(2 - 4) النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

أمثلة

1

المثلث 90° ، 45° ،45°

4 3 2

المثلث الثلاثيني الستيني

حاول أن تحل

1

3 2

النسب المثلثية للزوايا الخاصة

عودة لفهرس الموضوعات

٤-٢

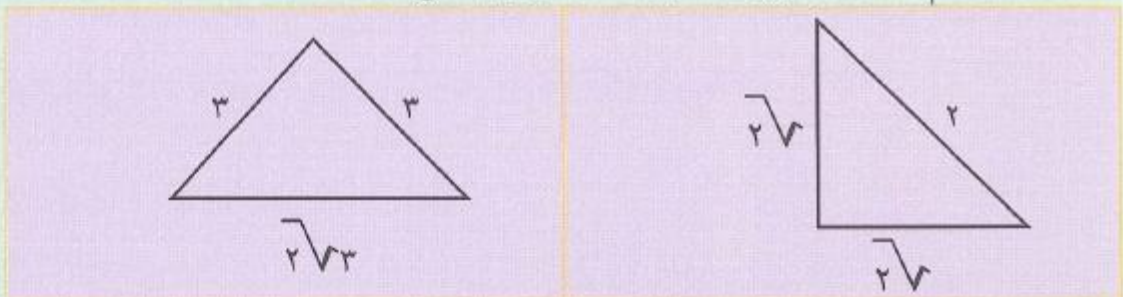
النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
Trigonometric Ratios for Some particular Angles

سوف تتعلم

- النسب المثلثية للزوايا ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°.
- متطابقات مثلثية
- الزاوية الربعية

دعنا نفكر ونتناقش

١ استخدم المنقلة لإيجاد قياسات زوايا كل مثلث.



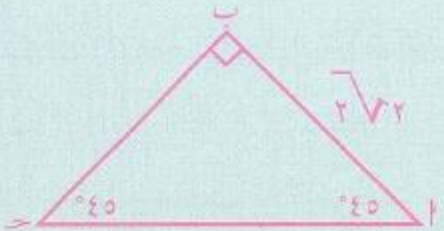
٢ قارن بين أطوال الأضلاع.

٣ استخدم نظرية فيثاغورث لإثبات ما حصلت عليه في ٢.

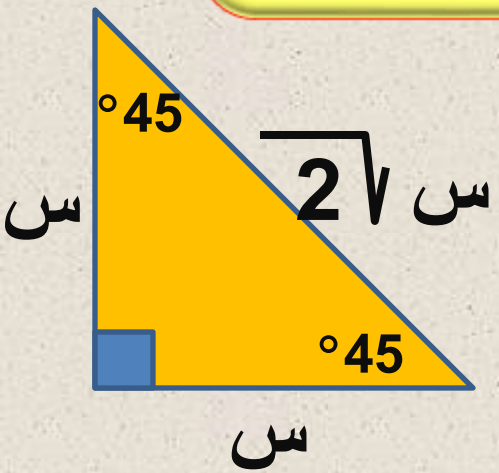
المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.

في المثلث أ ب جـ، قياس كل من الزاويتين الحادتين يساوي ٤٥°.

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية ب متطابق الضلعين، ويسمى أحيانًا **المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.**



في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب̂ متطابق الضلعين
ويسمى احيانا المثلث 45° ، 45° ، 90°
اذا كان طول أحد ضلعي القائمة = س ، فإن طول الوتر = س $\sqrt{2}$



جا 45° = المقابل / الوتر = س / س $\sqrt{2}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

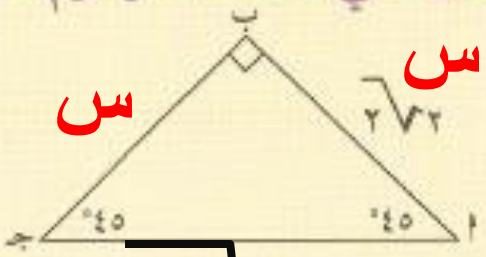
جتا 45° = المجاور / الوتر = س / س $\sqrt{2}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ظا 45° = المقابل / المجاور = س / س = 1

عودة

مثال (١)

أ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر $\overline{أجـ}$.



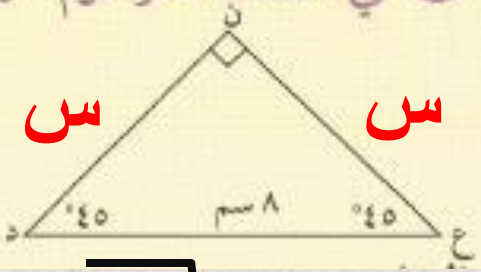
$س\sqrt{2}$

$س = 2\sqrt{2}$

$أجـ = س\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$

ب في المثلث المرسوم، أوجد طول الضلع $\overline{ع ن}$.



$س\sqrt{2}$

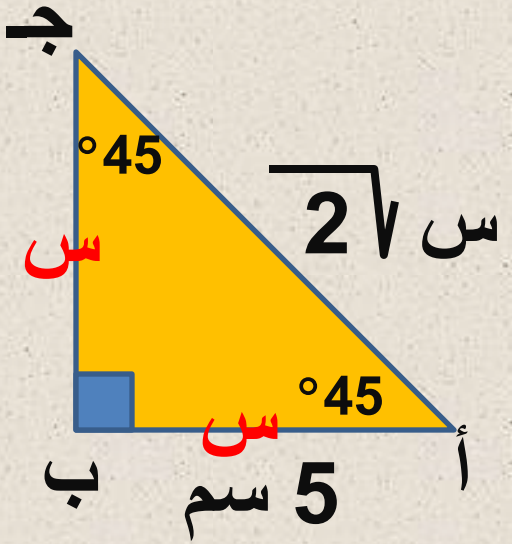
$س\sqrt{2} = 8$

$س = \frac{8}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{4}$

عودة

حاول أن تحل

١ أ أب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.



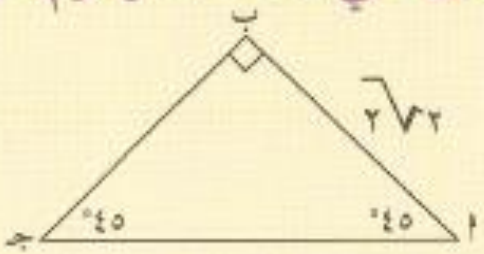
س = 5 سم

أ جـ = س √2 = 5 √2

عودة

مثال (١)

أ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر $\overline{أجـ}$.



جتا أ = $\frac{أ\,ب}{أ\,جـ}$

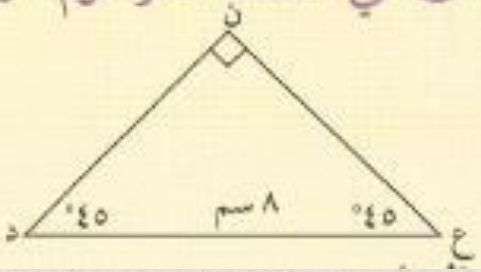
جتا 45° = $\frac{\sqrt{2}}{أ\,جـ}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\frac{\sqrt{2}}{أ\,جـ}$

أ جـ = $\frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

أ جـ = 4 سم

ب في المثلث المرسوم، أوجد طول الضلع $\overline{ع\,ن}$.



جتا ع = $\frac{ع\,ن}{ع\,د}$

جتا 45° = $\frac{ع\,ن}{8}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\frac{ع\,ن}{8}$

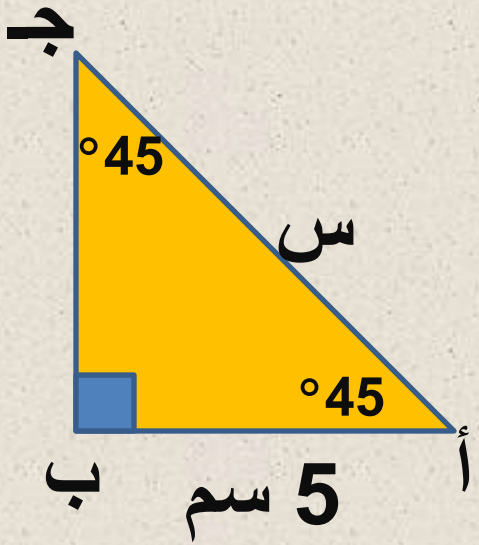
ع ن = $\frac{8 \times \sqrt{2}}{2}$

ع ن = 5,656 سم تقريبا

عودة

حاول أن تحل

١ أ أب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.



جتا أ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

جتا 45° = $\frac{5}{\text{أ جـ}}$

$\frac{5}{\text{أ جـ}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

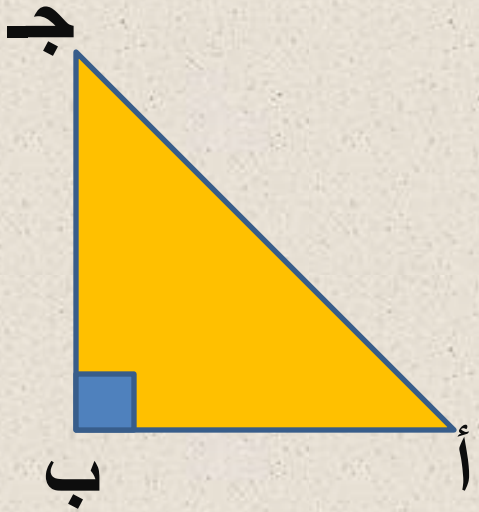
أ جـ = $\frac{5 \times \sqrt{2}}{2}$

أ جـ = $\frac{5}{\sqrt{2}}$

عودة

حاول أن تحل

ب الحساب الذهني: إذا كان ظا جـ = ١ فكيف توجد ق (∠جـ) دون استخدام الآلة الحاسبة؟



ظا جـ = المقابل / المجاور = 1

أي أن المقابل = المجاور

أي أن المثلث القائم متطابق الضلعين

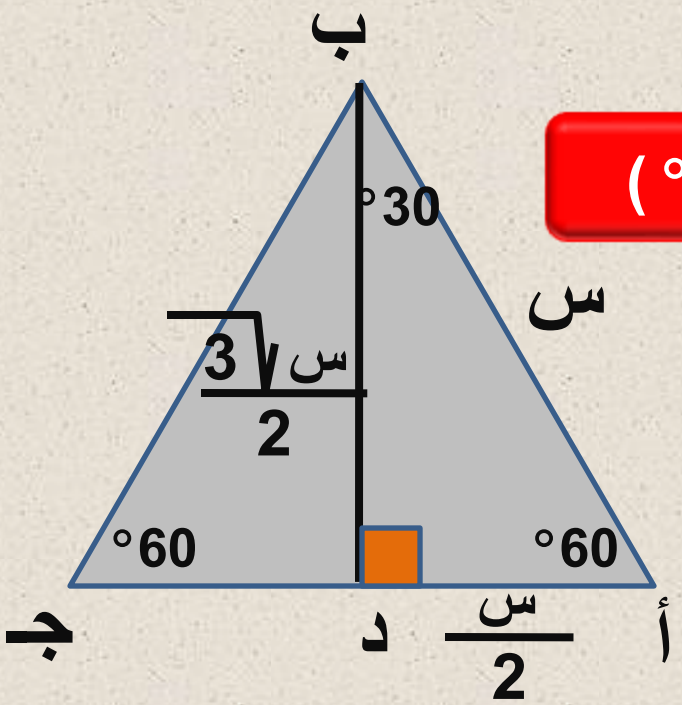
ق (∠جـ) = 45°

09:08 16/11/2020

ص

المثلث الثلاثيني الستيني

المثلث أ ب د مثلث ثلاثيني ستيني(30° ، 60° ، 90°)



جا 60° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{\frac{3}{2}\text{س}}{\text{س}}$

= $\frac{\frac{3}{2}\text{س}}{\text{س}}$ ÷ س

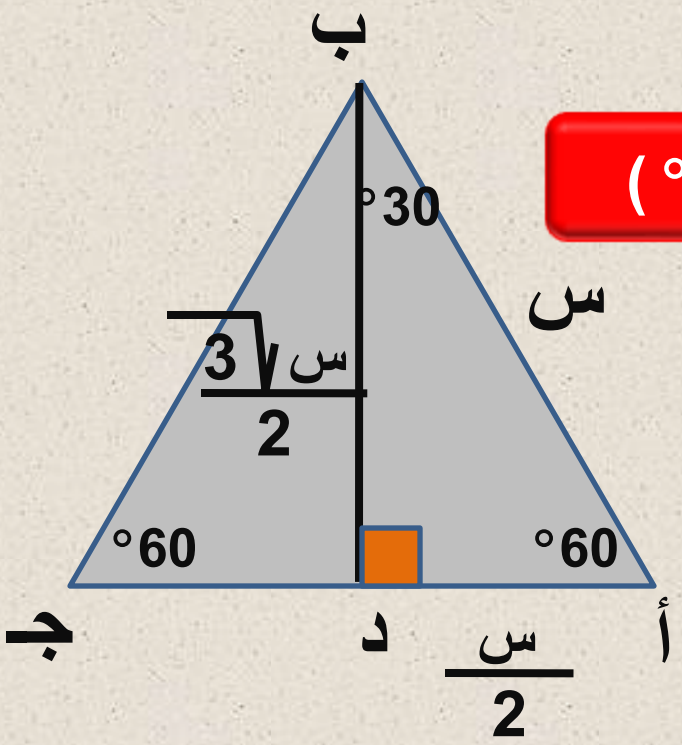
= $\frac{\frac{3}{2}\text{س}}{\text{س}}$ × $\frac{1}{\text{س}}$ = $\frac{\frac{3}{2}}{\text{س}}$

جتا 60° = $\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{\frac{\text{س}}{2}}{\text{س}}$ ÷ $\frac{\text{س}}{2}$ = س × $\frac{\text{س}}{2}$ = $\frac{1}{\text{س}}$ × $\frac{\text{س}}{2}$ = $\frac{1}{2}$

عودة

المثلث الثلاثيني الستيني

المثلث أ ب د مثلث ثلاثيني ستيني(30° ، 60° ، 90°)

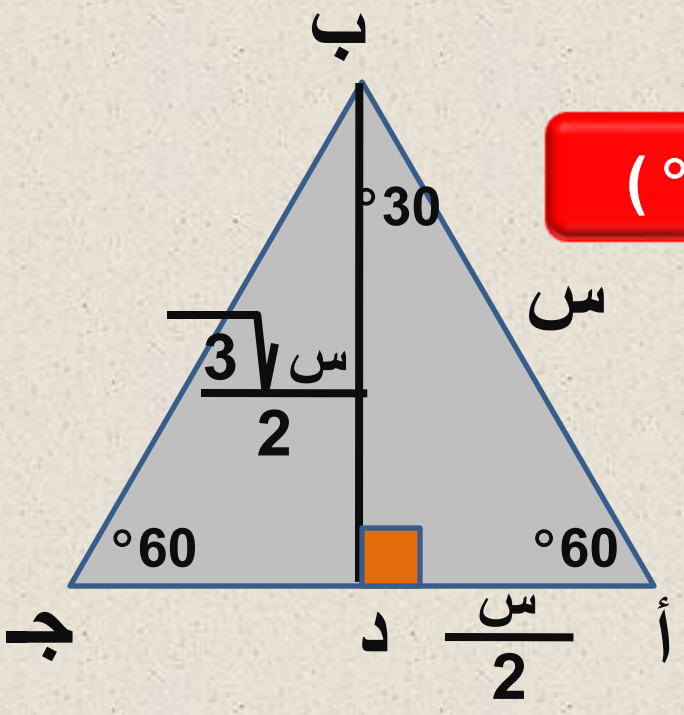


ظا 60° = ب د / أ د = 3 س / 2 ÷ س / 2

= 3 س / 2 × 2 / س

= √3

المثلث الثلاثيني الستيني



المثلث أ ب د مثلث ثلاثيني ستيني (30° ، 60° ، 90°)

جتا 30° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{\frac{3}{2}\text{س}}{\text{س}}$

= $\frac{3}{2}\text{س}$ ÷ س

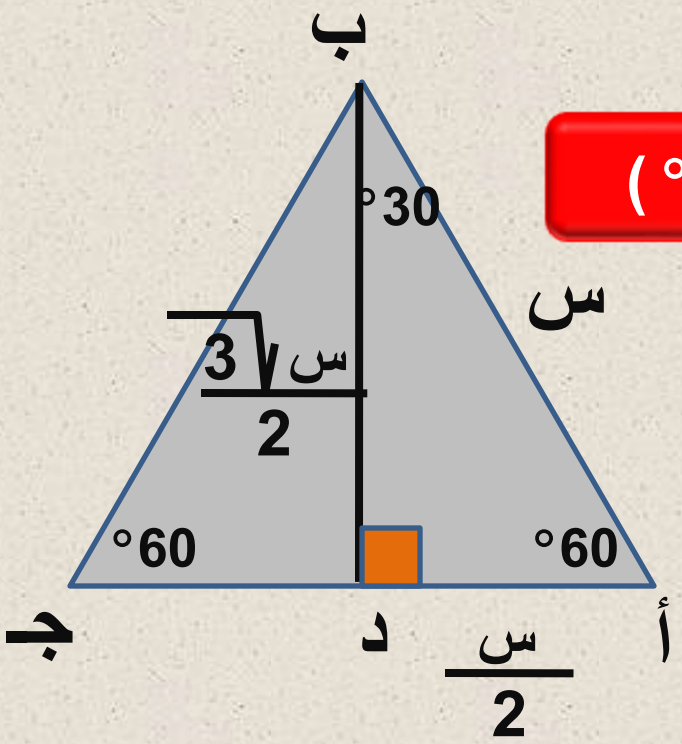
= $\frac{3}{2}\text{س}$ × $\frac{1}{\text{س}}$ = $\frac{3}{2}$

جا 30° = $\frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{س}}{\frac{2}{\text{س}}}$ = $\frac{\text{س}}{2}$ ÷ س = س × $\frac{\text{س}}{2}$ = $\frac{1}{\text{س}}$ = $\frac{1}{2}$

عودة

المثلث الثلاثيني الستيني

المثلث أ ب د مثلث ثلاثيني ستيني(30° ، 60° ، 90°)

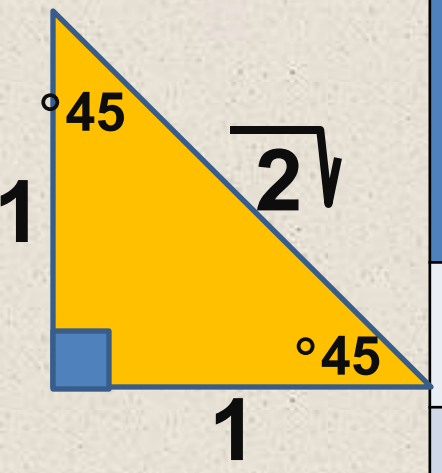


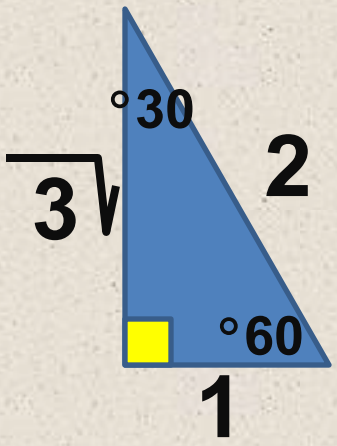
$$\text{ظا } 30° = \frac{\text{أ د}}{\text{ب د}} = \frac{\frac{\text{س}}{2}}{\frac{\sqrt{3}\,\text{س}}{2}}$$

$$= \frac{\text{س}}{2} \div \frac{\sqrt{3}\,\text{س}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\text{س}}$$

$$= \frac{\text{س}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}\,\text{س}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

عودة





الزاوية هـ		جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
القياس الستيني	القياس الدائري			
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

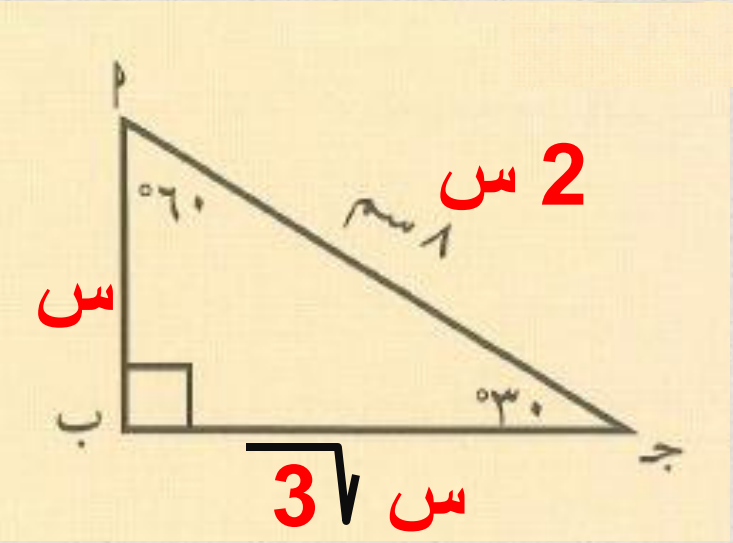
عودة

الزاوية هـ		جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
القياس الستيني	القياس الدائري			
°0	ᵈ0	0	1	0
°90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	غير معرف
°180	π	0	1 –	0
°270	$\frac{\pi 3}{2}$	1 –	0	غير معرف
°360	$\pi 2$	0	1	0

عودة

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$.



2 س =	8
س =	4
أ ب =	4 سم
ب جـ =	4√3 سم

عودة

حاول أن تحل

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$ سم، فأوجد طول الضلعين الباقيين.

س = $\sqrt{6}$

أ جـ = 2 س = 2 $\sqrt{6}$ سم

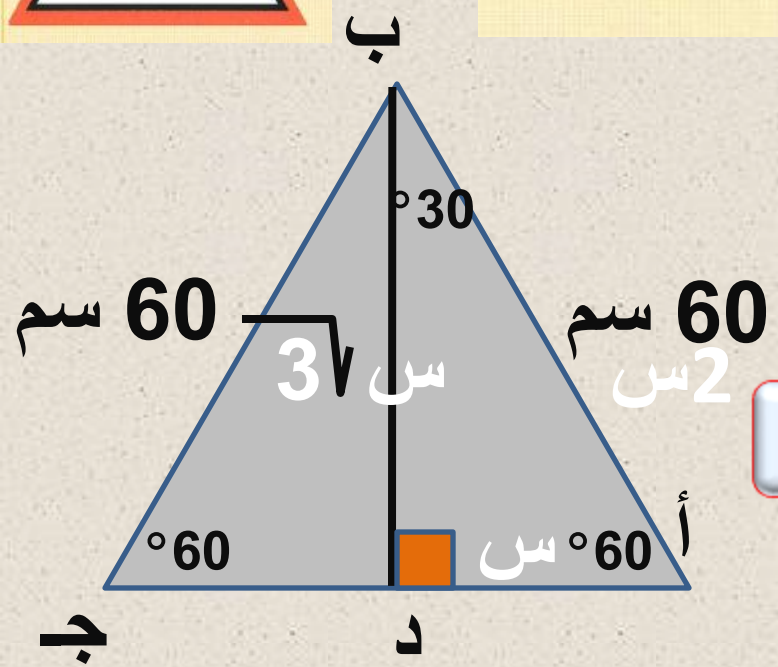
ب جـ = س $\sqrt{3}$ =

$\sqrt{6} \times \sqrt{3}$ = 3 $\sqrt{2}$ سم

عودة

مثال (٣) تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.



2س =	60 سم	
أ د =	س =	30 سم
ب د =	س√3 =	30√3 سم

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × طول الإرتفاع

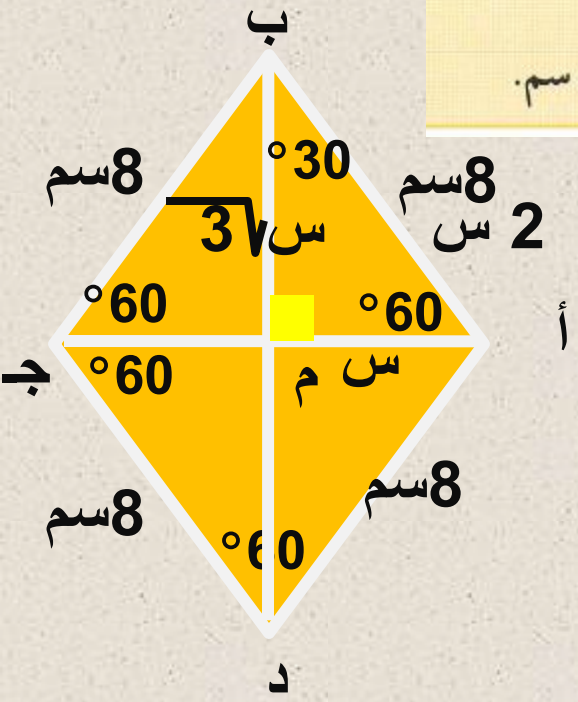
= $\frac{1}{2}$ × 60 × 30√3 = 900√3 سم²

= 1558,84572 سم² = 1559 سم² تقريباً

عودة

حاول أن تحل

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.



2س =	8 سم	
أ م =	س =	4 سم
ب م =	س√3 =	4 √3سم

مساحة المعين = نصف حاصل ضرب القطرين

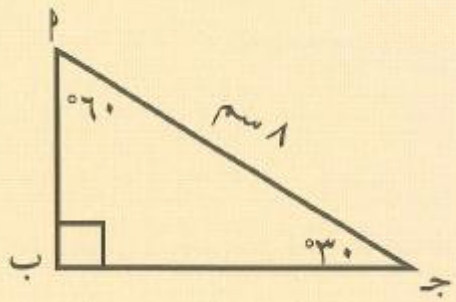
= 0,5 × 4 × 4 √3

= 8 √3 سم^2

عودة

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين $\overline{أ ب}$، $\overline{ب جـ}$.



جتا جـ = $\frac{أ ب}{أ جـ}$

جتا 30° = $\frac{أ ب}{8}$

$\frac{1}{2} = \frac{أ ب}{8}$

أ ب = $\frac{8 \times 1}{2}$

أ ب = 4 سم

جا جـ = $\frac{أ ب}{أ جـ}$

جا 30° = $\frac{ب جـ}{8}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ب جـ}{8}$

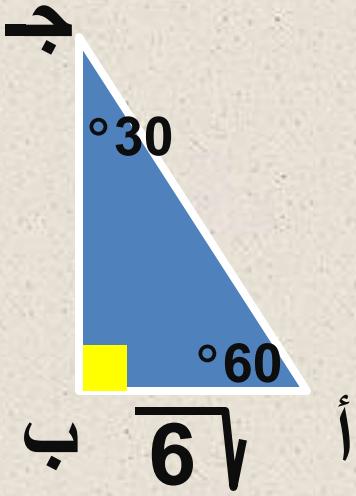
ب جـ = $\frac{8 \times \sqrt{3}}{2}$

ب جـ = $4\sqrt{3}$ سم

عودة

حاول أن تحل

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $6\sqrt{7}$ سم، فأوجد طول الضلعين الباقيين.



جتا جـ = أ ب / أ جـ

جتا 30° = 6√ / أ جـ

$\frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{}}{أ\ جـ}$

أ جـ = $\frac{2 \times 6\sqrt{}}{1}$ = $6\sqrt{2}$ سم

ظا جـ = أ ب / ب جـ

ظا 30° = 6√ / ب جـ

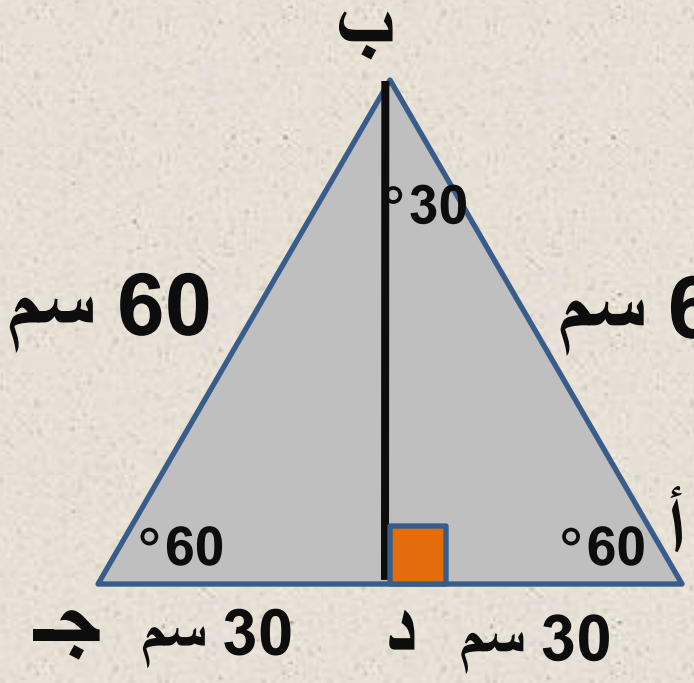
$\frac{1}{3} = \frac{6\sqrt{}}{ب\ جـ}$

ب جـ = $\frac{3 \times 6\sqrt{}}{1}$ = $\sqrt{18}$ = $3\sqrt{2}$ سم

عودة

مثال (٣) تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.



جا أ = ب د / أ ب

جا 60° = ب د / 60

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{أ ب}{60}$

أ ب = $\frac{60 \times \sqrt{3}}{2}$ = $30\sqrt{3}$ سم

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × طول الإرتفاع

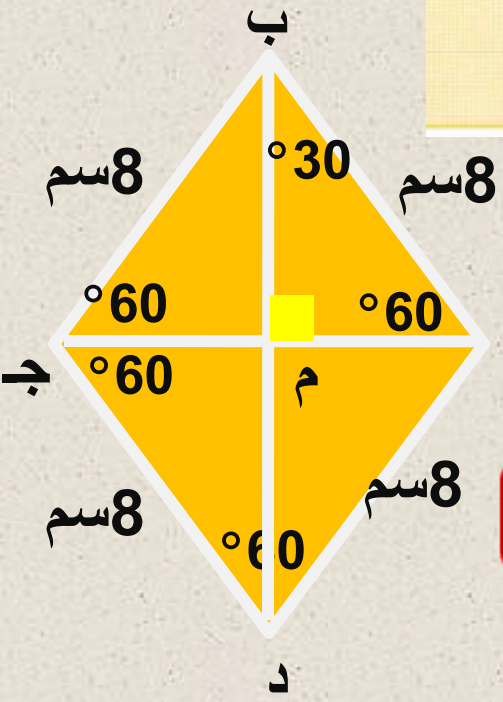
= $\frac{1}{2} \times 60 \times 30\sqrt{3} = 900\sqrt{3}$ سم^2

= 1558,84572 سم^2 = 1559 سم^2 تقريباً

عودة

حاول أن تحل

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.



جا (ب أ م) = $\frac{\text{ب د}}{\text{أ ب}}$

جا 60° = $\frac{\text{ب م}}{8}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\text{ب م}}{8}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب م = $\frac{8 \times \sqrt{3}}{2}$ = 4 $\sqrt{3}$ سم

ب د = 4 $\sqrt{3}$ سم

جتا (ب أ م) = $\frac{\text{أ م}}{\text{أ ب}}$

جتا 60° = $\frac{\text{أ م}}{8}$ = $\frac{1}{2}$

$\frac{\text{أ م}}{8}$ = $\frac{1}{2}$

أ م = $\frac{8 \times 1}{2}$ = 4 سم

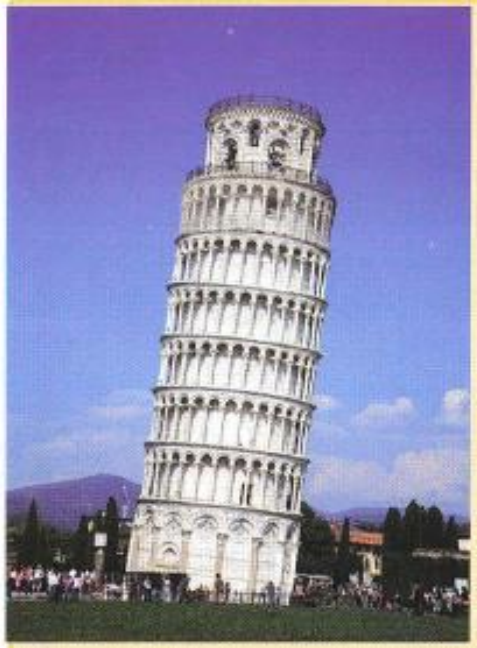
أ جـ = 8 سم

مساحة المعين = نصف حاصل ضرب القطرين

= $\frac{1}{2}$ × 4 × 4 $\sqrt{3}$

= 8 $\sqrt{3}$ سم^2

عودة



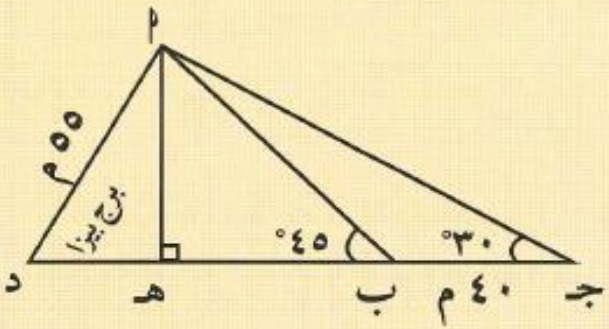
مثال (٤) تطبيقات حياتية

برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. ($\overline{أد}$ في الرسم).
شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، جـ قمة البرج بزاويتين قياساهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب.

أ عبّر عن طول كل من $\overline{هـ ب}$، $\overline{هـ جـ}$ بدلالة طول $\overline{أهـ}$.

ب أوجد $\overline{أهـ}$ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، جـ تساوي ٤٠ مترًا.

جـ نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ - ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٤,٥ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس ($أدهـ$) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



الحل: أ في المثلث أهـ ب: ظا ٤٥° = $\frac{هـأ}{هـب}$ = ١ ومنه هـ ب = هـأ

في المثلث أهـ جـ: ظا ٣٠° = $\frac{هـأ}{هـجـ}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه هـ جـ = $\sqrt{٣}$ هـأ

ب هـ جـ = هـ ب + ب جـ

$\sqrt{٣}$ أهـ = هـأ + ٤٠ أي ($\sqrt{٣}$ - ١) أهـ = ٤٠

أهـ = $\frac{٤٠}{\sqrt{٣}-١}$ ≃ ٥٤,٦٤

جـ قبل الأشغال: جتا($أدهـ$) = $\frac{٤,٥}{٥٥}$ ، ق($أدجـ$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤,٥}{٥٥}\right)$ ≃ ٨٤° ٢١′ ٥٦″

بعد الأشغال: جتا($أدهـ$) = $\frac{٤}{٥٥}$ ، ق($أدجـ$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤}{٥٥}\right)$ ≃ ٨٥° ٤٩′ ٤٦″

عودة

عودة