الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-1) الجذور والتعبيرات الجذرية (الحصة رقم .|..)

ملخص عدد الجذور الحقيقية لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور الحقيقية التكعيبية
موجب	2	1
صفر	1	1
سالب	0	1

$$\sqrt{x^2} = |x| = x \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

مثال باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

$\sqrt{0.25}$

$= \sqrt{\frac{25}{100}}$

$= \sqrt{\frac{(5)^2}{(10)^2}}$

$= \frac{5}{10} = 0.5$

$\sqrt{10^4}$

$= \cancel{\sqrt{}}(10^2)^{\cancel{2}}$

$= 10^2$

$= 100$

$\sqrt{400}$

$= \sqrt{(5)^2 \cdot (2)^4}$

$= \sqrt{(5)^2 \cdot (2^2)^2}$

$= (5) \cdot (2^2)$

$= 20$

$$\div$$
$$\begin{array}{r|l} 400 & 5 \\ 80 & 5 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$\sqrt{\frac{-16}{49}} \notin R$

$\sqrt{36 \times 25}$

$= \sqrt{(6)^2 X (5)^2}$

$= (6) \cdot (5)$

$= 30$

$\sqrt{\frac{12}{147}}$

$= \sqrt{\frac{4}{49}}$

$= \sqrt{\frac{(2)^2}{(7)^2}}$

$= \frac{2}{7}$

∀ لكل

$$(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

حاول أن تحل

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلية الحاسبة:

a -27

$\sqrt[3]{-27}$

$= \sqrt[3]{(-3)^3}$

$= -3$

b 64

$\sqrt[3]{64}$

$= \sqrt[3]{(2)^6}$

$= \sqrt[3]{(2^2)^3}$

$= 2^2$

$= 4$

c -0.008

$\sqrt[3]{-0.008}$

$= \sqrt[3]{\frac{-8}{1000}}$

$= \sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{(10)^3}}$

$= \frac{-2}{10} = -0.2$

d $\frac{343}{216}$

$\sqrt[3]{\frac{343}{216}}$

$= \sqrt[3]{\frac{(7)^3}{(2)^3 \cdot (3)^3}}$

$= \frac{7}{(2).(3)}$

$= \frac{7}{6}$

تبسيط الجذور

حتى يكون التعبير الجذري في **أبسط صورة** يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر.
- ألا يكون المقام جذرًا.
- ألا يكون المجذور كسرًا. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ ،ليس في أبسط صورة ،.
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن.

حاول أن تحل

② بسّط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية حيث x، y عددان حقيقيان:

ⓐ $\sqrt{9x^2y^4}$

$= \sqrt{(3)^2 x^2 (y^2)^2}$

$= |3xy^2|$

$= \begin{cases} 3xy^2 & : x \geqslant 0 \\ -3xy^2 & : x < 0 \end{cases}$

ⓑ $\sqrt[3]{-27x^6} + 3x^2$

$= \sqrt[3]{(-3)^3 (x^2)^3} + 3x^2$

$= -3x^2 + 3x^2$

$= 0$

ⓒ $\sqrt{x^8y^6}$

$= \sqrt{(x^4)^2 (y^3)^2}$

$= |x^4 y^3|$

مثال بسّط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

$\sqrt{16x^2}$

$= \sqrt{(2)^4 x^2}$

$= \sqrt{(2^2)^2 x^2}$

$= |4x|$

$\sqrt{8x^3}, \; x \geq 0$

$= \sqrt{(2)^3 x^3}$

$= \sqrt{(2)^2 \cdot (2)\, (x)^2 \cdot x}$

$= |2x\sqrt{2x}| = 2x\sqrt{x}$

$\sqrt[3]{-125y^6}$

$\sqrt[3]{(-5)^3 (y^2)^3}$

$= -5y^2$

$\sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}}, \; y \geq 0, \; x > 0$

$\sqrt{\frac{x^2y^5}{25}}$

$= \sqrt{\frac{x^2 y^4 \cdot y}{(5)^2}}$

$= \sqrt{\frac{x^2 (y^2)^2 y}{(5)^2}}$

$5\sqrt{216x^2 + 23\sqrt{64x^4}}, \; x > 0$

$= 5\sqrt{216x^2 + 23\sqrt{(2)^6 (x^2)^2}}$

$= 5\sqrt{216x^2 + 23\sqrt{(2^3)^2 (x^2)^2}}$

$= 5\sqrt{216x^2 + 23(8x^2)}$

$= 5\sqrt{216x^2 + 184x^2}$

$= 5\sqrt{400x^2}$

جمع وطرح التعبيرات الجذرية

لجمع التعبيرات الجذرية وطرحها، يجب أن تكون متشابهة

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

يجب وضع التعبيراتَ الجذرية في أبسط صورة مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

مثال أوجد الناتج في أبسط صورة

$3\sqrt{32}-\sqrt{98}$

$=3\sqrt{(2)^5}-\sqrt{(2)(7)^2}$

$=3\sqrt{(2)^4(2)}-\sqrt{(2)(7)^2}$

$=3\sqrt{(2^2)^2(2)}-\sqrt{(2)(7)^2}$

$=3(4)\sqrt{2}-7\sqrt{2}$

$=12\sqrt{2}-7\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$

$=\sqrt{(2)(3)^2}+\sqrt{(5)^2(2)}-\sqrt{(2)^3(3)^2}$

$=\sqrt{(2)(3)^2}+\sqrt{(5)^2(2)}-\sqrt{(2)^2.(2)(3)^2}$

$=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-(2)(3)\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}$

$2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{375}$

$=2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{(5)^3(3)}$

$=2\sqrt[3]{3}+5(5)\sqrt[3]{3}$

$=2\sqrt[3]{3}+25\sqrt[3]{3}$

$=27\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}$

$=\sqrt[3]{(2)^7}+\sqrt[3]{(2)(3)^3}-2\sqrt[3]{(5)^3.(2)}$

$=\sqrt[3]{(2)^6.(2)}+\sqrt[3]{(2)(3)^3}-2\sqrt[3]{(5)^3.(2)}$

$=\sqrt[3]{(2^2)^3.(2)}+\sqrt[3]{(2)(3)^3}-2\sqrt[3]{(5)^3.(2)}$

$=4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2(5)\sqrt[3]{2}$

$=4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}$

$=-3\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{12}+\sqrt{147}-\sqrt{27}$

$=\sqrt{(2)^2(3)}+\sqrt{(3)(7)^2}-\sqrt{(3)^3}$

$=\sqrt{(2)^2(3)}+\sqrt{(3)(7)^2}-\sqrt{(3)^2\cdot(3)}$

$=2\sqrt{3}+7\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{320}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{135}$

$=\sqrt[3]{(5)(2)^6}+\sqrt[3]{(5)(2)^3}-\sqrt[3]{(5)(3)^3}$

$=\sqrt[3]{(5)(2^2)^3}+\sqrt[3]{(5)(2)^3}-\sqrt[3]{(5)(3)^3}$

$=4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}$

$=3\sqrt[3]{5}$

$\sqrt{75}-4\sqrt{18}+2\sqrt{32}$

$=\sqrt{(5)^2\cdot(3)}-4\sqrt{(2)(3)^2}+2\sqrt{(2)^5}$

$=\sqrt{(5)^2\cdot(3)}-4\sqrt{(2)(3)^2}+2\sqrt{(2)^4\cdot(2)}$

$=\sqrt{(5)^2\cdot(3)}-4\sqrt{(2)(3)^2}+2\sqrt{(2^2)^2(2)}$

$=5\sqrt{3}-4(3)\sqrt{2}+2(4)\sqrt{2}$

$=5\sqrt{3}-12\sqrt{2}+8\sqrt{2}$

$=5\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

$3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}$

$=3\sqrt[3]{(2)^4}-4\sqrt[3]{(2)(3)^3}+\sqrt[3]{(2)^7}$

$=3\sqrt[3]{(2)^3\cdot(2)}-4\sqrt[3]{(2)(3)^3}+\sqrt[3]{(2)^6\cdot(2)}$

$=3\sqrt[3]{(2)^3\cdot(2)}-4\sqrt[3]{(2)(3)^3}+\sqrt[3]{(2^2)^3(2)}$

$=3(2)\sqrt[3]{2}-4(3)\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}$

$=6\sqrt[3]{2}-12\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}$

$=-2\sqrt[3]{2}$

الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-1) الجذور والتعبيرات الجذرية (الحصة رقم بج.)

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
$\forall x, y \in R^+ \cup \{0\}$ $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$ $(\sqrt{x})^2 = x$ $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$	$\forall x, y \in R$ $\sqrt[3]{x^3} = x$ $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$ $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, y \neq 0$

مثال بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

$\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3}$

$$= \sqrt[3]{320x^5y^7}$$

$$= \sqrt[3]{(5)(2)^6(x)^3(x)^2(y)^6(y)}$$

$$= \sqrt[3]{\underline{\underline{(5)}}(2^2)^3(x)^3\underline{\underline{(x)^2}}(y^2)^3\underline{\underline{(y)}}}$$

$$= (4)xy^2\sqrt[3]{5x^2y}$$

$\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x}$ ، $x \geq 0$

$$= \sqrt{200x^4}$$

$$= \sqrt{(5)^2(2)^3(x^2)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2(2)^2(2)(x^2)^2}$$

$$= (5)(2)x^2\sqrt{2}$$

$$= 10\sqrt{2}x^2$$

حاول أن تحل

6 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

$4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

$=12\sqrt[3]{x^6y^2}$

$=12\sqrt{(x^{2})^3\,y^2}$

$=12x^2\sqrt[3]{y^2}$

$3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3y^2}$, $x \geq 0$

$=6\sqrt{7x^6y^2}$

$=6\sqrt{7(x^{3})^2y^2}$

$=|6x^3y\sqrt{7}|$

$$= \begin{cases} 6\sqrt{7}x^3y & : y \geq 0 \\ -6\sqrt{7}x^3y & : y < 0 \end{cases}$$

$\sqrt{72x^3}$, $x \geq 0$

$=\sqrt{(2)^3(3)^2(x)^2(x)}$

$=\sqrt{(2)^2(2)(3)^2(x)^2(x)}$

$=(2)(3)x\sqrt{2x}=6x\sqrt{2x}$

$\sqrt[3]{80n^5}$

$=\sqrt[3]{(5)(2)^4(n)^3(n)^2}$

$=\sqrt[3]{(5)(2)^3(2)(n)^3(n)^2}$

$=2n\sqrt[3]{10n^2}$

$\sqrt[3]{49x^2} \times \sqrt[3]{56xy^3}$

$=\sqrt[3]{2744x^3y^3}$

$=\sqrt[3]{(2)^3(7)^3x^3y^3}$

$=(2)(7)xy$

$=14xy$

مثال بسط كلًا من التعبيرات الجذرية التالية:

$$\frac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}},\ x \neq 0,\ y \neq 0$$

$$= \sqrt[3]{125x^5y^2}$$

$$= \sqrt[3]{(5)^3(x)^3(x)^2\ y^2}$$

$$= 5x\sqrt[3]{x^2y^2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}},\quad x \neq 0$$

$$= \sqrt[3]{54x^3}$$

$$= \sqrt[3]{(2)(3)^3\ x^3}$$

$$= 3x\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{80n^5}$$

$$\sqrt[3]{256u^5v} \div \sqrt[3]{4u^2v^{10}},\ u \neq 0,\ v \neq 0$$

$$= \frac{\sqrt[3]{256u^5v}}{\sqrt[3]{4u^2v^{10}}}$$

$$= \sqrt[3]{64u^3v^{-9}}$$

$$= \sqrt[3]{(2)^6\ u^3(v^{-3})^3}$$

$$= \sqrt[3]{(2^2)^3\ u^3(v^{-3})^3}$$

$$= 4uv^{-3}$$

الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-1) الجذور والتعبيرات الجذرية (الحصة رقم ٥.)

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا

إذا كان x, y تعبيرين جذريين يمثلان أعدادًا غير نسبية وكان ناتج ضرب x في y عددًا نسبيًا فإن x, y مترافقان.

فمثلًا: $\sqrt{2}$ مرافق $\sqrt{2}$، لأن: $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ حيث الناتج 2 عددًا نسبيًا.

وكذلك $(3+\sqrt{2})$ مرافق $(3-\sqrt{2})$، لأن: $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = 9-2 = 7$ حيث الناتج 7 عددًا نسبيًا.

وأيضًا $\sqrt[3]{5^2}$ مرافق لِـ $\sqrt[3]{5}$ لأنّ: $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ حيث الناتج 5 عددًا نسبيًا.

مثال اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا: ← بدون جذر

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$$

$$= \frac{(3)(\sqrt[3]{5^2})}{(\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{5^2})}$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

← مرافق المقام

$$= \frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})(\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{7}}{(\sqrt[3]{7^2})(\sqrt[3]{7})}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}+2-3+\sqrt{2}}{9-2}$$

$$= \frac{-1+4\sqrt{2}}{7}$$

$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}$, $x > 1$, $x \in \mathbb{Q}$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x} \cdot \frac{\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}+9x}$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+9x)}{(\sqrt{x}-9x)(\sqrt{x}+9x)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+9x^2+x+9x\sqrt{x}}{x-81x^2}$$

$$= \frac{10x\sqrt{x}+9x^2+x}{x-81x^2}$$

$$= \frac{\cancel{x}(10\sqrt{x}+9x+1)}{\cancel{x}(1-81x)}$$

$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $x>1$, $x \in \mathbb{Q}$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+x+x+\sqrt{x}}{x-1}$$

$$= \frac{2x+(x+1)\sqrt{x}}{x-1}$$

$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, $x \in \mathbb{Z}^+$, $x \neq 1$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$\underline{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}-(9-4\sqrt{5})$

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} - (9-4\sqrt{5})$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} - (9-4\sqrt{5})$$

$$= \frac{5-2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+4}{5-4} - (9-4\sqrt{5})$$

$$= \underline{9-4\sqrt{5}} - (9-4\sqrt{5})$$

$$= 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+2}{9-2}-\frac{3\sqrt{2}-2}{9-2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+2}{7}-\frac{3\sqrt{2}-2}{7}$$

$$=\frac{٤}{7}$$

مثال أوجد قيمة التعبير: x^2-6، إذا كان $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

$$x=\frac{٤}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{(٤)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{\cancel{(٤)}(\sqrt{5}+1)}{\cancel{5-1}}$$

$$x=\sqrt{5}+1$$

$$\Longrightarrow$$

$$\therefore x^2-6$$

$$=(\sqrt{5}+1)^2-6$$

$$=\cancel{5}+2\sqrt{5}\cancel{+1}\cancel{-6}$$

$$=2\sqrt{5}$$

(الثاني)(الاول) 2

$$2(\sqrt{5})(1)$$

(5) حديقة مستطيلة الشكل طولها $5\sqrt{21}$ m وعرضها $2\sqrt{7}$ m

(a) أوجد محيط الحديقة.

(b) أوجد مساحة الحديقة.

(6) اكتب كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

(a) $\sqrt{\frac{21}{4}}\times\sqrt{\frac{7}{27}}$ **(b)** $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ **(c)** $\frac{4}{3\sqrt{3}-2}$

(d) $\frac{3+\sqrt{8}}{2-2\sqrt{8}}$ **(e)** $\frac{5+\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}$ **(f)** $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}-(9-4\sqrt{5})$

(g) $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ **(h)** $\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ **(i)** $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}, x\in\mathbb{Z}^+, x\neq 1$

(j) $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}, x, y\in\mathbb{Z}^+$

(7) أوجد قيمة التعبير: x^2-6، إذا كان $x=\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

(8) أوجد قيمة التعبير: x^2-x+1، إذا كان $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(9) اكتب كلًّا من التعبيرين التاليين على الصورة $a+b\sqrt{2}\ ,\ a,b\in\mathbb{Z}$

$F=(7\sqrt{2}-4)^2$ $E=5+6\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)$

(10) **الحساب الذهني.** بسّط: $\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}}}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sqrt[3]{-64x^3}+4x=0$ ● ⓑ

(2) $\frac{8-\sqrt{7}}{3}+\frac{3}{4-\sqrt{7}}\in\mathbb{Z}$ ↙ ● ⓑ

(3) $(3-2\sqrt{2})^{27}\times(3+2\sqrt{2})^{27}=1$ ● ⓑ

(4) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{5}$ ⓐ ●

(5) $|m|\times\sqrt{m^2}=m^2, \forall m\in\mathbb{R}$ ↙ ● ⓑ

$|m| \times |m|$

$= |m|^2 = m^2$

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$\sqrt[3]{(6)^3} = 6$

(6) التعبير الجذري الذي في أبسط صورة هو: $\sqrt[3]{3^2}$

ⓐ $\sqrt[3]{216}$ ⓑ $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ [✓ c] $\sqrt[3]{9}$ ⓓ $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(7) لوضع التعبير الجذري $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ في أبسط صورة نضرب كلًّا من البسط والمقام في:

ⓐ $\sqrt{2}$ [✓ b] $\sqrt[3]{2}$ ⓒ 2 ⓓ 4

(8) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ يساوي:

ⓐ $2-\sqrt{3}$ [✓ b] $2+\sqrt{3}$ ⓒ $3-\sqrt{2}$ ⓓ $3+\sqrt{2}$

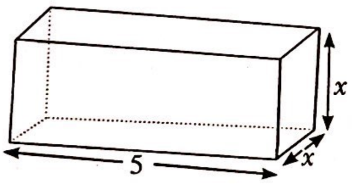
(9) إذا كان $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإن:

ⓐ $\varphi^2+\varphi=1$ [✓ b] $\varphi^2=\varphi+1$ ⓒ $\varphi+\varphi^2+1=0$ ⓓ $\varphi^2+1=\varphi$

(10) إذا كان $x \in \mathbb{R}^-$ فإن $\frac{1}{x}\cdot|x|$ يساوي:

[✓ a] -1 ⓑ $-x$ ⓒ 1 ⓓ x

(11) إذا كان حجم شبه المكعب المقابل يساوي $40\,\text{cm}^3$، فإن x تساوي:



$$\frac{\cancel{5}x^2}{\cancel{5}} = \frac{40}{5} \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

ⓐ 2 cm [✓ b] $2\sqrt{2}\text{ cm}$ ⓒ $-2\sqrt{2}\text{ cm}$ ⓓ 4 cm

(12) إذا كان حجم أسطوانة ارتفاعها h وطول نصف قطرها r يعطى بالعلاقة: $V=\pi r^2 h$ حيث الحجم (V) بدلالة كل من ارتفاع ونصف قطر الأسطوانة، فأي من العلاقات التالية صحيحة؟

ⓐ $h=\pi r^2 V$ ⓑ $h=\frac{\pi}{r^2}\cdot V$ ⓒ $r=\sqrt{\pi h V}$ [✓ d] $r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

$$\underline{V = \pi r^2 h} \rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$\downarrow$$

$$r^2 = \frac{V}{\pi h}$$

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-2) الأسس النسبية (الحصة رقم ....)

يمكنك كتابة أي تعبير جذري باستخدام الأس النسبي.

الصورة الأسية	الصورة الجذرية
$25^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{27}$
$64^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$

حاول أن تحل

① بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a $64^{\frac{1}{3}}$

$$= \sqrt[3]{64}$$
$$= \sqrt[3]{2^6}$$
$$= \sqrt[3]{(2^2)^3}$$
$$= 2^2 = 4$$

b $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

$$= (\sqrt{2})(\sqrt{2})$$
$$= 2$$

c $(8^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

$$= (\sqrt{8})(\sqrt{2})$$
$$= \sqrt{16}$$
$$= 4$$

حاول أن تحل

② اكتب العدد $64^{\frac{4}{3}}$ بالصورة الجذرية.

$$(64)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{(64)^4}$$
$$= \sqrt[3]{(2^6)^4} = \sqrt[3]{(2)^{24}} = \sqrt[3]{(2^8)^3}$$
$$= 2^8 = 256$$

إذا كان a عددًا حقيقيًا، $n \geq 2$ ، $n \in Z^+$:
وكان $\sqrt[n]{a}$ عددًا حقيقيًا يساوي b حيث يرمز له بالرمز $b = \sqrt[n]{a}$ فإن $a = b^n$

دليل الجذر ⟶ $\sqrt[n]{x}$ ⟵ المجذور

إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًا، m عددًا صحيحًا، $n \geq 2$ ، $n \in Z^+$ فإن:

① $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

② $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة

③ $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \end{cases}$

حاول أن تحل

لحل

③ ⓐ اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من:

② $y^{\frac{3}{8}}, \forall y \geq 0$

$= \sqrt[8]{y^3}$

① $x^{0.4}$

$= x^{\frac{2}{5}}$

$= \sqrt[5]{x^2}$

ⓑ اكتب بالصورة الأسية كلًّا من:

② $(\sqrt{y})^3 , \forall y \geq 0$

$= y^{\frac{3}{2}}$

① $\sqrt[3]{x^2}$

$= x^{\frac{2}{3}}$

قوانين الأسس النسبية

ليكن m , n عددين نسبيين، a , b عددين حقيقيين حيث b^m , b^n , a^n أعدادًا حقيقية.

المثال	القانون
$8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$	$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$
$(5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{1}{2} \times 4} = 5^2 = 25$	$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$
$(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$	$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, $b \neq 0$
$\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 9^1 = 9$	$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$, $b \neq 0$
$\left(\frac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{-5}{3}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

حاول أن تحل

⑤ بسّط كلًّا من الأعداد التالية مستخدمًا قوانين الأسس:

a $25^{-\frac{3}{2}}$

$$= (5^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (5)^{-3}$$

$$= \frac{1}{(5)^3}$$

$$= \frac{1}{125}$$

b $(-32)^{\frac{4}{5}}$

$$= \left((-2)^5\right)^{\frac{4}{5}}$$

$$= (-2)^4$$

$$= 16$$

c $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, $y > 0$

$$= \left(\frac{2^4 x^{14}}{3^4 y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2^2 x^7}{3^2 y^9}$$

$$= \frac{4x^7}{9y^9}$$

مثال

بسّط كلًّا مما يلي (دون استخدام الآلة الحاسبة):

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}, x>0, y>0$$

$$= x^{\frac{5}{4}}\cdot y^{\frac{1}{6}}$$

$$= \sqrt[4]{x^5}\cdot\sqrt[6]{y}$$

$$= \sqrt[4]{x^4 . x}\cdot\sqrt[6]{y}$$

$$= x\sqrt{x}\ \sqrt[6]{y}$$

$$(\underline{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{5}{6}}})\div x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad x>0$$

$$= x^{\frac{4}{3}} \div x^{\frac{2}{3}}$$

$$= x^{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{x^2}$$

$$((\underline{3^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}})^2)^{\frac{1}{3}} , x>0$$

$$= \left(3^{\frac{3}{2}}x^{\frac{-1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 3\,x^{\frac{-1}{3}}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}, x>0, y>0$$

$$= x^{\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[4]{y}$$

الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-2) الأسس النسبية (الحصة رقم ..٢..)

لضرب أو لقسمة $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ يمكن استخدام الصورة الأسية لكل منهما وتطبيق قوانين الأسس أو تطبيق قوانين الجذور النونية.

قوانين الجذور النونية

إذا كان: $\sqrt[n]{y}$ ، $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:

① $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$, $y\neq 0$

③ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\in R$

حاول أن تحل

⑥ بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{27}$

$=\sqrt[5]{9\times 27}$

$=\sqrt[5]{243}$

$=\sqrt[5]{(3)^5}$

$=3$

b $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}}$

$=\sqrt[3]{\dfrac{243}{3}}$

$=\sqrt[3]{81}$

$=\sqrt[3]{(3)^3(3)}=3\sqrt[3]{3}$

c $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

$=\sqrt[6]{729}$

$=\sqrt[6]{(3)^6}$

$=3$

d $(\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{y^3})^{-12}$, $x, y\in\mathbb{Q}^+$

$=\left(x^{\frac{1}{4}}\cdot y^{\frac{3}{4}}\right)^{-12}$

$=x^{-3}\cdot y^{-9}$

$=\dfrac{1}{x^3}\cdot\dfrac{1}{y^9}=\dfrac{1}{x^3y^9}$

مثال أوجد ناتج كلّ مما يلي في أبسط صورة:

$$\frac{\sqrt[3]{8^2}\times\sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$$

$$= \frac{(8)^{\frac{2}{3}} \times (32)^{\frac{1}{4}}}{8\,(4)^{\frac{1}{8}}}$$

$$= \frac{(2^3)^{\frac{2}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{4}}}{(2)^3\,(2^2)^{\frac{1}{8}}}$$

$$= \frac{(2)^2 \times (2)^{\frac{5}{4}}}{(2)^3\,(2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{(2)^{\frac{13}{4}}}{(2)^{\frac{13}{4}}}$$

$$= (2)^0$$

$$= 1$$

$$\frac{(32)^{\frac{1}{2}}\times(16)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$$

$$= \frac{(32)^{\frac{1}{2}} \times (16)^{-\frac{1}{3}}}{(64)^{\frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{(2^5)^{\frac{1}{2}} \times (2^4)^{-\frac{1}{3}}}{(2^6)^{\frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{(2)^{\frac{5}{2}} \times (2)^{-\frac{4}{3}}}{(2)}$$

$$= \frac{(2)^{\frac{7}{6}}}{(2)}$$

$$= (2)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{2}$$

الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-3) حل المعادلات (الحصة رقم .1..)

أولًا: المعادلات الجذرية

تعلم

لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: أفصل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.

الخطوة الثانية: حدد شرط الحل

- **إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلًا من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضًا.**
- **إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًا فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى $\mathbb{R}$.**

الخطوة الثالثة: ارفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.

الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a $\sqrt{5x+4} - 7 = 0$

$\sqrt{5x+4} = 7$

بتربيع الطرفين

$(\sqrt{5x+4})^2 = (7)^2$

$5x+4 = 49$

$5x = 45$

$x = 9 \in [\frac{-4}{5}, \infty)$

$\{9\} = $ ح.م

شرط الحل

$5x+4 \geq 0$

$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} \geq \frac{-4}{5}$

$x \geq \frac{-4}{5}$

$x \in [\frac{-4}{5}, \infty)$

b $\sqrt{x-2} + 9 = 0$

$\sqrt{x-2} = -9$

$\phi = $ ح.م :

حاول أن تحل

④ أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

ⓐ $\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$

$\sqrt{5x}=\sqrt{2x+9}$

بتربيع الطرفين

$5x=2x+9$

$5x-2x=9$

$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{9}{3}$

$x=3\in[0,\infty)$

$\{3\}=$ م.ح $\therefore$

شرط الحل

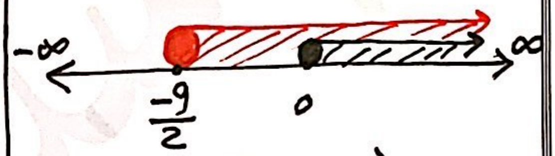
$2x+9\geq0$

$2x\geq-9$

$x\geq\frac{-9}{2}$

$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}\geq\frac{0}{5}$

$x\geq0$



$x\in[0,\infty)$

ⓑ $\sqrt{x-7}+\sqrt{3x-21}=0$

$\sqrt{x-7}=-\sqrt{3x-21}$

وهذا لا يتحقق الا اذا كان

$\sqrt{x-7}=0$ و $\sqrt{3x-21}=0$

$x-7=0$

$x=7$

$3x-21=0$

$x=7$

$\{7\}=$ م.ح

الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-3) حل المعادلات (الحصة رقم ....)

حاول أن تحل

③ أوجد مجموعة الحل: $\sqrt{5x-1}+3=x$

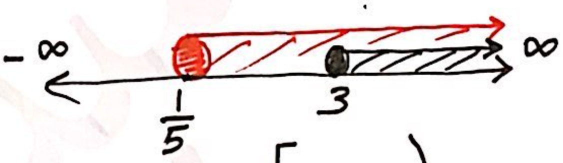
حدودية

$$\sqrt{5x-1}=\boxed{x-3}$$

شرط الحل

$5x-1\geqslant 0$ | $x-3\geqslant 0$

$x\geqslant \frac{1}{5}$ | $x\geqslant 3$



$x\in[3,\infty)$

بتربيع الطرفين

$$5x-1=(x-3)^2$$

$$5x-1=x^2-6x+9$$

$$x^2-6x+9-5x+1=0$$

$$x^2-11x+10=0$$

mode 5 3

$$x=10\in[3,\infty)$$

$$x=1\notin[3,\infty)$$

$$\{10\}=$$ م.ح

$$(a+b)^2=a^2+2.a.b+b^2$$

الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-3) حل المعادلات (الحصة رقم .٢..)

يمكن حل معادلة على صورة $x^{\frac{m}{n}} = b$ برفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$، المعكوس الضربي لِـ $\frac{m}{n}$

إذا كان m عددًا زوجيًا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$

إذا كان m عددًا فرديًا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

حاول أن تحل

② أوجد مجموعة الحل:

ⓐ $2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$

الحل

$$\frac{\cancel{2}(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\cancel{2}} = \frac{54}{2}$$

$$(x+3)^{\frac{3}{2}} = 27$$

$$\left((x+3)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (27)^{\frac{2}{3}}$$

$$x+3 = (3^{3})^{\frac{2}{3}}$$

$$x+3 = (3)^{2}$$

$$x+3 = 9$$

$$x = 6$$

$\{6\}$ = ح.م

b $(1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

$$(1-x)^{\frac{2}{5}} = 4$$

$$\left((1-x)^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = (4)^{\frac{5}{2}}$$

$$|1-x| = (2^2)^{\frac{5}{2}}$$

$$|1-x| = (2)^5$$

$$|1-x| = 32$$

$1-x = 32$

$-x = 31$

$x = -31$

$1-x = -32$

$-x = -33$

$x = 33$

$\{-31, 33\}$ = م.ح

مثال حل كلًّا من المعادلات التالية:

$(2x+3)^{\frac{3}{4}} \underbrace{-3}_{} = 5$

$$(2x+3)^{\frac{3}{4}} = 8$$

$$\left((2x+3)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = (8)^{\frac{4}{3}}$$

$$2x+3 = 16$$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{13}{2}$$

$$x = \frac{13}{2}$$

$\left\{\frac{13}{2}\right\} =$ م.ح

$x+8 = (x^2+16)^{\frac{1}{2}}$

$$\left((x^2+16)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (x+8)^2$$

$$x^2+16 = x^2+16x+64$$

$$\cancel{x^2}+16x+64-\cancel{x^2}-16 = 0$$

$$16x+48 = 0$$

$$x = -3$$

$\{-3\} =$ م.ح

الوحدة الأولى (الاعداد الحقيقية) بند (1-3) حل المعادلات (الحصة رقم .٣..)

ثانيًا: المعادلات الأسية

المعادلات: $2^x = 32$ ، $(-3)^x = -243$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 5$

تسمى معادلات أسية.

ليكن a عدد حقيقي حيث $a \notin \{-1, 0, 1\}$

m، n عددان صحيحان

إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

حاول أن تحل

6 حل كلًا من المعادلات التالية:

a $3^x = 243$

$$3^x = (3)^5$$

$$\therefore x = 5$$

b $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{2^7}$$

$$\left(\frac{1}{2^2}\right)^x = \frac{1}{2^7}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$\therefore 2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

c $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3^4}{2^4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

$$\therefore x = -4$$

حاول أن تحل

⑦ حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4} = 1$

$$5^{x^2-4} = 5^0$$

$$\therefore x^2-4 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -2$$

b $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$

$$3^{x^2+5x} = \frac{1}{3^4}$$

$$3^{x^2+5x} = 3^{-4}$$

$$\therefore x^2+5x = -4$$

$$x^2+5x+4 = 0$$

$$x = -4$$

$$x = -1$$

c $2^{x^2-4} = 32$

$$2^{x^2-4} = 2^5$$

$$\therefore x^2-4 = 5$$

$$x^2-4-5 = 0$$

$$x^2-9 = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

مثال

حل كلًا من المعادلات الأسية التالية:

$5^x = 125\sqrt{5}$

$(5)^x = (5)^3 \cdot \sqrt{5}$

$(5)^x = (\sqrt{5})^6 \cdot \sqrt{5}$

$(\sqrt{5})^{2x} = (\sqrt{5})^7$

$\therefore 2x = 7$

$\therefore x = \frac{7}{2}$

$(3^x - 27)(2^x - 1) = 0$

$3^x - 27 = 0$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$

$\therefore x = 3$

$2^x - 1 = 0$

$2^x = 1$

$2^x = (2)^0$

$\therefore x = 0$

الوحدة الثانية (الدوال الحقيقية) بند(2-1) مجال الدالة (الحصة رقم .1..)

مجال الدالة Domain of the function

إذا كانت لدينا دالة، $y = f(x)$، فإن مجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يأخذها المتغير x ولتكن D هذه المجموعة، وينتج عنها قيم حقيقية للمتغير y ونقول أن الدالة معرّفة على المجال D.

تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:

① مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

② مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام.

③ مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

④ مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$.

⑤ مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g.

⑥ مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.

أي أن مجال f = مجال $g \cap$ مجال h.

⑦ مجال الدالة $f(x) = g(x) . h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.

أي أن مجال f = مجال $g \cap$ مجال h.

⑧ مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g عدا أصفار المقام $(h(x) \neq 0)$.

أي أن مجال f = (مجال $g \cap$ مجال h)/مجموعة أصفار المقام

مثال توضيحي (2)

حدّد مجال كل من الدوال التالية:

ⓐ $f(x) = 2x + 1$

ⓑ $g(x) = x^2 + 3x + 1$

ⓒ $t(x) = \sqrt{3x - 4}$

ⓓ $h(x) = \frac{x + 2}{x - 4}$

ⓔ $u(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

ⓕ $v(x) = \frac{\sqrt{3x - 4}}{x - 2}$

الحل

ⓐ $f(x) = 2x + 1$

$\because$ f دالة حدودية

$\therefore$ مجال $f = R$

ⓒ $t(x) = \sqrt{3x - 4}$

$3x - 4 \geq 0$

$x \geq \frac{4}{3}$

$\therefore x \in [\frac{4}{3}, \infty)$

$\therefore$ مجال $t = [\frac{4}{3}, \infty)$

ⓓ $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$

$\because$ h دالة حدودية نسبية

$\therefore$ مجال $h = R/\{4\}$

اصفار المقام

$x - 4 = 0$

$x = 4$

ⓕ $$V(x) = \frac{\sqrt{3x-4}}{x-2} \quad \begin{matrix} \leftarrow f(x) \\ \nwarrow g(x) \end{matrix}$$

الحل

$$V(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$ نفرض انه

حيث

$f(x) = \sqrt{3x-4}$

$3x-4 \geqslant 0$

$x \geqslant \frac{4}{3}$

$x \in [\frac{4}{3}, \infty)$

$[\frac{4}{3}, \infty) = f$ مجال $\therefore$

$g(x) = x-2$

$\therefore$ g دالة حدودية

$\therefore$ $R = g$ مجال

اصفار المقام

$x-2=0$

$\boxed{x=2}$

$\therefore$ $\underline{[\frac{4}{3}, \infty) \cap R} / \{2\} = V$ مجال

$$= [\frac{4}{3}, \infty) / \{2\}$$

(الحصة ٢)

حاول أن تحل

② أوجد مجال كل دالة مما يلي:

ⓐ $f_1(x)=\frac{2x+5}{x-4}$

ⓑ $f_2(x)=x^3-4x^2-4+\sqrt{x-9}$

ⓒ $f_3(x)=\frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

ⓓ $f_4(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

ⓐ $f(x)=\frac{2x+5}{x-٤}$

∵ f دالة حدودية نسبية

∴ مجال f = $R/\{٤\}$

أصفار المقام

$x-٤=٠$

$x=٤$

ⓑ $f(x)=\underbrace{x^3-٤x^2-٤}_{g(x)}+\underbrace{\sqrt{x-٩}}_{h(x)}$

بفرض $f(x)=g(x)+h(x)$

حيث

$g(x)=x^3-٤x^2-٤$

∵ g حدودية

∴ مجال g = R

$h(x)=\sqrt{x-٩}$

$x-٩\geqslant ٠$

$x\geqslant ٩$

$\therefore x\in[٩,\infty)$

∴ مجال h = $[٩,\infty)$

∴ مجال f = $R\cap[٩,\infty)$

$=[٩,\infty)$

ⓒ $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$ $\leftarrow g(x)$, $\leftarrow h(x)$

$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ بفرض ان

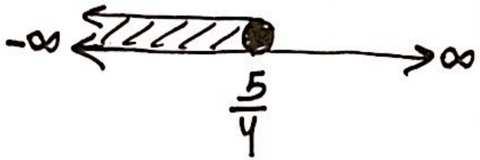
حيث

$g(x) = \sqrt{5-4x}$

$5-4x \geqslant 0$

$-4x \geqslant -5$

$x \leqslant \frac{5}{4}$



$x \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$

$\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$ = مجال g

$h(x) = x^2+4$

∴ h حدودية

∴ مجال h = R

اصفار المقام

$x^2+4 = 0$

لا يوجد اصفار للمقام

∴ مجال f = $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right] \cap R$

$= \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$

ⓓ $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

اصفار المقام

$\boxed{x = 0}$

∵ f دالة جذر تكعيبي لدالة حدودية نسبية

∴ مجال f = $R / \{0\}$

الحصة (٣)

مثال أوجد مجال كل دالة مما يلي:

$$h(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2-1}$$

نفرض ان $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

اصفار المقام

$x^2-1=0$

$x=1 , x=-1$

$g(x) = x^2-1$

∵ g دالة حدودية

∴ مجال $g = R$

$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

∵ f دالة جذر تكعيبي لدالة حدودية

∴ مجال $f = R$

∴ مجال $h = R\cap R/\{1,-1\} = R/\{1,-1\}$

$$t(x) = \frac{\sqrt{-2x+3}}{x-1}$$

نفرض ان $t(x) = \dfrac{f(x)+g(x)}{h(x)}$

اصفار المقام

$x-1=0$

$x=1$

$h(x)=x-1$

∵ h دالة حدودية

∴ مجال $h = R$

$g(x)=3$

∵ g دالة ثابتة

∴ مجال $g = R$

$f(x)=\sqrt{-2x}$

$-2x \geqslant 0$

$x \leqslant 0$

$x \in (-\infty,0]$

∴ مجال $f = (-\infty,0]$

∴ مجال $t = (-\infty,0]\cap R\cap R/\{1\} = (-\infty,0]$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{5+\sqrt{2x-1}}$$

نفرض ان $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)+u(x)}$

اصفار المقام

$5+\sqrt{2x-1}=0$

$\sqrt{2x-1}=-5$

ليس لها حل

$u(x)=\sqrt{2x-1}$

$2x-1 \geqslant 0$

$x \geqslant \frac{1}{2}$

$x \in [\frac{1}{2},\infty)$

$g(x)=5$

g دالة ثابتة

∴ مجال $g = R$

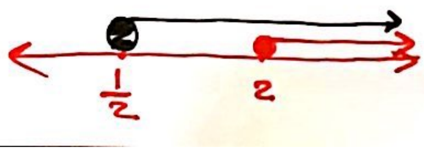
$f(x)=\sqrt{x-2}$

$x-2 \geqslant 0$

$x \geqslant 2$

$x \in [2,\infty)$

∴ مجال $h = [2,\infty)\cap R\cap[\frac{1}{2},\infty) = [2,\infty)$



$v(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3+x}}$

نفرض ان $V(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

اصفار المقام

$\sqrt{3+x} = 0$

$\therefore 3+x = 0$

$x = -3$

$g(x) = \sqrt{3+x}$

$3+x \geqslant 0$

$x \geqslant -3$

$x \in [-3,\infty)$

$f(x) = 2x-1$

f دالة حدودية

∴ مجال f = R

∴ مجال V = $R \cap [-3,\infty)/\{-3\} = (-3,\infty)$

$u(x) = \frac{\sqrt{3+4x}-3}{25-9x^2}$

نفرض ان $U(x) = \frac{f(x)-g(x)}{h(x)}$

اصفار المقام

$25-9x^2=0$

$x=\frac{5}{3}$,

$x=\frac{-5}{3}$

$h(x) = 25-9x^2$

h دالة حدودية

∴ مجال h = R

$g(x) = 3$

g دالة ثابتة

∴ مجال g = R

$f(x) = \sqrt{3+4x}$

$3+4x \geqslant 0$

$x \geqslant \frac{-3}{4}$

$x \in [\frac{-3}{4},\infty)$

∴ مجال U = $[\frac{-3}{4},\infty) \cap R \cap R | \{\pm\frac{5}{3}\}$

$= [\frac{-3}{4},\infty)/\{\pm\frac{5}{3}\} = [\frac{-3}{4},\infty)/\{\frac{5}{3}\}$

$v(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$

نفرض ان $v(x) = f(x) - g(x)$

$g(x) = \frac{2}{x^2-1}$

g دالة حدودية نسبية

∴ مجال g = $R/\{1,-1\}$

$f(x) = \frac{3}{x+1}$

f دالة حدودية نسبية

مجال f = $R/\{-1\}$

∴ مجال V = $R/\{-1\} \cap R/\{1,-1\}$

$= R/\{1,-1\}$

في التمارين (5–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجال الالدالة $f(x)=\sqrt{(x-2)^2}$ هو $\mathbb{R}$ [✓ a] b

(2) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-6}}$ هو $[3,\infty)$ a [✓ b]

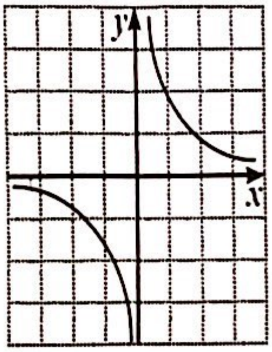
(3) مجال الدالة $f(x)=\sqrt{-x}$ هو $(-\infty,0]$ [✓ a] b

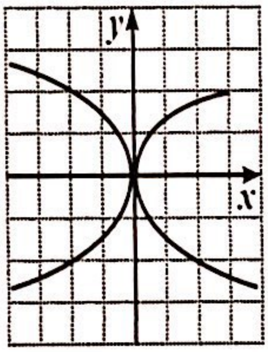
(4) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x+3}$ هو $[-3,\infty)$ a [✓ b]

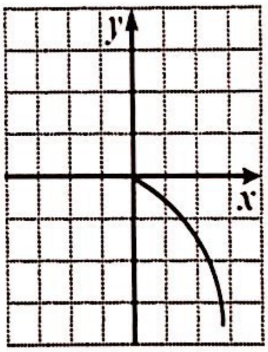
(5) مجال الدالة $f(x)=|x|-2$ هو $\mathbb{R}$ [✓ a] b

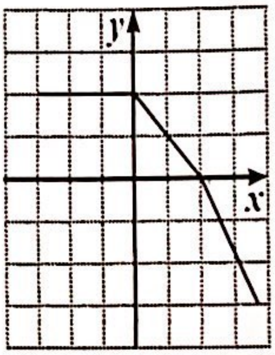
في التمارين (11–6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) أيًا مما يلي لا يمثل بيان دالة:

a


b


c


d


(7) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ هو: $x \doteq -1$

a $\mathbb{R}$　b $\mathbb{R}/\{1\}$　c $\mathbb{R}/\{-1,1\}$　[✓ d] $\mathbb{R}/\{-1\}$

(8) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ هو: $\leftarrow f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

[✓ a] $\mathbb{R}/\{0\}$　b $[0,\infty)$　c $(-\infty,0)$　d $(0,\infty)$

(9) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}}$ هو:

a $\mathbb{R}/\{1\}$　b $\mathbb{R}/\{0,1\}$　c $\mathbb{R}-\{0\}$　[✓ d] $(0,\infty)/\{1\}$

$[-1,\infty)/\{0\}$

R

(10) مجال الدالة $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ هو:

$[-1,\infty)$ R

(a) $(0,\infty)$ (b) $[1,\infty)$ (c) $(-1,\infty)$ [✓ (d) $[-1,\infty)/\{0\}$]

(11) لتكن $g(x)=x^2$, $g:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$. فإن مجال الدالة $f\circ g$ هو:

(a) $[-2,2]$ [✓ (b) $[0,2]$]

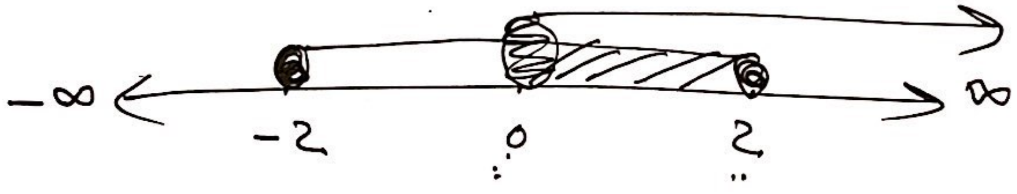
(c) $(0,2)$ (d) ليس أيًا مما سبق صحيحًا

$$g:[-2,2]\longrightarrow R.$$

المجال

المجال المقابل

$$[-2,2]\cap[0,\infty)$$



الوحدة الثانية (الدوال الحقيقية) بند(2-2) الدوال التربيعية

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{حد من الدرجة الثانية}} + \underbrace{bx}_{\text{حد من الدرجة الأولى}} + \underbrace{c}_{\text{حد مطلق (ثابت)}}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \; \underline{a \neq 0}$$

تمثل الدالة التربيعية بيانيًا بمنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحنى، ويسمى شكل المنحنى قطعًا مكافئًا «parabola».

والإحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $\underline{x = \frac{-b}{2a}}$ وهو معادلة المستقيم الرأسي الذي يسمى **محور التماثل.**

حاول أن تحل

① حدّد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية.

(a) $f(x) = 2x(x-3)$

$f(x) = 2x^2 - 6x$

دالة تربيعية

(b) $f(x) = (x-2)(2x+1)$

$f(x) = 2x^2 + x - 4x - 2$

$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

دالة تربيعية

(c) $f(x) = (2x+3)^2 - 4x^2 - 7x$

$f(x) = \cancel{4x^2} + 12x + 9 - \cancel{4x^2} - 7x$

$= 5x + 9$

دالة خطية

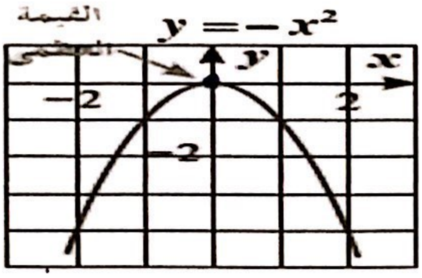
(d) $f(x) = 3(x^2 - 4x) - 3x^2 + 4$

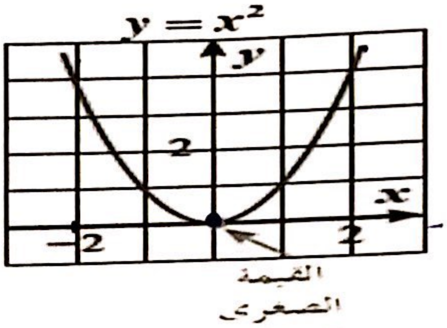
$f(x) = \cancel{3x^2} - 12x - \cancel{3x^2} + 4$

$= -12x + 4$

دالة خطية

الوحدة الثانية (الدوال الحقيقية) بند(2-3) الدوال التربيعية





معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه (0, 0) هي: $y=ax^2$

حاول أن تحل

① كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

ⓐ $E(\overset{x}{4}, \overset{y}{2})$

∵ معادلة القطع المكافئ هي

$$y = ax^2$$

∵ القطع يمر بالنقطة $(\overset{x}{4}, \overset{y}{2})$

$$\therefore 2 = a(4)^2$$

$$\frac{2}{16} = \frac{\cancel{16}a}{\cancel{16}}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{8}}$$

∴ معادلة القطع هي

$$y = \frac{1}{8}x^2$$

∵ $a > 0$

∴ فتحة القطع إلى أعلى

ⓑ $D(1, -5)$

∵ معادلة القطع المكافئ هي

$$y = ax^2$$

∵ القطع يمر بالنقطة $(\overset{x}{1}, \overset{y}{-5})$

$$\therefore -5 = a(1)^2$$

$$\boxed{-5 = a}$$

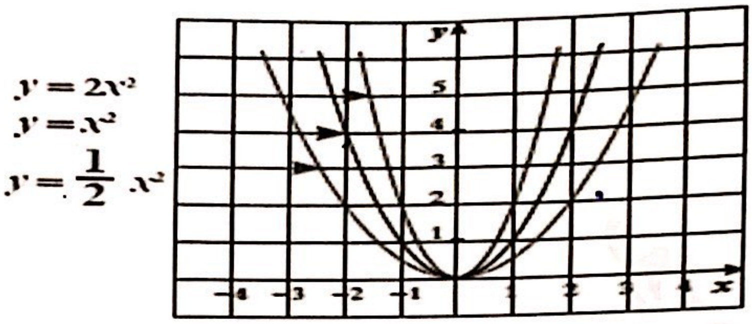
∴ معادلة القطع المكافئ هي

$$y = -5x^2$$

∵ $a < 0$

∴ فتحة القطع إلى أسفل

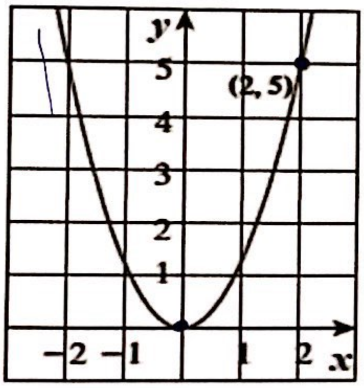
كل القطوع المكافئة لها الشكل العام نفسه. ويتغير اتساع القطع المكافئ تبعًا لتغير معامل حد الدرجة الثانية.



حاول أن تحل

② البيان المقابل يمثل دالة: $y = ax^2$

أوجد معادلة هذه الدالة.



∵ معادلة القطع المكافئ هي

$$y = ax^2$$

∵ القطع يمر بالنقطة $(\overset{x}{2}, \overset{y}{5})$

$$5 = a(2)^2$$

$$\frac{5}{4} = \frac{4a}{4}$$

$$\boxed{a = \frac{5}{4}}$$

∴ معادلة القطع المكافئ هي $y = \frac{5}{4}x^2$

الوحدة الثانية (الدوال الحقيقية) بند(2-3) الدوال التربيعية

معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

ليس بالضرورة أن يكون رأس القطع المكافئ نقطة الأصل.

المعادلة في الصورة: $y = a(x-h)^2 + k,\ \ a \neq 0\ , h\ ,k \in \mathbb{R}$

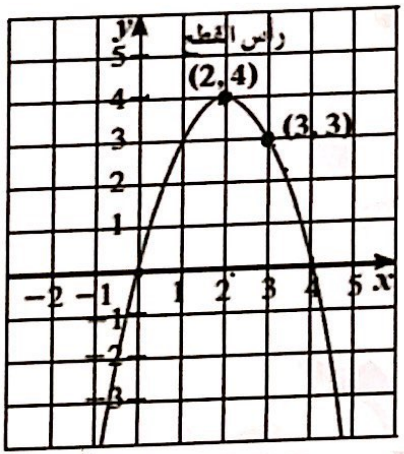
تسمى **معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k)** وهي عبارة عن إزاحة لبيان منحنى الدالة: $y = ax^2$

بعض خواص القطوع المكافئة

المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$.
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $|a| < 1$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $|a| > 1$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

حاول أن تحل



③ أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل.

$(h, k) = (2, 4)$

$h = 2$ و $k = 4$

∴ معادلة القطع المكافئ هي

$y = a(x-h)^2 + k$

$y = a(x-2)^2 + 4$

∵ القطع يمر بالنقطة $(\underset{x}{3}, \underset{y}{3})$

$3 = a\underbrace{(3-2)^2}_{} + 4$

$3 = a + 4 \Rightarrow a = -1$

$\Leftarrow$

∴ معادلة القطع المكافئ هي

$y = -(x-2)^2 + 4$

يمكنك استخدام خصائص القطوع المكافئة لرسم بيان الدوال التربيعية.

حاول أن تحل

4 ارسم منحنى الدالة: $y = (x + 3)^2 + 1$.

① $a = 1$ و $h = -3$ و $k = 1$

② $\because a > 0 \longrightarrow$ ∴ فتحة القطع إلى أعلى

③ رأس المنحنى هو $(-3 , 1)$

④ معادلة محور التماثل هي

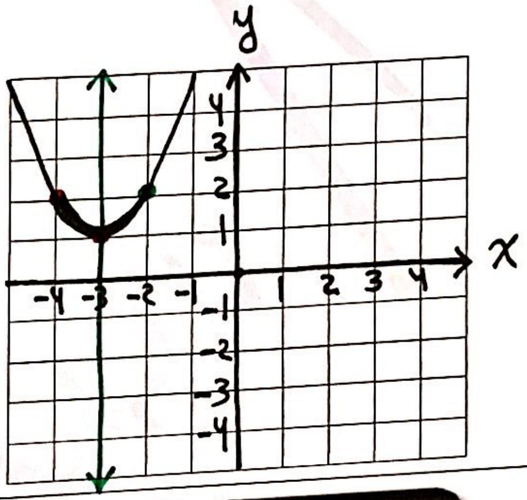
$x = h \longrightarrow x = -3$

⑤ نقطة أخرى

بوضع $x = -4$

$y = 2$

$\therefore (-4 , 2)$



حاول أن تحل

5 ارسم منحنى الدالة: $y = -2(x - 3)^2 - 1$.

① $a = -2$ و $h = 3$ و $k = -1$

② $\because a < 0 \longrightarrow$ ∴ فتحة القطع إلى أسفل

③ رأس المنحنى هو $(3 , -1)$

④ معادلة محور التماثل هو

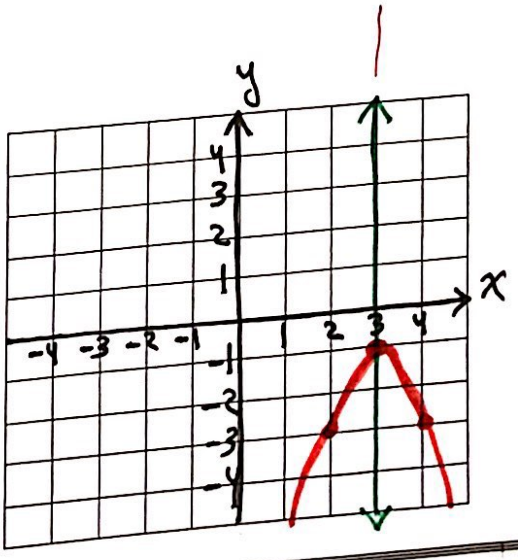
$x = h \longrightarrow x = 3$

⑤ نقطة آخرى

بوضع $x = 2$

$\therefore y = -3$

$\therefore (2 , -3)$



مثال

ارسم كل قطع مكافئ مستخدمًا المعلومات المعطاة. ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس.

الرأس $V(\overset{h}{3}, \overset{k}{1})$ والجزء المقطوع من محور الصادات -2 ⇐ $(\overset{x}{0}, \overset{y}{-2})$

معادلة القطع المكافئ هـ

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$\boxed{y = a(x-3)^2 + 1}$$

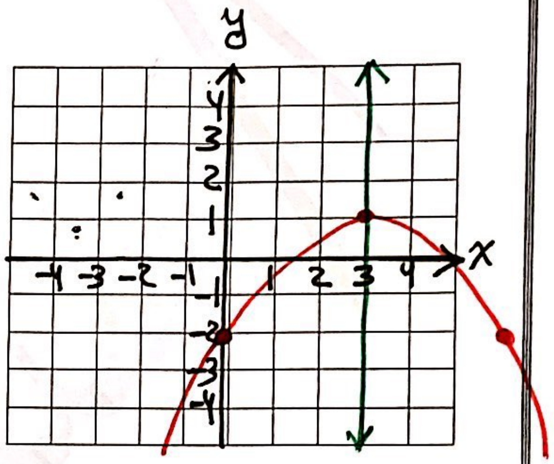
∵ القطع يمر بالنقطة $(\underset{x}{0}, \underset{y}{-2})$

$$-2 = a(0-3)^2 + 1$$

$$-2 = 9a + 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

∴ معادلة القطع هـ

$$y = \frac{-1}{3}(x-3)^2 + 1$$



الرأس $V(\overset{h}{-2}, \overset{k}{6})$ والجزء المقطوع من محور السينات 2 ⇐ $(\overset{x}{2}, \overset{y}{0})$

معادلة القطع المكافئ هـ

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y = a(x+2)^2 + 6$$

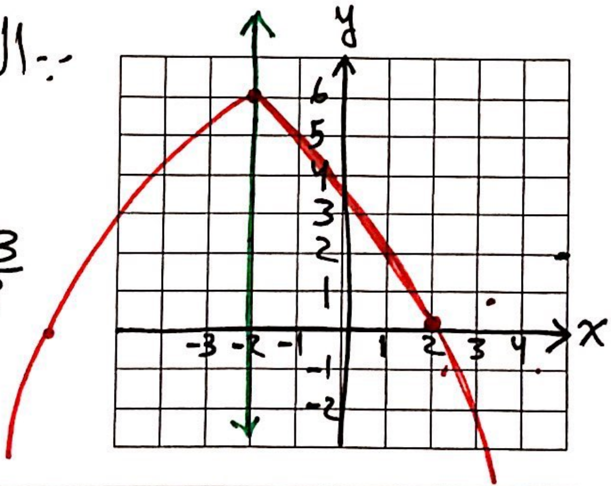
∵ القطع يمر بالنقطة $(2, 0)$

$$\therefore\ 0 = a(2+2)^2 + 6$$

$$0 = 16a + 6 \rightarrow a = \frac{-3}{8}$$

∴ معادلة القطع هـ

$$y = \frac{-3}{8}(x+2)^2 + 6$$



الوحدة الثانية (الدوال الحقيقية) بند(2-3) الدوال التربيعية

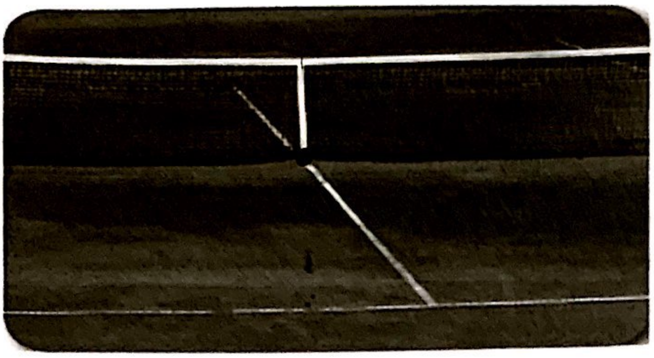
تطبيقات حياتية

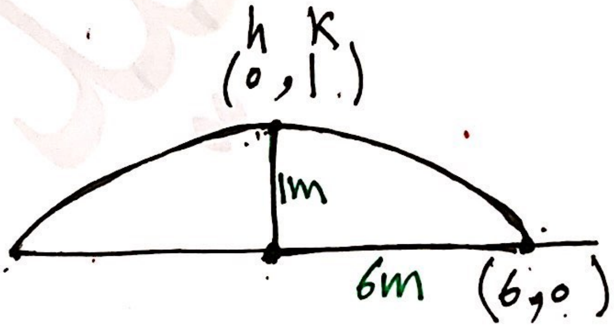
حاول أن تحل

⑥ في ملعب لكرة المضرب، رمى لاعب الكرة من فوق الشبكة بارتفاع 1 m عن سطح الملعب فاجتازت الكرة الشبكة ثم سقطت على الأرض مبتعدة 6 m عن قاعدتها.

افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع المستقيم الرأسي في منتصف الشبكة مع أرض الملعب.

استخدم المستقيم كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.





معادلة القطع المكافئ هي

$y = a(x-h)^2 + K$

$y = a(x-0)^2 + 1$

$\boxed{y = ax^2 + 1}$

القطع يمر بالنقطة $(\overset{x}{6}, \overset{y}{0})$

$0 = a(6)^2 + 1$

$0 = 36a + 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{36}$

$\therefore y = \frac{-1}{36}x^2 + 1$

يبيع أحد المحلات عدداً أكبر من الفطائر عندما يخفض السعر، لكن ربحه يتغير. تنمذج أرباح هذا المحل (بالدينار) وفقاً للدالة التالية: $y = -100(x - 1.75)^2 + 300$ أرباح هذا المحل بالدينار، حيث x سعر الفطيرة بالدينار. يرغب صاحب المحل في تحقيق القيمة العظمى لربحه من المبيع.

- **a** صف المجال الواقعي للدالة.
- **b** أوجد أرباحه اليومية إذا باع الفطيرة الواحدة بـ 2 دينار. وإذا باع الفطيرة الواحدة بـ 1.25 دينار.
- **c** ما السعر الذي يجب أن يبيع به الفطيرة الواحدة ليحقق الربح الأكبر؟ وما قيمة هذا الربح؟

الحل:

ⓐ $x > 0$

ⓑ $y = -100(x - 1.75)^2 + 300$

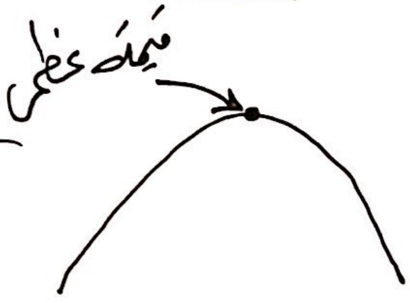
عند $x = 2$

$y = -100(2 - 1.75)^2 + 300 = 293.75$ دينار

عند $x = 1.25$

$y = -100(1.25 - 1.75)^2 + 300 = 275$

ⓒ رأس المنحنى هو $(1.75, 300)$



لكي يحقق البائع أكبر ربح يجب أن تكون $x = 1.75$

$\therefore y = 300$

في التمارين (1–5)، ظلل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة وظلل ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة $y = 2x^2 - 2(3-x)^2$ تمثل معادلة قطع مكافئ. ⓐ ●

(2) القطع المكافئ $y = -\frac{1}{3}(x+2)^2 - 3$ فتحته إلى الأعلى. ⓐ ●

(3) المعادلة $y = 2(x-1)^2 + 2$ يكون بيانها أكثر اتساعًا من بيان الدالة $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$. ⓐ ●

$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $|2| = 2$

(4) توجد عند رأس منحنى الدالة $y = -(x-3)^2 - 2$ قيمة عظمى. ● ⓑ

(5) منحنى القطع المكافئ $y = (-x+2)^2 + 3$ يمر بالنقطة $P(2, 3)$ ● ⓑ

في التمارين (6–11)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) الدالة $y = a(3-x)^2 - 2$ يكون رسمها أوسع من رسم بيان الدالة $y = -2x^2$ إذا كان:

$|-2| = 2$ $|a|$

ⓐ $|a| = 2$ ⓑ $|a| > 2$ ⓒ $a < 2$ ● $|a| < 2$

(7) معادلة القطع المكافئ $y = 2x^2$ الذي تم إزاحة رأسه وحدتين يسارًا و4 وحدات لأعلى هي:

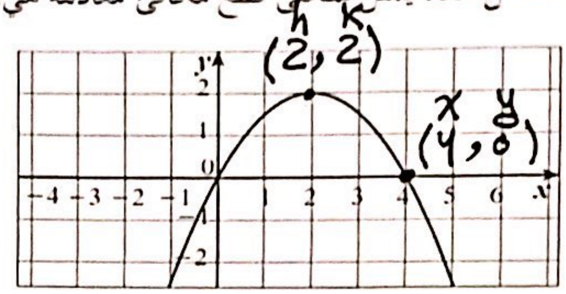
ⓐ $y = (2x+2)^2 + 4$ ⓑ $y = 2(x-2)^2 + 4$

● $y = 2(x+2)^2 + 4$ ⓓ $y = 2(x+2)^2 - 4$

$h = -2$
$k = +4$

$y = a(x-h)^2 + k$
$y = 2(x+2)^2 + 4$

(8) الشكل أدناه يمثل منحنى قطع مكافئ معادلته هي:



$y = a(x-2)^2 + 2$

$0 = a(4-2)^2 + 2$

$0 = 4a + 2$

$a = \frac{-1}{2}$

$y = \frac{-1}{2}(x-2)^2 + 2$

ⓐ $y = (x-2)^2 + 2$

ⓑ $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

ⓒ $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

[✓ d] $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

(9) القطع المكافئ $y = a(x-h)^2 + k$ يقطع المحورين على الأكثر في:

ⓐ نقطة

ⓑ نقطتين

[✓ c] 3 نقاط

ⓓ 4 نقاط

(10) القيمة الصغرى للدالة $y = \frac{1}{3}(3-x)^2 - 2$ هي عند النقطة:

[✓ a] $(3, -2)$

ⓑ $(-3, 2)$

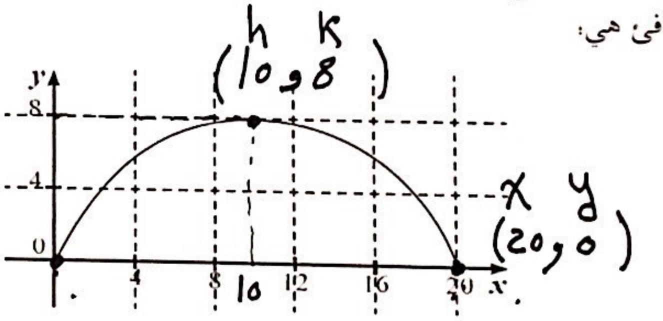
ⓒ $(-3, -2)$

ⓓ $(3, 2)$

$y = \frac{1}{3}(x-3)^2 - 2$

$(\overset{h}{3}, \overset{k}{-2})$

(11) يقع جسر على شكل قطع مكافئ فوق نهر. يبلغ البعد بين قاعدتيه 20 m وارتفاعه الأقصى 8 m معادلة القطع المكافئ هي:



ⓐ $y = 0.08(x-10)^2 + 8$

[✓ b] $y = -0.08(x-10)^2 + 8$

ⓒ $y = -0.08(x-20)^2 + 8$

ⓓ $y = 0.08(x+10)^2 + 8$

$y = a(x-10)^2 + 8$

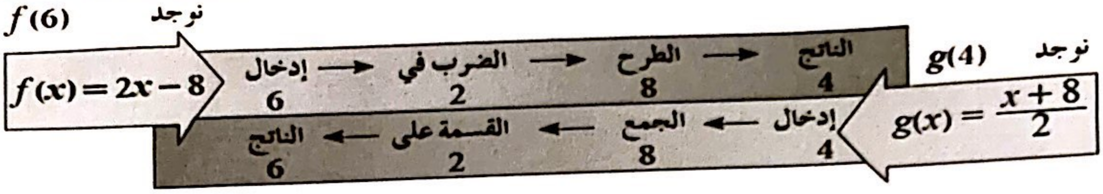
$0 = a(20-10)^2 + 8$

$0 = 100a + 8$

$a = -0.08$

$y = -0.08(x-10)^2 + 8$

الوحدة الثانية (الدوال الحقيقة) بند(2-5) المعكوسات ودوال الجذر التربيعي (الحصة رقم .1..)



الدالتان: $f(x) = 2x - 8$, $g(x) = \frac{x+8}{2}$ كلًّا منهما تعكس عمليات الأخرى،

لذلك تسمى g معكوس الدالة f أو f معكوس الدالة g

إذا كانت r علاقة تصل بين عنصر a من مجال r وعنصر b من مدى r
فإن **معكوس العلاقة** r يصل من b إلى a.

إذا كان (a, b) زوج مرتب من علاقة r فإن (b, a) هو زوج مرتب من معكوس هذه العلاقة.

إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي إلى بيان معكوس هذه الدالة. ولكي ترسم معكوس الدالة بيانيًا اعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة.

معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية أيضًا.

حاول أن تحل

① ارسم الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها، ثم اكتب معادلة المعكوس.

$$\boxed{y = -3x + 5}$$

$$x = -3y + 5$$

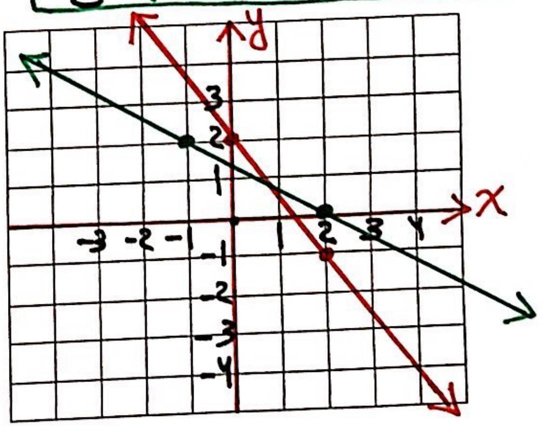
$$-3y + 5 = x$$

$$\frac{\cancel{-3}y}{\cancel{-3}} = \frac{x-5}{-3}$$

$$\boxed{y = \frac{x-5}{-3}}$$

x	0	2
y	2	-1

x	2	-1
y	0	2



طريقة أخرى لإيجاد معكوس الدالة جبريًا وهي التبديل بين متغيرات الدالة y ,x ثم الحل بالنسبة إلى y

إذا كانت الدالة تستخدم الرمز $f(x)$ عوّض عن $f(x)$ بـ y

حاول أن تحل

② أوجد معكوس الدالة:

a $y = \frac{2x-1}{3}$

الحل

$$y = \frac{2x-1}{3}$$

$$x = \frac{2y-1}{3}$$

$$\frac{2y-1}{3} = \frac{x}{1}$$

$$2y-1 = 3x$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = \frac{3x+1}{2}$$

$$y = \frac{3x+1}{2}$$

b $y = 2(x+1) - 3$

الحل

$$y = 2x+2-3$$

$$y = 2x-1$$

$$x = 2y-1$$

$$2y-1 = x$$

$$\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = \frac{x+1}{2}$$

$$y = \frac{x+1}{2}$$

مثال أوجد معكوس الدالة: $f(x)=x^2+3$ وناقش الحلول.

الحل

$$\cancel{f(x)}=x^2+3$$

$$y=x^2+3$$

$$x=y^2+3$$

$$y^2+3=x$$

$$y^2=x-3$$

$$\Longrightarrow$$

$$y^2=x-3$$

$$\boxed{y=\pm\sqrt{x-3}}$$

حاول أن تحل

③ أوجد معكوس الدالة: $f(x)=(x+3)^2-4$. ناقش الحلول.

الحل

$$\cancel{f(x)}=(x+3)^2-4$$

$$y=(x+3)^2-4$$

$$x=(y+3)^2-4$$

$$(y+3)^2-4=x$$

$$(y+3)^2=x+4$$

$$y+3=\pm\sqrt{x+4}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{y=\pm\sqrt{x+4}\;-3}$$

دوال الجذر التربيعي

التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $y = \sqrt{x-h} + k$ ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y = \sqrt{x}$ كالتالي:

- عندما تكون k, h موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى.
- وعندما تكون h سالبة يزاح البيان إلى اليسار.
- وعندما تكون k سالبة يزاح البيان إلى الأسفل.

حاول أن تحل

4 **a** ارسم بيانيًا: $y = \sqrt{x-2} + 1$

عيّن المجال والمدى للدالة.

$k=-2$ $h=5$

b إذا تم إزاحة بيان الدالة: $y = \sqrt{x}$، 5 وحدات يمينًا 2 وحدة إلى الأسفل.

اكتب معادلة الدالة الناتجة عن الإزاحة.

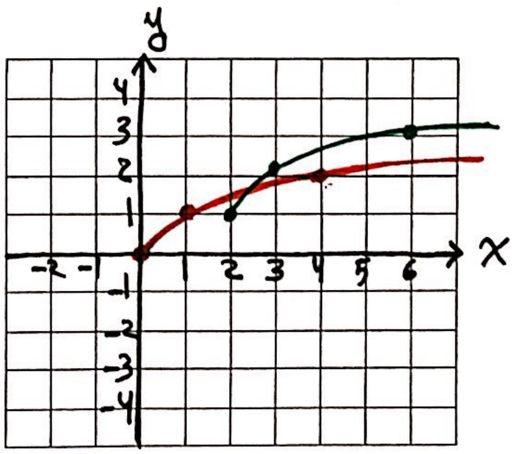
$$y = \sqrt{x-2} + 1$$

① $h = 2$ و $k = 1$

② $y = \sqrt{x}$ هي دالة المرجع

③

x	0	1	4
y	0	1	2



④ الازاحة

وحدتين إلى اليمين ثم وحدة واحدة للأعلى

المجال $= [h, \infty) = [2, \infty)$

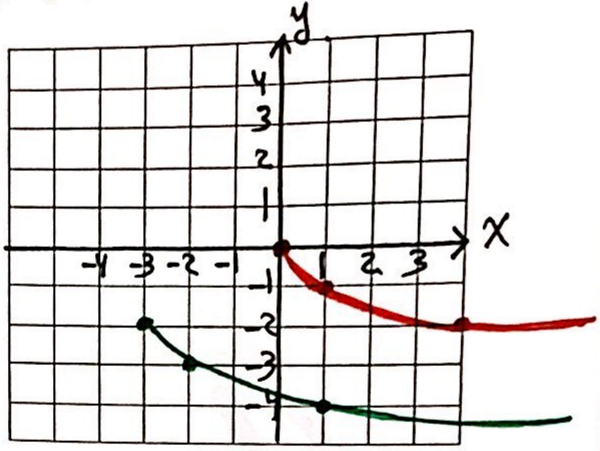
المدى $= [k, \infty) = [1, \infty)$

ⓑ $y = \sqrt{x-h} + k \Rightarrow y = \sqrt{x-5} - 2$

مثال ارسم كل دالة جذر تربيعي. ثم اذكر المجال والمدى.

$y = -\sqrt{x+3} - 2$

$h = -3$, $K = -2$



دالة المرجع هي

$y = -\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	-1	-2

الازاحة

٣ وحدات الى اليسار ثم وحدتين للاسفل

المجال $= [h, \infty) = [-3, \infty)$

المدى $= (-\infty, K] = (-\infty, -2]$

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

في التمارين (5–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت النقطة $M(x, y)$ تنتمي لبيان الدالة f فإن النقطة $N(y, x)$ تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة. [✓ a] b

(2) إذا كانت $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$ فإن الدالتين كل منهما معكوس للأخرى. [✓ a] b

(3) المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان دالة f وبيان معكوسها. a [✓ b]

(4) إذا مر بيان دالة بنقطة الأصل فإن بيان معكوسها يمر أيضًا بنقطة الأصل. [✓ a] b

(5) لا يتغير مجال دالة الجذر التربيعي بعد إزاحة بيانها 3 وحدات يمينًا. a [✓ b]

في التمارين (10–6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة:

(6) إذا انتمت النقطة $A(2, 3)$ إلى بيان دالة فإن النقطة التي تنتمي إلى بيان معكوس تلك الدالة هي:

a $(-2, 3)$
b $(2, -3)$
c $(3, -2)$
[✓ d] $(3, 2)$

(7) بيان الدالة $y = \sqrt{x+2} - 2$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = \sqrt{x}$:

a وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأعلى
[✓ b] وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأسفل
c وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأعلى
d وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأسفل

(8) معكوس الدالة $y = x^2 + 2$ هو:

a $y = \sqrt{x-2}$
b $y = -\sqrt{x-2}$
[✓ c] $y = \pm\sqrt{x-2}$
d ليس أيًا مما سبق صحيحًا

(9) معكوس الدالة $y = 5x - 1$ هو:

a $y = 5x + 1$
[✓ b] $y = \frac{x+1}{5}$
c $y = \frac{x}{5} + 1$
d $y = \frac{x}{5} - 1$

(10) مجال معكوس الدالة $y = \sqrt{x+3} - 1$ هو:

[✓ a] $\mathbb{R}$
b $(-1, \infty)$
c $(-\infty, 1)$
d $[-1, \infty)$

١٠

الوحدة الثانية (الدوال الحقيقية) بند (2-6) حل المتباينات

يبيّن الجدول التالي كيفية كتابة اتحاد فترتين بصورة أخرى في بعض الحالات.

رمز الفترة	صورة أخرى لرمز الفترة	تمثيل الفترة على خط الأعداد
$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$	$R / [a, b]$	
$(-\infty, a] \cup (b, \infty)$	$R / (a, b]$	
$(-\infty, a) \cup [b, \infty)$	$R / [a, b)$	
$(-\infty, a] \cup [b, \infty)$	$R / (a, b)$	

حاول أن تحل

① أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 + 4x + 3 \leq 0$

المعادلة المناظرة هي $x^2+4x+3=0$

$(x+1)(x+3)=0$

$x+1=0$ | $x+3=0$

$x=-1$ | $x=-3$

نبحث عن قيم x التي تجعل $(x+1)(x+3)<0$

$x+1>0$ | $x+3>0$

$x>-1$ | $x>-3$

$x+1<0$ | $x+3<0$

$x<-1$ | $x<-3$

	-∞		-3		-1		∞
$(x+1)$		−		−	●	+	
$(x+3)$		−	●	+		+	
$(x+1)(x+3)$		+		−		+	

م.ح = $[-3 و -1]$

حاول أن تحل

② أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المتباينة: $-2x^2 + 5x - 3 > 0$

الحل

$-2x^2+5x-3>0$ (بالضرب في -1)

$$\boxed{2x^2-5x+3<0}$$

المعادلة المناظرة هي $2x^2-5x+3=0$

$(2x-3)(x-1)=0$

$2x-3=0$ | $x-1=0$

$\boxed{x=\frac{3}{2}}$ | $\boxed{x=1}$

نبحث عن قيم x التي تجعل $(2x-3)(x-1)<0$

$2x-3>0$ | $x-1>0$

$x>\frac{3}{2}$ | $x>1$

$2x-3<0$ | $x-1<0$

$x<\frac{3}{2}$ | $x<1$

	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		∞
$(2x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)(x-1)$		$+$		$-$		$+$	

م.ح = $\left(1 , \frac{3}{2}\right)$

تطبيق على مجال الدالة

مثال

أوجد مجال كل دالة مما يلي: ⓐ $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

الحل

نضع $x^2-4 \geq 0$ → موجبة مغلقة

المعادلة المناظرة هي

$x^2-4=0$

$(x-2)(x+2)=0$

$x-2=0$ | $x+2=0$

$x=2$ | $x=-2$

نبحث عن قيم x التي تجعل

$(x-2)(x+2)>0$

$x-2>0$ | $x+2>0$

$x>2$ | $x>-2$

$x-2<0$ | $x+2<0$

$x<2$ | $x<-2$

	$-\infty$	-2		2	∞
$(x-2)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

مجال الدالة = $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$ ✓

$= R / (-2,2)$ ✓

b $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

الحل

نضع $-x^2+4x-3 \geq 0$

بالضرب في -1

$$x^2-4x+3 \leq 0$$

سالبة مغلقة

المعادلة المناظرة هي

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

$x-1=0$ | $x-3=0$

$\boxed{x=1}$ | $\boxed{x=3}$

نبحث عن قيم x التي تجعل

$$(x-1)(x-3)<0$$

$x-1>0$ | $x-3>0$

$x>1$ | $x>3$

$x-1<0$ | $x-3<0$

$x<1$ | $x<3$

	$-\infty$	1		3	∞
$(x-1)$	−	0	+		+
$(x-3)$	−		−	0	+
$(x-1)(x-3)$	+	0	−	0	+

مجال الدالة = [1 و 3]

حاول أن تحل أوجد مجال $h(x)=\sqrt{x^2-x}$

الحل

نضع $x^2-x \geq 0$ → موجبة مغلقة

المعادلة المناظرة هي

$$x^2-x=0$$

$$(x-1)(x\quad)=0$$

$x-1=0$ | $\boxed{x=0}$

$\boxed{x=1}$

نبحث عن قيم x التي تجعل

$$(x-1)(x)>0$$

$x-1>0$ | $x>0$

$x>1$

$x-1<0$ | $x<0$

$x<1$

	$-\infty$		0		1		∞
$(x-1)$		−		−	0	+	
x		−	0	+		+	
$(x-1)(x)$		+	0	−	0	+	

مجال الدالة $= (-\infty,0]\cup[1,\infty)$ ✓

$= R/(0,1)$ ✓

حاول أن تحل

⑤ أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3} \ge 0$

موجبة
مغلقة

الحل

اصفار البسط هي $3x-5=0$

$\boxed{x=\frac{5}{3}}$

اصفار المقام هي $-2x+3=0$

$\boxed{x=\frac{3}{2}}$

نبحث عن قيم x التي تجعل $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

$3x-5>0$

$x>\frac{5}{3}$

$3x-5<0$

$x<\frac{5}{3}$

$-2x+3>0$

$x<\frac{3}{2}$

$-2x+3<0$

$x>\frac{3}{2}$

	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		∞
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+3$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{3x-5}{-2x+3}$		$-$	غير معرف	$+$	0	$-$	

$\left(\frac{3}{2} \text{ و } \frac{5}{3}\right]$ = م.ح

مثال أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

$$\frac{3x+7}{x+2} - \frac{2}{1} \geqslant 0$$

$$\frac{1(3x+7) - 2(x+2)}{(x+2)} \geqslant 0$$

$$\frac{3x+7-2x-4}{x+2} \geqslant 0$$

$$\frac{x+3}{x+2} \geqslant 0 \rightarrow$$ موجبة مغلقة

اصفار البسط $x+3=0$

$$\boxed{x=-3}$$

اصفار المقام $x+2=0$

$$\boxed{x=-2}$$

نبحث عن قيم x التي تجعل $\frac{x+3}{x+2} \geqslant 0$

$x+3>0 \rightarrow x>-3$ | $x+2>0 \longrightarrow x>-2$

$x+3<0 \rightarrow x<-3$ | $x+2<0 \longrightarrow x<-2$

	$-\infty$	-3		-2	∞
$(x+3)$	$-$	0	$+$	|	$+$
$(x+2)$	$-$	|	$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{x+2}$	$+$	0	$-$	غير معرف	$+$

$(-\infty,-3] \cup (-2,\infty) =$ م.ح

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$

الحل

$$\frac{x^2-5x+3}{x+٤} - \frac{3}{1} < ٠$$

$$\frac{x^2-5x+3-3(x+٤)}{x+٤} < ٠$$

$$\frac{x^2-5x+3-3x-12}{x+٤} < ٠$$

$$\frac{x^2-8x-9}{x+٤} < ٠$$

$$\frac{(x-9)(x+1)}{x+٤} < ٠ \longrightarrow$$ سالبة مفتوحة

اصفار المقام

$x+٤=٠$

$\boxed{x=-٤}$

اصفار البسط

$(x-9)(x+1)=٠$

$\boxed{x=9}$ أو $\boxed{x=-1}$

$\frac{(x-9)(x+1)}{x+٤} < ٠$ نبحث عن قيم x التى تجعل

$x+٤>٠$	$x+1>٠$	$x-9>٠$
$x>-٤$	$x>-1$	$x>9$
$x+٤<٠$	$x+1<٠$	$x-9<٠$
$x<-٤$	$x<-1$	$x<9$

	−∞		−٤		−١		٩		∞
$(x$ [redacted] $٩)$		−		−		−	0	+	
$(x+١)$		−		−	0	+		+	
$x+٤$		−	0	+		+		+	
$\frac{(x-٩)(x+١)}{x+٤}$		−	غير معرف	+	0	−	0	+	

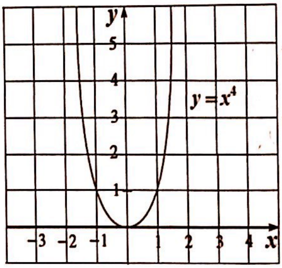
$(-\infty, -٤) \cup (-١, ٩)$ = م.ح

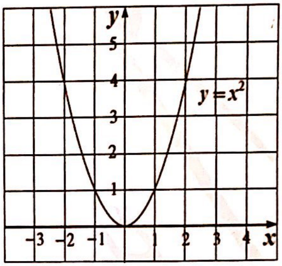
الوحدة الثالثة بند (1-3) دوال القوى ومعكوساتها

استكشاف دوال القوى ومعكوساتها

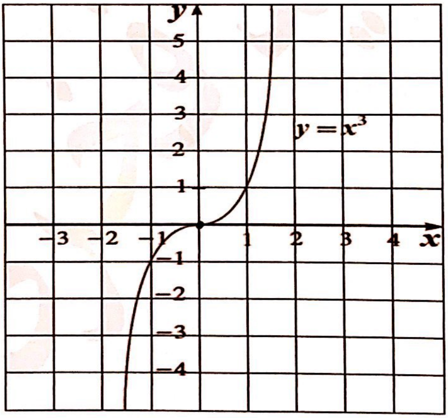
تكون دوال القوى على الشكل:

$$y = ax^n , \quad a \neq 0 , \quad n \in \mathbb{Z}^+$$





وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة $y = ax^n$ حيث n عددًا زوجيًا موجبًا، $a \neq 0$.



وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة $y = ax^n$ حيث n عددًا فرديًا موجبًا، $a \neq 0$.

الدوال الزوجية والدوال الفردية

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:

① $\forall x \in D \ , \ -x \in D$

② $f(-x) = f(x)$

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة فردية إذا وفقط إذا كان:

① $\forall x \in D \ , \ -x \in D$

② $f(-x) = -f(x)$

حاول أن تحل

③ بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

ⓐ $f_1(x) = x^5$

ⓑ $f_2(x) = x$

ⓒ $f_3(x) = 2x^4$

ⓓ $f_4(x) = (x+3)^3$

ⓐ $f_1(x) = x^5$

$f_1(-x) = (-x)^5$

$= -x^5 = -f_1(x)$

$\therefore$ f_1 دالة فردية

ⓑ $f_2(x) = x$

$f_2(-x) = -x$

$= -f_2(x)$

$\therefore$ f_2 دالة فردية

ⓒ $f_3(x) = 2x^4$

$f_3(-x) = 2(-x)^4$

$= 2x^4 = f_3(x)$

$\therefore$ f_3 دالة زوجية

ⓓ $f_4(x) = (x+3)^3$

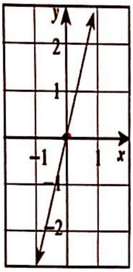
$f_4(-x) = (-x+3)^3$

$\therefore$ f_4 ليست زوجية وليست فردية

حاول أن تحل

4 الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضح هل هي فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

a



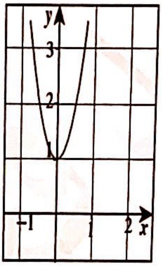
$y = 3x$

فردية

↓

متماثلة حول نقطة الاصل

b



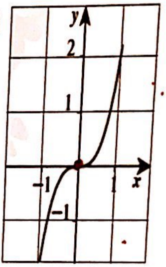
$y = 4x^2 + 1$

زوجية

↓

متماثلة حول محور الصادات

c



$y = 2x^3$

فردية

↓

متماثلة حول نقطة الاصل

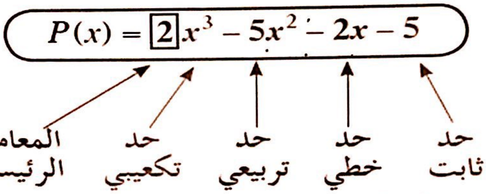
تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} \dots , a_0$ أعدادًا حقيقية

دالة كثيرة حدود



الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x + 3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2 + 5x - 2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3 - 5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4 + x^3 - 1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

حاول أن تحل

① اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

a $4x - 6x + 5$

$= -2x + 5$

من الدرجة الأولى

ثنائية

b $3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3)$

$= 3x^3 + x^2 - 4x - 2x^3$

$= x^3 + x^2 - 4x$

من الدرجة الثالثة

ثلاثية

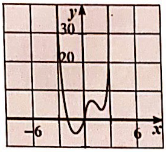
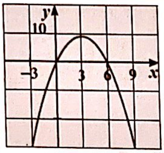
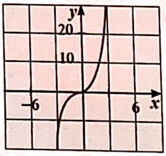
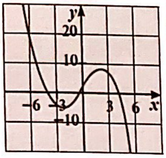
c $6 - 2x^5$

من الدرجة الخامسة

ثنائية

سلوك النهاية

سلوك النهاية لمنحنى دالة يصف امتداد طرفيه الأيمن والأيسر، وتوجد أربعة نماذج لسلوك النهاية لكثيرة حدود وهي لأعلى ولأعلى، لأسفل ولأسفل، لأعلى ولأسفل، لأسفل ولأعلى.

الدرجة وجي أم فردي	سلوك النهاية	المعامل الرئيسي موجب، سالب	الدالة وبيانها	نظام الإشارات
الرابعة زوجي	(↖ ، ↗)	1 عدد موجب	 $y = x^4 - 3x^3 + 5x$	
الثانية زوجي	(↙ ، ↘)	−1 عدد سالب	 $y = -x^2 + 6x$	
الثالثة فردي	(↙ ، ↗)	1 عدد موجب	 $y = x^3$	
الثالثة فردي	(↖ ، ↘)	−0.3 عدد سالب	 $y = -0.3x^3 + 4x + 2$	

حاول أن تحل

② وضح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

ⓐ $y = -x^3 + 2x^2 + 6$

ⓑ $y = 4x^4 - 3x$

ⓒ $f(x) = 2x^3 - x$

ⓓ $h(x) = x - x^4$

ⓑ $y = 4x^4 - 3x$

من الدرجة الرابعة ← زوجي

المعامل الرئيسي = ٤ ← موجب

∴ سلوك النهاية (↗ و ↖)

ⓓ $h(x) = x - x^4$

من الدرجة الرابعة ← زوجي

المعامل الرئيسي = -1 ← سالب

∴ سلوك النهاية (↘ و ↙)

ⓒ $f(x) = 2x^3 - x$

من الدرجة الثالثة ← فردي

المعامل الرئيسي = 2 ← موجب

سلوك النهاية (↗ و ↙)

ⓐ $y = -x^3 + 2x^2 + 6$

من الدرجة الثالثة ← فردي

المعامل الرئيسي = -1 ← سالب

∴ سلوك النهاية (↘ و ↖)

الوحدة الثالثة بند (3-3) العوامل الخطية لكثيرات الحدود

عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود

x^3

مثال أوجد أصفار $y = (x-2)(x+1)(x+3)$ ،

ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا للدالة مراعيًّا سلوك نهاية الدالة.

الحل

نضع $y = 0$

$\therefore (x-2)(x+1)(x+3) = 0$

$x+3=0$ | $x+1=0$ | $x-2=0$

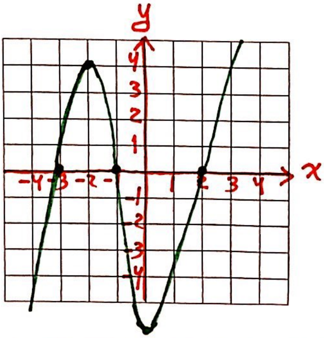
$x=-3$ | $x=-1$ | $x=2$

اصفار الحدودية هي 3- و 1- و 2

3 و 2 و 0 و 1- و 2- و 3- و 4-

x	-4	-3	-2	-1	0	2	3
y	-18	0	4	0	-6	0	24

سلوك النهاية للدالة (↗ و ↙)



حاول أن تحل

$-x^3$

4 أوجد أصفار الدالة $y = (x-7)(x-5)(3-x)$، ثم ارسم بيانًا تقريبيًا للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

نضع $y = 0$

$\therefore (x-7)(x-5)(3-x) = 0$

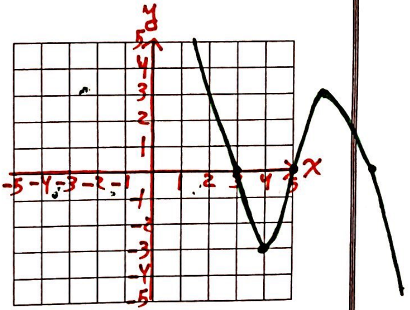
$3 - x = 0$	$x - 5 = 0$	$x - 7 = 0$
$x = 3$	$x = 5$	$x = 7$

اصفار الحدودية هي 3 ، 5 ، 7

2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8

x	2	3	4	5	6	7	8
y	15	0	-3	0	3	0	-15

سلوك النهاية للدالة (↘ و ↖)



نظرية العامل

المقدار $(x-a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

ويعني أنه إذا كان $(x-a)$ عاملًا خطيًا لكثيرة الحدود فإن a صفر من أصفار دالة كثيرة الحدود والعكس صحيح.

فمثلًا $(x-5)$ عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ 5 صفر لها.

أي أنه إذا كان $(x-5)$ عاملًا خطيًا لكثيرة الحدود فإن 5 صفر لها والعكس صحيح.

وكذلك $(x+3)$ عاملًا خطيًا لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ 3- صفر لها.

مثال **اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: 3 , 3 , 2- في الصورة العامة.**

الحل ∵ أصفار الحدودية هي 3 و 3 , 2-

∴ عوامل الحدودية هي $(x-3)$ و $(x-3)$, $(x+2)$

$$\therefore f(x)=(x+2)(x-3)(x-3) \therefore$$

$$=(x+2)(x^2-3x-3x+9)$$

$$=x^3\underline{-3x^2}\underline{-3x^2}\underline{+2x^2}\underline{-6x}\underline{-6x}+18$$

$$=x^3-4x^2-12x+18$$

نلاحظ مما سبق أن لنظرية العامل أربعة مفاهيم مرتبطة بكثيرة الحدود.

وهذه الأفكار متكافئة، بمعنى أنك إذا علمت إحداها، فسوف تعلم الكل.

① **$(x=+1)$ حل للمعادلة: $x^2+3x-4=0$**

② **$(+1)$ جزء مقطوع من محور السينات لمنحنى الدالة: $y=x^2+3x-4$**

③ **$(+1)$ صفر من أصفار الدالة: $y=x^2+3x-4$**

④ **$(x-1)$ عامل من عوامل كثيرة حدود: x^2+3x-4**

الوحدة الثالثة بند (3-4) قسمة كثيرات الحدود

القسمة المطولة

حاول أن تحل 1 اقسم:

ناتج القسمة ← $2x-3$

÷

x

−

↓

b $x-8\overline{)\cancel{2x^2}-19x+24}$

$\cancel{\overset{-}{2x^2}\overset{+}{-}16x}$ ↓

$\cancel{-3x+24}$

$\cancel{\pm 3x \mp 24}$

الباقي ← ٠

ناتج القسمة = $2x-3$

الباقي = ٠

$x+3$

a $x+2\overline{)\cancel{x^2}+5x+6}$

$\cancel{\overset{-}{x^2}\overset{-}{+}2x}$ ↓

$\cancel{3x+6}$

$\cancel{\overset{-}{3x}\overset{-}{+}6}$

٠

ناتج القسمة = $x+3$

الباقي = ٠

حاول أن تحل 2 تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

b $(x^3-x+1)\div(x+1)$

x^2-x

$x+1\overline{)\cancel{x^3}\quad -x+1}$

$\cancel{\overset{-}{x^3}\overset{-}{+}x^2}$ ↓

$\cancel{-x^2-x}$

$\cancel{\overset{+}{-}x^2\overset{+}{-}x}$ ↓

$+1$

ناتج القسمة = x^2-x

الباقي = 1 ، ٠ ≠ 1

∴ المقسوم عليه ليس عامل من عوامل المقسوم

a $(x^3+4x^2+x-6)\div(x+2)$

x^2+2x-3

$x+2\overline{)\cancel{x^3}+4x^2+x-6}$

$\cancel{\overset{-}{x^3}\overset{-}{+}2x^2}$ ↓

$\cancel{2x^2}+x$

$\cancel{\overset{-}{2x^2}\overset{-}{+}4x}$ ↓

$\cancel{-3x-6}$

$\cancel{\overset{+}{-}3x\overset{+}{-}6}$

٠

الباقي = ٠

∴ المقسوم عليه عامل من عوامل المقسوم

استخدام القسمة التركيبية

عندما نقسم على عامل خطي على الصورة $(x - a)$ يمكننا استخدام عمليات مختصرة تعرف بالقسمة التركيبية، وفيها تهمل كل المتغيرات والأسس من المقسوم واستخدام صفر العامل الخطي a، ويتم إجراء عملية الجمع بدلًا من الطرح خلال العمليات والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ على $(x+2)$ ثم أوجد باقي العوامل.

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & x^2 & x & \text{عدد} \\ -2 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & + & + & + \\ \overset{\uparrow}{x} & \downarrow & -2 & 10 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & \vert\ 0 \end{array}$$

باقى القسمة = 0

ناتج القسمة = $1x^2 - 5x + 4$

$= (x-4)(x-1)$

∴ باقى العوامل هى $(x-1)$ و $(x-4)$

حاول أن تحل

3 a استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ على $(x+2)$

b استخدم الإجابة في a لتحليل $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ إلى عوامل.

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & x^2 & x & \text{عدد} \\ -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & + & + & + \\ \overset{\uparrow}{x} & \downarrow & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \vert\ 0 \end{array}$$

باقى القسمة = 0

ناتج القسمة = $1x^2 - 4x + 3$

$= (x-1)(x-3)$

$\therefore x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x+2)(x-1)(x-3)$

حاول أن تحل

4 استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3+4x^2+x-6 على $(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^3 & x^2 & x & \text{عدد} \\
-1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\
 & \downarrow & \overset{+}{-1} & \overset{+}{-3} & \overset{+}{2} \\
\hline
 & 1 & 3 & -2 & \big| -4
\end{array}$$

باقي القسمة = -4

ناتج القسمة = $1x^2+3x-2$

مثال اقسم مستخدمًا القسمة التركيبية. $(2x^4+6x^3+5x^2-45)\div(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x & \text{عدد} \\
-3 & 2 & 6 & 5 & 0 & -45 \\
 & \downarrow & \overset{+}{-6} & \overset{+}{0} & \overset{+}{-15} & \overset{+}{45} \\
\hline
 & 2 & 0 & 5 & -15 & \big| 0
\end{array}$$

باقي القسمة = 0

ناتج القسمة = $2x^3+\cancel{0x^2}+5x-15$

$= 2x^3+5x-15$

نظرية الباقي ← تستخدم لايجاد باقى القسمة

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

عامل

حاول أن تحل

7 استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$ على $(x + 1)$، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

∴ اصفار المقسوم عليه = -1

$$f(-1) = 2(-1)^4 + 6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 60$$

$$= -69$$

∴ باقى القسمة = -69

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x & \text{عدد} \\
-1 & 2 & 6 & -5 & 0 & -60 \\
 & \downarrow & -2 & -4 & 9 & -9 \\
\hline
 & 2 & 4 & -9 & 9 & -69
\end{array}$$

∴ باقى القسمة = -69

مثال استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد $f(a)$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6 \; ; \; a = -2$

$$f(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) - 6$$

$$= 18$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^3 & x^2 & x & \text{عدد} \\
-2 & 1 & 4 & -8 & -6 \\
 & \downarrow & \overset{+}{-2} & \overset{+}{-4} & \overset{+}{24} \\
\hline
 & 1 & 2 & -12 & \boxed{18}
\end{array}$$

باقي القسمة = 18

قسمة كثيرات الحدود

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة ⓐ إذا كانت الإجابة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x+\alpha)$ يساوي صفرًا فإن $\underline{\underline{\alpha}}$ عامل من عوامل f

ⓐ [✓ ⓑ]

(2) الدالة $f(x)=(x-2)^2-1$ تقبل القسمة على $(x-1)$

$1 \rightarrow f(x)$

$(1-2)^2-1=0$

[✓ ⓐ] ⓑ

(3) باقي قسمة (x^3+a^3) على $(x-a)$ هو $2a^3$

$a \rightarrow$ $(a)^3+(a)^3=2a^3$

[✓ ⓐ] ⓑ

(4) ناتج قسمة حدودية من الدرجة n حيث $n \geqslant 2$ على حدودية من الدرجة الثانية تكون حدودية من الدرجة $(n-2)$

n

2

[✓ ⓐ] ⓑ

(5) ناتج قسمة حدودية من الدرجة السادسة على حدودية من الدرجة الثالثة تكون حدودية من الدرجة الثانية.

$6-3=3$

ⓐ [✓ ⓑ]

في التمارين من (6–11)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)=x-k$ هو:

$K \rightarrow f(x)$

ⓐ $g(k)$ [✓ ⓑ $f(k)$] ⓒ $f(-k)$ ⓓ $-k$

(7) باقي قسمة (x^4+2) على $(x-3)$ هو: $(3)^4+2=83$

$3 \rightarrow$

ⓐ 3 ⓑ 27 ⓒ 81 [✓ ⓓ 83]

(8) ناتج قسمة $(2x^4-8x^2)$ على $(x+2)$ يساوي:

[✓ a] $2x^3-4x^2$
b $2x^3-8x^2$
c x^3-4x^2
d $2x^3-4x^2+2x$

(9) إذا كان 0 هو باقي قسمة $f(x)=2x^3-4x^2+kx-1$ على $\overset{-1}{(x+1)}$ فإن k تساوي:

a 7
[✓ b] −7
c −3
d 3

(10) إذا كان باقي قسمة $f(x)=x^4-kx^2+x-k$ على $\overset{1}{(x-1)}$ هو 3 فإن k تساوي:

a $\frac{1}{2}$
b 3
[✓ c] $-\frac{1}{2}$
d $\frac{5}{2}$

(11) إذا كان $f(-1)=f(0)=f(3)=-2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون:

a x^3-x^2+3x-2
b x^3-2x^2-3x
c $2x^3-2x^2-3x-2$
[✓ d] $2x^3-4x^2-6x-2$

الوحدة الثالثة بند (3-5) حل معادلات كثيرات الحدود

حل المعادلات بالتحليل

يمكنك حل بعض معادلات كثيرات الحدود بالتحليل واستخدام خاصية الضرب في الصفر أو نظرية العامل.

حاول أن تحل

① **ⓐ** أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ بالتحليل. ثم تحقق من صحة الحل.

$$\underline{4x}\left(\underline{x^2 - 4x - 5}\right) = 0$$

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{0}{4}$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \quad mode\ 5\ 3$$

$$(x-5)(x+1) = 0$$

$$\boxed{x = 5}$$

$$\boxed{x = -1}$$

$\therefore$ م.ح = $\{0, 5, -1\}$

مثال أوجد مجموعة حل المعادلة: $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$ بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

$$\underline{3x}\left(\underline{x^2 + 2x - 3}\right) = 0$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{0}{3}$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$\boxed{x = -2}$$

م.ح = $\{0, 1, -2\}$

لا يتوجب عليك أحيانًا تحليل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة تحليلًا كاملًا لحلها. فمتى أوجدت عاملًا يمكنك استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

حاول أن تحل ② أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a $2x^3 = 3x - 5x^2$

$2x^3 - 3x + 5x^2 = 0$

$2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

$x(2x^2 + 5x - 3) = 0$

$x = 0$

$2x^2 + 5x - 3 = 0$

$(2x - 1)(x + 2) = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x = -2$

$\{0, \frac{1}{2}, -2\} =$ م.ح

b $x^3 - x^2 - 3x = 0$

$x(x^2 - x - 3) = 0$

$x = 0$

$x^2 - x - 3 = 0$

$(x \quad)(x \quad) = 0$

$x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$\{0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\} =$ م.ح

يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود باستخدام التحليل بطريقة التقسيم حيث يمكن تقسيم الحدود بطريقة تساعدنا على تحويل كثيرة الحدود إلى حاصل ضرب عوامل.

أوجد مجموعة حل المعادلة:

a $x^3+3x^2=x+3$

$x^3+3x^2-x-3=0 \longrightarrow$ التحليل بالتقسيم

$(x^3-x)+(3x^2-3)=0$ ✓

$x(x^2-1)+3(x^2-1)=0$

$(x^2-1)(x+3)=0$

$x^2-1=0 \quad | \quad x+3=0$

$x=1\ ,\ x=-1 \quad | \quad \boxed{x=-3}$

$\{1,-1,0\}=$ م.ح

---

b $x^3-3x=6-2x^2$

$x^3-3x-6+2x^2=0$

$(x^3+2x^2)+(-3x-6)=0$

$x^2(x+2)-3(x+2)=0$

$(x+2)(x^2-3)=0$

$x+2=0 \quad | \quad x^2-3=0$

$x=-2 \quad | \quad x=\sqrt{3}\ ,\ x=-\sqrt{3}$

$\{-2,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}=$ م.ح

الأصفار النسبية الممكنة

نظرية

بفرض أن: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \,;\, a_n \neq 0$

حيث $a_n , a_{n-1} , \dots , a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

$\{\frac{a}{b}$: a عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $a_n\}$

مثال أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a $1x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

العامل الرئيسي

الحد الثابت

① عوامل الحد الثابت هي ±3 و ±1

② عوامل المعامل الرئيسي هي ±1

③ الاصفار النسبية الممكنة هي ±3 , ±1

④ نفرض ان $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$\therefore f(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3 = ٠$

∴ العدد (1) صفراً من اصفار الحدودية

⑤

$$\begin{array}{c|cccc} & x^3 & x^2 & x & \text{عدد} \\ 1 & 1 & -4 & ٠ & 3 \\ & \downarrow & +1 & +(-3) & +(-3) \\ \hline & 1 & -3 & -3 & \big|\ ٠ \end{array}$$

⑥ ناتج القسمة = $1x^2 - 3x - 3$

⑦ نضع $1x^2 - 3x - 3 = ٠$

$x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ و $x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$

$\left\{1, \frac{3+\sqrt{21}}{2}, \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right\}$ = م.ح