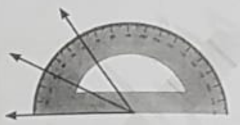
استعِدَّ للوحدة الثامنة

١٠٦

① تنصيف زاوية :

بالقياس :

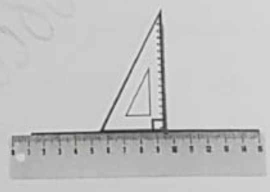


بالرسم :

نصف الزاوية أ ب جـ :

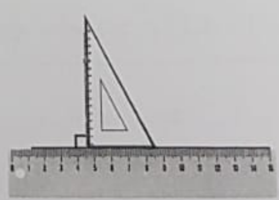
② رسم قطعة عمودية على أخرى :

أ من نقطة تنتمي إليها

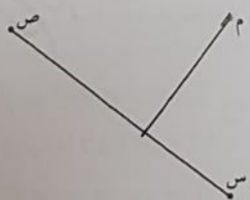


أقِم عمودًا من النقطة م على $\overline{\text{س ص}}$

ب من نقطة لا تنتمي إليها



أسقِط عمودًا من النقطة م على $\overline{\text{س ص}}$



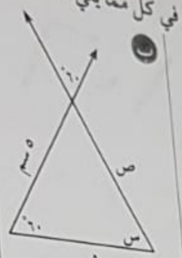
١٠٧

③ أوجد قيمة المجهول في كلٍّ مما يلي :

Ⓐ

م = ١٨٠ - ١٢٥ = ٥٥°

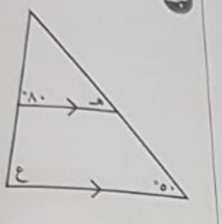
Ⓑ



س = ٦٠°

ص = ٥ سم

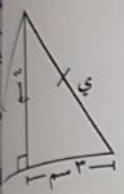
Ⓒ



ع = ٨٠°

هـ = ٥٠°

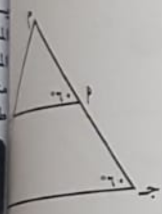
Ⓓ



و = ٣ سم

ي = ٥ سم

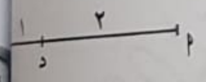
④ في الشكل المقابل : هل $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$ ولماذا ؟



ق(∠م أ ب) = ق(∠م جـ د) = ٦٠° وضع تناظر

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$

⑤ في الشكل المقابِل : د تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٢ : ١ من جهة أ .



أكمل ما يلي :

أد = ٢ دب ، دب = $\frac{1}{2}$ أد

أب = $\frac{3}{2}$ أد ، أد = $\frac{2}{3}$ أب

أب = ٣ دب ، دب = $\frac{1}{3}$ أب

⑥ أوجد قيمة س :

٧ س = ٢ (٣ س + ١)

٧ س = ٦ س + ١

٧ س - ٦ س = ١

س = ١

١-٨ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث
Midsegment of Triangle

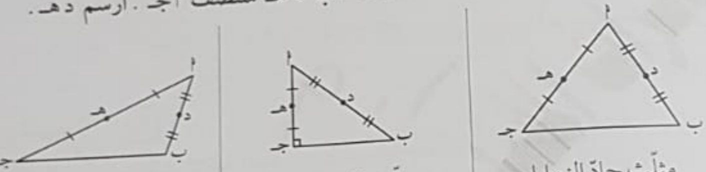
سوف تتعلّم : توظيف القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات:
مثلّث Triangle
قطعة مستقيمة Segment

١٠٨

نشاط :

① في كلّ من المثلّثات التالية : د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$. أرسم $\overline{دهـ}$.



مثلّث حادّ الزوايا	مثلّث قائم الزاوية	مثلّث منفرج الزاوية

معلومات مفيدة :
استخدم مهندسو المساحة نظرية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين لإيجاد طول بحيرة ما .

② أوجِد باستخدام الأدوات الهندسية كلًّا مما يلي :

دهـ = ١,٥ سم	دهـ = ١ سم	دهـ = ١,٥ سم
ب جـ = ٣ سم	ب جـ = ٢ سم	ب جـ = ٣ سم

ماذا تلاحظ ؟ المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين طوله = نصف طول الضلع الآخر

ق (أ$\hat{ب}$ جـ) = ق(أ$\hat{د}$هـ)	ق (أ$\hat{ب}$ جـ) = ق(أ$\hat{د}$هـ)	ق (أ$\hat{ب}$ جـ) = ق(أ$\hat{د}$هـ)
ق (أ$\hat{د}$هـ) = ق(أ$\hat{ب}$جـ)	ق (أ$\hat{د}$هـ) = ق(أ$\hat{ب}$جـ)	ق (أ$\hat{د}$هـ) = ق(أ$\hat{ب}$جـ)

ق (أ$\hat{ب}$ جـ) = ق (أ$\hat{د}$هـ) وهما في وضع تناظر

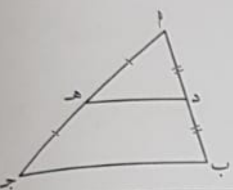
∴ $\overline{دهـ}$ // $\overline{بجـ}$

اللوازم :
- أدوات هندسية .

١٠٩

نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .



في المثلّث أ ب جـ :

∵ د منتصف أب ، هـ منتصف أجـ

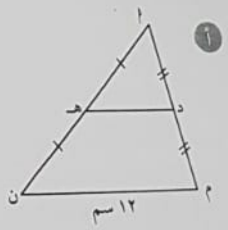
∴ دهـ // ب جـ ، دهـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

١٠٩

تدرّب (١) :

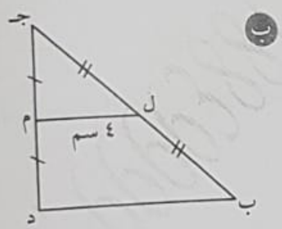
في كلّ من المثلّثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ



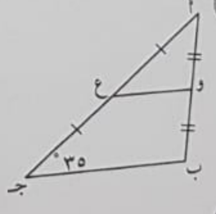
دهـ = ٦ سم

ب



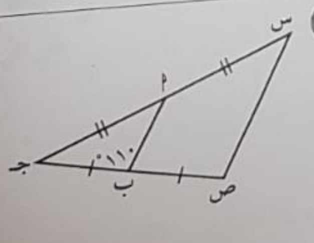
ب د = ٨ سم

جـ



ق(أعَ و) = ٣٥°

د



ق(صَ) = ١١٠°

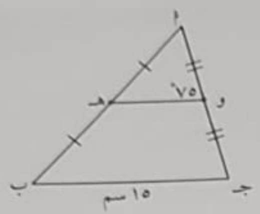
مثال (١) :

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلّث فيه :

أو = وجـ ، أهـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق(أوهـ^) = ٧٥° .

أوجِد بالبرهان : (١) طول وهـ (٢) ق(جـ^) .



الحلّ :

المعطيات : أو = وجـ ، أهـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق(أوهـ^) = ٧٥°

المطلوب : إيجاد (١) طول وهـ (٢) ق(جـ^)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ و منتصف أجـ ، هـ منتصف أب

∴ وهـ = $\frac{1}{2}$ جـ ب ، وهـ // جـ ب

وهـ = $\frac{1}{2}$ × ١٥ = ٧ $\frac{1}{2}$ سم

110

∴ ق(جـ^) = ق(أوهـ^) = ٧٥° (بالتناظر والتوازي)

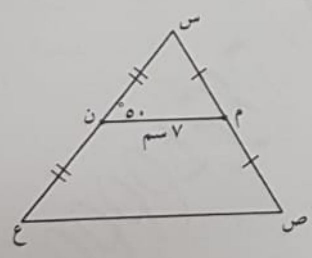
تدرّب (٢) :

س ص ع مثلّث فيه :

م منتصف س ص ، ن منتصف س ع ،

ق(س ن^ م) = ٥٠° ، م ن = ٧ سم .

أوجِد بالبرهان : (١) ص ع (٢) ق(ع^) .

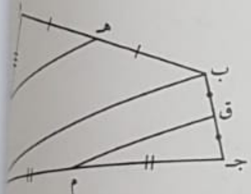


المعطيات: م منتصف $\overline{س ص}$ ، ن منتصف $\overline{س ع}$
ق(س̂ ن م) = ٥٠° ، م ن = ٧ سم

المطلوب: (١) ص ع (٢) ق(ع̂)

البرهان: في △ س ص ع :
∵ م منتصف $\overline{س ص}$ ، ن منتصف $\overline{س ع}$
∴ م ن = $\frac{1}{2}$ ص ع ، $\overline{م ن}$ // $\overline{ص ع}$
ص ع = ٢ × ٧ = ١٤ سم
ق(ع̂) = ق(ن̂) = ٥٠° بالتناظر والتوازي

تدرب (٣) :



في الشكل الرباعي ا ب جـ د :
إذا كان هـ ، ف ، م ، ق منتصفات الأضلاع
$\overline{ب ا}$ ، $\overline{ا د}$ ، $\overline{د جـ}$ ، $\overline{جـ ب}$ على الترتيب .
أثبت أنّ : $\overline{هـ ف}$ // $\overline{ق م}$

المعطيات: هـ منتصف $\overline{ا ب}$ ، ف منتصف $\overline{ا د}$ ، ق منتصف $\overline{ب جـ}$
م منتصف $\overline{جـ د}$

المطلوب: $\overline{هـ ف}$ // $\overline{ق م}$

البرهان: في المثلّث ا ب د :
∵ هـ منتصف $\overline{ا ب}$ ، ف منتصف $\overline{ا د}$
∴ $\overline{هـ ف}$ // $\overline{ب د}$ (١)
في △ ب جـ د :
∵ ق منتصف $\overline{ب جـ}$ ، م منتصف $\overline{جـ د}$
∴ $\overline{ق م}$ // $\overline{ب د}$ (٢)
من (١) ، (٢) $\overline{هـ ف}$ // $\overline{ق م}$

تدرّب (٤)

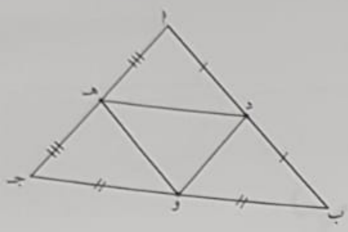
أ ب جـ مثلّث فيه :

أب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٤ سم ،

أجـ = ١١ سم ، د ، هـ ، و منتصفات

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب جـ}$ على الترتيب .

أوجِد بالبرهان محيط المثلّث د و هـ .



المعطَيات : أب = ١٢سم ، ب جـ = ١٤ سم ، أ جـ = ١١ سم

د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، و منتصف $\overline{ب جـ}$

المطلوب : اوجد محيط △ د و هـ

البرهان : في المثلّث أ ب جـ :

١١٢

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ د و = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = ٥ $\frac{١}{٢}$ سم

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$

د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٧ سم

∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، و منتصف $\overline{ب جـ}$

هـ و = $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٦ سم

محيط △ د و هـ = د و + د هـ + هـ و

= ٥ $\frac{١}{٢}$ + ٧ + ٦ = ١٨ $\frac{١}{٢}$ سم

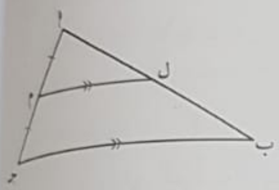
فكِّر وناقِش

في تدرّب (٤) ، ما العلاقة بين محيط المثلّث د و هـ ، ومحيط المثلّث أ ب جـ ؟

محيط △ د و هـ = $\frac{١}{٢}$ محيط △ أ ب جـ

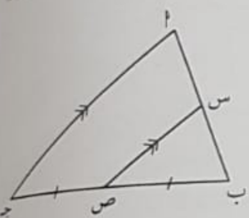
نظرية :
إذا رُسِم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلّث موازِيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنّه ينصّف الضلع الثالث .

١١٣



في المثلّث ا ب جـ :
∵ م منتصف $\overline{\text{اجـ}}$ ، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$
∴ ل منتصف $\overline{\text{اب}}$

تدرّب (٥) :



ا ب جـ مثلّث فيه : ص منتصف ب جـ ،
$\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ا}}$ ، ا س = ٦ سم .
أوجِد بالبرهان ب س .

المعطيات : ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ا}}$
ا س = ٦ سم

المطلوب : ب س

البرهان : في المثلّث ا ب جـ :
∵ ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ا}}$
∴ س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$
∴ ب س = ا س = ٦ سم

مثال (٢) :

أب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ،
رسم م هـ // أب ،
إذا كان م هـ ∩ ب جـ = {هـ} ،
فأثبت أنّ : م هـ = $\frac{1}{2}$ أب .

الحلّ :

المعطَيات : أب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطريه في م ،
م هـ // أب ، م هـ ∩ ب جـ = {هـ}

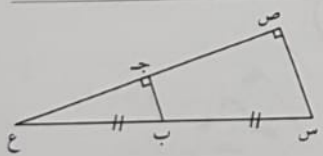
المطلوب : أثبِت أنّ م هـ = $\frac{1}{2}$ أب

١١٤

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع أب جـ د
∴ م منتصف أجـ (١)
في المثلّث أب جـ :
∵ م هـ // أب
∴ هـ منتصف ب جـ (٢)
من (١)، (٢)
∴ م هـ = $\frac{1}{2}$ أب

تدرّب (٦) :

س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،
ب منتصف س ع ، ب جـ ⊥ ص ع .
أثبِت أنّ : ص جـ = ع جـ .



المعطَيات : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص
ب منتصف س ع ، ب جـ ⊥ ص ع

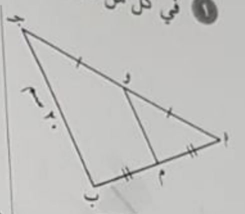
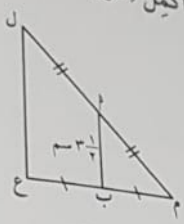
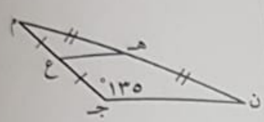
المطلوب : ص جـ = ع جـ

البرهان : في Δ س ص ع
ق ع $\hat{جـ}$ ب = ق ع $\hat{ص}$ س = ٩٠° وضع تناظر
∴ جـ ب // ص س ، ب منتصف ع س
∴ جـ منتصف ع ص
ع جـ = ص جـ

١١٥

تمرين :

١ في كلٍّ من المثلثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

م و = ١٠ سم ... ل ع = ٧ سم ... ق (هـ $\hat{ع}$ م) = ١٣٥°

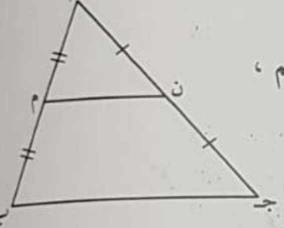
٢ أ ب جـ مثلث فيه :

م منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أجـ}$ ، أب = ١٠ سم ،

أجـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١١ سم .

أوجِد بالبرهان : (١) طول ن م.

(٢) محيط Δ أ ن م.



المعطيات : م منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أجـ}$ ، أب = ١٠ سم

أجـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١١ سم

المطلوب : (١) طول ن م (٢) محيط Δ أ ن م

البرهان : Δ أ جـ ب فيه

م منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أجـ}$

م ن = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ٥ $\frac{1}{2}$ سم

أن = ٦ $\frac{1}{2}$ سم ، أم = ٥ سم

محيط Δ أ ن م = أن + أم + ن م

= ٦ $\frac{1}{2}$ + ٥ + ٥ $\frac{1}{2}$

= ١٧ سم

١١٥

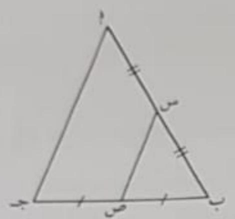
③ أ ب جـ مثلّث فيه :

س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{ب جـ}$ ،

ق ($\hat{ب}$) = ٦٠° ، ق ($\hat{أ}$) = ٥٠° .

أوجِد ق (س $\hat{ص}$ ب) .

١١٦



المعطيات : س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{ب جـ}$

ق ($\hat{ب}$) = ٦٠° ق ($\hat{أ}$) = ٥٠°

المطلوب : ق (س $\hat{ص}$ ب)

البرهان : △ أ ب جـ فيه

ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠° − (٦٠° + ٥٠°) = ٧٠°

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ $\overline{س ص}$ // $\overline{أ جـ}$

ق (س $\hat{ص}$ ب) = ق ($\hat{جـ}$) بالتناظر

ق (س $\hat{ص}$ ب) = ٧٠°

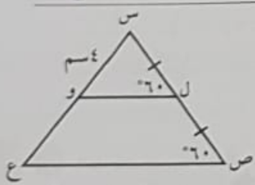
١١٦

---

④ س ص ع مثلّث فيه : ل منتصف $\overline{س ص}$ ،

ق ($\hat{ص}$) = ق (س $\hat{ل}$ و) = ٦٠° ، س و = ٤سم .

أوجِد طول $\overline{س ع}$.



المعطيات : ل منتصف $\overline{س ص}$ ، ق ($\hat{ص}$) = ق (س ل و) = ٦٠°

س و = ٤سم

المطلوب : طول $\overline{س ع}$

البرهان : △ س ص ع فيه :

س ل = ل ص ← (١)

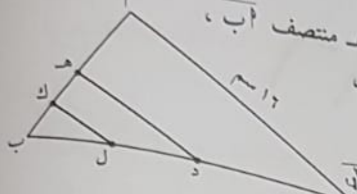
ق (س $\hat{ل}$ و) = ق (س $\hat{ص}$ ع) = ٦٠° وضع تناظر

∴ $\overline{ل و}$ // $\overline{ص ع}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج و منتصف $\overline{س ع}$

س و = $\frac{1}{2}$ س ع

س ع = ٨ سم

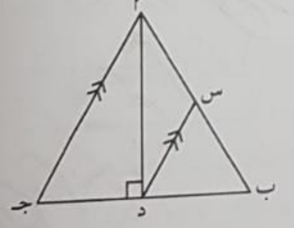


٥ اب جـ مثلث فيه : اجـ = ١٦ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ ، ك منتصف $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{ك ل}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$. أوجِد طول ك ل.

المعطيات : أجـ = ١٦ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$
د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ ، ك منتصف $\overline{\text{ب هـ}}$
$\overline{\text{ك ل}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$

117

المطلوب : طول $\overline{\text{ك ل}}$
البرهان : في △ أ ب جـ فيه :
د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$
د هـ = $\frac{1}{2}$ أجـ = ٨ سم
في △ ب هـ د فيه :
ك منتصف $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{ك ل}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$
∴ ل منتصف ب د
ك ل = $\frac{1}{2}$ هـ د = ٤ سم



٦ عند تصميم أحد الجسور ، قام المهندس برسم المثلث في الشكل المقابل :
حيث أب = أجـ = ٨ سم، $\overline{\text{أد}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ،
رسم $\overline{\text{د س}}$ // $\overline{\text{جـ أ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{أب}}$.
أوجِد طول $\overline{\text{س د}}$.

المعطيات : أب = أجـ = ٨ سم $\overline{\text{أد}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{د س}}$ // $\overline{\text{جـ أ}}$
س ∈ $\overline{\text{أب}}$
المطلوب : طول $\overline{\text{س د}}$
البرهان : △ أ ب جـ فيه
أب = أجـ ، $\overline{\text{أد}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$
∴ د منتصف ب جـ
$\overline{\text{د س}}$ // $\overline{\text{أجـ}}$ ، د س = $\frac{1}{2}$ أجـ
د س = ٤ سم

٨–٢ القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

سوف تتعلّم : توظيف القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في المثلّث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر لحلّ تمارين هندسية .

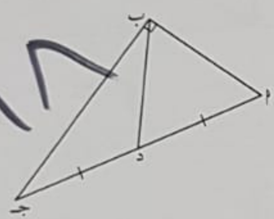
Vertex

Right Angle

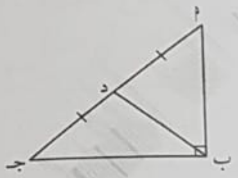
Hypotenuse

نشاط (١) :

في الأشكال التالية : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{أجـ}$.



١١٧



١ باستخدام الأدوات الهندسية ، أكمِل ما يلي :

طول $\overline{ب د}$ = $\frac{1}{2}$ أجـ

طول $\overline{أجـ}$ = ٢ ب د

طول $\overline{ب د}$ = $\frac{1}{2}$ أجـ

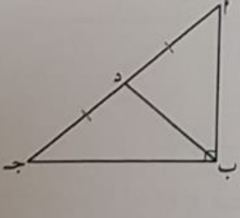
طول $\overline{أجـ}$ = ٢ ب د

٢ ماذا تلاحظ ؟ ....

نظرية :

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلّث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .

في المثلّث أ ب جـ :

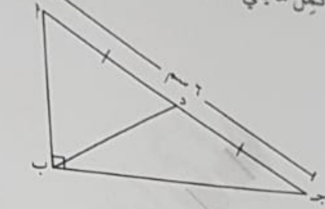


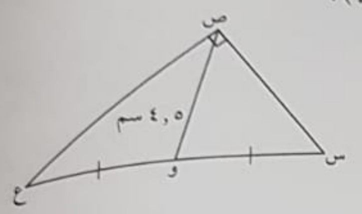
∵ ق $(\hat{ب})$ = ٩٠° ، د منتصف $\overline{أجـ}$

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أجـ

تدرّب (١) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :





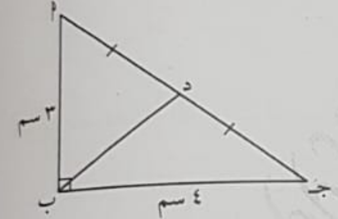
طول $\overline{ب د}$ = ٣سم .... س ع = ٩سم ....

مثال (١) :

أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أب = ٣ سم ،

ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{أ جـ}$.

أوجِد بالبرهان طول $\overline{ب د}$.



١١٩

الحلّ :

المعطيات : أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أب = ٣ سم ،

ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{أ جـ}$.

المطلوب : إيجاد طول $\overline{ب د}$.

البرهان : ∵ أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

∴ $(أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}$ (نظرية فيثاغورث)

$= (٣)^{٢} + (٤)^{٢}$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥$

∴ أجـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∵ د منتصف $\overline{أجـ}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أجـ

$= \frac{١}{٢} \times ٥ = ٢\frac{١}{٢}$ سم

تدرَّب (٢)

س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{سع}$ ، ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم .

أوجد بالبرهان : (١) س ع (٢) ص ع .

المعطيات : س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،

و منتصف $\overline{سع}$ ، ص و = ٥ سم ، س ص = ٨ سم .

المطلوب : إيجاد (١) س ع (٢) ص ع

البرهان : ∵ س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع

∴ ص و = $\frac{1}{2}$ س ع

س ع = ١٠ سم

(س ع)^٢ = (س ص)^٢ + (ص ع)^٢ نظرية فيثاغورث

(١٠)^٢ = (٨)^٢ + (ص ع)^٢

(ص ع)^٢ = ١٠٠ − ٦٤

(ص ع)^٢ = ٣٦

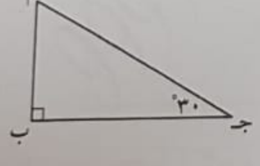
ص ع = ٦ سم

١٠/١٠

فكِّر وناقِش

إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلّث إلى منتصف الضلع المقابل تساوي نصف طول هذا الضلع . فهل المثلّث قائم الزاوية ؟ ولماذا ؟

نشاط (٢) :



أ ب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني ، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ،

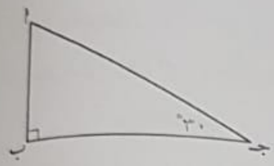
أكمِل ما يلي باستخدام الأدوات الهندسية :

١ طول $\overline{أب}$ = ٢ سم

٢ طول $\overline{أجـ}$ = ٤ سم

٣ ماذا تلاحظ ؟ طول $\overline{أب}$ = $\frac{1}{2}$ طول $\overline{أجـ}$

نتيجة (١) : في المثلّث الثلاثيني الستّيني يكون طول الضلع المقابِل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساوِيًا نصف طول الوتر .



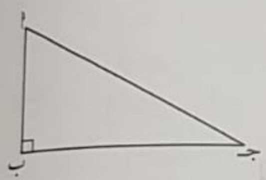
∵ ا ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

∴ ا ب = $\frac{١}{٢}$ ا جـ

١٢١

وعكس ذلك أيضًا صحيح :

نتيجة (٢) : في المثلّث القائم الزاوية إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة مساوِيًا نصف طول الوتر ، فإنّ قياس الزاوية المقابِلة لهذا الضلع ٣٠° ويُسمّى المثلّث ثلاثينيًا ستّينيًا .



∵ ا ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ا ب = $\frac{١}{٢}$ ا جـ

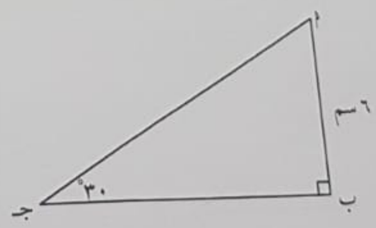
∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

∴ المثلّث ا ب جـ ثلاثيني ستّيني

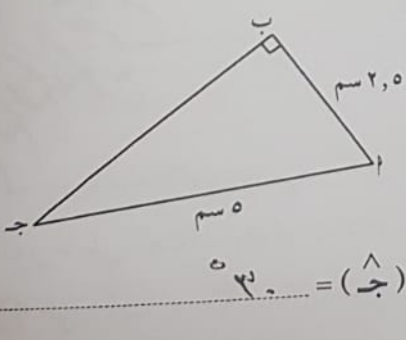
١٢١

تدرّب (٣) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



ا جـ = ١٢ سم

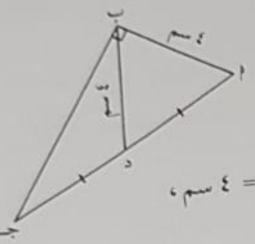


ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

مثال (٢) :

في الشكل المقابِل :

أوجد بالبرهان : (١) ق ($\hat{جـ}$)   (٢) ق ($\hat{أ}$) .



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٤ سم ،
ب د = ٤ سم ، د منتصف $\overline{أ جـ}$.

المطلوب : إيجاد (١) ق ($\hat{جـ}$)   (٢) ق ($\hat{أ}$) .

البرهان : ∵ المثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ أ جـ = ٢ × ٤ = ٨ سم

∵ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠°

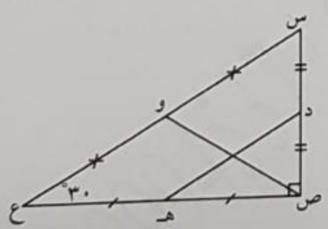
∴ أ ب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ق ($\hat{أ}$) = ٦٠°

١٢٢

تدرّب (٤) :

س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،
ص و = ٦ سم ، ق ($\hat{ع}$) = ٣٠° ،
د منتصف $\overline{س ص}$ ، هـ منتصف $\overline{ص ع}$ ،
و منتصف $\overline{س ع}$.



أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) طول $\overline{س ع}$ (٢) طول $\overline{س ص}$ (٣) طول $\overline{د هـ}$

المعطَيات : س ص ع △ قائم في زاوية ص ، ص و = ٦ سم ، ق ($\hat{ع}$) = ٣٠°
د منتصف $\overline{س ص}$ ، هـ منتصف $\overline{ص ع}$ ، و منتصف $\overline{س ع}$

المطلوب: (١) طول $\overline{\text{س ع}}$ (٢) طول $\overline{\text{س ص}}$ (٣) طول $\overline{\text{د هـ}}$

البرهان: $\triangle$ س ص ع قائم في زاوية ص

و منتصف $\overline{\text{س ع}}$

ص و = $\frac{1}{2}$ س ع

س ع = ١٢ سم

ق($\hat{\text{ع}}$) = ٣٠° مثلث ثلاثيني ستيني

س ص = $\frac{1}{2}$ س ع

س ص = ٦ سم

$\therefore$ د منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ص ع}}$

د هـ = $\frac{1}{2}$ س ع

د هـ = ٦ سم

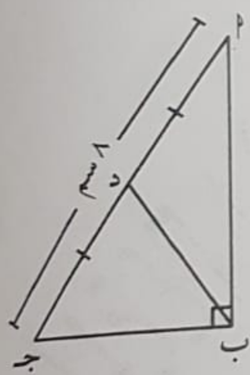
١٢٣

تمرين:

١ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،

د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، أجـ = ٨ سم .

أوجد بالبرهان طول $\overline{\text{ب د}}$.



المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، أجـ = ٨ سم

المطلوب: طول ب د

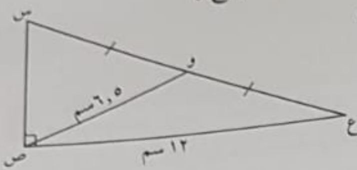
البرهان: $\triangle$ أ ب جـ قائم في ب

د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

$\therefore$ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

ب د = ٤ سم

② س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ص و = ٦,٥ سم ، ع ص = ١٢ سم .



أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي :

(١) س ع

(٢) س ص

المعطيات : Δ س ص ع قائم في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ص و = ٦,٥ سم

ع ص = ١٢ سم

المطلوب : (١) س ع (٢) س ص

البرهان : Δ س ص ع قائم في ص

و منتصف س ع

ص و = $\frac{1}{2}$ س ع

س ع = ١٣ سم

(س ع)^2 = (ع ص)^2 + (س ص)^2 نظرية فيثاغورث

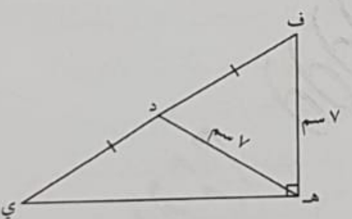
(س ص)^2 = (١٣)^2 − (١٢)^2 = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

س ص = ٥ سم

١٢٤

---

③ في الشكل المقابِل :



أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي :

(١) ق ($\hat{\text{ي}}$)

(٢) ق ($\hat{\text{ف}}$) .

المعطيات : Δ ف هـ ي قائم في هـ ، د منتصف ف ي ، ف هـ = ٧ سم

هـ د = ٧ سم

المطلوب : (١) ق ($\hat{\text{ي}}$) (٢) ق ($\hat{\text{ف}}$)

البرهان : Δ ف هـ ي قائم في هـ

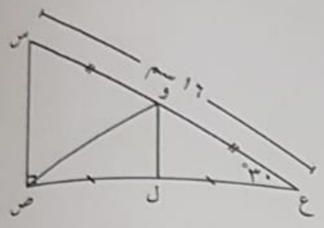
د منتصف ف ي

د هـ = $\frac{1}{2}$ ف ي = ٧ سم

ف ي = ١٤ سم

∴ ف هـ = $\frac{1}{2}$ ف ي

∴ ق ($\hat{\text{ي}}$) = ٣٠° ، ق ($\hat{\text{ف}}$) = ٦٠°



❺ صمّم مهندس جسرًا للمشاة، فقام برسم المثلّث في الشكل المقابِل كدعامة للجسر حيث س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، س ع = ١٦ سم ، و منتصف $\overline{س ع}$ ، ل منتصف $\overline{ع ص}$ ، ق ($\hat{ع}$) = ٣٠° .

أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

125

(١) ص و

(٢) س ص

(٣) و ل

المعطيات : $\triangle$ س ص ع قائم في ص ، س ع = ١٦ سم ، و منتصف $\overline{س ع}$

ل منتصف $\overline{ع ص}$ ، ق ($\hat{ع}$) = ٣٠°

المطلوب : أوجد (١) ص و (٢) س ص (٣) و ل

البرهان : $\triangle$ س ص ع قائم في $\hat{ص}$

و منتصف $\overline{س ع}$

∴ ص و = $\frac{1}{2}$ س ع = ٨ سم

∵ ق ($\hat{ع}$) = ٣٠°

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ س ع = ٨ سم

∵ و منتصف ع س ، ل منتصف ع ص

و ل = $\frac{1}{2}$ س ص = ٤ سم

٨-٣ محاور أضلاع المثلّث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف محاور أضلاع المثلّث لحلّ تمارين هندسية .

المفردات: العمود المنصّف Perpendicular Bisector

محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصِّف لها .

∵ ل ⊥ أب ، أو = ب و

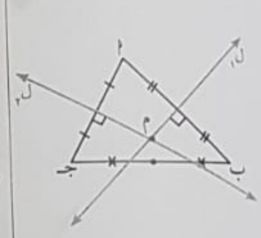
∴ ل محور أب

نشاط :

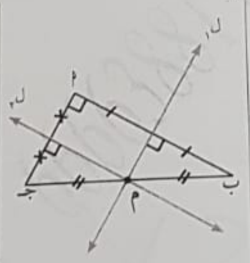
١٢٦

في المثلّثات التالية :

ل$_1$ محور أب ، ل$_2$ محور أجـ ، ل$_1$ ∩ ل$_2$ = م



مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية

مثلّث منفرج الزاوية

١ **أُرسم ل$_3$ محور ب جـ في المثلّثات السابقة** [باستخدام الأدوات الهندسية].

٢ **ماذا تلاحظ ؟** محاور اضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة

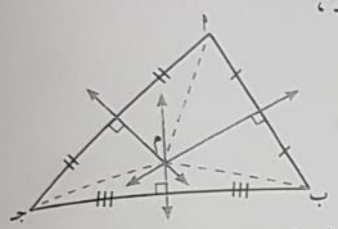
نظرية :

محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

١٢٧

من النشاط السابق نلاحظ أنّ :
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث الحادّ الزوايا تقع داخله .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع خارجه .

لتكن م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ا ب جـ ،
باستخدام الأدوات الهندسية ، أوجِد كلًّا ممّا يلي :



١ م ا = ٢ $\frac{1}{2}$ سم
٢ م ب = ٢ $\frac{1}{2}$ سم
٣ م جـ = ٢ $\frac{1}{2}$ سم

ماذا تلاحظ ؟ نقطة تقاطع محاور الأضلاع تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه

نتيجة : نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .

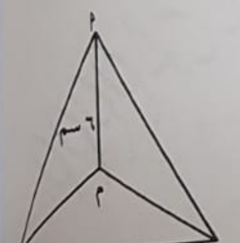
∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ا ب جـ
∴ م ا = م ب = م جـ

بالرجوع إلى النشاط السابق ، تحقّق من صحّة النتيجة لكلّ من المثلّث القائم الزاوية و المثلّث المنفرج الزاوية .

١٢٧

تدرّب (١) :

المثلّث ا ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
م ا = ٦ سم .
أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



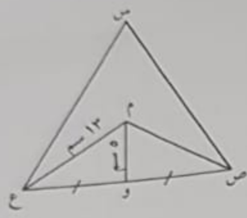
م ب = ٦ سم
م جـ = ٦ سم

فكِّر وناقِش

لتكن م نقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس مثلّث. فهل م هي نقطة تقاطع محاور أضلاعه ؟ فسِّر إجابتك. نعم - لانه نقطة تقاطع محاور اضلاع المثلث تقع على ابعاد متساوية من رؤوسه

مثال ١ :

س ص ع مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،
و منتصف $\overline{\text{صع}}$ ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .
أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :
(١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع



الحل :

المعطيات : س ص ع مثلّث فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،
و منتصف $\overline{\text{صع}}$ ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

المطلوب : إيجاد كلّ من : (١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع

∴ م ص = م ع = ١٣ سم

∵ و منتصف $\overline{\text{صع}}$

∴ $\overline{\text{مو}}$ ⊥ $\overline{\text{صع}}$

∴ Δ م ص و قائم الزاوية في و

١٢٨

∴ (ص و)^{٢} = (م ص)^{٢} − (م و)^{٢} (نظرية فيثاغورث)

ص و = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$

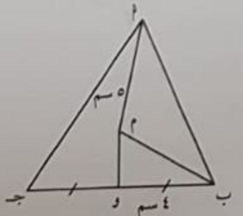
= $\sqrt{١٦٩ - ٢٥}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

∴ ص ع = ٢ × ص و

= ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

تدرّب (٢) :

Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
أ م = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.
أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و .



المعطيات: △ ا ب جـ فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث،
ام = ٥ سم، ب و = ٤ سم، و منتصف ب جـ.

المطلوب: إيجاد كلٍّ مما يلي: (١) م ب (٢) م و

البرهان: ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ا ب جـ

∴ م ب = ام = ٥ سم ∴ م و ⊥ ب جـ

∵ و منتصف ب جـ

∵ △ م ب و قائم الزاوية في و

∴ (م و)² = (م ب)² − (ب و)² (نظرية فيثاغورث)

= ٢٥ − ١٦

∴ م و = √٩ = ٣ سم

١٢٩

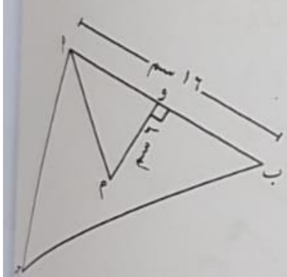
تدرّب (٣):

ا ب جـ مثلث فيه:

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ا ب جـ،

م و ⊥ ا ب، ا ب = ١٦ سم، م و = ٦ سم.

أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي: (١) م ب (٢) محيط △ ا م ب.



المعطيات: م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ا ب جـ

م و ⊥ ا ب ، ا ب = ١٦ سم ، م و = ٦ سم

المطلوب: (١) م ب (٢) محيط △ ا م ب

البرهان: ∵ △ ا و م قائم في و

و منتصف ا ب ، م و = ٦ سم

∴ ا و = ٨ سم

(ام)² = (ا و)² + (م و)² = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

ام = ١٠ سم

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع △ ا ب جـ

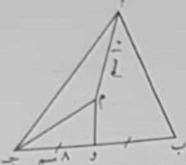
∴ ام = م ب = م جـ = ١٠ سم

م ب = ١٠ سم

محيط △ ا م ب = ١٠ + ١٠ + ١٦ = ٣٦ سم

تمـرّن :

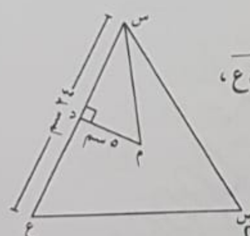
١ △ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
أ م = ١٠ سم ، و جـ = ٨ سم ، و منتصف ب جـ .
أوجد بالبرهان : (١) طول م جـ (٢) طول م و



المعطيات : م نقطة تقاطع محاور اضلاع △ أ ب جـ ، أ م = ١٠ سم
و جـ = ٨ سم و منتصف ب جـ
المطلوب : (١) طول م جـ (٢) طول م و
البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع △ أ ب جـ
، م أ = ١٠ سم = م ب = م جـ
∴ م جـ = ١٠ سم
م و ⊥ ب جـ ، و منتصف ب جـ
$(م و)^2 = (م جـ)^2 - (و جـ)^2$
= ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦
م و = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

١٠/١٠

٢ س ص ع مثلّث فيه :



م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع ، م د ⊥ س ع ،
س ع = ٢٤ سم ، م د = ٥ سم . أوجِد طول م ص .

المعطيات : م نقطة تقاطع محاور اضلاع △ س ص ع
م د ⊥ س ع ، س ع = ٢٤ سم ، م د = ٥ سم
المطلوب : اوجد طول م ص
البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور اضلاع △ س ص ع
∴ م س = م ص = م ع
في △ م د س قائم في د
$(م س)^2 = (م د)^2 + (د س)^2 = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$
م س = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم
∴ م س = م ص = ١٣ سم

١٣١

٣ أ ب جـ مثلث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،
إذا كان ب جـ = ١٥ سم ، ق(ب م̂ جـ) = ٦٠° .

(١) أثبت أن المثلث ب م جـ متطابق الأضلاع .

(٢) أوجد م أ.

المعطيات : م نقطة تقاطع محاور اضلاع Δ أ ب جـ
ب جـ = ١٥ سم ، ق (ب م̂ جـ) = ٦٠°

المطلوب : (١) اثبت أن Δ ب م جـ متطابق الاضلاع
(٢) أوجد م أ

البرهان: في Δ أ ب جـ
م نقطة تقاطع محاور اضلاعه
∴ م أ = م ب = م جـ
Δ م ب جـ فيه
م ب = م جـ
ق(ب̂) = ق(جـ̂) = $\frac{١٨٠° - ٦٠°}{٢}$ = ٦٠°
∴ ق(ب̂) = ق(جـ̂) = ق(م̂) = ٦٠°
∴ Δ م ب جـ متطابق الاضلاع
م ب = م جـ = ب جـ = ١٥ سم

في Δ أ ب جـ م نقطة تقاطع محاور اضلاعه
أ م = م ب = م جـ = ١٥ سم
أ م = ١٥ سم

١٣١

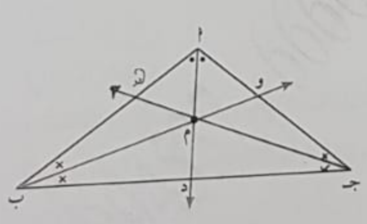
٨-٤ منصّفات الزوايا الداخلية للمثلّث
Interior Angles Bisectors of a Triangle

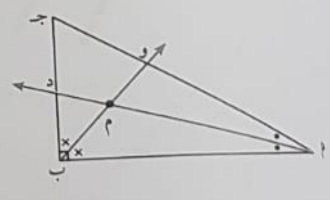
سوف تتعلّم : توظيف منصّفات الزوايا الداخلية للمثلّث لحل تمارين هندسية .

نشاط :

في المثلّثات التالية :

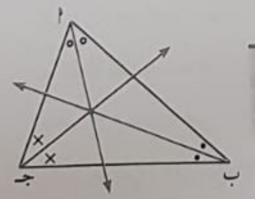
أد منصّف الزاوية أ ، ب و منصّف الزاوية ب ، أد ∩ ب و = { م }





١ أرسم منصّف الزاوية جـ .

٢ ماذا تلاحظ ؟ أد ∩ ب و ∩ جـ هـ = م



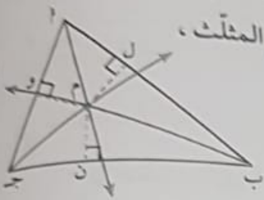
نظرية :
منصّفات الزوايا الداخلية للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

في الشكل المقابل :

إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث ا ب جـ ،

$\overline{م ل}$ ، $\overline{م ن}$ ، $\overline{م و}$ هي الأعمدة المرسومة من م على أضلاع المثلّث ،

فأوجِد باستخدام الأدوات الهندسية كلًّا ممّا يلي :



١ طول $\overline{م ل}$ = ١ سم

٢ طول $\overline{م ن}$ = ١ سم

٣ طول $\overline{م و}$ = ١ سم

ماذا تلاحظ ؟ م ل = م ن = م و

نتيجة : نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

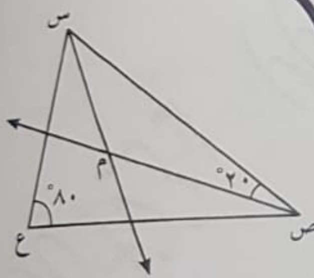
∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث

∴ م ل = م ن = م و

بالرجوع إلى النشاط السابق ، تحقَّقْ من صحّة النتيجة في كلّ من المثلّث القائم الزاوية والمثلّث المنفرج الزاوية .

١٣٣

تدرّب (١) :



في الشكل المقابِل :

م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع

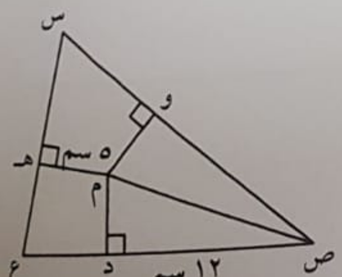
أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

ق (م صَ ع) = ٢٠° ، ق (س صَ ع) = ٤٠° ،

ق (ص سَ ع) = ٦٠° ، ق (ص سَ م) = ٣٠°

تدرّب (٢) :

المثلث س ص ع فيه :



م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

م هـ = ٥ سم ، ص د = ١٢ سم .

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

م د = ٥ سم

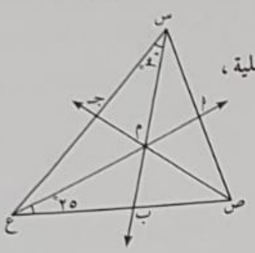
م ص = ١٣ سم

فكر وناقش

لتكن م نقطة تقاطع منصِّفات زوايا المثلّث الداخلية .
فما مجموع قياسات الزوايا التالية :
ق (١̂) ، ق (٢̂) ، ق (٣̂) ؟ ٩٠°

مثال (١) :

Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،
إذا كان ق (م ع̂ ص) = ٢٥° ، ق (م س̂ ع) = ٣٠° ،
فأوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :
(١) ق (س ص̂ ع)   (٢) ق (م ص̂ ع)



الحلّ :

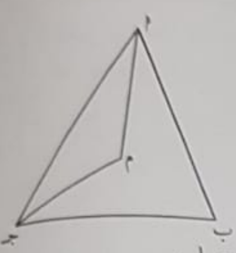
المعطيات : م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع ،
ق (م ع̂ ص) = ٢٥° ، ق (م س̂ ع) = ٣٠°

المطلوب : إيجاد (١) ق (س ص̂ ع)   (٢) ق (م ص̂ ع)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع
∴ ع م ⟵ منصِّف ع̂
∴ ق (س ع̂ ص) = ٢ × ٢٥° = ٥٠°
وبالمثل س م ⟵ منصِّف س̂

١٣٤

∴ ق (ص س̂ ع) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°
∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°
∴ ق (س ص̂ ع) = ١٨٠° - (٥٠° + ٦٠°) = ٧٠°
∵ ص جـ ⟵ منصِّف ص̂
∴ ق (م ص̂ ع) = ٧٠° ÷ ٢ = ٣٥°



تدرّب (٣) :

Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (أ ب̂ جـ) = ٧٠° ، ق (م جـ̂ ب) = ٣٠° .

فأوجد بالبرهان ق (م أ̂ جـ) .

المعطَيات : م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ أ ب جـ الداخليه

ق(أ ب̂ جـ) = ٧٠° ، ق(م جـ̂ ب) = ٣٠°

المطلوب : ق (م أ̂ جـ)

البرهان : Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخليه

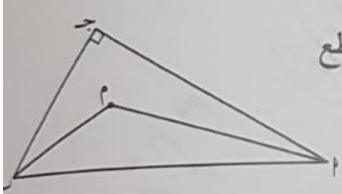
ق(م جـ̂ ب) = ٣٠°

∴ ق(ب جـ̂ أ) = ٦٠°

ق(ب أ̂ جـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٠°) = ٥٠°

ق(م أ̂ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب أ̂ جـ) = ٢٥°

١٣٥°



مثال (٢) :

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ، إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصّفات زواياه الداخلية ، فأوجِد بالبرهان ق (أ م̂ ب) .

الحلّ :

المعطَيات : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ،

م نقطة تقاطع منصّفات زواياه الداخلية .

المطلوب : إيجاد ق (أ م̂ ب)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°

∴ ق (جـ أ̂ ب) + ق (جـ ب̂ أ) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∵ م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلّث أ ب جـ

∴ ق (م أ̂ ب) + ق (م ب̂ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق (جـ أ̂ ب) + ق (جـ ب̂ أ)]

= $\frac{1}{2}$ × ٩٠° = ٤٥°

∴ في Δ أ ب م :

ق (أ م̂ ب) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

تدرَّب (٤)

Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،
إذا كان ق (جـ م̂ ب) = ١١٠° .
فأوجِد بالبرهان ق (جـ أ̂ ب) .

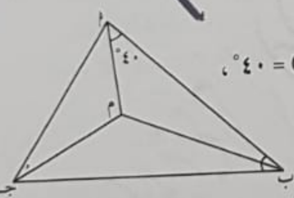
المعطيات : م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ أ ب جـ الداخليه
ق (جـ م̂ ب) = ١١٠°

المطلوب : أوجد ق (جـ أ̂ ب)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ أ جـ ب
∴ جـ م ينصف جـ̂ ، ب م ينصف ب̂
في Δ جـ م ب ق جـ م̂ ب = ١١٠°
ق(م جـ̂ ب) + ق(م ب̂ جـ) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠° مجموع قياس زوايا Δ = ١٨٠°
في Δ أ ب جـ : ق جـ̂ + ق(ب̂) = ٧٠ + ٧٠ = ١٤٠°
ق(جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

١٣٦

تمـرَّنْ :



① Δ أ ب جـ فيه : ق (أ ب̂ جـ) = ق (ب أ̂ م) = ٤٠° ،
م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية .
أوجِد بالبرهان ق (أ جـ̂ م) .

المعطيات : ق (أ ب̂ جـ) = ق (ب أ̂ م) = ٤٠°
م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ أ ب جـ الداخليه

المطلوب : أوجد ق (أ جـ̂ م)

البرهان : Δ أ ب جـ فيه م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ
∵ ق(ب أ̂ م) = ٤٠°
∴ ق(ب أ̂ جـ) = ٨٠°
ق(أ جـ̂ ب) = ١٨٠ − (٨٠° + ٤٠°) = ٦٠°
ق(أ جـ̂ م) = ٣٠°

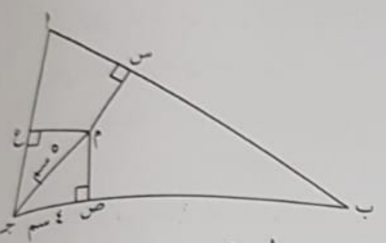
❷ المثلث ا ب جـ فيه :

م نقطة تقاطع منصّفات زواياه الداخلية ،

م جـ = ٥ سم ، جـ ص = ٤ سم

أوجِد بالبرهان :

(١) طول م ص (٢) طول س م



المعطيات : م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ ا ب جـ الداخلية

م جـ = ٥ سم ، جـ ص = ٤ سم

المطلوب : (١) طول م ص (٢) طول س م

البرهان : في Δ ا ب جـ م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ الداخلية

∴ م ص = م س = م ع

في Δ م ص جـ قائم في ص

(م ص)^2 = (م جـ)^2 − (ص جـ)^2 نظرية فيثاغورث

= ٢٥ − ١٦ = ٩

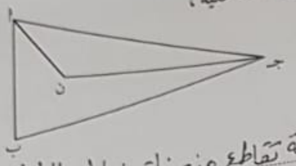
م ص = $\sqrt{٩}$ = ٣ سم

في Δ ا ب جـ :

م س = م ص = ٣ سم

١٣٧

٣ Δ اب جـ فيه : ن نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،
إذا كان :



ق (ن جـ^ ا) + ق (ن أ^ جـ) = ٥٠° ،
فأوجِد بالبرهان ق (ب^).

المعطيات : Δ ا ب جـ فيه ن نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخليه
ق (ن جـ^ ا) + ق (ن أ^ جـ) = ٥٠°
المطلوب : أوجد ق (ب^)
البرهان : Δ ا ب جـ فيه ن نقطه تقاطع منصفات زواياه
∵ ق (ن جـ^ ا) + ق (ن أ^ جـ) = ٥٠°
∴ ق (ا^) + ق (جـ^) = ١٠٠°
∴ ق (ا ب^ جـ) = ١٨٠° − ١٠٠° = ٨٠° مجموع قياس زوايا Δ = ١٨٠°

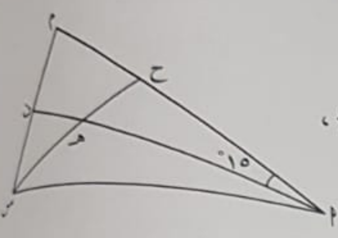
١٣٨

٤ Δ هـ و ي متطابق الضلعين فيه : م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (م و^ ي) = ٢٠° .
فأوجِد بالبرهان ق (هـ^).

المعطيات : Δ هـ و ي متطابق الضلعين ، م نقطة تقاطع منصفات زواياه ، ق (م و ي) = ٢٠°
المطلوب : أوجد ق (هـ^)
البرهان : ∵ Δ هـ و ى متطابق الضلعين
∴ ق (و^) = ق ي^
م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ، ق (م و^ ى) = ٢٠°
∴ ق (و^) = ٤٠°
ق (و^) = ق ي^ = ٤٠°
ق (هـ^) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

١٣٩



⑤ م أ س مثلث فيه: ق(م̂) = ٧٠°، ق(م أ̂ ن) = ١٥°، ق(أ س̂ ح) = ٤٠°، إذا كان $\overleftarrow{\text{س ح}}$ منصف ش̂، $\overline{\text{أ ن}} \cap \overline{\text{س ح}}$ = {هـ}، فأثبت أنّ هـ نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلّث م أ س.

المعطيات: ق(م̂) = ٧٠°، ق(م أ̂ ن) = ١٥°، ق(أ س̂ ح) = ٤٠°

$\overleftarrow{\text{س ح}}$ منصف ش̂ ، $\overline{\text{أ ن}} \cap \overline{\text{س ح}}$ = {هـ}

المطلوب: اثبت أن هـ نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخليه للمثلث م أ س

البرهان: △ م أ س فيه

$\overleftarrow{\text{س ح}}$ منصف (ش̂) ، ق(أ س̂ ح) = ٤٠° ← ①

∴ ق(م س̂ أ) = ٨٠°

ق(أ م̂ س) = ٧٠°

∴ ق(م أ̂ س) = ١٨٠ − (٧٠ + ٨٠) = ٣٠°

∴ ق م أ̂ ن = ١٥°

∴ $\overline{\text{أ ن}}$ منصف (أ̂) ← ② ، $\overline{\text{أ ن}} \cap \overline{\text{س ح}}$ = {هـ}

من (١)، (٢) ينتج ان . هـ نقطة تقاطع منصفات

زوايا △ م أ س الداخليه

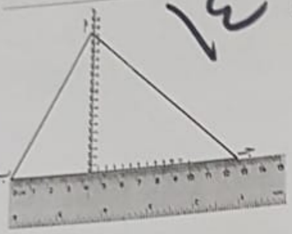
١٣٩

٨-٥ الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلّم : توظيف الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه لحل تمارين هندسيّة .

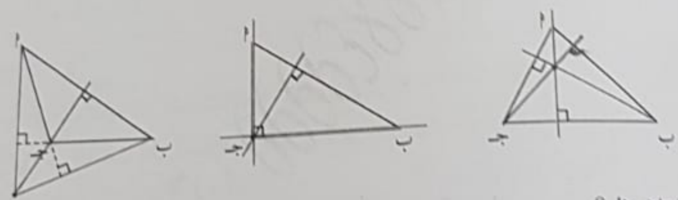
١٤٠

في المثلّث ٱب جـ يمكن رسم العمود النازل من رأس المثلّث ٱ على الضلع المقابل له ب جـ باستخدام المثلّث القائم والمسطرة كما في الشكل .



نشاط :

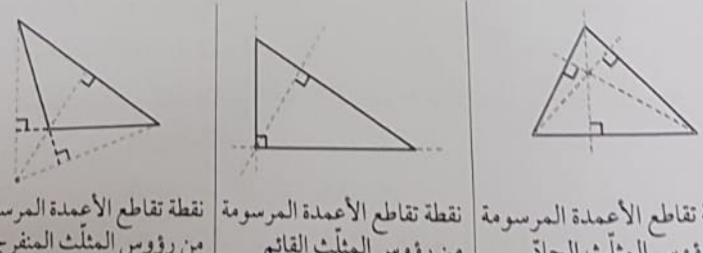
في المثلّثات التالية تمّ رسم العمودين من الرأسين ٱ ، ب على الضلعين المقابلين لهما (أو امتدادهما) كما في الشكل .
أرسم العمود الثالث من الرأس جـ .



ماذا تلاحظ ؟ ....

نظرية :
الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

لاحِظ أنّ :



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث الحادّ الزوايا على أضلاعه تقع داخل المثلّث .	نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .	نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث المنفرج الزاوية على أضلاعه تقع خارج المثلّث .

١٤١

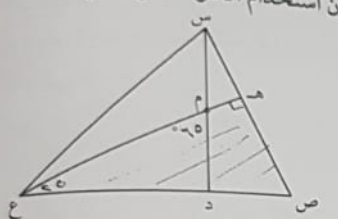
تدرّب (١)

① في المثلث أ ب جـ : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، م ∈ $\overline{\text{أد}}$ ، أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

ق (أ د̂ ب) = ٩٠°

ق (د أ̂ ب) = ٣٠°

ب في المثلث س ص ع : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\overline{\text{ع هـ}}$ ∩ $\overline{\text{س د}}$ = { م } . أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



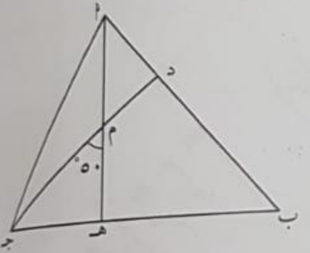
ق (م ع̂ د) = ١٨٠ − (٦٥° + ٩٠°) = ٢٥°

ق (س ص̂ ع) = ٦٥°

مثال :

أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (جـ م̂ هـ) = ٥٠° ، إذا كان $\overline{\text{جـ د}}$ ∩ $\overline{\text{أ هـ}}$ = { م } .

فأوجِد بالبرهان ق (ب̂) .



١٤١

الحل :

المعطيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،
ق (جـ م̂ هـ) = ٥٠°

المطلوب : إيجاد ق (ب̂) .

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث أ ب جـ على أضلاعه

∴ Δ م هـ جـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية ١٨٠°

∴ ق (م ج̂ـ هـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٩٠°) = ٤٠°

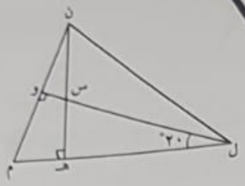
في Δ جـ د ب القائم الزاوية في د

ق (ب̂) = ١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°) = ٥٠°

١٤٢

تدرّب (٢) :

ن ل م مثلّث فيه : س هي نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،



$\overline{ل و} \cap \overline{ن هـ} = \{س\}$ ،

وكان ق (و $\hat{ل}$ م) = ٢٠° .

أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي: (١) ق (و $\hat{م}$ ل) (٢) ق (و $\hat{س}$ هـ) .

المعطيات : س نقطة تقاطع الاعمده المرسومة من رؤوس △ على أضلاعه

$\overline{ل و} \cap \overline{ن هـ} = \{س\}$ ، ق(و ل م) = ٢٠°

المطلوب : اوجد (١) ق(و $\hat{م}$ ل) (٢) ق (و $\hat{س}$ هـ)

البرهان : △ ن ل م فيه :

س نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوسه على اضلاعه

ق(و $\hat{ل}$ م) = ٢٠°

في △ و ل م

ق(و $\hat{م}$ ل) = ١٨٠ − (٢٠° + ٩٠°) = ٧٠°

في الشكل الرباعي و س هـ م

ق($\hat{و}$) = ق ($\hat{هـ}$) = ٩٠°

ق(و $\hat{م}$ هـ) = ٧٠°

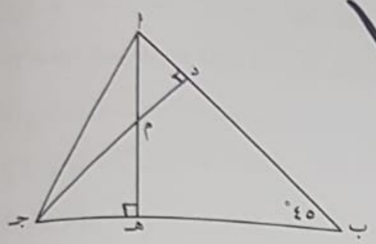
∴ ق(و $\hat{س}$ هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٧٠°) = ١١٠°

(مجموع قياس زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°)

١٤٢

١٤٢

١٤٣



تمـــرَنْ :

١ Δ ا ب جـ فيه : ق (ب̂) = ٤٥° ،
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،
$\overline{\text{اهـ}}$ ∩ $\overline{\text{جـ د}}$ = { م } .

أوجد بالبرهان :

(١) ق (ب أ̂ هـ)   (٢) ق (د م̂ هـ)

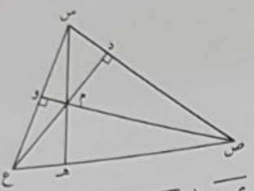
المعطيات : ق(ب̂) = ٤٥° ، م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوسه على اضلاعه ، $\overline{\text{أهـ}}$ ∩ $\overline{\text{جـ د}}$ = {م}

المطلوب : أوجد (١) ق(ب أ̂ هـ)   (٢) ق(د م̂ هـ)

البرهان : Δ أ ب جـ فيه
م نقطه تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
في Δ ب هـ أ قائم في هـ̂
ق(أ̂) = ١٨٠ − (٤٥° + ٩٠°) = ٤٥°
∴ ق(ب أ̂ هـ) = ٤٥°
في الشكل الرباعي د م هـ ب
ق(د م̂ هـ) = ٣٦٠° − (٤٥ + ٩٠° + ٩٠°) = ١٣٥°

١٤٣

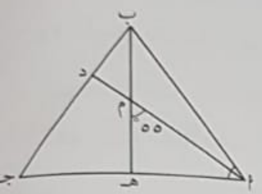
(٢) Δ س ص ع فيه : ق(س ع^ ص) = ٧٠° ، ع د ⊥ س ص ، ص و ⊥ س ع .
(١) أثبِت أنّ : س هـ ⊥ ص ع
(٢) أوجِد بالبرهان ق(هـ ش^ ع)



المعطيات : ق(س ع^ ص) = ٧٠° ، ع د ⊥ س ص ، ص و ⊥ س ع
المطلوب : (١) اثبت أن س هـ ⊥ ص ع
(٢) اوجد ق(هـ ش^ ع)
البرهان : Δ س ص ع فيه
∵ ع د ⊥ س ص ، ص و ⊥ س ع
، ع د ∩ ص و = {م}
∴ م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس Δ على اضلاعه
، ∵ ع د ∩ س هـ = {د}
∴ س هـ ⊥ ص ع
∵ ق(س ع^ ص) = ٧٠°
في Δ س هـ ع
ق(هـ ش^ ع) = ١٨٠° − (٩٠° + ٧٠°) = ٢٠°

١٤٤

١٤٥



❸ Δ اب جـ فيه :
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\overline{\text{اد}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{\text{م}\}$ ،
ق(ب $\hat{\text{ا}}$ جـ) = ق(ا $\hat{\text{م}}$ هـ) = ٥٥° .

(١) أوجد بالبرهان ق(ا $\hat{\text{جـ}}$ ب)

(٢) ما نوع المثلث اب جـ بالنسبة إلى أضلاعه ؟

المعطيات : م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس Δ على اضلاعه

$\overline{\text{اد}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{\text{م}\}$ ، ق(ب $\hat{\text{ا}}$ جـ) = ق(ا $\hat{\text{م}}$ هـ) = ٥٥°

المطلوب: ① أوجد ق(ا $\hat{\text{جـ}}$ ب) ② ما نوع Δ ا ب جـ بالنسبة لاضلاعه

البرهان : Δ ا ب جـ فيه :

م نقطة تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوس Δ على أضلاعه

في Δ م هـ ا قائم في $\hat{\text{هـ}}$

ق(م $\hat{\text{ا}}$ هـ) = ١٨٠ − (٩٠° + ٥٥°) = ٣٥°

في Δ ا د جـ القائم في ($\hat{\text{د}}$)

ق(ا $\hat{\text{جـ}}$ د) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٥°) = ٥٥°

ق(ا $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ٥٥°

∴ ق(ب $\hat{\text{ا}}$ جـ) = ق(ا $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ٥٥°

∴ Δ ا ب جـ متطابق الضلعين

١٤٥

٨-٦ القطع المتوسّطة للمثلّث
Medians of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف القطع المتوسّطة للمثلّث لحلّ تمارين هندسية .

القطعة المستقيمة التي تصل أيّ رأس للمثلّث بمنتصف الضلع المقابل له تسمى قطعة متوسّطة للمثلّث .

في Δ أ ب جـ :

∵ د منتصف ب جـ

∴ أد قطعة متوسّطة للمثلّث أ ب جـ .

١٤٦

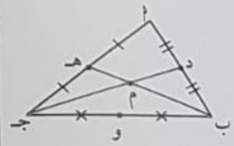
نشاط :

في المثلّثات التالية : ب هـ ، جـ د قطعتان متوسّطتان للمثلّث أ ب جـ .

أُرسم باستخدام الأدوات الهندسية القطعة المتوسّطة أو .

ماذا تلاحظ ؟ ....

في كلّ من المثلّثات التالية : لتكن م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ، أكمِل باستخدام المسطرة :

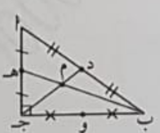


مثلّث حادّ الزوايا

جـ م = ٣ سم

د م = ١ سم

جـ م / د م = ٣ / ١



مثلّث قائم الزاوية

جـ م = ١ سم

د م = ١/٢ سم

جـ م / د م = ١ / (١/٢) = ٢ / ١

١٤٦

مثلّث منفرج الزاوية

جـ م = ٣ سم

د م = ١,٥ سم

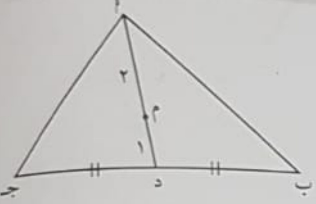
جـ م / د م = ٣ / ١,٥ = ٢ / ١

ماذا تلاحظ ؟ جم / دم = ٢ / ١

تحقّقْ من صحّة هذه النسبة للقطع المتوسّطة الأخرى في المثلّث .

١٤٧

نظرية :
القطع المتوسطة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلّ منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في Δ أ ب جـ :
أد قطعة متوسّطة ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

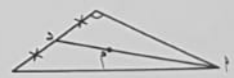
أكمِل :

أم = ٢ م د	م د = $\frac{١}{٣}$ أد	أم = $\frac{٢}{٣}$ أد
م د = $\frac{١}{٢}$ أم	أد = ٣ م د	أد = ٢ أم

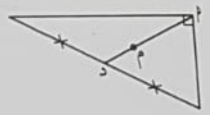
١٤٧

تدرّب (١) :

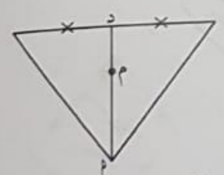
في كلّ من المثلّثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة ، أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



د م = ٣ سم
أم = ٦ سم
أد = ٩ سم

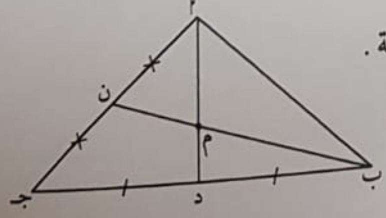


أم = ٤ سم
د م = ٢ سم
أد = ٦ سم



أد = ١٨ سم
د م = ٦ سم
أم = ١٢ سم

تدرّب (٢) :



أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة .

إذا كان ب م = ١٠ سم فإنّ :
ن م = ٦,٦ ، ب ن = ٣,٣

إذا كان أد = ١٢ سم فإنّ :
أم = ٨ ، د م = ٤

تدرب (٣)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ١٨ سم،
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ .
أوجد بالبرهان كلًا من : (١) أ د (٢) أ م.

المعطيات : أ ب جـ Δ قائم الزاوية في أ ، ب جـ = ١٨ سم
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ

المطلوب : أوجد (١) أ د (٢) أ م

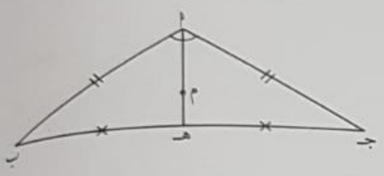
البرهان : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ
ب جـ = ١٨ سم ، د منتصف ب جـ
∴ أ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ٩ سم
∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ
∴ أ م : م د = ٢ : ١
أ م = $\frac{2}{3}$ × ٩ = ٦ سم

١٤٨

١٤٩

فكِّر وناقِش

ما نوع المثلّث الذي تتطابق فيه القطع المتوسّطة الثلاث ؟



مثال :

أ ب جـ مثلّث فيه :

أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ،

ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ .

الحلّ :

المعطيات : أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة في المثلّث

المطلوب : إيجاد كلٍّ من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ أ ب = أ جـ ، هـ منتصف $\overline{جـ ب}$

∴ $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∵ ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠°

∴ Δ أ جـ هـ ثلاثيني ستّيني

∴ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ = ١٢ سم

١٤٩

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ

م هـ = $\frac{١}{٣}$ أ هـ

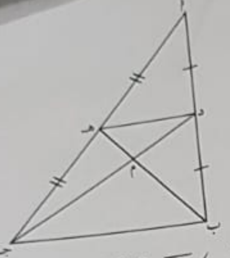
= $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

م أ = ٢ م هـ

= ٢ × ٤ = ٨ سم

١٥٠

تدرب (٤) :



في الشكل المقابل :

د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ،

$\overline{دجـ} \cap \overline{بهـ} = \{م\}$ ،

ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، د جـ = ٩ سم.

أوجد بالبرهان محيط Δ د م هـ.

المعطيات : د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، $\overline{دجـ} \cap \overline{بهـ} = \{م\}$

ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، د جـ = ٩ سم

المطلوب : محيط Δ د م هـ

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، د منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{دجـ} \cap \overline{بهـ} = \{م\}$

∴ م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ

∵ ب جـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، د جـ = ٩ سم

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٤ سم ، د م = $\frac{١}{٣}$ × ٩ = ٣ سم

م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م = ٢ سم قطع متوسطه بنسبه ٢ : ١

محيط Δ د م هـ = ٤ + ٣ + ٢ = ٩ سم

١٥٠

تدرب (٥) :

المثلّث أ ب جـ فيه : $\overline{جـو}$ قطعة متوسطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ،

إذا كان م و = ٢ س ، جـ م = ٣ س + ١ .

أوجد بالبرهان قيمة س.

المعطيات : $\overline{جـو}$ قطعه متوسطة ، م نقطة تقاطع القطع المتوسطه للمثلث

م و = ٢ س ، جـ م = ٣ س + ١

المطلوب : أوجد قيمة س

١٥١

المتوسطة للمثلث نقطة تقاطع القطع

البرهان : Δ أ ب جـ فيه م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث

∴ جـ م : م د = ٢ : ١ ، جـ د = جـ م + م د

جـ م = ٢ م د

٣ س + ١ = ٢ (٢ س) ← ٣ س + ١ = ٤ س

∴ س = ١

١٥١

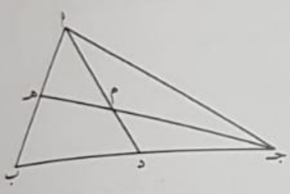
تمـــرّن :

١ في الشكل المقابل :

$\overline{أد}$ ∩ $\overline{جـهـ}$ = {م} ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ ،

إذا كان أم = ١٨ سم ، جـهـ = ٣٠ سم .



فأوجد بالبرهان :

(١) م هـ (٢) جـ م (٣) أ د

المعطيات : $\overline{أد}$ ∩ $\overline{جـهـ}$ = {م} ، م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ

أم = ١٨ سم ، جـ هـ = ٣٠ سم

المطلوب : أوجد (١) م هـ (٢) جـ م (٣) أ د

البرهان : Δ أ ب جـ فيه

م نقطه تقاطع متوسطات Δ ، جـ هـ = ٣٠ سم

∴ م هـ = $\frac{١}{٣}$ × ٣٠ = ١٠ سم

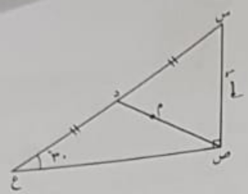
جـ م = $\frac{٢}{٣}$ × ٣٠ = ٢٠ سم

∵ أ م = ١٨ سم ∴ م د = $\frac{١}{٢}$ أ م

م د = ٩

أ د = ١٨ + ٩ = ٢٧ سم

١٥٢

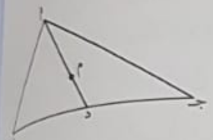


❷ Δ س ص ع قائم الزاوية في ص فيه :
ق(^ع) = ٣٠°،
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث ،
س ص = ٦ سم .
أوجد كلًّا ممّا يلي :
(١) س ع (٢) ص د (٣) ص م

المعطيات : Δ س ص ع قائم الزاوية في ص ، ق(^ع) = ٣٠°
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ، س ص = ٦ سم
المطلوب : أوجد (١) س ع (٢) ص د (٣) ص م
البرهان : Δ س ص ع قائم الزاوية في ص
، ق(^ع) = ٣٠°
∴ س ع = ١٢ سم Δ ثلاثيني ستيني
∵ د منتصف س ع
∴ ص د = $\frac{1}{2}$ س ع = ٦ سم
∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث
ص م = $\frac{2}{3}$ × ٦ = ٤ سم

١٥٢

١٥٣



③ في الشكل المقابل : $\overline{اد}$ قطعة متوسطة للمثلث اب جـ ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث اب جـ ،
إذا كان ام = ٥ س ، م د = س + ٣ ،
فأوجد بالبرهان اد .

المعطيات : $\overline{اد}$ قطعه متوسطه للمثلث ا ب جـ ، م نقطة تقاطع القطع المتوسطه للمثلث ا ب جـ ، ام = ٥ س ، م د = س + ٣

المطلوب : أوجد اد

البرهان : ∵ $\overline{اد}$ قطعة متوسطة للمثلث ا ب جـ ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسطه للمثلث ا ب جـ

∴ ام : م د = ٢ : ١

∴ ام = ٢ م د

٥ س = ٢ . (س + ٣)

٥ س = ٢ س + ٦

٥ س − ٢ س = ٦

٣ س = ٦

س = ٢

١٥٤

أولًا: التمارين المقالية

في كلٍّ من المثلّثات التالية أكمل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ

... = ٤ سم

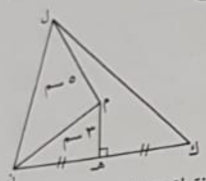
... = ٣ سم

ب

جـ ل = ٦ سم

ب جـ = ٦ سم

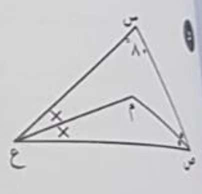
جـ



م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث .

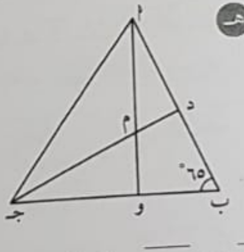
ك ن = ٤ سم

د



ق(ص م^ ع) = ١٣٠°

هـ

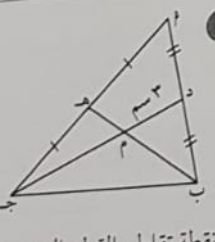


أو ∩ جـ د = {م} ،

م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث أ ب جـ على أضلاعه .

ق(ب أ^ و) = ٢٥°

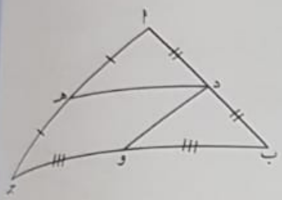
و



م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلّث أ ب جـ .

جـ م = ٦ سم

١٠٠



❷ أ ب جـ مثلث فيه : د ، و ، هـ منتصفات

$\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$ على الترتيب ،

إذا كان ب جـ = ٨ سم .

Ⓐ أوجد بالبرهان د هـ .

Ⓑ أثبت أنّ د و جـ هـ متوازي أضلاع .

المعطيات : أ ب جـ ∆ فيه د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ، و منتصف $\overline{ب جـ}$

ب جـ = ٨ سم

المطلوب : (١) أوجد د هـ (٢) اثبت أن د و جـ هـ متوازي أضلاع

البرهان : ∆ أ ب جـ فيه :

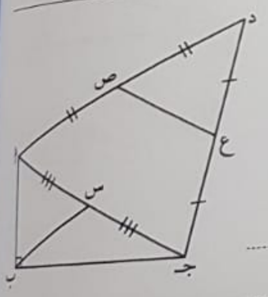
د منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ، ب جـ = ٨ سم

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ٤ سم ، $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∵ و منتصف ب جـ

∴ و جـ = د هـ ، $\overline{و جـ}$ // $\overline{د هـ}$

∴ الشكل د و جـ هـ متوازي اضلاع



❸ أ ب جـ د شكل رباعي فيه : ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° ،

ص منتصف $\overline{د أ}$ ، ع منتصف $\overline{د جـ}$ ،

إذا كانت س منتصف $\overline{أ جـ}$.

فأثبِت أنّ : ب س = ع ص .

المعطيات : ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٩٠° ، ص منتصف $\overline{د أ}$

ع منتصف $\overline{د جـ}$ ، س منتصف $\overline{أ جـ}$

المطلوب : ب س = ع ص

البرهان : في ∆ د جـ أ

ع منتصف $\overline{د جـ}$ ، ص منتصف $\overline{د أ}$

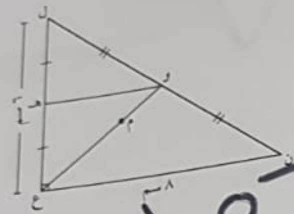
ع ص = $\frac{1}{2}$ جـ أ

في ∆ أ ب جـ قائم في ب ، س منتصف أ جـ (نظرية) ← ①

ب س = $\frac{1}{2}$ جـ أ ← ②

من ① ، ② ع ص = ب س

عند تصميم جسر تمّ رسم المثلّث في الشكل المقابل حيث ل ع ن مثلّث قائم الزاوية في ع، ع ن = ٨ سم، ع ل = ٦ سم،
و منتصف ل ن، هـ منتصف ل ع،
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ل ع ن.
أوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي:
(١) و هـ (٢) ل ن (٣) ع و (٤) م و

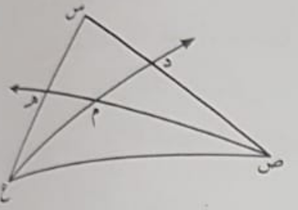


١٥٦

المعطيات: ل ع ن مثلث قائم الزاوية في ع، ع ن = ٨ سم، ع ل = ٦ سم
و منتصف ل ن، هـ منتصف ل ع، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ل ع ن

المطلوب: أوجد (١) و هـ (٢) ل ن (٣) ع و (٤) م و

البرهان: في △ ل ع ن
و منتصف ل ن، هـ منتصف ل ع
و هـ = ½ ن ع = ٤ سم
∵ △ ل ع ن قائم الزاوية في ع
∴ (ل ن)² = (ل ع)² + (ع ن)² نظرية فيثاغورث
(ل ن)² = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠
ل ن = √١٠٠ = ١٠ سم
∵ و منتصف ل ن، △ ل ع ن قائم في ع
∴ ع و = ½ ل ن = ٥ سم
م و = ⅓ × ٥ = ٥/٣ = ١⅔ سم لأن م نقطة تقاطع متوسطات △



٥ س ص ع مثلث فيه : ق (س^) = ٨٠° ،
ص هـ ← منصِّف ص^ ،
ع د ← منصِّف ع^ .
أوجد بالبرهان ق (د م^ هـ) .

المعطيات : ق (س^) = ٨٠° ، ص هـ ← منصف ص^ ، ع د ← منصف ع^

المطلوب : ق (د م^ هـ)

البرهان : △ س ص ع فيه
ص هـ ← منصف ص^ ، ع د ← منصف ع^
ص هـ ← ∩ ع د ← = {م}

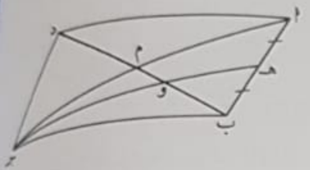
∴ م نقطة تقاطع منصفات زوايا △ س ص ع ، ق (س^) = ٨٠°
ق (ص^) + ق (ع^) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°
∴ ق (م ص^ ع) + ق (م ع^ ص) = ٥٠°
ق (ص م^ ع) = ١٨٠ − ٥٠ = ١٣٠°
ق (د م^ هـ) = ق (ص م^ ع) = ١٣٠° بالتقابل بالرأس

س ص ع مثلث فيه : ق (صٓ) = ٤٥° ،
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ،
$\overline{سهـ} \cap \overline{عد} = \{م\}$.
أثبت أن المثلث س د م متطابق الضلعين .

المعطيات : ق (صٓ) = ٤٥° $\overline{سه} \cap \overline{عد} = \{م\}$
م نقطه تقاطع الاعمدة المرسومه من رؤوسه على اضلاعه
المطلوب : △ س د م متطابق الضلعين
البرهان : △ س ص ع فيه
م نقطه تقاطع الاعمدة المرسومة من رؤوسه على اضلاعه
ق صٓ = ٤٥°
في △ س هـ ص قائم في هـ
ق (سٓ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°
في △ س د م القائم في د
ق (مٓ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°
∴ ق (د سٓ م) = ق (س مٓ د) = ٤٥°
△ س د م متطابق الضلعين

١٥٨

١٥٩



❼ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه : م نقطة تقاطع قطريه ، ب د = ١٢ سم ، نصّفت $\overline{أ ب}$ في هـ ، $\overline{جـ هـ} \cap \overline{ب د} = \{و\}$.

برهن أنّ :

(١) و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ

(٢) ب و = ٤ سم

المعطيات : أ ب جـ د متوازى أضلاع ، م نقطة تقاطع قطرية

ب د = ١٢ سم ، هـ منتصف أ ب ، $\overline{جـ هـ} \cap \overline{ب د} = \{و\}$

المطلوب : (١) و نقطه تقاطع القطع المتوسطه للمثلث أ ب جـ

(٢) ب و = ٤ سم

البرهان : فى Δ أ ب جـ هـ منتصف أ ب ، م منتصف أ جـ (من خواص متوازى الاضلاع)

$\overline{جـ هـ} \cap \overline{ب م} = \{و\}$

∴ و نقطه تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ

ب د = ١٢ سم فى متوازى الاضلاع أ ب جـ د

ب م = $\frac{١}{٢}$ ب د = ٦ سم (القطران ينصف كلا منهما الاخر)

∴ و نقطه تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ

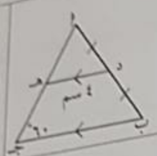
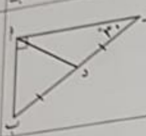
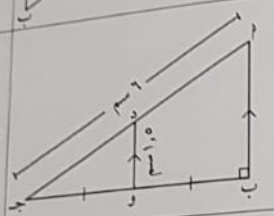
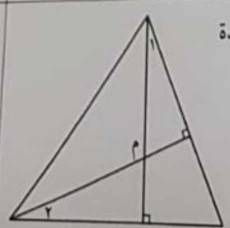
ب و : و م = ٢ : ١

ب و = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤ سم

١٦٠

التمارين الموضوعية

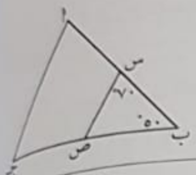
في البنود التالية ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المثلّث أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ ، د منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، د هـ = ٤ سم ، ق ($\hat{جـ}$) = ٦٠° ، فإنّ أ جـ = ٨ سم .		أ	ب
٢ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في أ ، د منتصف $\overline{جـ ب}$ ، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ، فإنّ △ أ د ب متطابق الأضلاع .		أ	ب
٣ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ جـ = ٦ سم ، د و = ١,٥ سم ، و منتصف $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{د و}$ // $\overline{أ ب}$. فإنّ : ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° .		أ	ب
٤ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية هي رأس الزاوية القائمة .		أ	ب
٥ س ص ع مثلّث فيه : ق (ص $\hat{س}$ م) = ق (س $\hat{ص}$ ع) = ٥٠° ، حيث م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية ، فإنّ ق (س $\hat{ع}$ م) = ٣٠° .		أ	ب
٦ في الشكل المقابِل : إذا كانت م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، فإنّ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) .		أ	ب

١٦٠

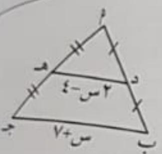
١٦١

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :



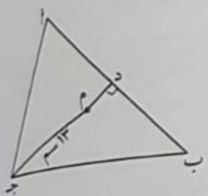
٧ أ ب جـ مثلّث فيه : س منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق ($\hat{\text{ب}}$) = ٥٠° ، ق (ب $\hat{\text{س}}$ ص) = ٧٠° ، فإنّ ق ($\hat{\text{جـ}}$) =

(أ) ٥٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٧٠° (د) ٨٠°



٨ في الشكل المقابِل : س =

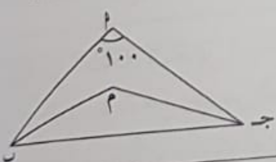
(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ٥ (د) ٢



٩ أ ب جـ مثلّث فيه : أ ب = ٢٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، جـ م = ١٣ سم ، فإنّ م د =

(أ) ٥ سم (ب) ٦ سم

(جـ) ١٢ سم (د) ١٣ سم



١٠ أ ب جـ مثلّث فيه : ق ($\hat{\text{أ}}$) = ١٠٠° ، م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث ، فإنّ ق (جـ $\hat{\text{م}}$ ب) =

(أ) ١٤٠° (ب) ١٢٠°

(جـ) ١٠٠° (د) ٨٠°

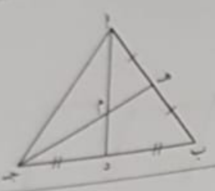
١١ المثلّث الذي يكون فيه نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه هي أحد رؤوسه هو :

(أ) مثلّث منفرج الزاوية (ب) مثلّث متطابق الأضلاع

(جـ) مثلّث قائم الزاوية (د) مثلّث حادّ الزوايا

أ ب جـ مثلّث فيه : $\overline{\text{أد}} \cap \overline{\text{جـهـ}} = \{\text{م}\}$ ،
أد = ١٢ سم فإن م د =

(أ) ٣ سم (ب) ٤ سم (جـ) ٦ سم (د) ٨ سم



س ص ع مثلّث متطابق الضلعين ، فإنّ $\overline{\text{س ل}}$ هي :

(أ) منصِّف الزاوية س فقط .
(ب) قطعة متوسّطة فقط .
(جـ) محور $\overline{\text{ص ع}}$ فقط .
(د) منصِّف الزاوية س وقطعة متوسّطة ومحور $\overline{\text{ص ع}}$.

أ ب جـ مثلّث متطابق الأضلاع ، $\overline{\text{أهـ}} \cap \overline{\text{ب و}} \cap \overline{\text{جـ د}} = \{\text{م}\}$ ، فإنّ م هي نقطة تقاطع :

(أ) منصِّفات زوايا المثلّث فقط .
(ب) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه فقط .
(جـ) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه وقطعه المتوسّطة فقط .
(د) منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه وقطعه المتوسّطة ومحاور أضلاعه .

١٦٢