رسم بيان دوال كثيرات الحدود
Graph of Polynomial Functions

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

دراسة تغير دالة كثيرة الحدود

1. عيّن مجال الدالة f.

مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2. أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.
3. عيّن النقاط الحرجة للدالة f.
4. كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.
5. كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.
6. أوجد نقاطًا إضافية.

تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7. ارسم بيان الدالة f. استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

حاول أن تحل (1) / page 149

ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

الحل:

① $\because$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\ x^3\ ) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\ x^3\ ) = \infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3\ (\ x^2 - 4x + 3\ ) = 0$$

$$3\ (x-1)\ (x-3) = 0 \implies x = 3 \quad , \quad x = 1$$

$$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 4 \qquad \therefore\ f(1) = 0$$

$$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 4 \qquad \therefore\ f(3) = -4$$

تابع / الحل $\therefore$ $(1,0), (3,-4)$ نقطتان حرجتان.

تابع / الحل

④ نكون جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية إن وجدت.

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , 1)$	1	$(1 , 3)$	3	$(3 , \infty)$	∞
إشارة f'		$+ +$	0	$- -$	0	$+ +$	
سلوك f		↗	ق.ع.م	↘	ق.ص.م	↗	

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty , 1)$ والفترة $(3 , \infty)$

الدالة متناقصة على الفترة $(1 , 3)$

للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = 1$ وهي $f(1) = 0$ $\Leftarrow$ $\therefore$ $(1 , 0)$ نقطة عظمى محليّة

للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = 3$ وهي $f(3) = -4$ $\Leftarrow$ $\therefore$ $(3 , -4)$ نقطة صغرى محليّة

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

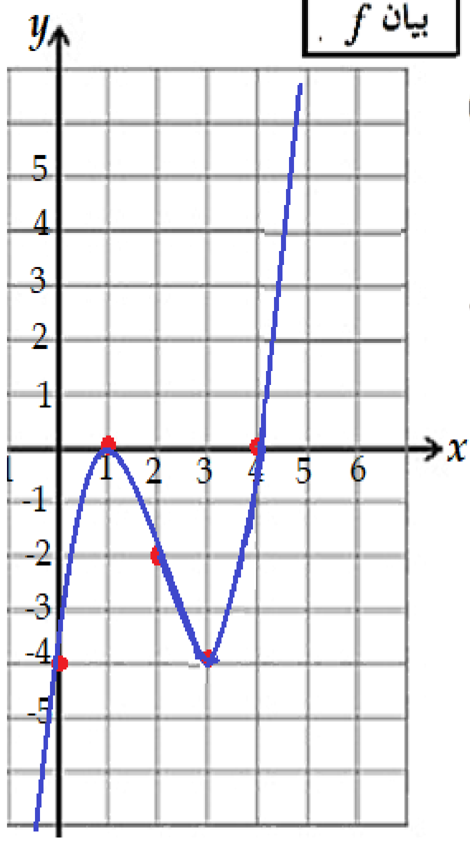
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$6x - 12 = 0 \implies 6x = 12 \implies x = \frac{12}{6} \implies x = 2$$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , 2)$	2	$(2 , \infty)$	∞
إشارة f''		$- -$	0	$+ +$	
بيان f		$\frown$	ن.ع	$\smile$	



نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(-\infty , 2)$

بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على الفترة $(2 , \infty)$

للدالة f نقطة الانعطاف عند $x = 2$

لإيجاد نقطة الانعطاف: $f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) - 4 = -2$

$\therefore$ $(2 , 2)$ نقطة انعطاف

⑥ أوجد نقط إضافية

مع اضافة النقاط المعلومة في الحل

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-20	-4	0	-2	-4	0	16
	نقطة اضافية	نقطة اضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة اضافية	نقطة اضافية

حاول أن تحل (2) / page 150

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

الحل: ① $\because$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-2x^3) = -\infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة $\quad f(x) = x - 2x^3$

نضع: $f'(x) = 0 \quad f'(x) = 1 - 6x^2$

$$1 - 6x^2 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{6} \implies x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$x \approx \pm 0.41$$

$f(-0.41) = -0.41 - 2(-0.41)^3$ | $f(0.41) = 0.41 - 2(0.41)^3$

$\therefore f(-0.41) \approx -0.3$ | $\therefore f(0.41) \approx 0.3$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي $(-0.41 , -0.3) , (0.41 , 0.3)$

④ نكون جدولاً لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية إن وجدت.

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , -0.41)$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$(-0.41 , 0.41)$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$(0.41 , \infty)$	∞
إشارة f'		$- -$	0	$+ +$	0	$- -$	
سلوك f		↘	ق.ص.م	↗	ق.ع.م	↘	

الدالة متزايدة على الفترة $(-0.41 , 0.41)$

الدالة متناقصة على كل من الفتره $(0.41 , \infty)$ والفترة $(-\infty , -0.41)$

للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0.3$ وهي $f(0.41) \approx 0.3$

$\boxed{\therefore (0.41 , 0.3) \text{ نقطة عظمى محليّة}}$

للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \approx -0.3$ وهي $f(-0.41) \approx -0.3$

$\boxed{\therefore (-0.41 , -0.3) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

$f'(x) = 1 - 6x^2$

$f''(x) = -12x$

نضع: $f''(x) = 0$

$-12x = 0 \Longrightarrow x = 0$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , 0)$	0	$(0 , \infty)$	∞
إشارة f''		+ +	0	− −	
بيان f		∪	ن.ع	∩	

نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(0 , \infty)$

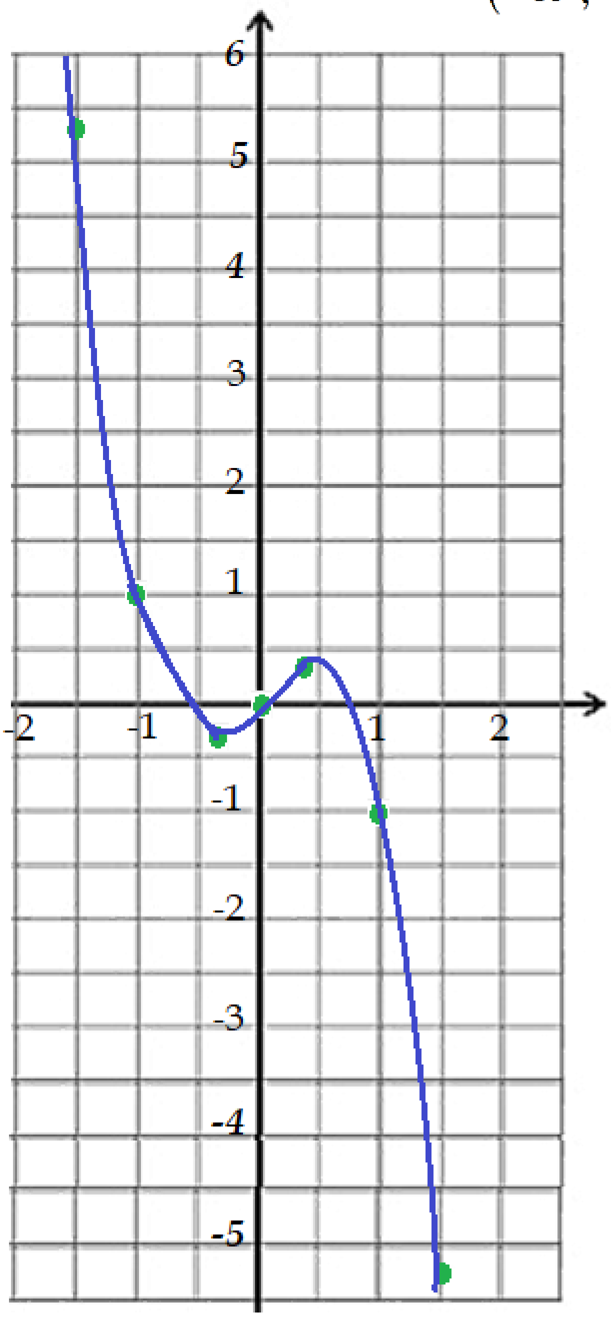
بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على الفترة $(-\infty , 0)$

للدالة f نقطة الانعطاف عند $x = 0$

لإيجاد نقطة الانعطاف: $f(0) = 0 - 2(0)^3 = 0$

$\boxed{\therefore \text{ نقطة الانعطاف } (0 , 0)}$

x	-1.5	-1	-0.41	0	0.41	1	-1.5
y	5.25	1	-0.3	0	0.3	-1	-5.25
	نقطة إضافية	نقطة اضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة انعطاف	نقطة عظمى محلية	نقطة اضافية	نقطة اضافية



حاول أن تحل (3) صفحة 151

الحل: ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها

① $\because$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^4) = \infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة $f'(x) = 4x^3 - 4x$

نضع: $f'(x) = 0 \implies 4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2 - 1) = 0$

$4x = 0$, $x = \pm 1$

$x = 0$, $x = -1$, $x = 1$

$f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(-1) = -1$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي $(-1, -1)$ $(1, -1)$, $(0, 0)$

④ نكون جدولاً لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية إن وجدت.

الفترات	$-\infty$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$	∞
إشارة f'		$- -$	0	$+ +$	0	$- -$	0	$+ +$	
سلوك f		$\searrow$	ق.ص.م	$\nearrow$	ق.ع.م	$\searrow$	ق.ص.م	$\nearrow$	

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-1, 0)$ والفترة $(1, \infty)$

الدالة متناقصة على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(0, 1)$

للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = 0$ وهي $f(0) = 0$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\therefore (0, 0) \text{ نقطة عظمى محليّة}}$

للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = -1$ وهي $f(-1) = -1$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\therefore (-1, -1) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = 1$ وهي $f(1) = -1$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\therefore (1, -1) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

نضع: $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 4 = 0 \implies 12x^2 = 4 \implies x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \implies x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3} , \frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3} , \infty)$	∞
إشارة f''		$+ +$	0	$- -$	0	$+ +$	
بيان f		$\cup$		$\cap$	ن.ع	$\cup$	

نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على كل من الفترة $(-\infty , -\frac{\sqrt{3}}{3})$ والفترة $(-\frac{\sqrt{3}}{3} , \frac{\sqrt{3}}{3})$

بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(\frac{\sqrt{3}}{3} , \infty)$

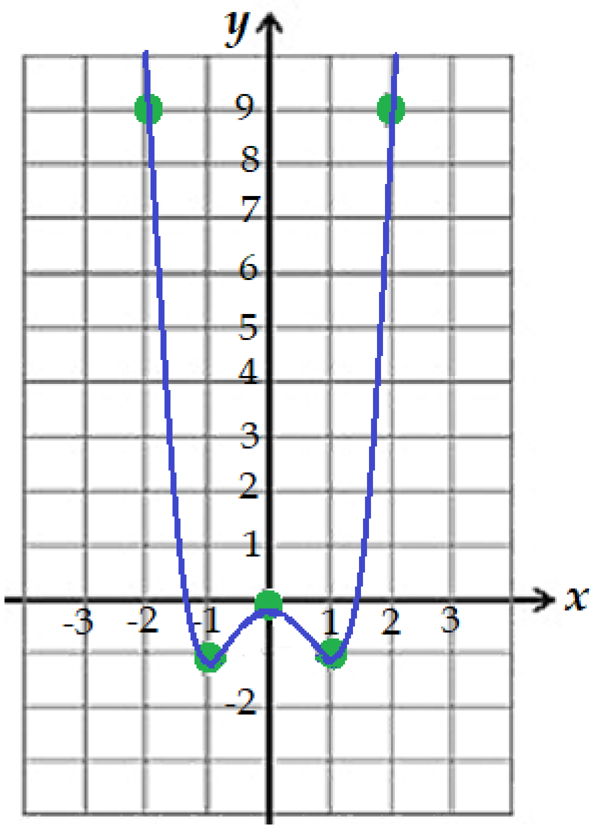
للدالة f نقطة الانعطاف عند $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

إيجاد نقطة الانعطاف:

$$f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{3})^4 - 2(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = -\frac{5}{9}$$

$\therefore$ $(\frac{\sqrt{3}}{3} , -\frac{5}{9})$ نقطة الانعطاف

x	-2	-1	0	1	2
y	8	-1	0	-1	8
	نقطة اضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة عظمى محلية	نقطة صغرى محلية	نقطة اضافية



حاول أن تحل (4) صفحة 153

ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها.

الحل

① $\because$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^4) = \infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة　　$f'(x) = 4x^3 - 16x$

نضع: $f'(x) = 0$　　$4x^3 - 16x = 0$

$$4x(x^2 - 4) = 0 \implies x = 0 \quad , \quad x = \pm 2$$

$$f(0) = 7 \quad , \quad f(-2) = -9 \quad , \quad f(2) = -9$$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي $(2 , -9)$, $(-2 , -9)$, $(0 , 0)$

④ نكون جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية إن وجدت.

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , -2)$	-2	$(-2 , 0)$	0	$(0 , 2)$	2	$(2 , \infty)$	∞
إشارة f'		$- -$	0	$+ +$	0	$- -$	0	$+ +$	
سلوك f		↘	ق.ص.م	↗	ق.ع.م	↘	ق.ص.م	↗	

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-2 , 0)$ والفترة $(2 , \infty)$

الدالة متناقصة على كل من الفترة $(-\infty , -2)$ والفترة $(0 , 2)$

للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = 0$ وهي $f(0) = 0$ $\Leftarrow$ $\boxed{\therefore (0 , 0) \text{ نقطة عظمى محليّة}}$

للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = -2$ وهي $f(-2) = -9$ $\Leftarrow$ $\boxed{\therefore (-2 , -9) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = 2$ وهي $f(2) = -9$ $\Leftarrow$ $\boxed{\therefore (2 , -9) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$12x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = \frac{16}{12} \Longrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

الفترات	$(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty)$
إشارة f''	$+\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +$
بيان f		ن.ع		ن.ع	

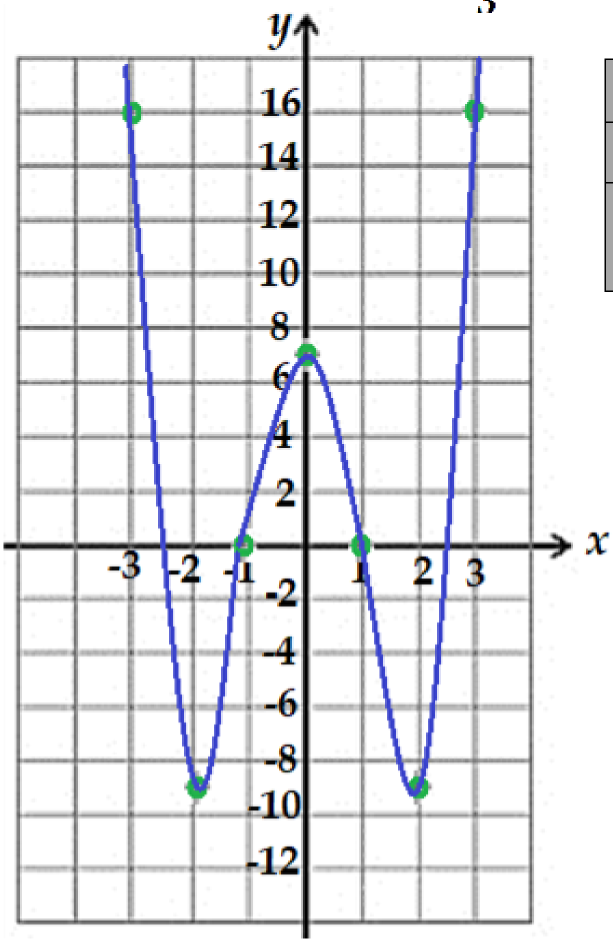
نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على كل من الفترة $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty)$ والفترة $(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$

بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

للدالة f نقطتي انعطاف عند $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = -1\frac{8}{9}$ ، $f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = -1\frac{8}{9}$

$\therefore$ نقاط الانعطاف هي $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1\frac{8}{9})$ ، $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1\frac{8}{9})$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	16	-9	0	7	0	-9	16
	نقطة اضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة اضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة اضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة اضافية

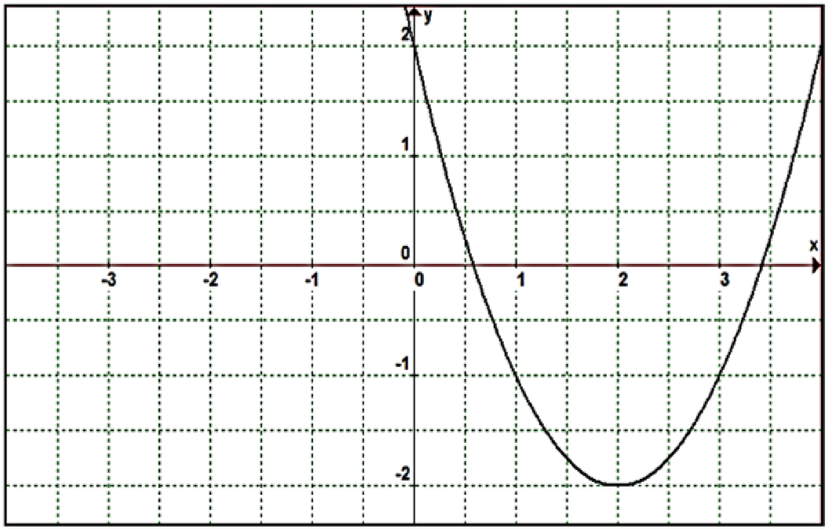
في التمرينين (2−1)، استخدم جدول دراسة إشارة f' لتحديد مجال f ورسم بيان تقريبي لمنحنى الدالة f.

(1)

$-\infty \quad 2 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty\ ,\ 2)$	$(2\ ,\ \infty)$
إشارة f'	$-\ -$	$+\ +$
سلوك f	↘	↗

علمًا بأن: $f(2) = -2$



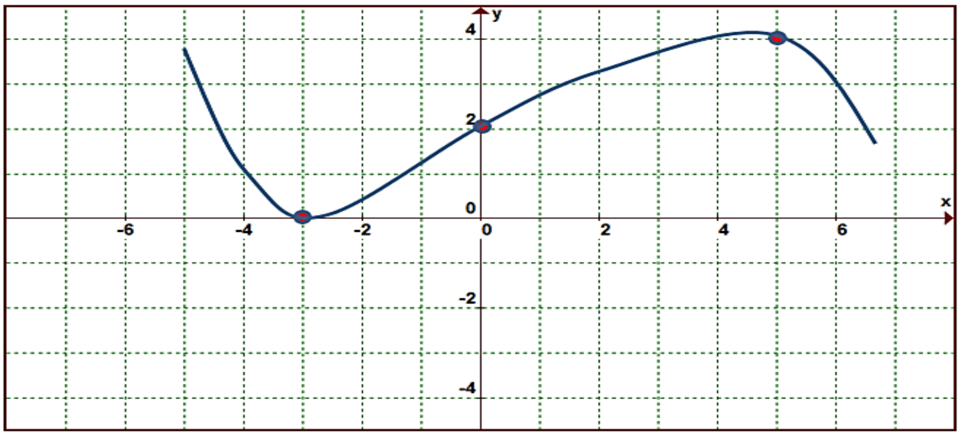
في التمرينين (2−1)، استخدم جدول دراسة إشارة f' لتحديد مجال f ورسم بيان تقريبي لمنحنى الدالة f.

(2)

$-\infty \quad -3 \quad 0 \quad 5 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty\ ,\ -3)$	$(-3\ ,\ 0)$	$(0\ ,\ 5)$	$(5,\ \infty)$
إشارة f'	$-\ -$	$+\ +$	$+\ +$	$-\ -$
سلوك f	↘	↗	↗	↘

علمًا بأن: $f(-3) = 0$ و $f(0) = 2$ و $f(5) = 4$



تمرين (3) page 59 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$

الحل:

① $\because$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3) = \infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x = \frac{-2}{3} \quad , \quad x = 2$$

$f(-\frac{2}{3}) = (\frac{-2}{3})^3 - 2(\frac{-2}{3})^2 - 4(\frac{-2}{3}) + 7$ | $f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 4(2) + 7 = -1$

$\therefore f(-\frac{2}{3}) \approx 8.5$ | $\therefore f(2) = -1$

$\therefore$ $(\frac{-2}{3}, 8.5), (2, -1)$ نقطتان حرجتان.

④ نكون جدولاً لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية إن وجدت.

الفترات	$-\infty$	$(-\infty, \frac{-2}{3})$	$\frac{-2}{3}$	$(\frac{-2}{3}, 2)$	2	$(2, \infty)$	∞
إشارة f'		$++$	0	$--$	0	$++$	
سلوك f		$\nearrow$	ق.ع.م	$\searrow$	ق.ص.م	$\nearrow$	

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(2, \infty)$ والفترة $(-\infty, \frac{-2}{3})$

الدالة متناقصة على الفترة $(\frac{-2}{3}, 2)$

للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = \frac{-2}{3}$ وهي $f(-\frac{2}{3}) \approx 8.5$ $\Leftarrow$ $\therefore$ $(\frac{-2}{3}, 8.5)$ نقطة عظمى محليّة

للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = 2$ وهي $f(2) = -1$ $\Leftarrow$ $\therefore$ $(2, -1)$ نقطة صغرى محليّة

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$6x - 4 = 0 \implies 6x = 4 \implies x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

الفترات	$(-\infty\ ,\ \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}\ ,\ \infty)$
إشارة f''	$-\ -$	0	$+\ +$
بيان f		ن.ع	

نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(-\infty\ ,\ \frac{2}{3})$

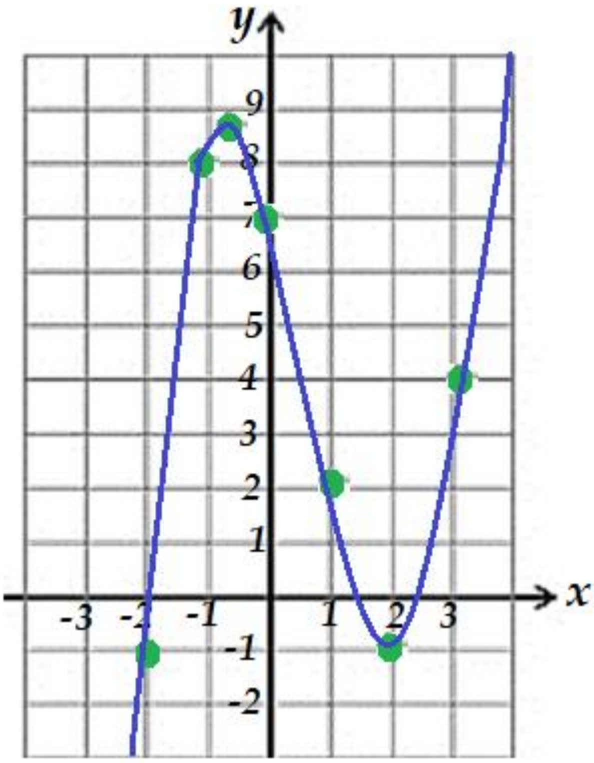
بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على الفترة $(\frac{2}{3}\ ,\ \infty)$

للدالة f نقطة الانعطاف عند $x = \frac{2}{3}$

لإيجاد نقطة الانعطاف: $f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{3}) + 7 \approx 3.7$

$\therefore$ $(\frac{2}{3}\ ,\ 3.7)$ نقطة الانعطاف

x	-3	-2	-1	-0.7	0	0.7	1	2	3
y	-26	-1	8	8.5	7	3.7	2	-1	4
	نقطة اضافية	نقطة اضافية	نقطة اضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة اضافية	نقطة انعطاف	نقطة اضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة اضافية



تمرين (4) page 59 ادرس تغير الدالة g : $g(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$

الحل

① $\because$ g دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة g متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^4}{4}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^4}{4}\right) = \infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة $\qquad g'(x) = \frac{4}{4}x^3 - 4x$

نضع: $g'(x) = 0 \qquad x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0 \implies x = 0 \quad , \quad x = \pm 2$

$g(0) = 5 \quad , \quad g(-2) = 1 \quad , \quad g(2) = 1$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي $(0 , 5)$, $(-2 , 1)$, $(2 , 1)$

④ نكون جدولاً لدراسة إشارة g' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية إن وجدت.

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , -2)$	-2	$(-2 , 0)$	0	$(0 , 2)$	2	$(2 , \infty)$	∞
إشارة g'		$- -$	0	$+ +$	0	$- -$	0	$+ +$	
سلوك g		$\searrow$	ق.ص.م	$\nearrow$	ق.ع.م	$\searrow$	ق.ص.م	$\nearrow$	

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-2 , 0)$ والفترة $(2 , \infty)$

الدالة متناقصة على كل من الفترة $(-\infty , -2)$ والفترة $(0 , 2)$

للدالة g قيمة عظمى محليّة عند $x = 0$ وهي $g(0) = 5 \Longleftarrow$ $\boxed{\therefore (0 , 5) \text{ نقطة عظمى محليّة}}$

للدالة g قيمة صغرى محليّة عند $x = -2$ وهي $g(-2) = 1 \Longleftarrow$ $\boxed{\therefore (-2 , 1) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

للدالة g قيمة صغرى محليّة عند $x = 2$ وهي $g(2) = 1 \Longleftarrow$ $\boxed{\therefore (2 , 1) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة g'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

$g'(x) = x^3 - 4x$

$g''(x) = 3x^2 - 4$

نضع: $g''(x) = 0$

$3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3} \implies x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , -\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{2\sqrt{3}}{3} , \frac{2\sqrt{3}}{3})$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{2\sqrt{3}}{3} , \infty)$	∞
إشارة f''		$+ +$	0	$- -$	0	$+ +$	
بيان f		$\cup$	ن.ع	$\cap$	ن.ع	$\cup$	

نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على كل من الفترة $(\frac{2\sqrt{3}}{3} , \infty)$ والفترة $(-\infty , -\frac{2\sqrt{3}}{3})$

بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(-\frac{2\sqrt{3}}{3} , \frac{2\sqrt{3}}{3})$

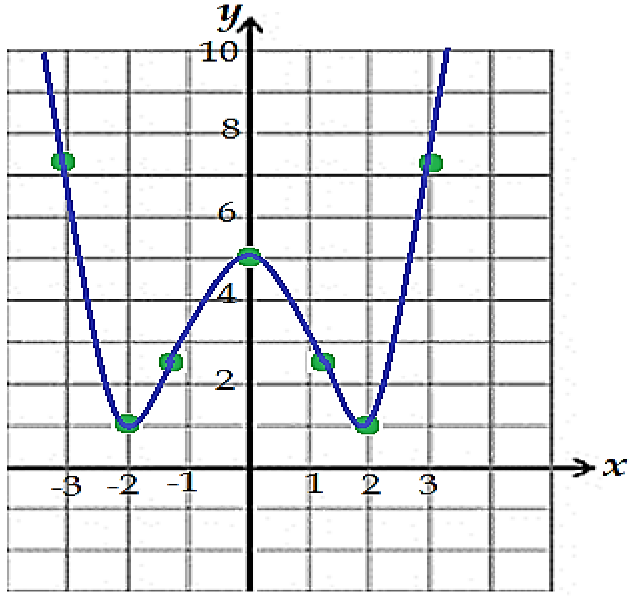
للدالة f نقطتي انعطاف عند $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad , \quad x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{25}{9} \quad , \quad f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{25}{9}$

$\therefore$ نقاط الانعطاف هي $(\frac{2\sqrt{3}}{3} , \frac{25}{9})$, $(-\frac{2\sqrt{3}}{3} , \frac{25}{9})$

تابع تمرين 4 صفحة 59 :

x	- 4	-3	-2	-1.2	0	1.2	2	3	4
y	37	7.3	1	2.5	5	2.5	1	7.3	37
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة انعطاف	نقطة عظمى محلية	نقطة صغرى محلية	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية	نقطة إضافية



تمرين (5) صفحة 59　ادرس تغير الدالة h : $h(x) = 8x^2 - x^4 - 8$ وارسم بيانها .

الحل

① ∵ h دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

∴ الدالة h متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^4) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} (-x^4) = \infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة　　$h'(x) = 16x - 4x^3$

نضع: $h'(x) = 0$　　$16x - 4x^3 = 0$

$$4x(4 - x^2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = \pm 2$$

$$h(0) = -8 \quad , \quad h(-2) = 20 \quad , \quad h(2) = 20$$

∴ النقاط الحرجة هي $(0\ ,-8)$, $(-2\ ,20)$, $(2\ ,20)$

④ نكون جدولًا لدراسة إشارة h' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية إن وجدت.

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , -2)$	-2	$(-2 , 0)$	0	$(0 , 2)$	2	$(2 , \infty)$	∞
إشارة h'		$- -$	0	$+ +$	0	$- -$	0	$+ +$	
سلوك h		↘	ق.ص.م	↗	ق.ع.م	↘	ق.ص.م	↗	

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-2 , 0)$ والفترة $(2 , \infty)$

الدالة متناقصة على كل من الفترة $(-\infty , -2)$ والفترة $(0 , 2)$

للدالة h قيمة عظمى محليّة عند $x = 0$ وهي $h(0) = -8$ $\Leftarrow$ $\boxed{\therefore (0 , -8) \text{ نقطة عظمى محليّة}}$

للدالة h قيمة صغرى محليّة عند $x = -2$ وهي $h(-2) = 20$ $\Leftarrow$ $\boxed{\therefore (-2 , 20) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

للدالة h قيمة صغرى محليّة عند $x = 2$ وهي $h(2) = 20$ $\Leftarrow$ $\boxed{\therefore (2 , 20) \text{ نقطة صغرى محليّة}}$

5 نكوّن الجدول لدراسة إشارة h'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

$$h'(x) = 16x - 4x^3$$

$$h''(x) = 16 - 12x^2$$

نضع: $h''(x) = 0$

$$16 - 12x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{16}{12} \Longrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , -\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{2\sqrt{3}}{3} , \frac{2\sqrt{3}}{3})$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{2\sqrt{3}}{3} , \infty)$	∞
إشارة h''		$- -$	0	$+ +$	0	$+ +$	
بيان h		∩	ن.ع	∪	ن.ع	∪	

نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة h مقعّر لأعلى على $(-\frac{2\sqrt{3}}{3} , \frac{2\sqrt{3}}{3})$

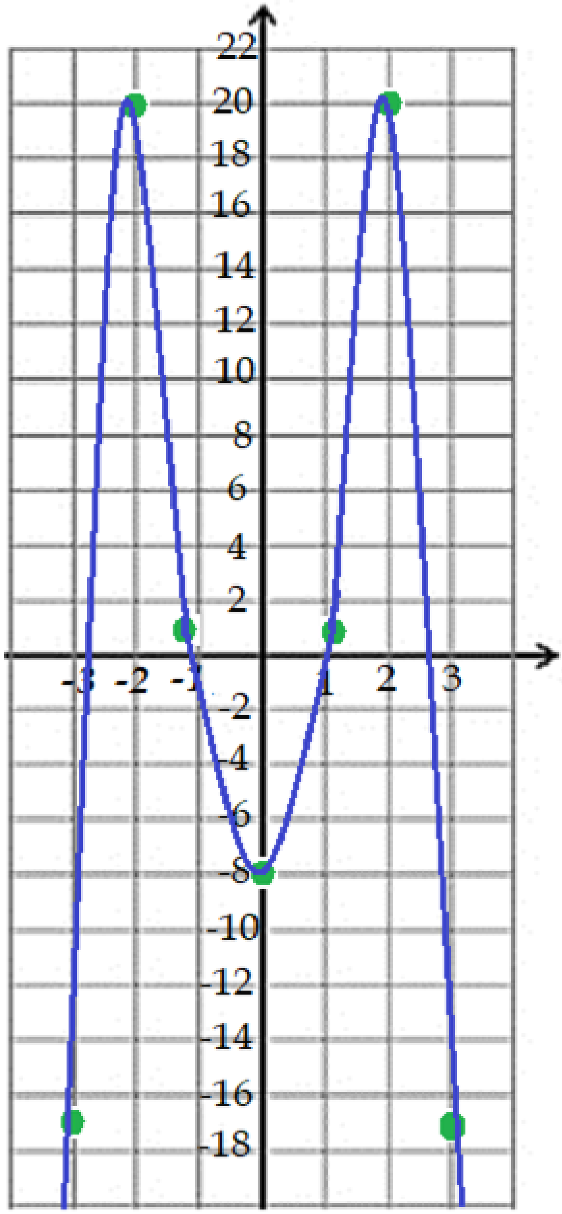
بيان الدالّة h مقعّر لأسفل على كل من الفترة $(\frac{2\sqrt{3}}{3} , \infty)$ والفترة $(-\infty , -\frac{2\sqrt{3}}{3})$

للدالة h نقطتي انعطاف عند $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$h(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{8}{9}$, $h(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{8}{9}$

$\therefore$ نقاط الانعطاف هي $(\frac{2\sqrt{3}}{3} , \frac{8}{9})$, $(-\frac{2\sqrt{3}}{3} , \frac{8}{9})$

x	-3	-2	-1.2	0	1.2	2	3
y	-17	20	0.9	-8	0.9	20	17
	نقطة اضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة انعطاف	نقطة عظمى محلية	نقطة اضافية


22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-3
-2
-1
1
2
3

تمرين (6) صفحة 59 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = -x^3 - 3x$ وارسم بيانها.

الحل: ① $\because$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة $f(x) = -x^3 - 3x$

$f'(x) = -3x^2 - 3$ نضع: $f'(x) = 0$

$\therefore \quad f'(x) = -3(x^2+1)$

$-3(x^2+1) = 0$

$x^2 = -1 \quad : \quad x \notin \mathbb{R}$

$\therefore$ لا توجد نقاط حرجة للدالة

$\therefore \quad f'(x) < 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة متناقصة دوماً لكل $x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ لا توجد قيم قصوى محلية

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

$\because \quad f'(x) = -3x^2 - 3$

$\therefore \quad f''(x) = -6x$

نضع: $f''(x) = 0$

$-6x = 0 \implies x = 0$

الفترات	$(-\infty\,,\,0)$	0	$(0\,,\,\infty)$
إشارة f''	$+\;+$	0	$-\;-$
بيان f	$\cup$	ن.ع	$\cap$

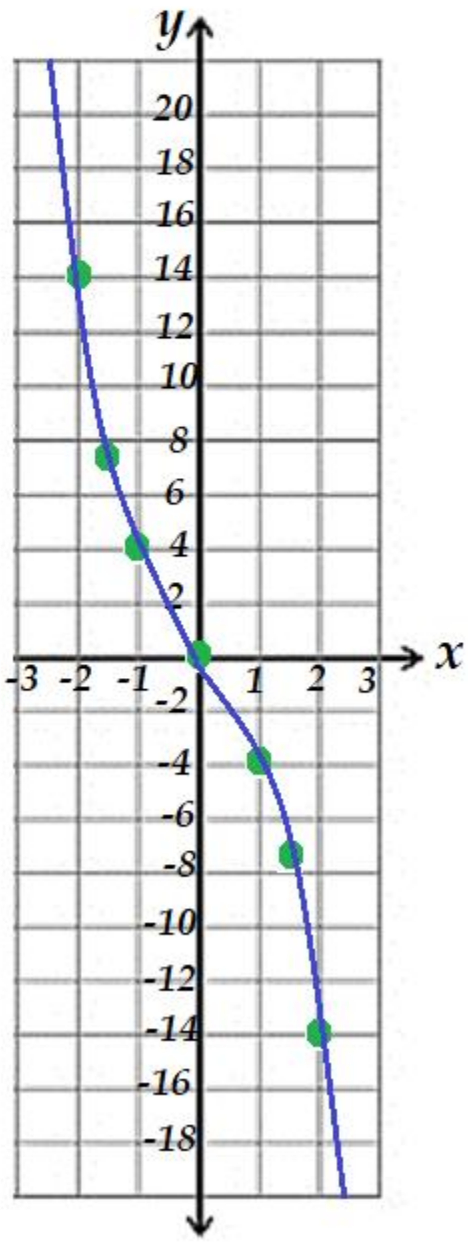
نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(0\,,\,\infty)$

بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على الفترة $(-\infty\,,\,0)$

للدالة f نقطة الانعطاف عند $x = 0$ وهي $(0\,,\,f(0))$

$\therefore$ $(0\,,\,0)$ نقطة الانعطاف

x	-3	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2	3
y	36	14	7.9	4	0	-4	-7.9	-14	-36



تمرين (7) صفحة 59

لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+1$ لكل عدد حقيقي x وليكن (C) منحنى هذه الدالة.

(a) ضع جدول التغير لـ f.

(b) لتكن A النقطة على (C) التي إحداثيها السيني 1.

أوجد معادلة مستقيم المماس l في A على منحنى الدالة.

(c) ارسم l و (C).

الحل : (a) ضع جدول التغير لـ f .

① $\because$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة ، وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}x^3\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}x^3\right)=\infty$$

③ نوجد النقاط الحرجة　　$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+1$

$$f'(x)=\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)(\cancel{3}x^2)-4x \implies f'(x)=2x^2-4x$$

نضع: $f'(x)=0$

$$2x^2-4x=0 \implies 2x(x-2)=0$$

$$\therefore\quad x=0\quad,\quad x=2$$

$$f(0)=1\quad,\quad f(2)=\frac{-5}{3}\approx -1.7$$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي $(0,1)$ ، $\left(2,\frac{-5}{3}\right)$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$	∞
إشارة f'		$- -$	0	$+ +$	0	$- -$	
f		↘	ق.ص.م	↗	ق.ع.م	↘	

الدالة متزايدة على الفترة $(0\ ,2)$

الدالة متناقصة على كل من الفترة $(2\ ,\infty)$ والفترة $(-\infty\ ,\ 0)$

للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x=2$ وهي $f(2)=\frac{-5}{3}\approx -1.7$

$\therefore$ $\left(2\ ,\frac{-5}{3}\right)$ نقطة عظمى محليّة

للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x=0$ وهي $f(0)=1$

$\therefore$ $(0\ ,1)$ نقطة صغرى محليّة

⑤ نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' : وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 4x - 4$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , 1)$	1	$(1 , \infty)$	∞
إشارة f''		$- -$	0	$+ +$	
بيان f		$\frown$	ن.ع	$\smile$	

نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $(-\infty , 1)$

بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على الفترة $(1 , \infty)$

للدالة f نقطة الانعطاف عند $x = 0$

لإيجاد نقطة الانعطاف: $f(0) = 1$

$\boxed{\therefore \text{ نقطة الانعطاف } (0,1)}$

الحل : **(b)** لتكن النقطة A على (C) التي إحداثيها السيني 1.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1$$

$$f(1) = \frac{2}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 1 = -\frac{1}{3}$$

$\therefore$ النقطة A هي $(1 , -\frac{1}{3})$

$$f'(x) = 2x^2 - 4x$$

ميل المماس هو m :

$$m\Big|_{x=1} = f'(1) = 2(1)^2 - 4(1) = -2$$

$\therefore$ معادلة المماس هي :

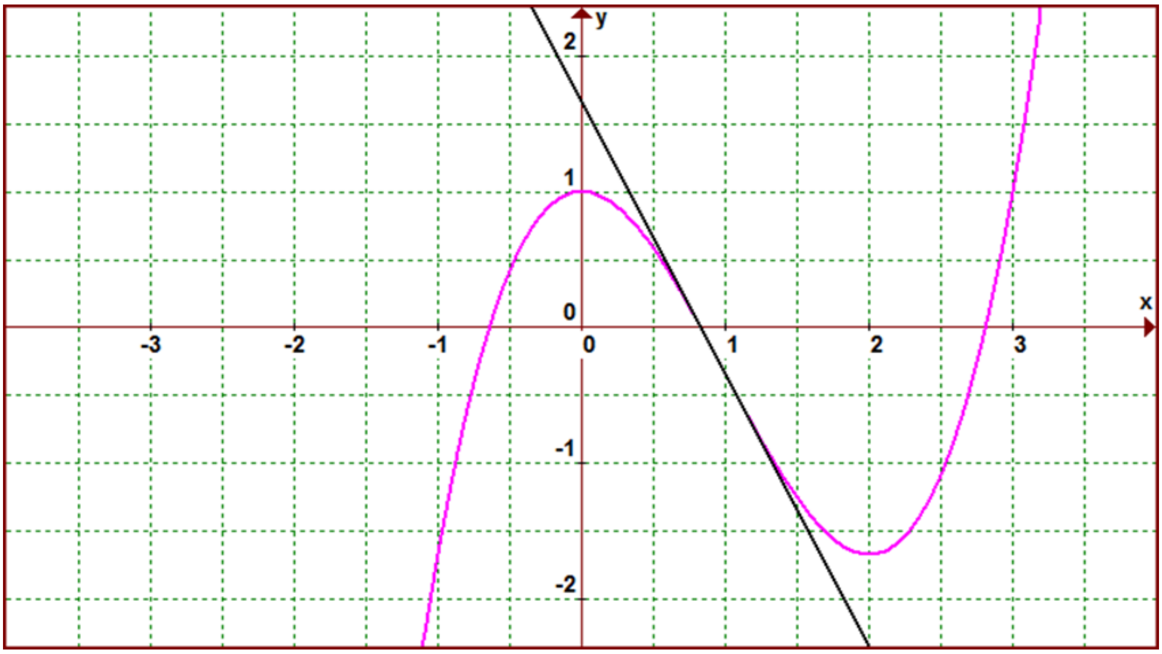
$$y - (-\frac{1}{3}) = -2(x - 1)$$

$$y + \frac{1}{3} = -2x + 2$$

$$y = -2x + 2 - \frac{1}{3}$$

$$y = -2x + \frac{5}{3}$$ وهو المطلوب

الحل : (c) ارسم l و (C).



تمرين (8) صفحة 60

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية.

استخدم جدول التغير التالي لإيجاد قيم a, b, c, d حيث $f(-2) = 5$ ، $f(0) = 1$

x	$-\infty$	-2	0	∞
إشارة f'	$+$	0	0	$+$
سلوك f	$-\infty$ ↗	↘	↗	$+\infty$

الحل :

من جدول التغير نجد أن المنحنى يمر بالنقطتين $(0 , 1)$, $(-2 , 5)$

$\because$ منحنى الدالة يمر بالنقطتين $(0 , 1)$ فهي تحقق معادلته

$\because \ f(-2) = 5$

$\therefore \ a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 5$

$-8a + 4b - 2c + 1 = 5$

$\therefore \ \boxed{-8a + 4b - 2c = 4}$ —— (1)

$\because \ f(0) = 1$

$\therefore \ a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 1$

$\boxed{\therefore \ d = 1}$

$f'(x) = 3a\,x^2 + 2bx + c$

$\because \ f'(-2) = 0$

$\therefore \ 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0$

$12a - 4b + c = 0$

$\boxed{12a - 4b = 0}$ —— (2)

$\because \ f'(0) = 0$

$\therefore \ 3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0$

$\boxed{\therefore \ c = 0}$

بالتعويض عن قيمة c في المعادلة (1) , (2)

بالجمع

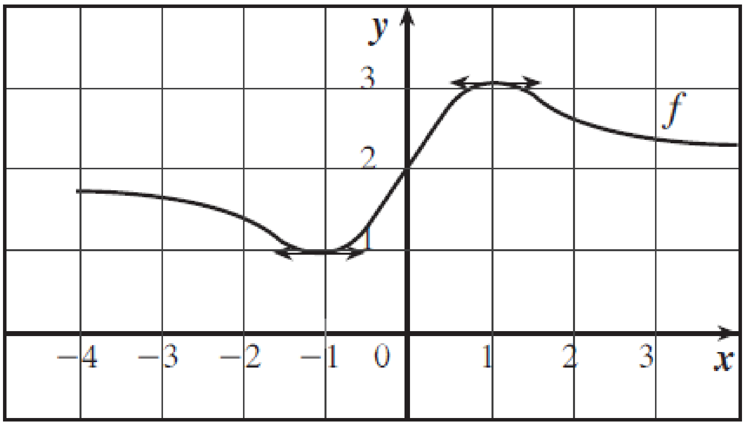
$$\begin{aligned} 12a - \cancel{4b} &= 0 \\ -8a + \cancel{4b} &= 4 \\ \hline 4a = 4 \implies & \boxed{a = 1} \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة a في أحد المعادلتين

$$12(1) - 4b = 0 \implies -4b = -12 \implies \boxed{b = 3}$$

تمرين (9) صفحة 60

كوّن جدولاً لدراسة إشارة f' من بيان الدالة f الممثلة بالرسم أدناه.



الحل:

من الجدول نلاحظ أن الدالة متناقصة على الفترتين $(-\infty , -1)$ ، $(1 , \infty)$

الدالة متزايدة على الفترة $(-1 , 1)$

$\because$ للدالة مماس أفقي عند $x = -1$, $x = 1$

$\therefore$ $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$

الفترات	$-\infty$	$(-\infty , -1)$	-1	$(-1 , 1)$	1	$(1 , \infty)$	∞
إشارة f'		$- -$	0	$+ +$	0	$- -$	
سلوك f		↘		↗		↘	