12:24 27/10/2020 م

(3 – 2) الدوال التربيعية و القطوع المكافئة

نشاط 1

معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

الأمثلة

1 2

3 4

5 6

7

حاول أن تحل

1 2

3 4

5 6

7

الفهرس

2–3

الدوال التربيعية و القطوع المكافئة

Quadratic Functions and Parabolas

سوف تتعلم

- إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة تربيعية.
- إيجاد معادلة محور التماثل.
- رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

المفردات و المصطلحات

- قطع مكافئ Parabola
- رأس القطع المكافئ Vertex of the Parabola
- محور التماثل Axis of Symmetry

عمل تعاوني

عندما تقذف بعض الأشياء (الأجسام) في الهواء مثل الكرات في الصورة المقابلة، فإن مسار الأشياء (الأجسام) يكون على شكل قطع مكافئ.

1 استخدم الرسم البياني في الصورة إذا كان القياس بالسنتيمترات (cm)، فما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

2 كون جدولًا بالقيم للمعادلة.

$$y = -0.35x^2 + 50$$

ما قيمة x التي تحصل عندها على القيمة العظمى لـ y؟ ما القيمة العظمى لـ y؟

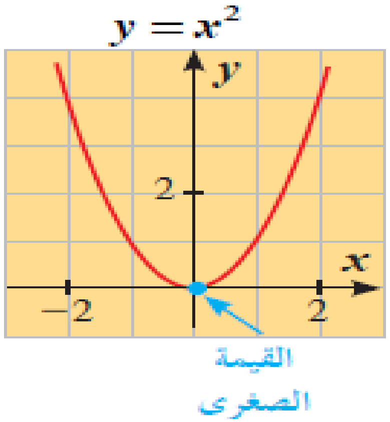
3 كيف تقارن إجاباتك عن السؤالين رقم 1، 2؟

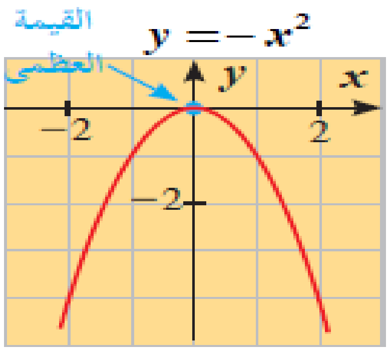
تعلمت في ما سبق أن بيان الدالة التربيعية يكون على شكل منحنى يسمى قطعًا مكافئًا وسنوضح في هذا البند بعض خصائص القطوع المكافئة في حالات خاصة.

القطوع المكافئة التي تمثل دوال تربيعية

Parabolas Representing Quadratic Functions

رأس القطع المكافئ هو أعلى (أو أدنى) نقطة في القطع المكافىء الذي يمثّل الدالة التربيعية بيانيًا، فنقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أكبر قيمة وتسمى **قيمة عظمى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأسفل أو نقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أصغر قيمة وتسمى **قيمة صغرى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأعلى.

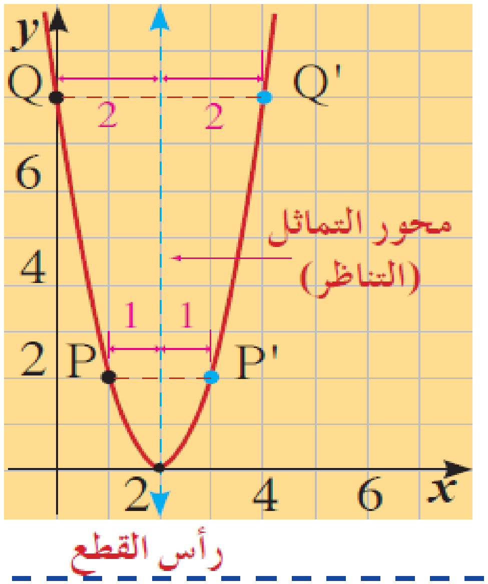




محور التماثل (التناظر) يقسم القطع المكافئ إلى جزءين متطابقين (كل جزء هو صورة للآخر بالانعكاس في المحور)، لذلك فإن كل نقطة من نقاط القطع المكافئ تناظرها نقطة أخرى هي صورتها بالانعكاس في محور التماثل، وتقع كلتا النقطتين المتناظرتين على البعد نفسه من محور التماثل الذي معادلته $x = x_1$ حيث x_1 الإحداثي السيني لنقطة رأس القطع.

الفهرس

نشاط (1)



مستخدمًا الرسم البياني الموضح:

a أوجد إحداثيات الرأس.

b حدد معادلة محور التماثل.

c حدّد النقطة المناظرة لكل من:

$P(1, 2)$, $Q'(4, 8)$

a إحداثيات الرأس **(2,0)**

b معادلة محور التماثل $x = 2$

c النقط المناظرة

$$p(1,2) \Rightarrow p'(3,2)$$

$$Q'(4,8) \Rightarrow Q(0,8)$$

ملاحظة

معادلة الدالة التي تمثل قطعا مكافئا رأسه $(0,0)$ هي : $y = ax^2$

مثال (1)

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a) $F(-1, 6)$

b) $H(-4, -8)$

a نعوض بالنقطة $F(-1,6)$

$$y = ax^2$$

$$6 = a(-1)^2 \Rightarrow \quad a = 6$$

$$y = 6x^2 \qquad 6 > 0$$

القطع المكافئ مفتوح لأعلى

b نعوض بالنقطة $H(-4,-8)$

$$y = ax^2$$

$$-8 = a(-4)^2 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$y = \frac{-1}{2}x^2 \qquad \frac{-1}{2} < 0$$

القطع المكافئ مفتوح لأسفل

ملاحظة

معادلة الدالة التي تمثل قطعا مكافئا رأسه $(0,0)$ هي : $y = ax^2$

حاول أن تحل

1 كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $E(4, 2)$ b $D(1, -5)$

a نعوض بالنقطة $E(4,2)$

$$y = ax^2$$

$$2 = a(4)^2 \Rightarrow a = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 \qquad \frac{1}{8} > 0$$

القطع المكافئ مفتوح لأعلى

b نعوض بالنقطة $D(1,-5)$

$$y = ax^2$$

$$-5 = a(1)^2 \Rightarrow a = -5$$

$$y = -5x^2 \qquad -5 < 0$$

القطع المكافئ مفتوح لأسفل

الفهرس

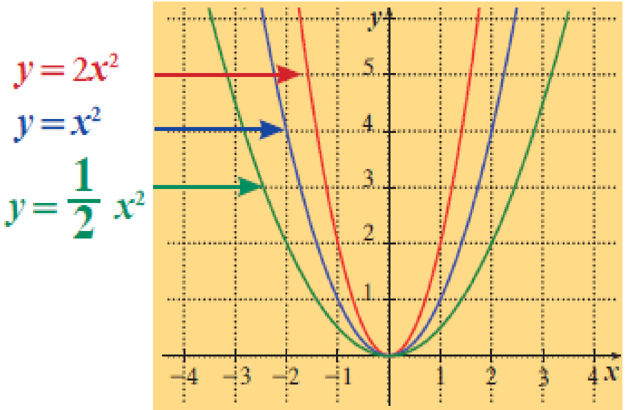
كل القطوع المكافئة لها الشكل العام نفسه. ويتغير اتساع القطع المكافئ تبعًا لتغير معامل حد الدرجة الثانية.

نشاط (2)

استخدم الرسم البياني المجاور.

a حدّد معامل كل حد من حدود الدرجة الثانية.

b كيف تؤثر زيادة قيمة معامل حد الدرجة الثانية على الرسم البياني للدالة التربيعية؟



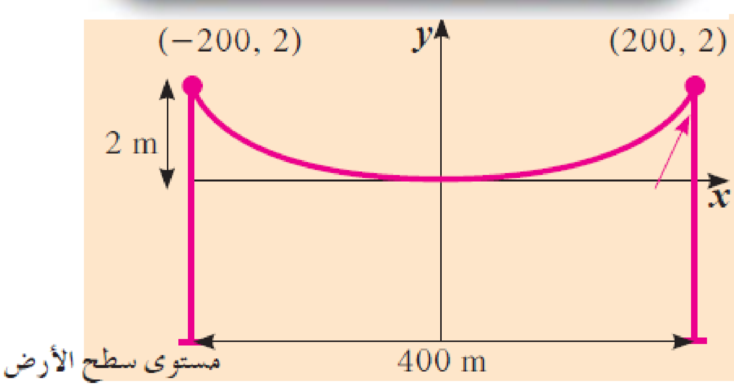
مثال (2)

الصلة بالواقع

الكهرباء: توضع أعمدة خط التوتر العالي لنقل الطاقة الكهربائية بارتفاع مناسب فإذا كان البعد الرئيس بين العمودين هو 400 m، يتدلى السلك حوالي 2 m في الوسط بين العمودين.

أوجد معادلة القطع المكافئ والتي قد تمثل سلك أبراج خط التوتر العالي.

افترض أن رأس القطع المكافئ هو نقطة الأصل.



(الرسم تقريبي)

نعوض بالنقطة (200,2)

$$y = ax^2$$

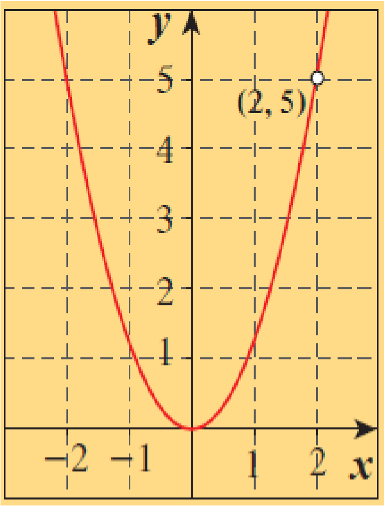
$$2 = a(200)^2 \Rightarrow \quad a = \frac{2}{200^2} = \frac{1}{10000}$$

$$y = 0.0005x^2$$

حاول أن تحل

2 البيان المقابل يمثل دالة: $y = ax^2$

أوجد معادلة هذه الدالة.



نعوض بالنقطة (2,5)

$$y = ax^2$$

$$5 = a(2)^2 \Rightarrow \qquad a = \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$y = 1.25x^2$$

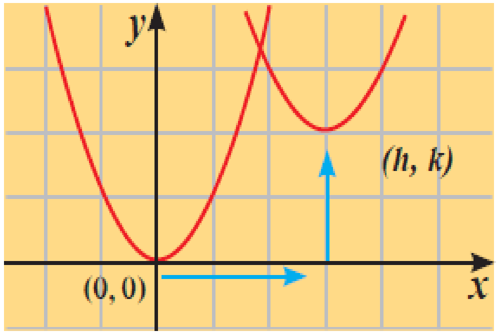
معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

Equations of some Parabolas in terms of the Coordinates of Vertices

ليس بالضرورة أن يكون رأس القطع المكافئ نقطة الأصل.

المعادلة في الصورة: $y = a(x-h)^2 + k,\ \ a \neq 0\ , h\ ,k \in \mathbb{R}$

تسمى **معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k)** وهي عبارة عن إزاحة لبيان منحنى الدالة: $y = ax^2$



وتذكر أنه عندما تكون h، k موجبتين فإن الإزاحة تحرك المنحنى عدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى كما في الشكل. وعندما تكون h سالبة يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى اليسار، وعندما تكون k سالبة، يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى الأسفل.

معادلة القطع المكافئ بدلالة راسه (h.k)

$$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in R$$

بعض خواص القطوع المكافئة

المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $|a| < 1$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $|a| > 1$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

معادلة لبقطع المكافئ بدلالة راسه (h.k)

$$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in R$$

بعض خواص القطوع المكافئة

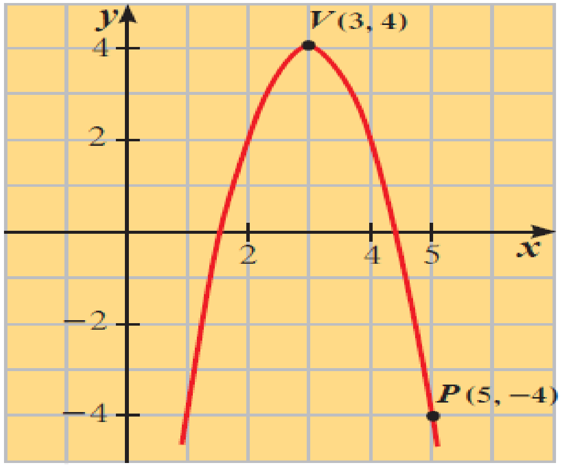
المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $1 > |a|$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $1 < |a|$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

معادلة لبقطع المكافئ بدلالة راسه (h.k)

$$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in R$$

مثال (3)



في الشكل المقابل اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3, 4)$ ويمر بالنقطة $P(5, -4)$

الحل:

رأس القطع: $(h, k) = (3, 4)$.

لذلك استخدم المعادلة، ثم حلها لإيجاد قيمة a:

$$y = a(x-3)^2 + 4$$

h=3 , k=4

$$-4 = a(5-3)^2 + 4$$

x=5 , y=-4

$$-4 = a \times 4 + 4 \Rightarrow -4 - 4 = a \times 4 \Rightarrow -8 = a \times 4 \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2(x-3)^2 + 4$$

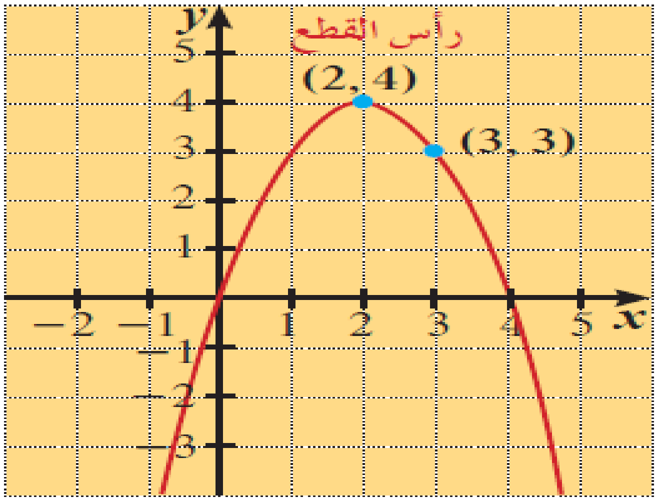
الفهرس

معادلة لبقطع المكافئ بدلالة راسه (h.k)

$$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in R$$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل.



$$y = a(x-2)^2 + 4$$

h=2 , k=4

$$3 = a(3-2)^2 + 4$$

x=3 , y=3

$$3 = a \times 1 + 4 \Rightarrow \qquad 3-4 = a \Rightarrow \qquad a = -1$$

$$y = -1(x-2)^2 + 4$$

مثال (4)

ارسم منحنى الدالة: $y = 2(x+1)^2 - 2$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

$$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in R$$

$$y = 2(x+1)^2 - 2$$

h =-1 , K =-2

رأس المنحنى (-1,-2)

معادلة محور التماثل

X=h

X=-1

فتحة المنحنى لأعلى

a = 2 >0

نوجد نقطة اخرى تنتمي لمنحنى الدالة

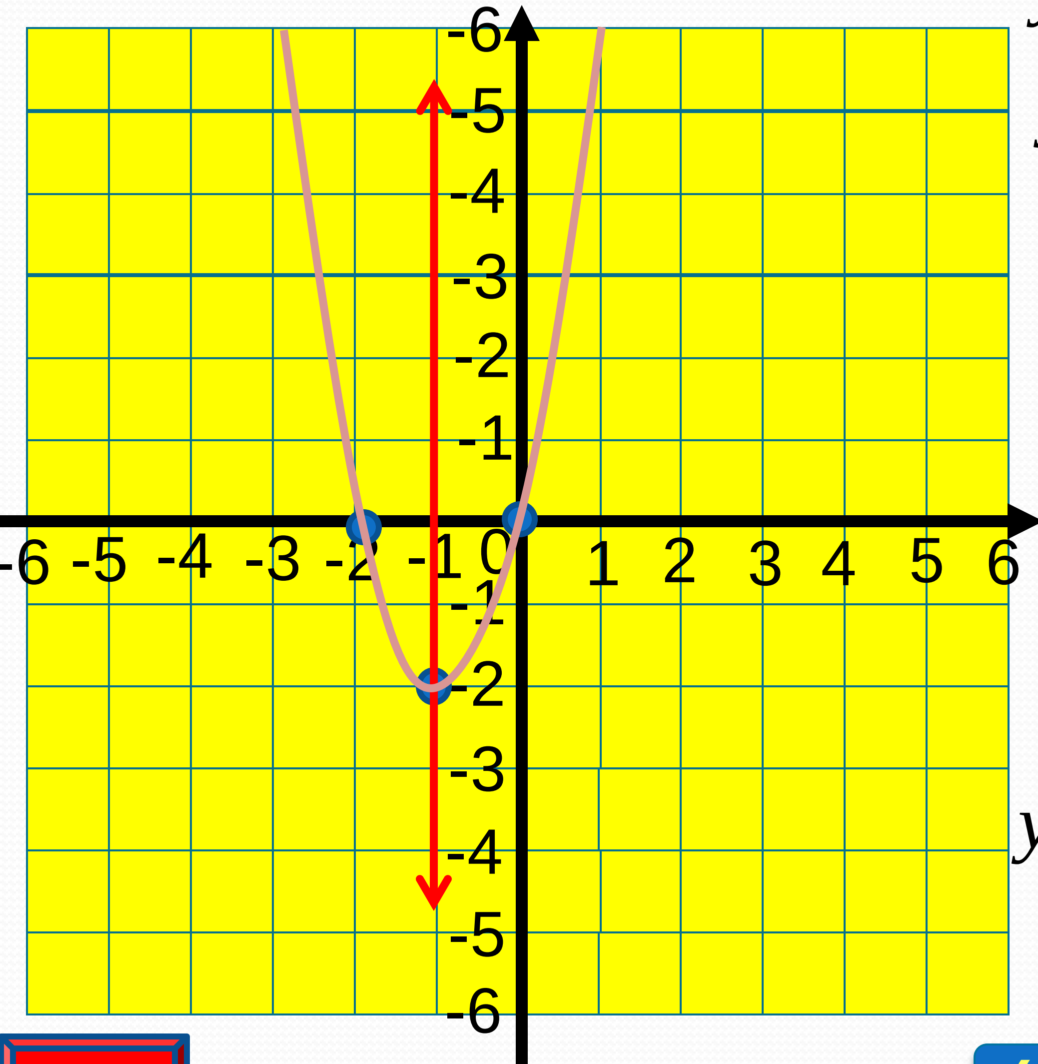
عندما X=0

$$y = 2(0+1)^2 - 2 = 0$$

(0,0)تنتمي لمنحنى الدالة

صورة النقطة (0,0) بالإنعكاس
في محور التماثل1- = X

(-2,0)



حاول أن تحل

4 ارسم منحنى الدالة: $y=(x+3)^2+1$

$$y=a(x-h)^2+k, a\neq 0, h,k\in R$$

$$y=(x+3)^2+1$$

h =-3 , K =1

رأس المنحنى (-3,1)

معادلة محور التماثل

X=h

X=-3

فتحة المنحنى لأعلى

a = 1 >0

نوجد نقطة اخرى تنتمي لمنحنى الدالة

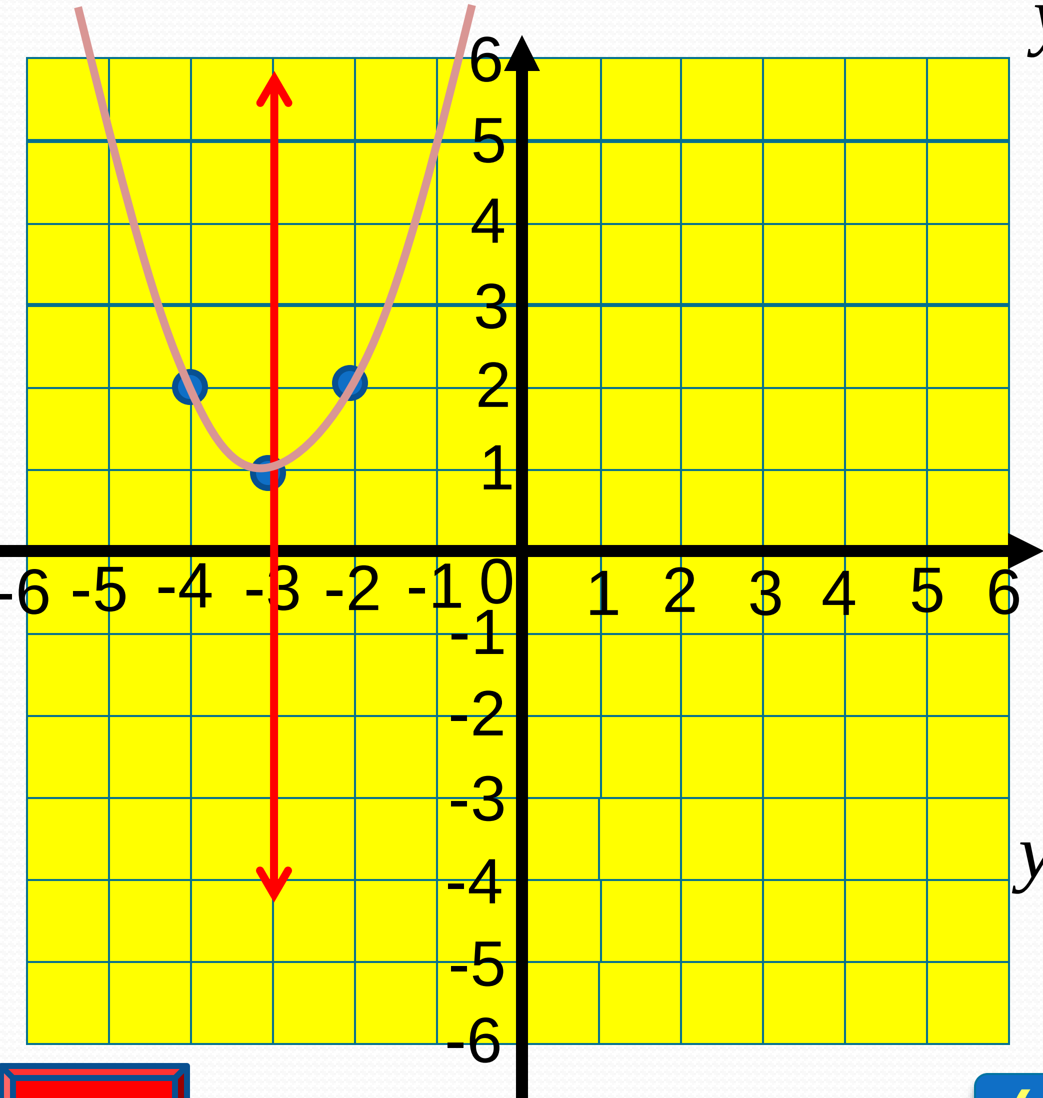
عندما X=-2

$$y=(-2+3)^2+1=2$$

(-2,2)تنتمي لمنحنى الدالة

صورة النقطة (-2,2)بالإنعكاس في محور التماثل X = -3

(-4,2)

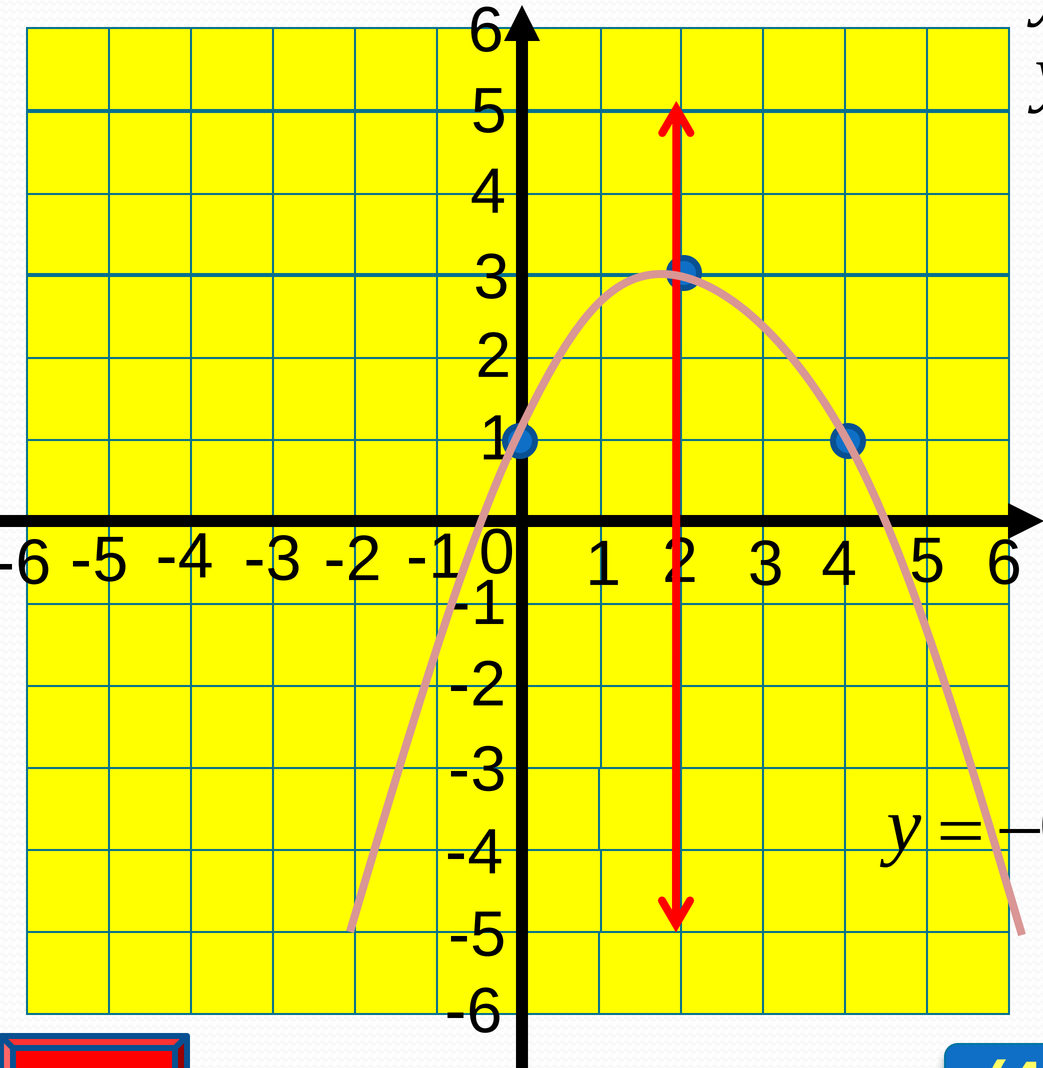


مثال (5)

ارسم منحنى الدالة: $y = -0.5(x-2)^2 + 3$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

$$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in R$$

$$y = -0.5(x-2)^2 + 3$$



h =2, K =3

رأس المنحنى (2,3)

معادلة محور التماثل

X=h

X=2

a = -0.5 <0

فتحة المنحنى لأسفل

نوجد نقطة اخرى تنتمي لمنحنى الدالة

عندما X=0

$$y = -0.5(0-2)^2 + 3 = 1$$

(0 , 1) تنتمي لمنحنى الدالة

صورة النقطة (0 , 1) بالإنعكاس في محور التماثل X = 2

(4 , 1)

الفهرس

حاول أن تحل

5 ارسم منحنى الدالة: $y = -2(x-3)^2 - 1$

$$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in R$$

$$y = -2(x-3)^2 - 1$$

h =3, K =-1

رأس المنحنى (3,-1)

معادلة محور التماثل

X=h

X=3

فتحة المنحنى لأسفل

a = -2 <0

نوجد نقطة اخرى تنتمي لمنحنى الدالة

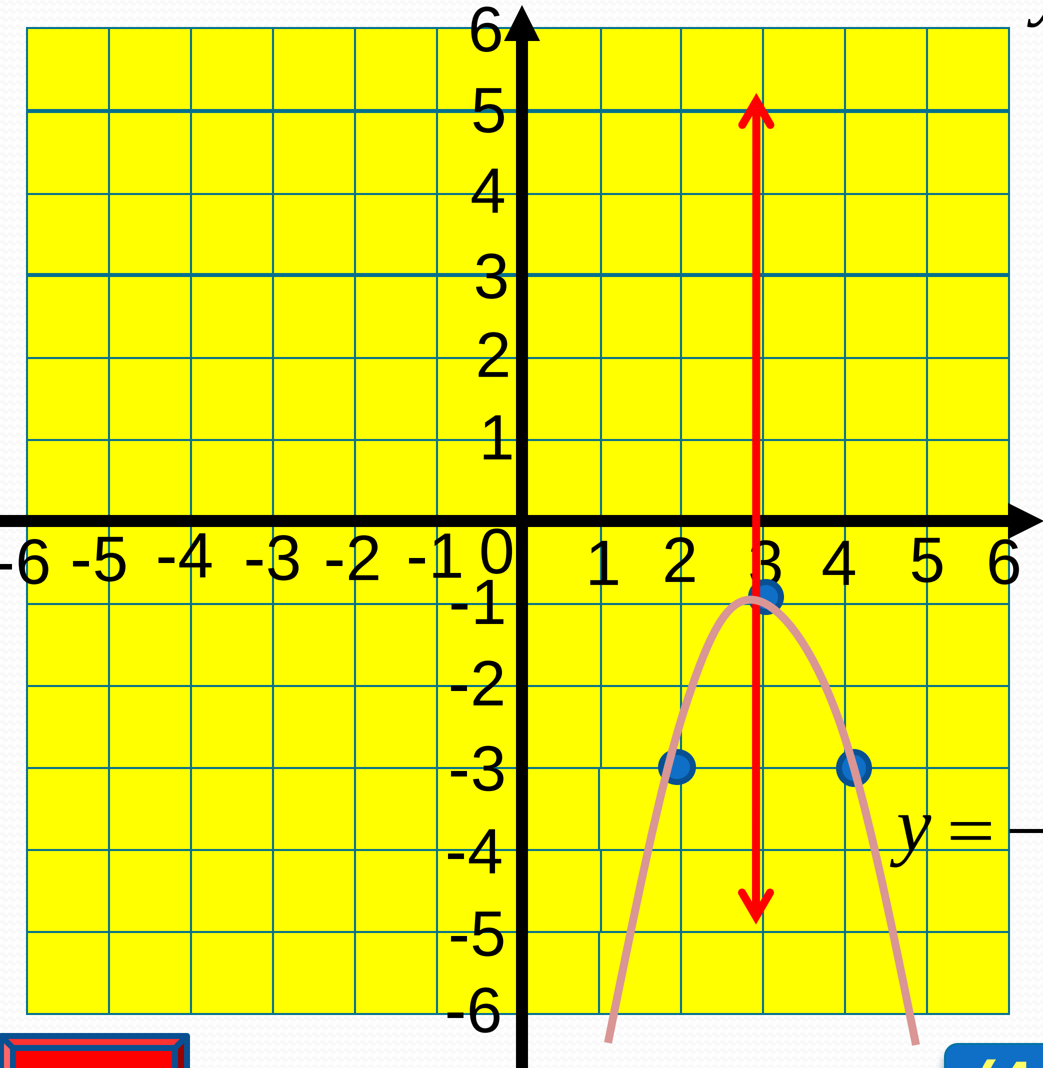
عندما X=2

$$y = -2(2-3)^2 - 1 = -3$$

(2 , -3)تنتمي لمنحنى الدالة

صورة النقطة (2 , -3) بالإنعكاس
في محور التماثل X = 3

(4 , -3)



الفهرس

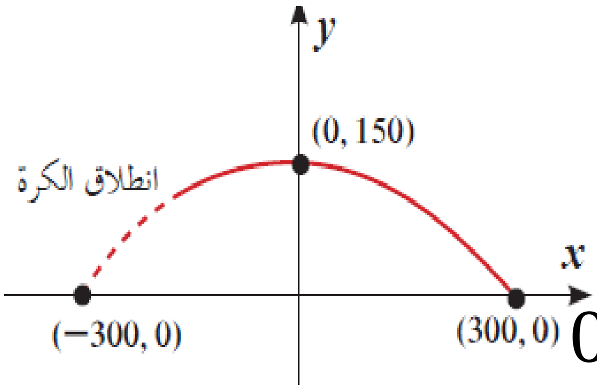
مثال (6)

تطبيقات حياتية

رميت كرة من فوق حاجز بارتفاع 150 cm عن سطح الملعب فاجتازت الكرة الحاجز الشبكي ثم سقطت على الأرض مبتعدة 300 cm عن قاعدة الحاجز.

استخدم الحاجز كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.

افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع الحاجز مع الأرض.



$$y = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in R$$

h =0 , K=150

$$y = a(x-0)^2 + 150$$

X =300 , y =0

$$0 = a(300-0)^2 + 150$$

$$0 = a \times 90000 + 150 \Rightarrow a = \frac{-150}{90000} \qquad a = \frac{-1}{600}$$

$$y = \frac{-1}{600}x^2 + 150$$