(2 – 2) الدالة التربيعية ونمذجتها

تعريف الدالة الخطية

الدالة التربيعية

الأمثلة

نشاط

1 2

حاول أن تحل

1 2

نشاط اثرائي (تطبيقات حياتية)

نشاط اثرائي (تطبيقات حياتية)

تدريب اثرائي (تطبيقات حياتية)

الفهرس

2–2

الدوال التربيعية ونمذجتها
Quadratic Functions and their Modelling

عمل تعاوني

قسم الفصل إلى مجموعات لإجراء هذه التجربة.
حدد مهام أفراد مجموعتك. اطلب إلى أحدهم أن يراقب الزمن، واطلب إلى آخر أن يقوم بوضع العلامات. ثبت شريطًا لاصقًا بطول الزجاجة واصنع ثقبًا بجانب قاعدتها بواسطة مسمار.

أولًا: ضع علامة عند مستوى الثقب على الشريط اللاصق واكتب عند هذه العلامة 0.

ثم أغلق الثقب بواسطة الشريط اللاصق.

املأ الزجاجة بالماء، ثم ضع علامة عند مستوى الماء في الزجاجة.

ثانيًا: انزع الشريط اللاصق من على الثقب ودع الماء يتدفق. ضع علامة عند مستوى سطح الماء كل 10 s استمر على هذا النحو حتى يصل مستوى سطح الماء إلى الصفر.

1. قس المسافة من 0 إلى كل علامة، ثم ارسم جدولًا مماثلًا للجدول أدناه ودوّن فيه بياناتك.

الزمن بالثانية (s)	مستوى الماء بالمليلتر (ml)
0	
10	
20	
30	
40	
⋮	⋮

2. a. مثل بياناتك على هيئة إحداثيات.
   b. أضف خطًا إلى رسمك يوضح نزعة البيانات. هل تبدو البيانات خطية؟
3. أي منحنى مما يلي يبدو أكثر ملاءمة لتمثيل بياناتك؟

a.

b.

c.

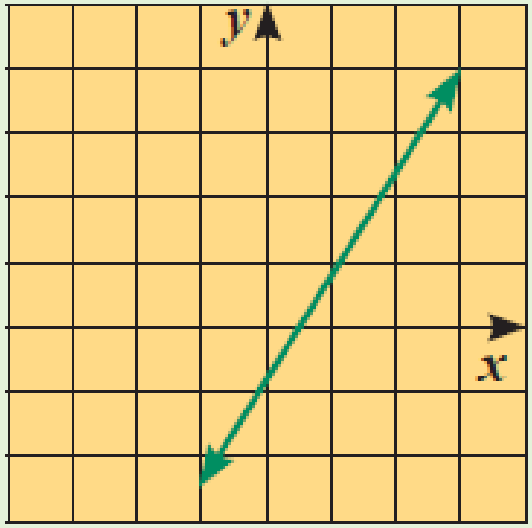
سوف تتعلم
- الدوال التربيعية واستخداماتها.
- تقدير متى تستخدم النموذج الخطي أو النموذج التربيعي.

سوف تحتاج إلى...
- علبة بلاستيكية سعتها لتر.
- شريط لاصق.
- مسمار.
- مسطرة.
- ساعة رقمية.
- ميزان.
- وعاء أو حوض.
- ورق رسم بياني.
- آلة حاسبة علمية.

المفردات والمصطلحات
- الدوال التربيعية
  Quadratic Functions
- الصورة العامة
  General Form
- حد من الدرجة الثانية
  Quadratic Term
- حد مطلق (ثابت)
  Constant Term
- دالة خطية
  Linear Function
- مجال الدالة
  Domain of the Function

الفهرس

تعريف الدالة الخطية



الدالة

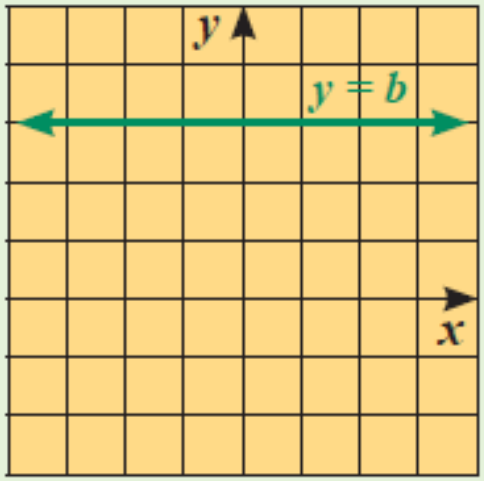
$$f : R \to R$$

$$f(x) = ax + b \quad \text{أو} \quad y = ax + b$$

حيث

$$a \in R, a \neq 0, b \in R$$

تسمى دالة خطية وبيانها خط مستقيم



عندما

$$a = 0$$

تكون الدالة

$$y = b$$

دالة ثابتة وبيانها خطا مستقيما أفقيا

الفهرس

الدوال التربيعية

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

حيث

- a: حد من الدرجة الثانية
- b: حد من الدرجة الأولى
- c: حد مطلق (ثابت)

تمثل الدالة التربيعية بيانيا بمنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحنى ويسمى المنحنى قطعا مكافئا

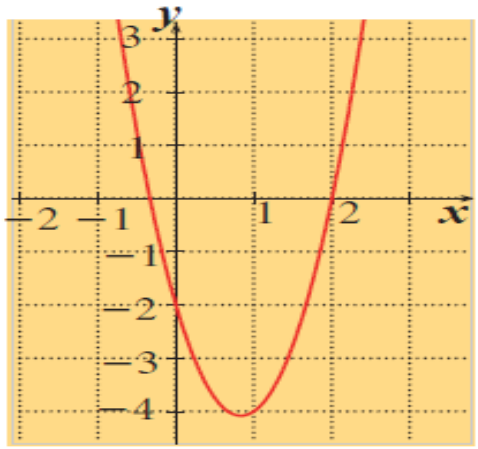
الإحداثي السيني لرأس المنحنى

$$x = \frac{-b}{2a}$$

وهو معادلة المستقيم الرأسي الذي يسمى محور التماثل

الفهرس

نشاط



أي النقاط الواردة أدناه تقع على منحنى الدالة:

$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

A(1, −4)

B(2, 0)

C(0, 2)

D(−3, 40)

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$$

$$f(1) = 3\times 1^2 - 5\times 1 - 2 = -4$$

$$f(2) = 3\times 2^2 - 5\times 2 - 2 = 0$$

$$f(0) = 3\times 0^2 - 5\times 0 - 2 = -2$$

$$f(-3) = 3\times (-3)^2 - 5\times (-3) - 2 = 40$$

A ، B ، D نقاط تقع على منحنى الدالة

الفهرس

مثال (1)

حدّد ما إذا كانت الدالة: $f(x) = (3x - 4)(x + 2)$ خطية أم تربيعية.

$$f(x) = (3x-4)(x+2)$$
$$f(x) = 3x^2 + 6x - 4x - 8$$
$$f(x) = 3x^2 + 2x - 8$$

الدالة f دالة تربيعية

حاول أن تحل

1 حدّد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية.

a $f(x)=2x(x-3)$

b $f(x)=(x-2)(2x+1)$

c $f(x)=(2x+3)^2-4x^2-7x$

d $f(x)=3(x^2-4x)-3x^2+4$

a

$$f(x)=2x(x-3)$$
$$f(x)=2x^2-6x$$

الدالة f دالة تربيعية

b

$$f(x)=(x-2)(2x+1)$$
$$f(x)=2x^2+x-4x-2=2x^2-3x-2$$

الدالة f دالة تربيعية

c

$$f(x)=(2x-3)^2-4x^2-7x$$
$$f(x)=4x^2-12x+9-4x^2-7x=-19x+9$$

الدالة f ليست دالة تربيعية

d

$$f(x)=3(x^2-4x)-3x^2+4$$
$$f(x)=3x^2-12x-3x^2+4=-12x+4$$

الدالة f ليست دالة تربيعية

الفهرس

مثال (2)

يبيّن الجدول التالي عدد القطع المستقيمة الواصلة بين نقطتين مختلفتين إذا كان لدينا x نقطة، شرط ألا تكون 3 نقاط منها على مستقيم واحد.

عدد النقاط (x)	2	3	4	5	6	7
عدد القطع المستقيمة (y)	1	3	6	10	15	21

a إذا كانت العلاقة بين y , x تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b أوجد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين 10 نقاط، وبين 20 نقطة .

الصورة العامة للدالة التربيعية

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

بالتعويض بالأزواج المرتبة (4,6),(3,3),(2,1)ينتج النظام التالي

$$f(2)=a(2)^2+b(2)+c \qquad 1=4a+2b+c \qquad 1$$

$$f(3)=a(3)^2+b(3)+c \qquad 3=9a+3b+c \qquad 2$$

$$f(4)=a(4)^2+b(4)+c \qquad 6=16a+4b+c \qquad 3$$

الفهرس

$1 = 4a + 2b + c$ (1)

$3 = 9a + 3b + c$ (2)

$6 = 16a + 4b + c$ (3)

$b = \frac{-1}{2}$

$2 = 5a + b$ (4)

$3 = 7a + b$ (5)

نطرح ❶ من ❷

نطرح ❷ من ❸

نطرح ❹ من ❺

$1 = 2a$ (5)

$a = \frac{1}{2}$

بالتعويض في ❹

$2 = 5 \times \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = 2 - 5 \times \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{-1}{2}$

بالتعويض في ❶

$1 = 4 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{-1}{2} + c \Rightarrow c = 1 - 4 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{-1}{2}$

$c = 0$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

الفهرس

مثال (2)

يبيّن الجدول التالي عدد القطع المستقيمة الواصلة بين نقطتين مختلفتين إذا كان لدينا x نقطة، شرط ألا تكون 3 نقاط منها على مستقيم واحد.

عدد النقاط (x)	2	3	4	5	6	7
عدد القطع المستقيمة (y)	1	3	6	10	15	21

a) إذا كانت العلاقة بين y , x تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b) أوجد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين 10 نقاط، وبين 20 نقطة .

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

نطرح ❶ من ❷

$$f(10)=\frac{1}{2}(10)^2-\frac{1}{2}(10) \qquad f(10)=45$$

$$f(20)=\frac{1}{2}(20)^2-\frac{1}{2}(20) \qquad f(10)=190$$

الفهرس

حاول أن تحل

2 يبيّن الجدول التالي عدد الأقطار في المضلعات بحسب عدد أضلاعها.

عدد الأضلاع (x)	4	5	6	7
عدد الأقطار (y)	2	5	9	14

a إذا كانت العلاقة بين x ,y تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b مستخدمًا العلاقة في a، أوجد عدد أقطار المضلع إذا كان عدد أضلاعه 10 وإذا كان عدد أضلاعه 15 .

نشاط إثرائي (تطبيقات حياتية)

يبيّن الجدول التالي بيانات اختبار مشابه للاختبار السابق في فقرة «عمل تعاوني»، حيث t تمثل المدة الزمنية بالثواني (s)، y تمثل مستوى المياه بالميليلتر (ml).

t	4	8	12	16	20	24	28	32
y	112.3	104.8	97.5	90.4	83.5	76.8	70.3	64

a أوجد دالة تربيعية تنمذج هذه البيانات.

b استخدم الدالة أعلاه لإيجاد مستوى المياه بعد مرور 36 s.

a لتكن الدالة التربيعية: $f(t) = at^2 + bt + c \quad , \quad y = f(t)$

نختار من الجدول 3 أزواج تحقق الدالة.

الزوج $(4, 112.3)$ $112.3 = a \times (4)^2 + b(4) + c$

الزوج $(12, 97.5)$ $97.5 = a(12)^2 + b(12) + c$

الزوج $(20, 83.5)$ $83.5 = a(20)^2 + b(20) + c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 112.3 \\ 144a + 12b + c = 97.5 \\ 400a + 20b + c = 83.5 \end{cases}$$

باستخدام آلة حاسبة علمية ينتج: $a = \frac{1}{160} = 0.00625 \quad b = -\frac{39}{20} = -1.95 \quad c = 120$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{160}t^2 - \frac{39}{20}t + 120$$

أو

$$f(t) = 0.00625t^2 - 1.95t + 120$$

لاحظ أن النقطة $(8 , 104.8)$ تحقق المعادلة حيث

$$f(8) = \frac{1}{160}(8)^2 - 1.95(8) + 120 = 104.8 \checkmark$$

بالمثل يمكن إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

b نوجد:

$$\begin{aligned} f(36) &= \frac{1}{160}(36)^2 - \frac{39}{20}(36) + 120 \\ &= 8.1 - 70.2 + 120 \\ &= 57.9 \end{aligned}$$

أي يصبح مستوى المياه حوالي 58cm

نشاط إثرائي (الصلة بالواقع)

يقف أحد السباحين على منصة يبلغ ارتفاعها 3 m عن مستوى سطح المياه. يقفز إلى أعلى ثم يسقط في المياه. يبيّن الجدول التالي ارتفاعه y بالأمتار (m)، ابتعاده الأفقي عن المنصة x بالأمتار (m).

x	0.6	1	1.2	1.3	1.6	2	2.6	3
y	4.44	4.92	5.016	5.028	4.92	4.44	3	1.56

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذج العلاقة بين x , y ثم تحقق.

الحل:

الحل:

لتكن الدالة التربيعية: $f(x)=ax^2+bx+c, \quad y=f(x)$

يتضمن الجدول 8 أزواج مرتبة (x,y) أي أن القطع المكافئ يجب أن يمر بهذه النقاط. نختار 3 أزواج لنجد الثوابت (a, b, c)

الزوج $(0.6, 4.44)$ $4.44=a(0.6)^2+b(0.6)+c$

الزوج $(1, 4.92)$ $4.92=a(1)^2+b(1)+c$

الزوج $(1.2, 5.016)$ $5.016=a(1.2)^2+b(1.2)+c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$\begin{cases} 0.36a+0.6b+c=4.44 \\ a+b+c=4.92 \\ 1.44a+1.2b+c=5.016 \end{cases}$$

نستخدم آلة حاسبة لحل النظام فنحصل على: $a=-1.2, \quad b=3.12, \quad c=3$

$$f(x)=-1.2x^2+3.12x+3$$

للتحقق، نعوّض عن $(x\ ,f(x))$ ببقية أزواج قيم الجدول.

مثلًا: نعوّض بالزوج: $(1.3, 5.028)$:

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2(1.3)2+3.12(1.3)+3$$

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2\times 1.69+3.12\times 1.3+3$$

$$5.028 \stackrel{\checkmark}{=} 5.028$$

$\therefore$ $(1.3, 5.028)$ يحقق المعادلة.

بالمثل يمكنك إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.