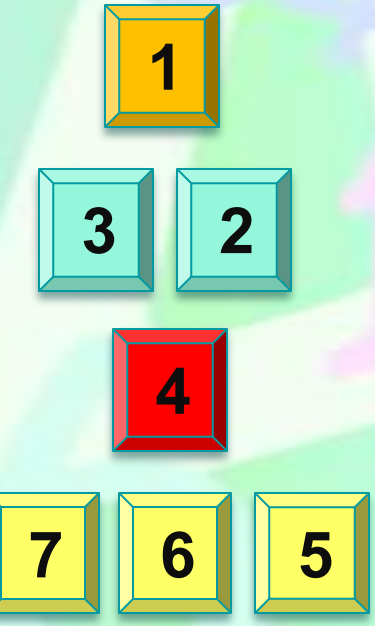
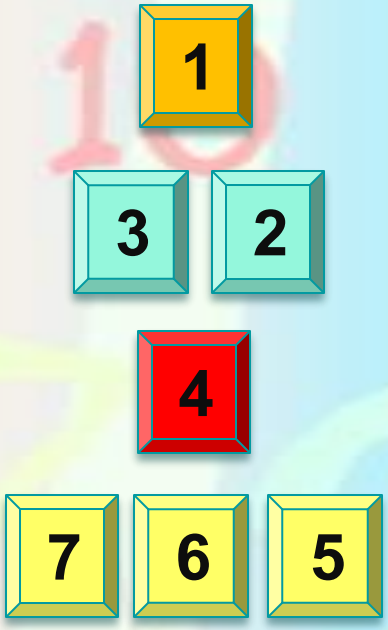
(3 – 1) حل المعادلات

الأمثلة



حاول أن تحل



الفهرس

دعنا نفكر ونتناقش

1 ليكن: $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

a احسب: $(2 + \sqrt{3})^2$

b استنتج قيمة مبسطة لِـ a

c أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

2 مستعينًا بما قمت به في الفقرة 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $y^2 = 7 - 4\sqrt{3}$

3 a احسب $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$.

b حل المعادلة: $x^2 = 12 - 2\sqrt{35}$

أولًا: المعادلات الجذرية Radical Equations

المعادلة الجذرية هي معادلة يكون أس المتغير فيها عددًا نسبيًّا (ليس عددًا صحيحًا) أو يتضمن المجذور متغيرًا.

فمثلًا:

معادلة جذرية $3+\sqrt{x}=10$

معادلة جذرية $(x-2)^{\frac{1}{2}}=1$

ليست معادلة جذرية $\sqrt{3}+x=1$

تعلم

لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: أفصل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.

الخطوة الثانية: حدد شرط الحل

— إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلًّا من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضًا.

— إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًّا فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

الخطوة الثالثة: ارفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.

الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: (a) $2+\sqrt{3x-2}=6$ (b) $6+\sqrt{x-1}=3$

a

$$2+\sqrt{3x-2}=6$$
$$\sqrt{3x-2}=6-2$$
$$\sqrt{3x-2}=4$$

1) أفصل الجذر

2) بما أن دليل الجذر زوجي
لابد ان يكون المجذور غير سالب

$$3x-2\geq 0 \Rightarrow 3x\geq 2 \Rightarrow x\geq \frac{2}{3}$$
$$x\in[\frac{2}{3},\infty)$$

$$(\sqrt{3x-2})^2=4^2$$
$$3x-2=16$$
$$3x=16+2=18$$
$$x=6$$

ارفع طرفي المعادلة
إلى القوة 2

$$6\in[\frac{2}{3},\infty)$$

مجموعة الحل = { 6 }

الفهرس

مثال (1)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: b $6+\sqrt{x-1}=3$ a $2+\sqrt{3x-2}=6$

b

$$6+\sqrt{x-1}=3$$
$$\sqrt{x-1}=3-6$$
$$\sqrt{x-1}=-3$$

1) أفصل الجذر

2) بما أن دليل الجذر زوجي لابد ان يكون المجذور غير سالب والطرف الأيسر غير سالب,,

مجموعة الحل = ϕ

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: a $\sqrt{5x+4}-7=0$ b $\sqrt{x-2}+9=0$

a

$$\sqrt{5x+4}-7=0$$
$$\sqrt{5x+4}=0+7$$
$$\sqrt{5x+4}=7$$

1) أفصل الجذر

2) بما أن دليل الجذر زوجي
لابد ان يكون المجذور غير سالب

$$5x+4\geq 0 \Rightarrow 5x\geq -4 \Rightarrow x\geq \frac{-4}{5}$$
$$x\in[\frac{-4}{5},\infty)$$

$$(\sqrt{5x+4})^2=7^2$$
$$5x+4=49$$
$$5x=49-4=45$$
$$x=9$$

ارفع طرفي المعادلة
إلى القوة 2

$$9\in[\frac{-4}{5},\infty)$$

مجموعة الحل = { 9 }

الفهرس

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: a $\sqrt{5x+4}-7=0$ b $\sqrt{x-2}+9=0$

b

$$\sqrt{x-2}+9=0$$
$$\sqrt{x-2}=0-9$$
$$\sqrt{x-2}=-9$$

1) أفصل الجذر

2) بما أن دليل الجذر زوجي لابد ان يكون المجذور غير سالب والطرف الأيسر غير سالب,,

مجموعة الحل = ϕ

يمكن حل معادلة على صورة $x^{\frac{m}{n}} = b$ برفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$، المعكوس الضربي لِـ $\frac{m}{n}$

إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$

إذا كان m عددًا فرديًّا فإن : $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

مثال (2)

أوجد مجموعة الحل: $2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

بالقسمة على 2

ارفع طرفي المعادلة لأس $\frac{3}{2}$

$$2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$$

$$(x-2)^{\frac{2}{3}} = 25$$

$$\left((x-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = (25)^{\frac{3}{2}}$$

$$|x-2| = \sqrt{25^3}$$

$$|x-2| = \sqrt{(5^2)^3} = \sqrt{5^6}$$

$$|x-2| = 5^3 = 125$$

$\therefore x-2 = 125$ أو $x-2 = -125$

$\therefore x = 127$ $\therefore x = -123$

مجموعة الحل = {127 ,-123}

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة الحل:

a $2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$

b $(1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

a

$$2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$$

بالقسمة على 2

$$(x+3)^{\frac{3}{2}} = 27$$

ارفع طرفي المعادلة لأس $\frac{2}{3}$

$$\left((x+3)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (27)^{\frac{2}{3}}$$

$$x+3 = \sqrt[3]{27^2}$$

$$x+3 = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6}$$

$$x+3 = 3^2 = 9$$

$$\therefore x = 9-3$$

$$\therefore x = 6$$

مجموعة الحل = { 6 }

الفهرس

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة الحل:

b $(1-x)^{\frac{2}{5}}-4=0$

b

$$(1-x)^{\frac{2}{5}}-4=0$$

$$(1-x)^{\frac{2}{5}}=4$$

افصل الجذر

ارفع طرفي المعادلة لأس $\frac{5}{2}$

$$\left((1-x)^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}=(4)^{\frac{5}{2}}$$

$$|1-x|=\sqrt{4^5}$$

$$|1-x|=\sqrt{(2^2)^5}=\sqrt{2^{10}}$$

$$|1-x|=2^5=32$$

$$\therefore 1-x=32 \qquad \text{أو} \qquad 1-x=-32$$

$$\therefore x=-31 \qquad \therefore x=33$$

مجموعة الحل = { 33 ,-31}

مثال (3)

أوجد مجموعة الحل: $5+\sqrt{x-3}=x$

$$5+\sqrt{x-3}=x$$

$$\sqrt{x-3}=x-5$$

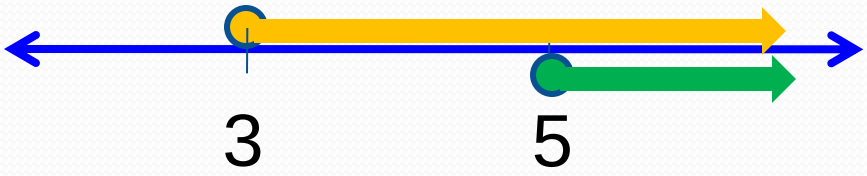
1)افصل الجذر

$x-3\geq 0 \quad , x-5\geq 0$

$x\geq 3 \quad , x\geq 5$

$x\in[5,\infty)$

2) بما أن دليل الجذر زوجي لابد ان يكون المجذور غير سالب والطرف الأيسر غير سالب,,



$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2=(x-5)^2$$

$$x-3=x^2-10x+25$$

ارفع طرفي المعادلة إلى القوة 2

$$x^2-10x+25-x+3=0$$

$$x^2-11x+28=0$$

$$(x-7)(x-4)=0$$

$$x-7=0 \quad \text{أو} \quad x-4=0$$

$x=7\in[5,\infty)$ $\qquad$ $x=4\notin[5,\infty)$

مجموعة الحل = {7}

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة الحل: $\sqrt{5x-1}+3=x$

1)افصل الجذر

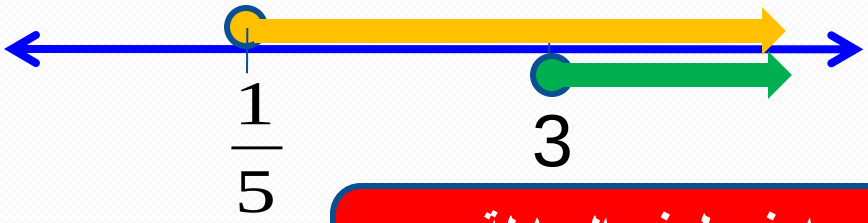
$$\sqrt{5x-1}+3=x$$
$$\sqrt{5x-1}=x-3$$

$5x-1\geq 0$, $x-3\geq 0$

$x\geq \frac{1}{5}$, $x\geq 3$

$x\in[3,\infty)$

2) بما أن دليل الجذر زوجي لابد ان يكون المجذور غير سالب والطرف الأيسر غير سالب,,



ارفع طرفي المعادلة إلى القوة 2

$$\left(\sqrt{5x-1}\right)^2=(x-3)^2$$
$$5x-1=x^2-6x+9$$
$$x^2-6x+9-5x+1=0$$
$$x^2-11x+10=0$$
$$(x-10)(x-1)=0$$
$$x-10=0 \quad \text{أو} \quad x-1=0$$
$$x=10\in[3,\infty) \qquad x=1\notin[3,\infty)$$

مجموعة الحل = {10}

الفهرس

مثال (4)

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة: a $\sqrt{8x}-2\sqrt{4x-16}=0$ b $\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}=0$

1)افصل الجذر

2) بما أن دليل الجذر زوجي
لابد ان يكون المجذور غير سالب

ارفع طرفي المعادلة
إلى القوة 2

a

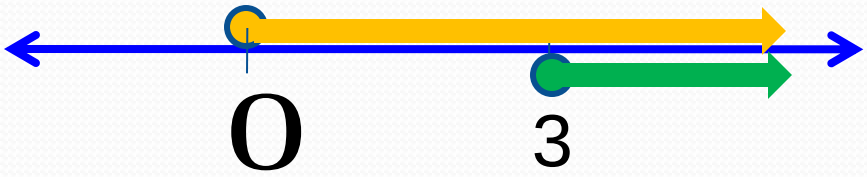
$$\sqrt{8x}-2\sqrt{4x-16}=0$$

$$\sqrt{8x}=2\sqrt{4x-16}$$

$$8x\geq 0 \quad ,4x-16\geq 0$$

$$x\geq 0 \quad , x\geq 4$$

$$x\in[4,\infty)$$



$$\left(\sqrt{8x}\right)^2=\left(2\sqrt{4x-16}\right)^2$$

$$8x=4(4x-16)$$

$$8x-16x=-64$$

$$-8x=-64$$

$$x=\frac{-64}{-8}$$

$$x=8$$

$$x=8\in[4,\infty)$$

مجموعة الحل = {8}

مثال (4)

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة: b $\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}=0$ a $\sqrt{8x}-2\sqrt{4x-16}=0$

b

$$\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}=0$$

$$\sqrt{2x-4}=-\sqrt{x}$$

1)افصل الجذران

2) يجب أن يكون كلا الطرفين = صفر

$$2x-4=0 \quad \text{و} \quad x=0$$

$$2x-4=0$$

$$2x=4$$

$$x=2 \quad \text{و} \quad x=0$$

مجموعة الحل = ϕ

الفهرس

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

a $\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$

b $\sqrt{x-7}+\sqrt{3x-21}=0$

a

$$\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$$

$$\sqrt{5x}=\sqrt{2x+9}$$

1)افصل الجذر

$$5x\geq 0 \quad ,2x+9\geq 0$$

$$x\geq 0 \quad ,x\geq -4.5$$

$$x\in[0,\infty)$$

2) بما أن دليل الجذر زوجي
لابد ان يكون المجذور غير سالب

$$\left(\sqrt{5x}\right)^2=\left(\sqrt{2x+9}\right)^2$$

$$5x=2x+9$$

ارفع طرفي المعادلة
إلى القوة 2

$$5x-2x=9$$

$$3x=9$$

$$x=\frac{9}{3} \qquad x=3$$

$$x=3\in[0,\infty)$$

مجموعة الحل = {3}

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

a $\sqrt{5x}-\sqrt{2x+9}=0$

b $\sqrt{x-7}+\sqrt{3x-21}=0$

b

$$\sqrt{x-7}+\sqrt{3x-21}=0$$

$$\sqrt{x-7}=-\sqrt{3x-21}$$

1)افصل الجذران

2) يجب أن يكون كلا الطرفين = صفر

$x-7=0$ و $3x-21=0$

$x=7$ $3x=21$

و $x=7$

مجموعة الحل = {7}

ثانيًا: المعادلات الأسية Exponential Equations

المعادلات: $\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = 5$, $(-3)^{x} = -243$, $2^{x} = 32$

تسمى معادلات أسية.

لحل معادلة أسية يمكن استخدم الخاصية التالية:

ليكن a عدد حقيقي حيث $a \notin \{-1, 0, 1\}$

m، n عددان صحيحان

إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

تم استثناء الحالات التي يكون فيها a مساويًا لأي من الأعداد -1، 0، 1.

إليك أمثلة توضيحية لهذه الاستثناءات.

$1^{17} = 1^{18}$ ولكن $17 \neq 18$

$(-1)^{13} = (-1)^{3}$ ولكن $13 \neq 3$

$0^{4} = 0^{3}$ ولكن $4 \neq 3$

الفهرس

مثال (6)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $2^x = 64$ b $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$ c $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$

a

$$2^x = 64$$

$$2^x = 2^6$$

$$x = 6$$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

مجموعة الحل = { 6 }

b

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$$

$$(0.5)^x = (0.5)^1$$

$$x = 1$$

مجموعة الحل = { 1 }

c

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4^3}{3^3}\right)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$$

$$x = -3$$

مجموعة الحل = { -3 }

الفهرس

حاول أن تحل

6 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $3^x = 243$ b $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$ c $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

a

$3^x = 243$

$3^x = 3^5$

$x = 5$

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

مجموعة الحل = { 5 }

b

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128} \quad \left(\frac{1}{2^2}\right)^x = \left(\frac{1}{2^7}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad x = 3.5$

مجموعة الحل = { 3.5 }

c

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{81}{16}\right) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3^4}{2^4}\right) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \quad x = -4$

مجموعة الحل = { - 4 }

الفهرس

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $3^{x^2-1} = 27$ b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$ c $6^{2x-8} = 1$

a

$$3^{2x-1} = 27 \qquad 3^{2x-1} = 3^3$$

$$2x-1=3 \qquad 2x=4 \qquad x=2$$

مجموعة الحل = { 2 }

b

$$7^{x^2-3x} = \frac{1}{49} \qquad 7^{x^2-3x} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \qquad 7^{x^2-3x} = 7^{-2}$$

$$x^2-3x=-2 \qquad x^2-3x+2=0$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

$$x-2=0 \quad \text{أو} \quad x-1=0$$

$$x=2 \qquad x=1$$

مجموعة الحل = { 1 , 2 }

الفهرس

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $3^{x^2-1} = 27$

b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$

c $6^{2x-8} = 1$

c

$6^{2x-8} = 1$

$6^{2x-8} = 6^0$

$2x - 8 = 0$

$2x = 8$

$x = 4$

مجموعة الحل = { 4 }

حاول أن تحل

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4}=1$ b $3^{x^2+5x}=\frac{1}{81}$ c $2^{x^2-4}=32$

a

$$5^{x^2-4}=1 \qquad 5^{x^2-4}=5^0$$

$$x^2-4=0 \qquad x^2=4 \qquad x=\pm 2$$

مجموعة الحل = { ±2 }

b

$$3^{x^2-5x}=\frac{1}{81} \qquad 3^{x^2-5x}=\left(\frac{1}{3}\right)^4 \qquad 3^{x^2-5x}=3^{-4}$$

$$x^2-5x=-4 \qquad x^2-5x+4=0$$

$$(x-4)(x-1)=0$$

$$x-4=0 \quad \text{أو} \quad x-1=0$$

$$x=4 \qquad x=1$$

مجموعة الحل = { 1 , 4 }

الفهرس

حاول أن تحل

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4}=1$

b $3^{x^2+5x}=\frac{1}{81}$

c $2^{x^2-4}=32$

c

$$2^{x^2-4}=32 \qquad 2^{x^2-4}=2^5$$

$$x^2-4=5 \qquad x^2=9 \qquad x=\pm 3$$

مجموعة الحل = { ±3 }