(2 ـ 7) القطاع الدائري والقطعة الدائرية

عودة لفهرس الموضوعات

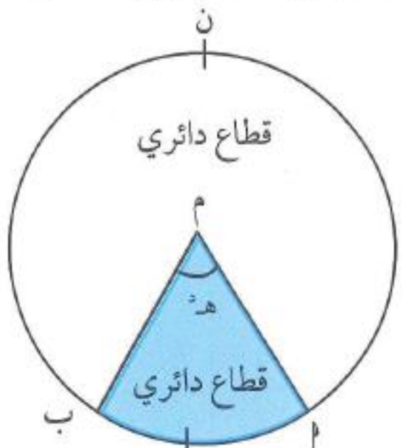
٢-٧ القطاع الدائري والقطعة الدائرية
Circular Sector and Circular Segment

تعريف:
القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.

سوف تتعلم
- القطاع الدائري
- إيجاد مساحة القطاع الدائري
- القطعة الدائرية
- إيجاد مساحة القطعة الدائرية

تمثل قطعة الشطيرة قطاعًا دائريًا

في الشكل المرسوم:
نصفا القطرين مأ، مب يقسمان الدائرة إلى قطاعين دائريين.
القطاع الأصغر مأجـب زاويته المركزية هـ°، والقطاع الأكبر مأنب زاويته المركزية ٢π − هـ°.



معلومة رياضية:
قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التي تحصر القوس بين ضلعيها.

ا – مساحة القطاع الدائري: Area of Circular Sector

لإيجاد مساحة القطاع الدائري نستخدم التناسب: (البرهان غير مطلوب)

نسبة طول القوس إلى طول الدائرة (محيط الدائرة) هي نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة.

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{طول الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

$$\frac{\text{ل}}{٢\pi\,\text{نق}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi\,\text{نق}^{٢}}$$

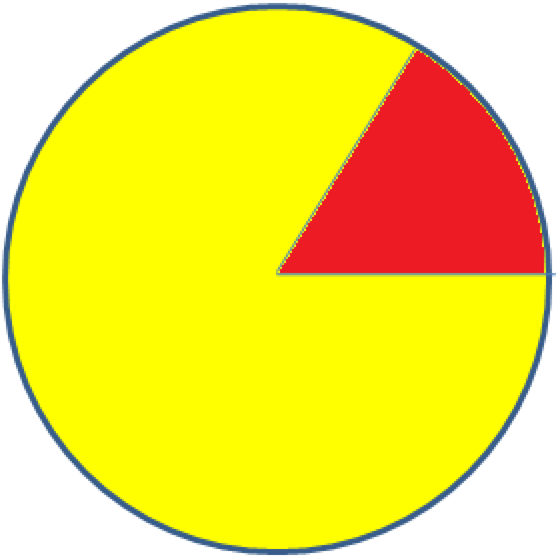
$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{\text{ل}}{٢\pi\,\text{نق}} \times \pi\,\text{نق}^{٢}$$

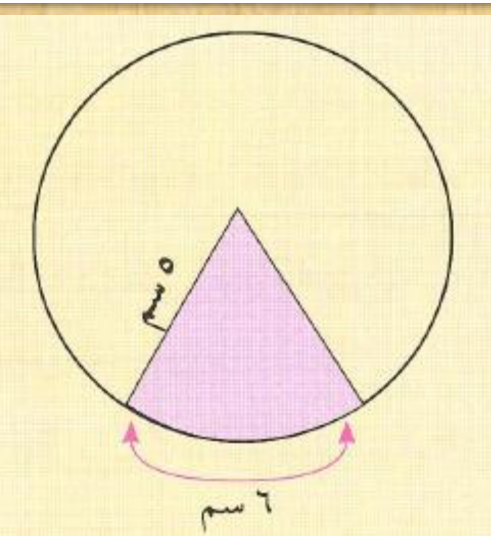
$$\boxed{\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{١}{٢}\,\text{ل نق}}$$

تذكر:

مساحة الدائرة = π نق^{٢}

طول القوس ل = هـ^{د} × نق





مثال (١)

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 5$

= 15 سم^2

حاول أن تحل

١ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق

= $\frac{1}{2} \times 4 \times 10$

= 20 سم^2

لاحظ أن

ل = هـد × نق

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق

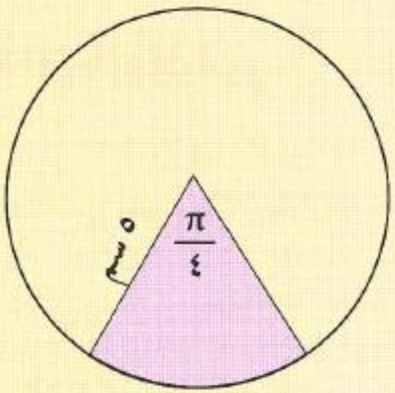
بالتعويض عن ل

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ هـد × نق × نق = $\frac{1}{2}$ هـد × نق^2

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ هـد × نق^2

مثال (٢)

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ هـد × نق^2

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times (5)^2 = \frac{25\pi}{8} \approx 9,8$ سم^2

لاحظ أن

ل = هـ د × نق

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق

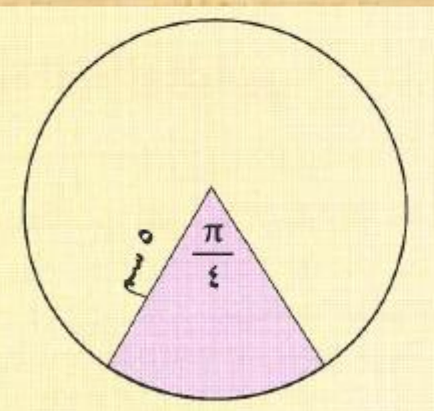
بالتعويض عن ل

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ هـ د × نق × نق = $\frac{1}{2}$ هـ د × نق^2

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ هـ د × نق^2

مثال (٢)

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:



مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ هـ د × نق^2

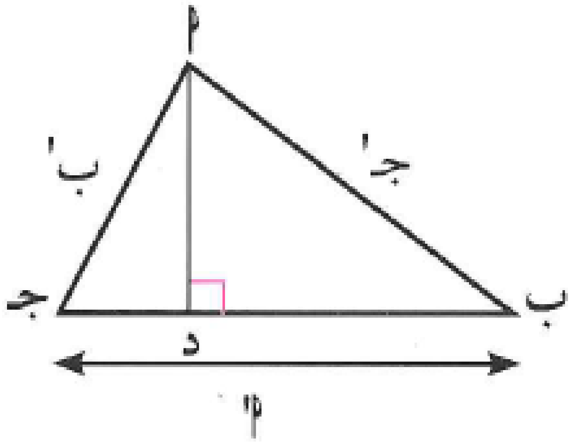
$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times 5^2 \times 5^2$

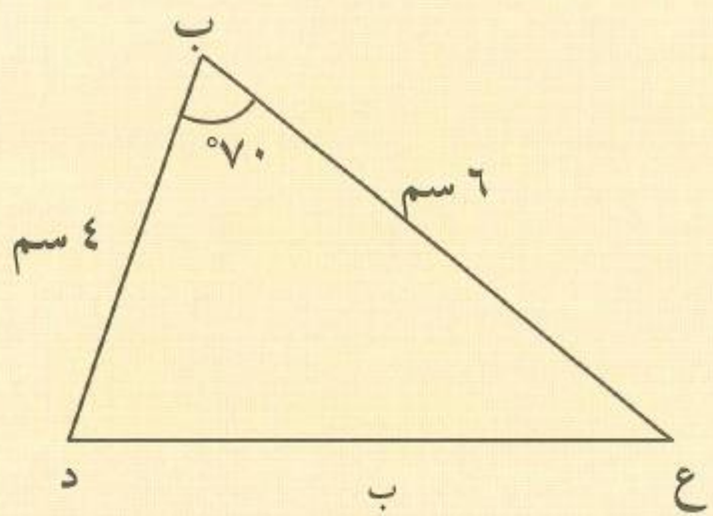
$\simeq$ 9.8 سم^2

٢- القطعة الدائرية: Circular Segment

القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle





مثال (٣)

ب ع د حيث ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق(بَ̂) = ٧٠°
أوجد مساحة هذا المثلث.

مساحة المثلث ب ع د=

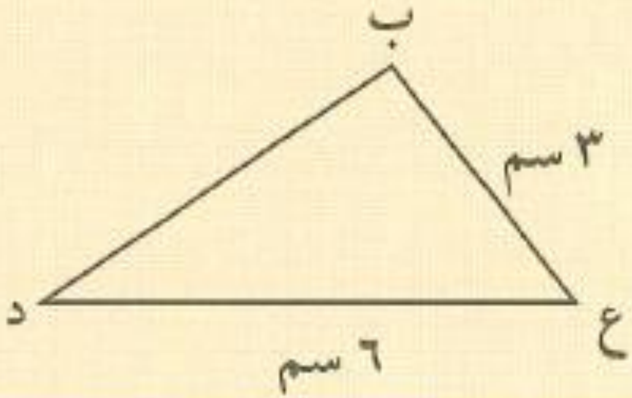
$\frac{1}{2}$ × ب ع × ب د × جا (ب̂)

= $\frac{1}{2}$ × 6 × 4 × جا (70°)

≃ 11,276 سم^2

حاول أن تحل

٢ في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم². فأوجد ق($\hat{\text{ع}}$).



مساحة المثلث ب ع د=

$\frac{1}{2}$ × ع ب × ع د × جا ($\hat{\text{ع}}$)

$7 = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times$ جا ($\hat{\text{ع}}$)

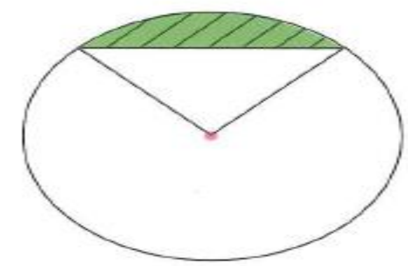
$7 = 9 \times$ جا ($\hat{\text{ع}}$)

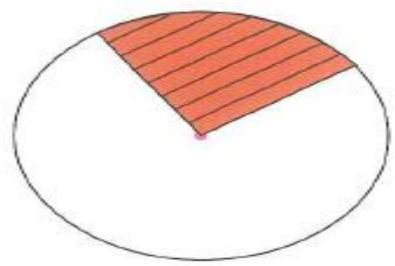
جا ($\hat{\text{ع}}$) = $\frac{7}{9}$

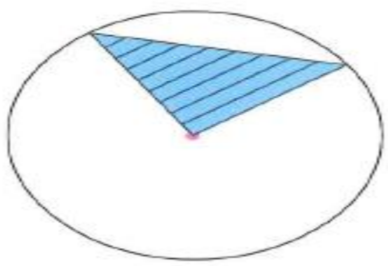
ق ($\hat{\text{ع}}$) = جا$^{-1}$ ($\frac{7}{9}$) $\simeq 51.06°$

٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.







مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري − مساحة المثلث

إيجاد مساحة القطعة الدائرية:

مساحة القطاع الأصغر = $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق^{٢}

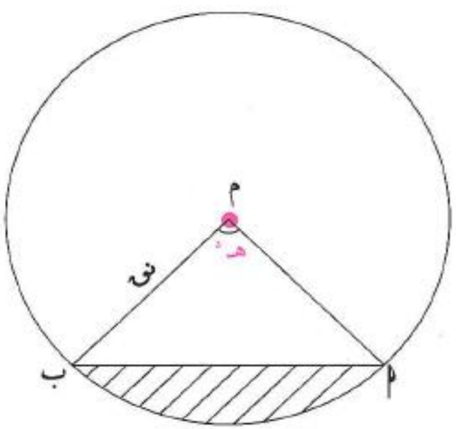
مساحة المثلث م أ ب = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب × جا(هـ^{د})

= $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × جا(هـ^{د})

مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الأصغر − مساحة المثلث م أ ب

= $\frac{١}{٢}$ هـ^{د} × نق^{٢} − $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × جا(هـ^{د})

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ^{د} − جاهـ^{د})



تذكر:

هـ^{د} هو قياس الزاوية بالراديان.

انتبه لوضع الآلة الحاسبة.

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2} \times$ نق^{2} (هـ د ــ جا هـ د)

مثال (٤)

احسب مساحة قطعة دائرية زاويتها المركزية ٦٠° وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم.

نحول $^{5}60$ إلى القياس الدائري

هـ د = $^{5}60 \times \frac{\pi}{180}$ = 1.0472 د

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2} \times$ نق^{2} (هـ د ــ جا هـ د)

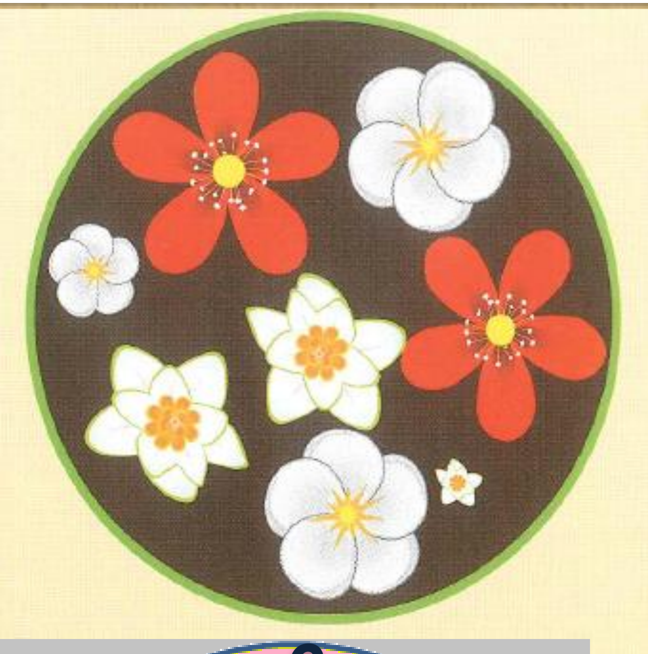
= $\frac{1}{2} \times (10)^{2}$ (1.0472 د ــ جا 60°)

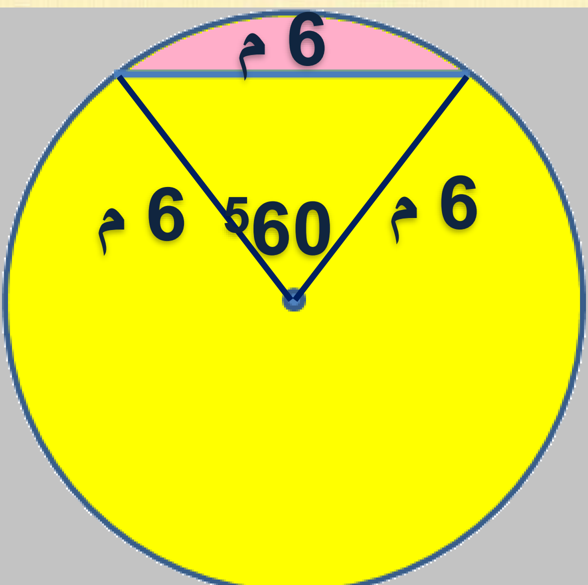
= $\frac{1}{2} \times (10)^{2}$ (1.0472 د ــ 0.866)

$\simeq$ 9.06 سم^{2}

حاول أن تحل

٣ أ حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.





نحول $^{5}60$ إلى القياس الدائري

هـ^{د} = $^{5}60 \times \frac{\pi}{180}$ = $1.0472^{د}$

مساحة القطعة الدائرية =

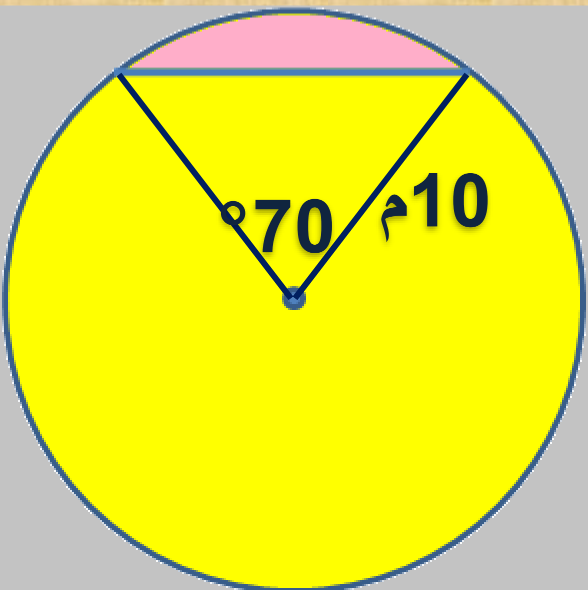
$\frac{1}{2}$ × نق^{2} (هـ^{د} ــ جا هـ^{د})

= $\frac{1}{2} \times (6)^{2}$ ($1.0472^{د}$ ــ جا 60°)

= $\frac{1}{2} \times (6)^{2}$ ($1.0472^{د}$ ــ 0.866)

$\simeq$ 3.26 م^{2}

ب أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°.



نحول $^{5}70$ إلى القياس الدائري

هـ د = $^{5}70 \times \frac{\pi}{180} =$ 1.2217 د

مساحة القطعة الدائرية =

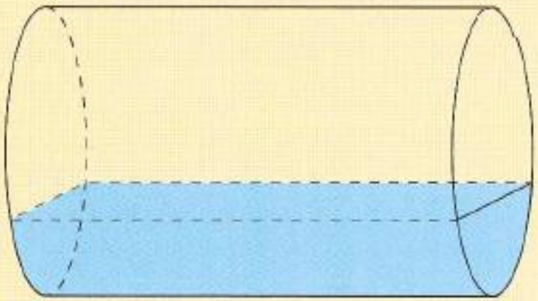
$\frac{1}{2}$ × نق^{2} (هـ د ــ جا هـ د)

= $\frac{1}{2} \times (10)^{2}$ (1.2217 د ــ جا °70)

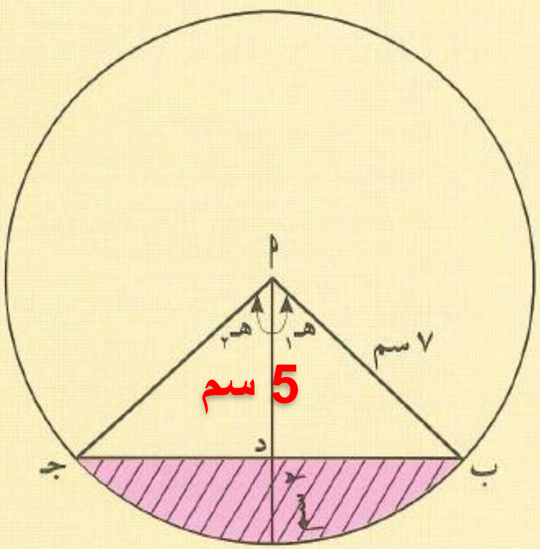
= $\frac{1}{2} \times (10)^{2}$ (1.2217 د ــ 0.94)

$\simeq$ 14.1 سم^{2}

مثال (٥)



يبيّن الشكل المقابل مقطعًا في أنبوب أسطواني الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع.
إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم،
فأوجد مساحة الجزء المظلل باللون الوردي.



جتا ($\hat{هـ}_1$) = $\frac{5}{7}$

ق ($\hat{هـ}_1$) = جتا$^{-1}$ ($\frac{5}{7}$) = 44.42°

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = = 88.84°

نحول 88,84° إلى القياس الدائري

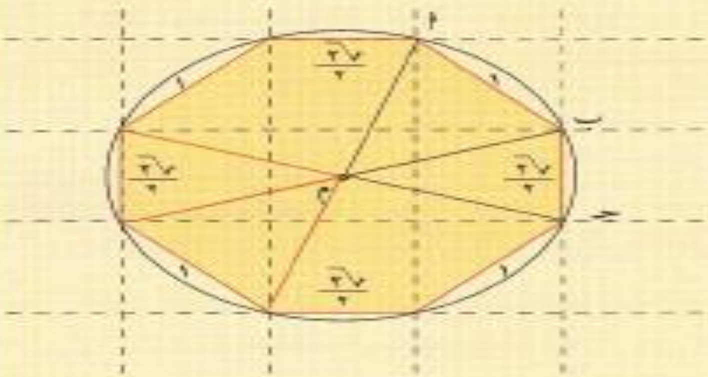
هـ^{د} = 88.84° × $\frac{\pi}{180}$ = 1.55^{د}

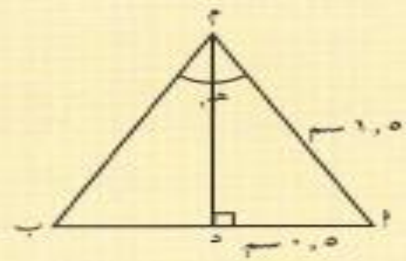
مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ × نق^2 (هـ^{د} ــ جا هـ^{د})

= $\frac{1}{2}$ × $(7)^2$ (1.55^{د} ــ جا 88.84°) $\simeq$ 13.48 سم^2

مثال (٦)

الشكل المقابل يوضح مقطعًا أفقيًا لطبق بتري وضع فيه قالب معدني للأجبان له شكل مضلع ثماني وذلك للتحقق من خلوه من البكتيريا. إذا كانت زوايا المضلع متساوية القياس وطول نصف قطر الدائرة ١,٥ سم، فأوجد المساحة بين طبق بتري وقالب الأجبان.





الحل:

تفرض أن هـ١ زاوية مركزية تقابل وترًا طول ١ سم،

هـ٢ زاوية مركزية تقابل وترًا طوله $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

في Δ أم ب المتطابق الضلعين $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{أب}}$

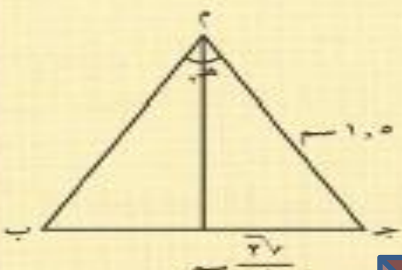
∴ جا $\frac{\text{هـ}_1}{٢} = \frac{٠,٥}{١,٥}$

∴ ق$\left(\frac{\text{هـ}_1}{٢}\right)$ = جا$^{-1}$ $\frac{٠,٥}{١,٥}$

ق(هـ١) = ٢ × جا$^{-1}$ $\frac{٠,٥}{١,٥}$ ≃ ٠,٦٧٩ ء

مساحة القطعة الدائرية المرتبطة بالوتر طوله ١ = $\frac{١}{٢}$ نق^2 (٠,٦٧٩ − جا ٠,٦٧٩) ≃ ٠,٠٥٧٥ سم^2 (١)

وبالمثل في المثلث جـ م ب:



ق(هـ٢) = ٢ × جا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٢}}{٤ \times ١,٥}$ ≃ ٠,٤٧٥٩ ء

مساحة القطعة الدائرية المرتبطة بالوتر طوله $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ =

$\frac{١}{٢}$ نق^2 (٠,٤٧٥٩ − جا ٠,٤٧٥٩) ≃ ٠,٠١٩٩٨ سم^2 (٢)

من (١)، (٢) المساحة بين طبق بتري والقالب المعدني

≃ ٤ × (٠,٠٥٧٥ + ٠,٠١٩٩٨) ≃ ٠,٣٠٩٦ سم^2

الفهرس