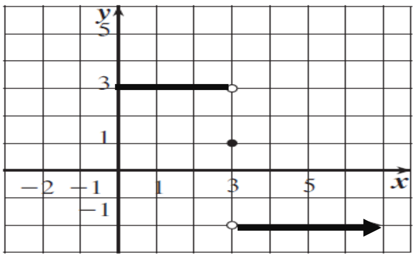
# بند ( 1 – 1 ) النهايات بنود موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) a b




$$\lim_{y\to 3^+} f(x) = -2$$
$$\lim_{y\to 3^-} f(x) = 3$$

(2) $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ a b

**نتحقق من أن نهاية المقام لا تساوي صفر**

$$\lim_{y\to 2}(y+2) = 2+2 = 4,4 \neq 0$$

$$\lim_{y\to 2}\frac{y^2+5y+6}{y+2} = \frac{(2)^2+5(2)+6}{2+2} = 5$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ a b

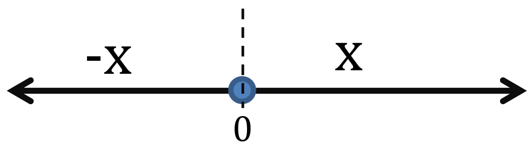
**عند التعويض المباشر عن x=0 نحصل على قيمة غير معينة**

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2(5x+8)}{x^2(4x^2-16)} = \lim_{y\to 0}\frac{(5x+8)}{(4x^2-16)} = \frac{(5\times 0+8)}{(4\times 0^2-16)} = -\frac{1}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ a b

**عند التعويض المباشر عن x=0 نحصل على قيمة غير معينة**

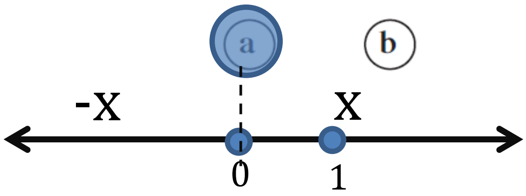
$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \because x\to 0^- \qquad \therefore |x| = -x$$




**لأننا نسعى إلى صفر المطلق من جهة اليسار**

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -2 = -2$$

(5) $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$




$\because x \to 1^+ \qquad \therefore |x| = x$

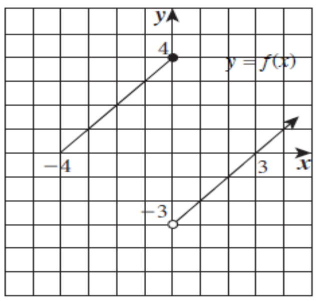
لأن 1 يقع على يمين صفر المطلق

$$\lim_{x \to 1^+}(2x - x + 2) = \lim_{x \to 1^+}(x+2) = 1 + 2 = 3$$

---

في التمارين (6—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة $f$.




العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 4$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$ (d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$

---

(7) $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$

(a) 17 (b) −17 (c) 9 (d) −9

$$(-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) - 17 = -9$$

---

(8) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ غير موجودة

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(9) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} =$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{1}{3}$

عند التعويض المباشر عن x=0 نحصل على قيمة غير معينة

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{(2x-1)} = \frac{2-1}{2\times 2-1} = \frac{1}{3}$$

(10) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$

ⓐ $-1$ ⓑ 1 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 0

عند التعويض المباشر عن x=0 نحصل على قيمة غير معينة

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} =$$

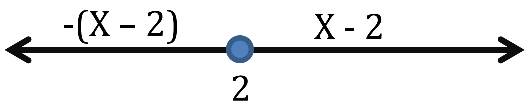
$$\frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}\sqrt{x} + \lim_{x\to 1} 1} = \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\sqrt{\lim_{x\to 1} x} + \lim_{x\to 1} 1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة في الأسئلة المقالية يجب التحقق من أن
نهاية ما تحت الجذر اكبر من الصفر
ونهاية المقام لا تساوي الصفر

(11) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x^2-4} =$

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

$\because x \to 2^+ \Rightarrow \therefore |x-2| = x-2$




$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

(12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} =$

ⓐ $-\frac{1}{2}$ ⓑ $\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} \div x = \lim_{x \to 0} \frac{2-(2+x)}{2(2+x)} \div x = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{2(2+x)} \div x =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x}{2(2+x)} \times \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{2(2+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{4+2x} = \frac{-1}{4+2\times 0} = -\frac{1}{4}$$

(13) $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

ⓐ $12$ ⓑ $-12$ ⓒ $4$ ⓓ $-4$

$$\lim_{x \to -8} \frac{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}+2} = \lim_{x \to -8} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}+4) =$$

$$\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x^2} - 2\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \to -8} 4 ==$$

$$\sqrt[3]{\lim_{x \to -8} x^2} - 2\sqrt[3]{\lim_{x \to -8} x} + \lim_{x \to -8} 4 = \sqrt[3]{(-8)^2} - 2\sqrt[3]{-8} + 4 = 12$$

(14) $\lim_{x\to -3}\frac{2x^3+9x^2+9x}{x+3}=$

ⓐ 9 ⓑ 0 ⓒ $-3$ ⓓ $-9$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x(2x^2+9x+9)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{x(x+3)(2x+3)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to -3}\left(x(2x+3)\right)=\lim_{x\to -3}\left(2x^2+3x\right)=2(-3)^2+3\times -3=9$$

## بند ( 2 – 1 ) نهايات تشتمل على ∞,-∞ ( مقالي )

5)) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2|x|}$$

$$|x|=\begin{cases}x, x\ge 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty,\ \frac{1}{2}>0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{-2x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-1}{2}\times\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty,\ \frac{-1}{2}<0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2|x|}=\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1}{2|x|}=\infty$$

8)) $$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{2x-1}{\left|(2x-1)^4\right|}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{2x-1}{(2x-1)^4}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{1}{(2x-1)^3}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{1}{(2x-1)^3}=\infty$$

# بند ( 2 – 1 ) نهايات تشتمل على ∞,-∞

## المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x \to -4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ (a) (b)

لأن الأس فردي إذا النهاية من اليسار = ∞-

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ (a) (b)

$$\because x \to \infty \to \therefore |x| = x$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

(3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ (a) (b)

$$\because x \to -\infty \to \therefore |x| = -x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x-3}{x+3} = -1$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

(4) $\lim_{x \to \infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ (a) (b)

لأن درجة حدودية البسط اصغر من درجة حدودية المقام
الناتج = 0

(5) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$

a   **b**

$\because x \to -\infty \to \therefore |2x-3| = -2x+3$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-2x-3} = -\frac{1}{2}$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

---

في التمارين (14 – 6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$

a) $0$   **b)** $1$   c) $\infty$   d) $\frac{1}{2}$

$\because x \to \infty \to \therefore |x| = x$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

---

(7) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+3} =$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

a) $\infty$   b) $-\infty$   **c)** $1$   d) $0$

---

(8) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} =$

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

a) $\infty$   b) $-\infty$   c) $3$   **d)** $-3$

$$|x| = \begin{cases} x, x \to \infty \\ -x, x \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{-x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \frac{-3}{\sqrt{1}} = -3$$

(9) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=$

(a) $0$ (b) $5$ (c) $1$ (d) $-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{x}\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=1\times5=5$$

(10) $\lim_{x\to\infty}\frac{-|x+3|}{2x}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\infty$ (d) $-\infty$

$$|x+3|=\begin{cases}x+3, x\to\infty\\-(x+3), x\to-\infty\end{cases}$$

$$\because x\to\infty\to\therefore|x+3|=x+3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-(x+3)}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-3}{2x}=-\frac{1}{2}$$

(11) $\lim_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-2}\right)^5=$

(a) $0$ (b) $2$ (c) $\infty$ (d) $-\infty$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{3^3}{(x-2)^5}=\lim_{x\to2^-}\left(3^5\times\frac{1}{(x-2)^5}\right)=-\infty$$

لأن الأس فردي و x تؤول إلى 2 من جهة اليسار و $3^5$ أكبر من الصفر

سؤال من اختبار الفترة الثانية ٢٠١٤/٢٠١٥

$$\lim_{x\to3^-}\frac{1}{(3-x)^5}=\lim_{x\to3^-}\frac{1}{-(x-3)^5}=\lim_{x\to3^-}\frac{-1}{(x-3)^5}=\infty$$

لأن الأس فردي و x تؤول إلى 3 من جهة اليسار و 1- أصغر من الصفر( سالب )

(12) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{2}{(x-4)^3} =$

a) $\infty$ b) $2$ c) $-\infty$ d) $0$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{2}{(x-4)^3} = \lim_{x\to 4^+}\left(2\times\frac{1}{(x-4)^3}\right) = \infty$$

**لأن الأس فردي و x تؤول إلى 4 من جهة اليمين و 2 أكبر من الصفر**

# بند (3– 1 ) الصيغ الغير معينة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ (a) (b)

$$\lim_{x\to\infty}3x^2=\infty$$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ (a) (b)

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=\infty$$

(3) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ (a) (b)

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ (a) (b)

لأن درجة البسط حدودية اصغر من درجة حدودية المقام
الناتج = 0

(5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ (a) (b)

$$=\frac{4}{2}=2$$

لأن درجة البسط حدودية = درجة حدودية المقام

(6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\frac{3}{2}$

ⓐ ⓑ

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

$$=\frac{3}{-\sqrt{4}}=\frac{-3}{2}$$

في التمارين (7–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

ⓐ $\infty$ ⓑ $\frac{1}{2}$ ⓒ $0$ ⓓ $-\infty$

لأن درجة حدودية البسط اصغر من درجة حدودية المقام
الناتج = 0

(8) $\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}}=$

ⓐ $\frac{5}{3}$ ⓑ $-\frac{5}{3}$ ⓒ $\frac{5}{9}$ ⓓ $-\frac{5}{9}$

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

$$=\frac{-5}{\sqrt{9}}=\frac{-5}{3}$$

(9) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

ⓐ $-1$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $1$

$$=\frac{-2}{-\sqrt{4}}=\frac{-2}{-2}=1$$

(10) إذا كان: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}=-2$ فإن قيم $m$ , $n$ هي:

a) $m=0$ , $n=-2$ b) $m=0$ , $n=2$ c) $m=1$ , $n=-1$ d) $m=1$ , $n=1$

لحل هذه التمارين يجب أن تكون درجة الحدودية التي تحت الجذر التربيعي أكبر من درجة الحدودية ب واحد اذا يجب أن تكون درجة الحدودية ( البسط ) من الدرجة الأولى

$$mx^2=0\Rightarrow m=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}=\frac{n}{\sqrt{1}}=-2\Rightarrow n=-2$$

(11) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4}=1$ فإن قيم $m$ , $n$ هي:

a) $m=0$ , $n=-2$ b) $m=0$ , $n=2$ c) $m=0$ , $n=4$ d) $m=0$ , $n=-4$

لحل هذه التمارين يجب أن تكون درجة الحدودية التي تحت الجذر التربيعي أكبر من درجة الحدودية ب واحد اذا يجب أن تكون درجة الحدودية ( المقام ) من الدرجة الأولى

$$mx^2=0\Rightarrow m=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{nx-4}=\frac{-\sqrt{4}}{n}=1\Rightarrow n=-2$$

# بند ( 4 – 1 ) نهايات بعض الدوال المثلثية

## المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{2x}=\frac{3}{2}$ معلق (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos 2x}{4x}=\frac{1}{2}$ معلق (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=0$ (a) (b)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)}{\lim\limits_{x\to0}\cos^2 x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}1-\lim\limits_{x\to0}\sin x}{\lim\limits_{x\to0}\cos^2 x}=\frac{1-0}{1}=1$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$ (a) (b)

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}(1+\sin 2x)}{\lim\limits_{x\to0}2\cos 2x}=\frac{\lim\limits_{x\to0}1+\lim\limits_{x\to0}\sin 2x}{2\lim\limits_{x\to0}\cos 2x}=\frac{1+0}{2\times1}=\frac{1}{2}$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin x+5x^3}{4x^3}=2$ معلق (a) (b)

في التمارين (6—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x} =$

ⓐ 2 ⓑ $-2$ ⓒ 0 ⓓ $\infty$

بقسمة كل من البسط والمقام على x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3 + x^2 \sin\frac{1}{x}\right) =$

معلق

ⓐ 0 ⓑ 4 ⓒ 3 ⓓ $\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2 - x\cos x}{2x^2}$

معلق

ⓐ $\infty$ ⓑ $-\infty$ ⓒ $-2$ ⓓ 2

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2 + 5\sin^2 x}{3x^2} =$

ⓐ 3 ⓑ 9 ⓒ 0 ⓓ $\infty$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^2}{3x^2} + \frac{5\sin^2 x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\times 1 = 3$$

(10) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x + \cos x}{|2x|} =$

معلق

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ 0 ⓓ $\infty$

# بند ( 5 – 1 ) الإتصال

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $f$: $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}+1$ متصلة عند $x=-2$ (a) **(b)**

أصفار المقام هي 2-
الدالة غير معرفة عند x=-2

(2) الدالة: $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ **(a)** (b)

لأنها حدودية نسبية والمقام $\neq 0$ ، لكل x تنتمي R

(3) الدالة: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x=-1$ **(a)** (b)

لأنها عبارة عن قسمة دالتين نفرض أن g(x)= 1 , h(x)= x + 2
g دالة ثابتة متصلة عند x=-1
المقام دالة جذر تربيعي للدالة نفرض أن t(x)= x + 2
t كثيرة حدود متصلة عند x = -1 ، t(-1)=-1+2=1>0 h متصلة عند x=-1
المقام $\neq 0$ عندما x= -1 الدالة y متصلة عند x = -1

(4) إذا كانت الدالة $f$ متصلة عند $x=-1$ وكان $\lim\limits_{x\to-1}(f(x)-2)=-1$ فإنّ $f(-1)=1$ **(a)** (b)

الدالة متصلة عند x=-1

$$f(-1)=\lim_{x\to-1} f(x)$$

$$\lim_{x\to-1}(f(x)-2)=-1 \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \lim_{x\to-1} f(x)-\lim_{x\to-1}2=-1$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)-2=-1 \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \lim_{x\to-1} f(x)=-1+2=1$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=1=f(-1)$$

في التمارين (5—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

**(5)** نقاط انفصال الدالة $f$: $f(x) = \cot x$ هي:

(a) $0 \ , \ \pi$ (b) $2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

(c) $k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ (d) $\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\sin x = 0 \forall x \in k\pi, k \in z$$

**(6)** نقاط الدالة $f$: $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) $2$ (b) $-2 \ , \ 2$ (c) $-2$ (d) $-5 \ , \ 2$

**يمكن التخلص من الإنفصال عند العامل الصفري للمقام الذي يمكن التخلص منه**

**صفر لكل من البسط والمقام**

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

**لا يمكن إيجاد النهاية عند x=-2**

**، عند x=-5 لا يوجد انفصال**

**يمكن إيجاد النهاية عند x=2**

(7) نقاط الدالة $f$ : $f(x) = \frac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) $-1\,,\,2$ (b) $-2$ (c) $1\,,\,-2$ (d) $1$

**لا يمكن التخلص من الإنفصال عند العامل الصفري للمقام الذي لا يمكن التخلص منه**

**صفر للمقام وليس صفرا للبسط**

$$f(x) = \frac{2(x^3+8)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-1)}$$

(8) إذا كانت الدالة $f$ متصلة عند $x = 2$ فإنّ $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $\frac{1}{|x-2|}$ (b) $\sqrt{x-2}$ (c) $\frac{|x-2|}{x-2}$ (d) $\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & : x > 2 \\ 3x-5 & : x \leqslant 2 \end{cases}$

**2 صفر للمقام**
**غير معرفة عند x = 2**

**2 – 2 =0**
**لابد ان يكون الناتج**
**اكبر من 0**

**2 صفر للمقام**
**غير معرفة عند x = 2**

(9) إذا كانت الدالة $f$ : $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x \geq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$ فإن:

(a) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 4$ (c) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ موجودة (d) $f$ متصلة عند $x = 2$

$$f(2) = 2^2+1 = 5$$

$$\lim_{y\to2^+} f(x) = \lim_{y\to2^+} x^2+1 = 2^2+1 = 5$$

$$\lim_{y\to2^-} f(x) = \lim_{y\to2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{y\to2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{y\to2^-} x+2 = 2+2 = 4$$

(10) لتصبح الدالة $f$ : $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ متصلة عند $x = 1$، يجب إعادة تعريفها على الشكل التالي:

(a) $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} & , x \neq 1 \\ \frac{3}{2} & , x = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} & , x > 1 \\ \frac{3}{2} & , x = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} & , x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}$ معلق (d) لا يمكن إعادة تعريفها

**(11)** إذا كانت الدالة $f$ متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+f(x)) = 7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

ⓐ 3 ⓑ 5

ⓒ 9 ⓓ 11

$$\lim_{x\to -2}(x^2+f(x)) = 7$$

$$\lim_{x\to -2} x^2 + \lim_{x\to -2} f(x) = 7$$

$$4+\lim_{x\to -2} f(x) = 7$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 3 = f(-2)$$

F متصلة عند x=-2
∴النهاية = الصورة

---

**(12)** إذا كانت الدالة $g$ متصلة عند $x=1$ وكانت النقطة $(1\ ,\ -3)$ تقع على منحنى الدالة $g$ فإن $\lim\limits_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي:

ⓐ $-6$ ⓑ $-3$

ⓒ 1 ⓓ 9

g متصلة عند x=1
∴النهاية = الصورة

$$g(1) = -3$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = -3$$

$$\lim_{x\to 1}(g(x))^2 = (\lim_{x\to 1} g(x))^2 = (-3)^2 = 9$$

---

في التمارين (13—15)، توجد قائمتان. اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2) لتحصل على عبارة صحيحة:

إذا كانت $g$ دالة متصلة عند $x = a$ ، $a \in \mathbb{Z}$ و كانت:

| القائمة (1) | القائمة (2) |
|---|---|
| (13) $g(x) = \begin{cases} x+1 & : \quad x > a \\ 3-x & : \quad x \le a \end{cases} \quad \Rightarrow a =$ | ⓐ $-1$ |
| | ⓑ $2$ |
| (14) $g(x) = \begin{cases} 2ax-2 & : \quad x \ne a \\ 3a & : \quad x = a \end{cases} \quad \Rightarrow a =$ | ⓒ $0$ |
| | ⓓ $1$ |
| (15) $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & : \quad x > a \\ 2x & : \quad x \le a \end{cases} \quad \Rightarrow a =$ | ⓔ $\frac{2}{3}$ |

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x)$$
$$a + 1 = 3 - a$$
$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

الدالة المتصلة
النهاية موجودة
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$
$$2a^2 - 2 = 3a$$
$$2a^2 - 3a - 2 = 0$$
$$(a-2)(2a+1) = 0$$
$$a = 2, a = \frac{-1}{2}$$

مرفوض لأن a عدد صحيح من رأس السؤال

الدالة المتصلة
الصورة = النهاية

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x)$$
$$3a^2 = 2a$$
$$3a^2 - 2a = 0$$
$$a(3a-2) = 0$$
$$a = 0, a = \frac{2}{3}$$

مرفوض لأن a عدد صحيح من رأس السؤال

الدالة المتصلة
النهاية موجودة
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

# بند ( 1 – 6 ) نظريات الإتصال

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $f$: $f(x) = x^2 + |x-1|$ متصلة عند $x = 3$

**(a)** (b)

(2) الدالة $f$: $f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$

(a) **(b)**

$\frac{2}{x}$ غير معرفة عند $x = 0$

(3) الدالة $f$: $f(x) = \frac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x = 0$

**(a)** (b)

البسط دالة كثيرة حدود متصلة عند x= 0

المقام عبارة عن دالتين احدهما ثابتة والآخرى مطلق x كلاهما متصل عند x= 0

المقام $\neq 0$ عند x = 0

(4) الدالة $f$: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$

**(a)** (b)

البسط دالة جذر تكعيبي متصلة عند x= 3

المقام كثيرة حدود متصلة عند x= 3

المقام $\neq 0$ عند x = 3

(5) الدالة $f$: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ متصلة عند $x = 2$

**(a)** (b)

دالة ما تحت الجذر دالة كثيرة حدود متصلة عند x=2

نعوض عن x بـ 2 ونتحقق أن الناتج أكبر من الصفر

$-(2)^2 + 5(2) - 4 = 2 > 0$ -

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة $f$: $f(x) = \frac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

a 3    b $-3$

c 2    d لا يوجد

حدودية نسبية و المقام $\neq 0$ لجميع الأعداد الحقيقية

(7) نقاط انفصال الدالة $f$: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند:

a $1\ ,\ -1$    b $2\ ,\ -2$    c $1\ ,\ 2$    d $-1\ ,\ -2$

المقام = 0 عندما $x = \pm 1$    f حدودية نسبية و أصفار المقام 1- , 1

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

(8) لتكن الدالة $f$: $f(x) = x^2+3$ ، الدالة $g$ : $g(x) = \frac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g \circ f)(x)$ تساوي:

a $\frac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$    b $\frac{x^2}{x^2-3}$    c $\frac{x^2+3}{x^2}$    d $\frac{x^2}{x^2+3}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+3) = \frac{x^2+3}{x^2+3-3} = \frac{x^2+3}{x^2}$$

(9) لتكن الدالة $f$: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة $g$ : $g(x) = x^2+3$ ، فإن: $(f \circ g)(x)$ تساوي:

a $\frac{x^2}{x-3}+3$    b $\frac{x}{\sqrt{x-3}}+3$    c $\frac{-(x^2+3)}{x}$    d $\frac{x^2+3}{|x|}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3) = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3-3}} = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2+3}{|x|}$$

**(10)** لتكن الدالة $f$: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، $g$ : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

ⓐ 4 ⓑ $-4$
ⓒ 1 ⓓ $-1$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-3)=\sqrt{(x^2-3)^2+7}=$$
$$\sqrt{(0^2-3)^2+7}=\sqrt{9+7}=4$$

**(11)** إذا كانت $g$ دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

ⓐ $\sqrt{g(x)}$ ⓑ $\frac{1}{g(x)}$
ⓒ $\frac{g(x)}{x-2}$ ⓓ $|g(x)|$

a خطأ لأنه لم يذكر أن $g(2) > 0$
b. خطأ لأنه لم يذكر أن $g(2) \neq 0$
c. خطأ لأن المقام = 0 عندما $x=2$
d. عبارة صحيحة لأن دالة مطلق متصلة دائما على R

**(12)** إذا كانت الدالة $f$: $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن $a$ يمكن أن تساوي:

ⓐ 4 ⓑ 9
ⓒ 16 ⓓ 25

لابد أن يكون ما تحت الجذر أكبر من الصفرعند $x = 3$

$$3^2-4=5>0$$
$$3^2-9=0$$
$$3^2-16=-7$$
$$3^2-25=-16$$

# بند ( 7 – 1 ) الإتصال على فترة

## المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

**(1)** إذا كانت $f$ دالة متصلة على كل من $[3\ ,\ 5]$ , $[1\ ,\ 3)$ فإن $f$ متصلة على $[1\ ,\ 5]$

(a) (b)

خطأ لأننا لابد أن نتأكد من أن الدالة f متصلة عند x = 3 من جهة اليسار

**(2)** الدالة $f$: $f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

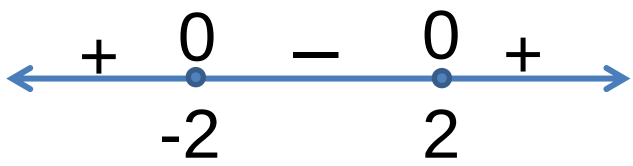
(a) (b)

لأن f عبارة عن ناتج طرح دالتين ( كثيرة حدود ومطلق x ) وكلاهما متصل لكل قيم x

**(3)** الدالة $f$: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$

(a) (b)

$$f(x) = \sqrt{g(x)}, g(x) = x^2 - 4$$
$$x^2 - 4 \geq 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 2, x = -2$$
$$g(x) \geq 0 \forall x \in R - (-2,2)$$




الدالة $g(x) < 0$ في الفترة $(-2\ ,\ 2)$

**(4)** الدالة $f$: $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 0)$

(a) (b)

الدالة f حدودية نسبية متصلة على R ماعدا أصفار المقام

أصفار المقام { -2 }

$\{-2\} \in (-\infty\ ,\ 0)$

(5) الدالة $f$: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 2)$ فقط

a b

هي غير متصلة عند فقط أصفار المقام وهي { 2 } ( متصلة على R/{2})

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة $f$: $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة $f$:

a لها نقطتي انفصال عند كل من $x=-1\ ,\ x=4$

b متصلة على $(-\infty\ ,\ 4]$

c متصلة على مجالها

d ليس أي مما سبق

متصلة $\forall x\in R-\{4\}$

متصلة على $(-\infty,4),(4,\infty)$

الدالة f لها نقطة انفصال عند أصفار المقام التي لا يمكن التخلص عند {4}

(7) إذا كانت $f$ دالة متصلة على $[-2\ ,\ 3]$ فإن:

a $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$

b $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=f(3)$

c $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=f(-2)$

d $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=f(-2)$

الدالة متصلة على الفترة المفتوحة ( 3 , 2-)

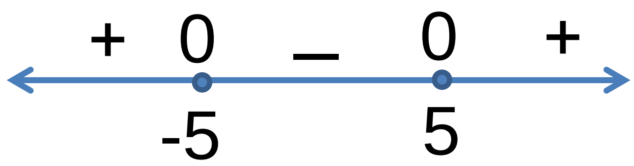
الدالة متصلة عند x=-2 من جهة اليمين $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=f(-2)$

الدالة متصلة عند x=3 من جهة اليسار $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=f(3)$

**(8)** الدالة $f$: $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty \,,\, \frac{1}{2}]$  ⓑ $(5 \,,\, \infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$  ⓓ $(-5 \,,\, 5)$




لابد أن يكون ما تحت الجذر ≥ 0

المجال $R-(-5,5)=(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$

لابد أن يكون المقام لا يساوي 0 $x \neq \pm 5$

∴ الدالة f متصلة $\forall x \in (-\infty,-5)\cup(5,\infty)$

---

**(9)** لتكن $f$: $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} & : \quad x \leqslant -3 \\ \frac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : \quad -3 < x < 0 \\ \frac{4-x^2}{x-2} & : \quad x \geqslant 0 \end{cases}$ ، فإن $f$ دالة متصلة على:

ⓐ $(-\infty \,,\, \infty)$  ⓑ $(-\infty \,,\, 2)$

ⓒ $(-\infty \,,\, 0]$  ⓓ $(-\infty \,,\, -3]$


الدالة f متصلة على [-3,∞ - ) ( دالة ثابتة )
والدالة f متصلة عند x=3 من جهة اليمين ( الصورة = النهاية من جهة اليمين )

من الفرع الثاني الدالة f متصلة على ( 3, 0 - )
لأنه
لا يوجد أصفار للمقام و مجال الجذر هو كل الأعداد الحقيقية

من الفرع الثالث f متصلة $\forall x \in [0,\infty)-\{2\}$
والدالة f غير متصلة عند x=0 من جهة اليسار ( الصورة ≠ النهاية من جهة اليسار )

**(10)** الدالة $f$ : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+m}{x-2} & : \quad x<1 \\ x+n & : \quad x>1 \\ 2m & : \quad x=1 \end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

ⓐ $m=-1 \quad , \quad n=3$
ⓑ $m=1 \quad , \quad n=-3$
ⓒ $m=-1 \quad , \quad n=-3$
ⓓ $m=1 \quad , \quad n=3$

الدالة f متصلة على R اذا f متصلة عند x=1

$$\lim_{x\to1} f(x)= f(1)=2m$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} x+n \Rightarrow \boxed{1+n=2m}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} \frac{3x+m}{x-2}=\frac{3+m}{-1}=2m \Rightarrow$$

$$3+m=-2m \Rightarrow 3=-3m \Rightarrow \boxed{m=-1}$$

$$1+n=2m \Rightarrow 1+n=2\times-1 \Rightarrow 1+n=-2 \Rightarrow \boxed{n=-3}$$

**(11)** الدالة $g$ : $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & : \quad x>1 \\ 3x & : \quad x\le 1 \end{cases}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty \,,\, 1] \,,\, (1 \,,\, \infty)$
ⓑ $(-\infty \,,\, 1) \,,\, [1 \,,\, \infty)$
ⓒ $(-\infty \,,\, \infty)$
ⓓ $(-\infty \,,\, 3]$

1

من الفرع الأول حدودية نسبية ( أصفار المقام هي 1 ) الدالة g متصلة على ( ∞ , 1 )

من الفرع الثاني كثيرة حدود متصلة على [ 1, ∞- )

وببحث الإتصال عند x = 1 من جهة اليمين

$$g(1)=3\times1=3$$

$$\lim_{x\to1^+} g(x)=1-1=0$$

$$g(1)\neq \lim_{x\to1^+} g(x)$$

الدالة g غير متصلة عند x= 1 من جهة اليمين