الوحدة الثانية

الإشتقاق

① أوجد ميل المماس للقطع المكافئ P.78

$y = (x-2)^2 + 2$

عند النقطة $A(1,3)$

ميل القاطع

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h-2)^2 + 2 - 3}{h}$$

$$= \frac{(h-1)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 - 2h + 1 - 1}{h} = \frac{h^2 - 2h}{h}$$

$$= \frac{h(h-2)}{h} = h - 2$$

نهاية ميل القاطع

$$\lim_{h \to 0} h - 2 = -2$$

∴ ميل المماس للقطع المكافئ عند A

$m = -2$

طريقة ثانية

$$\text{ميل المماس} = m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h-2)^2 + 2 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h + 1 + 2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h - 2) = 2$$

المشتقة

① باستخدام التعريف اوجد مشتقة الدالة f P.80

$f(x)=3x^2$: $x=-2$ عند

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$ «!!مروجبت»

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(-2+h)^2-3(-2)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(4-4h+h^2)-12}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{12-12h-3h^2-12}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}-3(4+h)$$

$$=-3(4+0)=-12 \Rightarrow f'(-2)=-12$$

---

② اوجد مشتقة الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $x=b : b\neq 0$ P.81

باستخدام تعريف المشتقة البديل

$$f'(b)=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{x-b}$$ «!!مروجبت»

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{b-x}{x\cdot b}}{x-b}=\lim_{x\to b}\frac{\overset{-1}{\cancel{(b-x)}}}{x\cdot b\,\underset{1}{\cancel{(x-b)}}}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{-1}{x\cdot b}=\frac{-1}{b^2}$$

$$\therefore f'(b)=\frac{-1}{b^2}$$

$f(x)=|x-2|$ لتكن ③ P.82

ابحث قابلية الإشتقاق للدالة f عند $x=2$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$f(x)=|x-2| = \begin{cases} x-2 & ; \quad x>2 \\ 2-x & ; \quad x\leq 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2+h-2-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{2-(2+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1$$

$$\therefore f'_+(2)\neq f'_-(2)$$

$\therefore f'(2)$ ليست موجوده

أي أن الدالة f ليس لها مشتقه عند $x=2$

2 مكرر

④ بين أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x=-1$ P. 83

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & : x\leq -1\\[2mm] \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2} & : x>-1\end{cases}$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$ «إن وجدت»

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{-1}\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}(-1-1)=-1$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$ «إن وجدت»

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{-1}\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{x+1}{x}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\therefore\quad f'_+(-1)=f'_-(-1)=-1$$

P. 84 ⑤ اوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$f(x) = x^2 + 2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{2} - \cancel{x^2} - \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h$$

$$= 2x$$

$$\therefore f'(x) = 2x$$

* ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$
$x=-2$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : x\leq -2 \ , \ x\geq 2 \\ 4-x^2 & : -2<x<2 \end{cases}$$

x^2-4	-2	$4-x^2$	2	x^2-4

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4-0}{x-2}$$ المشتقة

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2^+} x+2=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{4-x^2-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=-4$$

$$\therefore\ f'_-(2)\neq f'_+(2)\qquad \therefore\ f'(2)$$ غير موجودة

$$f'_+(-2)=\lim_{x\to -2^+}\frac{4-x^2-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{-\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=4$$

$$f'_-(-2)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=-4$$

$$\therefore\ f'_-(-2)\neq f'_+(-2)$$

$\therefore$ غير موجودة $f'(-2)$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام تعريف المشتقة للدالة *

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{h(x+h)x} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{-1}{\cancel{-h}}}{\cancel{h}(x^2+xh)} = \frac{-1}{x^2}$$

---

⑥ ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$ P.86

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : \quad x \leq 2 \\ 3x - 2 & : \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2^2 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x - 2) = 3(2) - 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 0$$

$$\because \lim_{x \to 2^+} \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

$$f(2) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x=2$ $\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

⑦ P. 87 بين ان الدالة f متصلة , غير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 : x > -\frac{1}{3} \\ 5x+1 : x \leqslant -\frac{1}{3} \end{cases}$$

دراسة الاتصال عند $x = -\frac{1}{3}$

$$f(-\tfrac{1}{3}) = 5(\tfrac{-1}{3}) + 1 = \tfrac{-2}{3}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} (-x-1) = -(-\tfrac{1}{3}) - 1 = \tfrac{-2}{3}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} (5x+1) = \tfrac{-2}{3}$$

$$\because \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} f(x) = \tfrac{-2}{3}$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{-1}{3}} f(x) = \tfrac{-2}{3} = f(\tfrac{-1}{3})$$

$\therefore$ f متصلة عند $x = \frac{-1}{3}$

دراسة قابلية الاشتقاق عند $x = \frac{-1}{3}$

$$f'_-(\tfrac{-1}{3}) = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{3})}{x - (-\frac{1}{3})} = \frac{5x+1 - \frac{-2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} \frac{5x + \frac{5}{3}}{x + \frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} \frac{5(x + \frac{1}{3})}{(x + \frac{1}{3})} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} 5 = 5$$

$$f'_+(\tfrac{-1}{3}) = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{3})}{x - (-\frac{1}{3})} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{-x-1-(\frac{-2}{3})}{x + \frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{-x-1+\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{-x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{-(x + \frac{1}{3})}{x + \frac{1}{3}} = -1$$

$$\because f'_-(-\tfrac{1}{3}) \neq f'_+(-\tfrac{1}{3})$$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

* ادرس اتصال الدالة f عند $x=1$
وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+1} & ; x\leq 1\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & ; x>1\end{cases}$$

* دراسة الإتصال عند $x=1$

$$f(1)=\frac{1+1}{1^2+1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{2}(x)+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(1)+\frac{3}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{1+1}{1^2+1}=1$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$

* دراسة الإشتقاق عند $x=1$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{2}(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to 1^+}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x+1}{x^2+1}-1}{x-1}=\lim\frac{\frac{x+1-x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x(\cancel{x-1})}{(x^2+1)(\cancel{x-1})}=\frac{-1}{2}$$

$$\because f'_-(1)=f'_+(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ f قابلة للإشتقاق عند $x=1$

اي ان f متصلة وقابلة للإشتقاق عند $x=1$

P.88 ادرس اتصال الدالة f عند $x=1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1} & ; x \leq 1 \\ 2x-1 & ; x > 1 \end{cases}$$

* دراسة الإتصال عند $x=1$

$$f(1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} 2x-1 = 2(1)-1 = 1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) \ \lim_{x\to1^-} \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 1$$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$

* دراسة الإشتقاق عند $x=1$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{2x-1-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} 2 = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{\frac{2}{x^2+1}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{\frac{2-x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{-x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to1^-} -(x+1) = -2$$

$$\therefore f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

بالرغم من أنه f متصلة عند $x=1$

f للدالة $f'(-1)$ أوجد إن أمكن ⑨ P. 89

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & ; x \leqslant -1 \\ x^2-x-2 & ; x > -1 \end{cases}$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+x-((-1)^2+(-1))}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} x = -1$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)}$$

$$= \lim \frac{x^2-x-2-0}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} (x-2) = -1-2 = -3$$

$$\therefore f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$$

$\therefore$ $f'(-1)$ غير موجودة