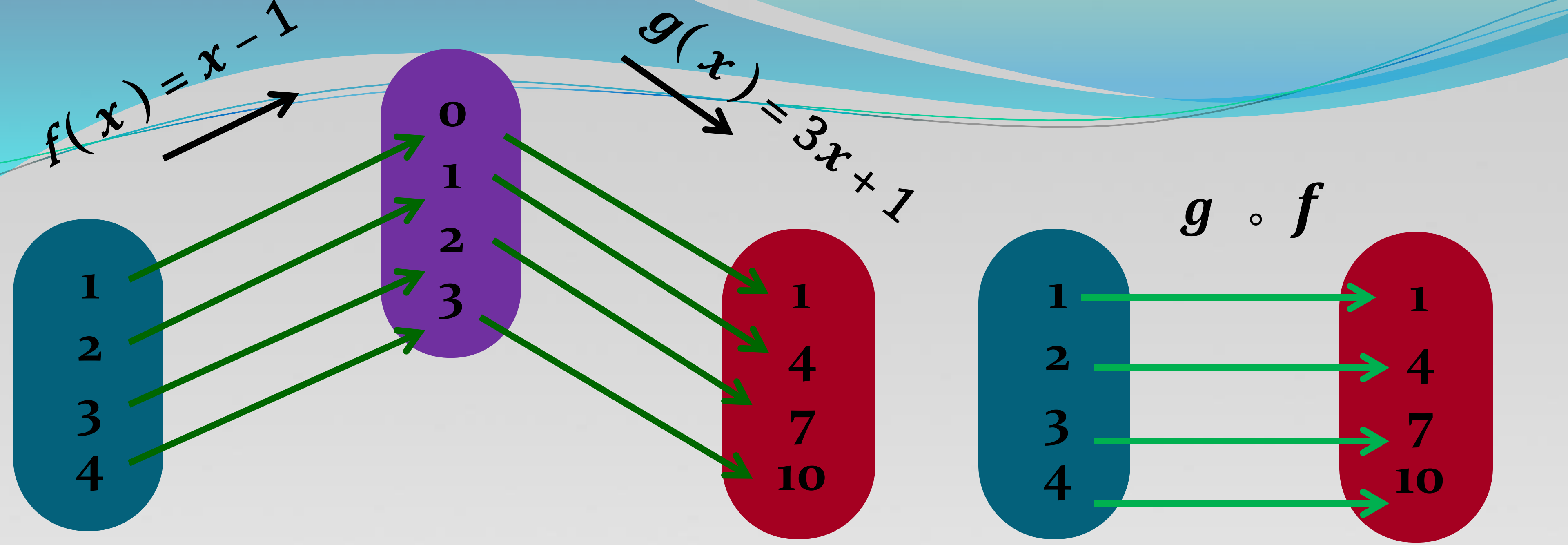
$2 \rightarrow 2 - 1 = 1$

$3 \rightarrow 3 - 1 = 2$

$4 \rightarrow 4 - 1 = 3$

إذا فرضنا دالة ثالثة تعمل عمل الدالتين g , f معا (f ثم g) لوجدنا

أنه تحت تأثيرهذه الدالة الجديدة



نرمز للدالة الجديدة بالرمز $(g \circ f)$ وتقرأ g بعد f

ويكون: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 4$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) = 7$

$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(3) = 10$

لاحظ أن مدى الدالة الأولى f هو مجال الدالة الثانية g وإلا لما أمكن تعيين $(g \circ f)$

وعموماً :

إذا كانت كل من g , f دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة : h

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب

ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب
ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب

مثال 4

الدالتان g , f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x) = x^2 -$, $f(x) = 1 + x$ أوجد :

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(2)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(2)$

الحل:

a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(f(x)\right)^2 - 1 = (1 + x)^2 - 1 = x^2 + 2x$

b $(g \circ f)(2) = 2^2 + 2(2) = 8$

c $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + g(x) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

d $(f \circ g)(2) = 2^2 = 4$

حاول أن تحل 4

اذا كانت g , f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي

$f(x) = 2x+3 \;,\; g(x) = x^2+3$ أوجد :

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(-1)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(-1)$

الحل:

a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(f(x)\right)^2 + 3 = (2x+3)^2+3$

$= 4x^2 + 12x + 12$

b $(g \circ f)(-1) = 4(-1)^2 + 12(-1) + 12 = 4$

c $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x)+3 = 2(x^2+3)+3 = 2x^2+9$

d $(f \circ g)(-1) = 2(-1)^2+9 = 11$

$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ إلا في بعض الحالات الخاصة

مثال 5

لتكن : $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4 + 2$

أوجد :

a $(f \circ g)(x)$ b $(f \circ g)(0)$ c $(g \circ f)(x)$ d $(g \circ f)(0)$

الحل:

a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^4 + 2}$

لاحظ أن مجال f هو $[0, \infty)$

وأن مدى g هو $[2, \infty)$ هومجموعة جزئية من مجال f

b $(f \circ g)(0) = \sqrt{(0)^4 + 2} = \sqrt{2}$

c $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(f(x)\right)^4 + 2 = (\sqrt{x})^4 + 2 = x^2 + 2$

d $(g \circ f)(0) = (0)^2 + 2 = 2$

لاحظ أن مجال g هو $\mathbb{R}$

$\therefore$ مدى f هومجموعة جزئية منه

حاول أن تحل 5

لتكن $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ ، $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ أوجد :

a $(f \circ g)(x)$ **b** $(g \circ f)(\sqrt{x})$

الحل:

a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 + (g(x))^2}$

$$= \sqrt{1 + (\frac{3}{x^2+4})^2}$$

لاحظ أن مجال f هو $\mathbb{R}$

$\therefore$ مدى g هو مجموعة جزئية من مجال f

b $(g \circ f)(\sqrt{3}) = g(f(\sqrt{3})) = \frac{3}{(f(\sqrt{3}))^2+4}$

$$= \frac{3}{2^2+4} = \frac{3}{8}$$

اتصـــال الدوال المركبة عند نقطة

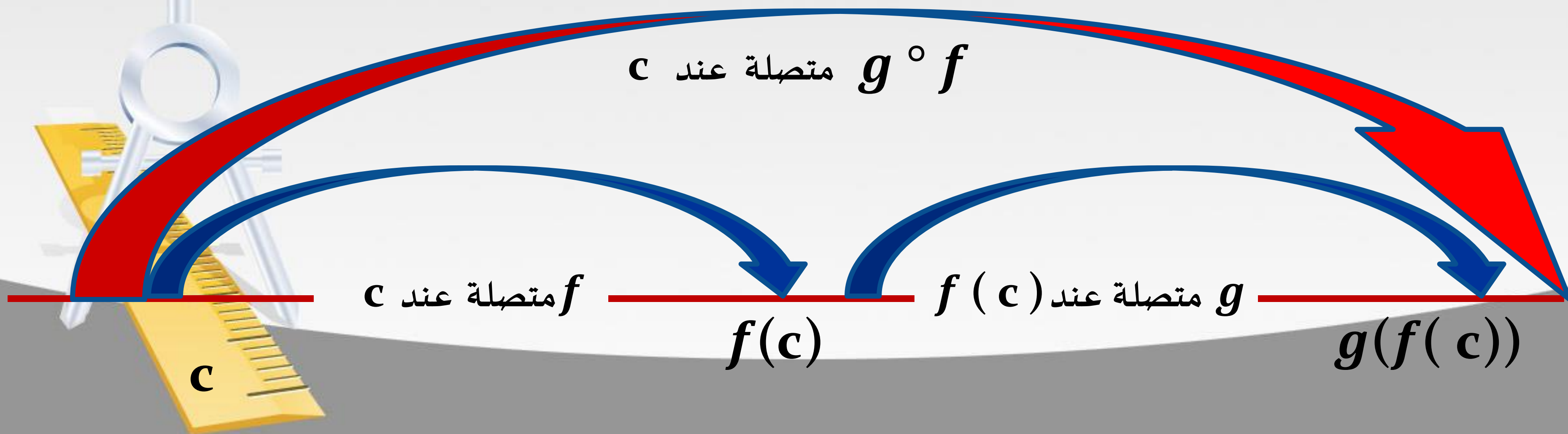
Continuity of composite Function at a point

نظرية (16)اتصال الدوال المركبة

إذا كانت f متصلة عند c و g متصلة عند $f\,(c)$ فإن الدالة المركبة $g\circ f$ متصلة عند c

أي أن نهاية $g\,(f(x))$ عندما $x \to c$ هي $g\,(f\,(c))$ بمعنى

$$\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = g(f(c))$$



مثال 6

لتكن $g(x) = \sqrt{x}\ ,\ f(x) = x^2+5$

ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = -2$

الحل:

f دالة متصلة عند $x = -2$ (1)

$f(-2) = 9$

g دالة متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}^+$

E g دالة متصلة عند $x = 9$

أي أن g دالة متصلة عند $x = f(-2)$ (2)

من (2) , (1) نجد أن $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

حاول أن تحل 6

لتكن: $g(x) = 2x + 3 , \quad f(x) = \frac{|x|}{x+2}$

ابحث اتصال الدالة $(f \circ g)$ عند $x=1$

الحل:

g دالة متصلة عند $x = 1$ (1)

$$g(1) = 2(1) + 3 = 5$$

ندرس اتصال الدالة $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ عند $x = 5$

لتكن الدالة h : $h(x) = |x|$ متصلة عند $x = 5$

لتكن الدالة t : $t(x) = x + 2$ متصلة عند $x = 5$

$$t(5) = 5 + 2 = 7, \qquad 7 \neq 0$$

الدالة f : $f(x) = \frac{h(x)}{t(x)}$ متصلة عند $x = 5$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = g(1)$ (2)

من (1) , (2) نجد أن $f \circ g$ متصلة عند $x = 1$

مثال 7

لتكن $f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

الحل:

نفرض أن : $h(x) = x^2 - 5x + 6\ ,\ g(x) = |x|$

فنجد أن : $f(x) = (g \circ h)(x)$

$$g(h(x)) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$$

h دالة متصلة عند $x = 2$ (1)

$$h(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$$

g دالة متصلة عند $x = 0$

أي أن g دالة متصلة عند $x = h(2)$ (2)

من $(1), (2)$ $g \circ h$ متصلة عند $x = 2$

أي أن f متصلة عند $x = 2$

حاول أن تحل 7

لتكن $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الحل:

نفرض أن : $g(x) = |x|$, $h(x) = x^2 - 3x + 2$

فنجد أن : $f(x) = (g \circ h)(x)$

$$g(h(x)) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$$

h دالة متصلة عند $x = 0$ (1)

$$h(0) = 0 - 0 + 2 = 2$$

g دالة متصلة عند $x = 2$

أي أن g دالة متصلة عند $x = h(0)$ (2)

من (1) , (2) $g \circ h$ متصلة عند $x = 0$

أي أن f متصلة عند $x = 2$