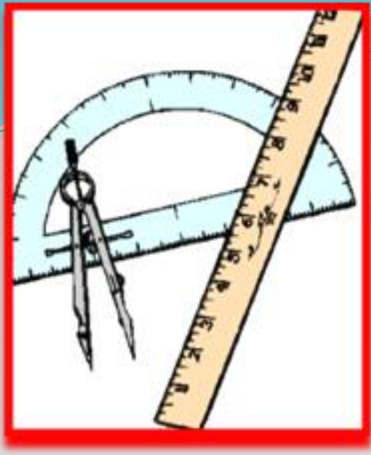
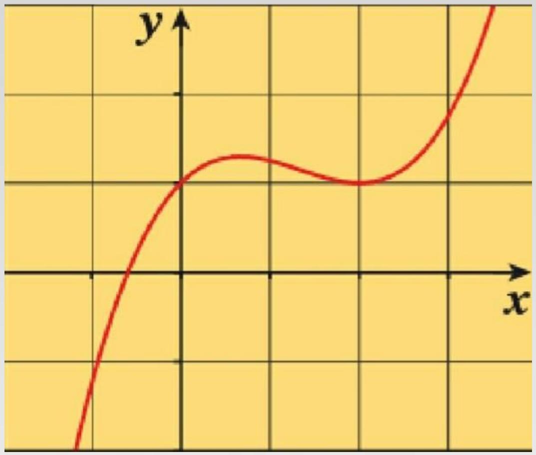


(1-5) الاتصال

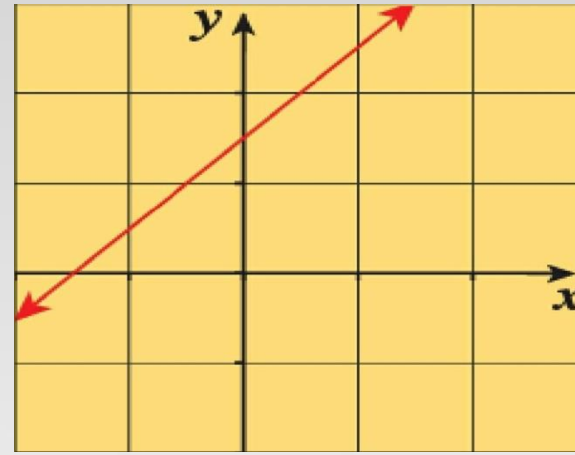
دعنا نفكرونتناقش

البيانات التالية توضح منحنيات دوال مختلفة

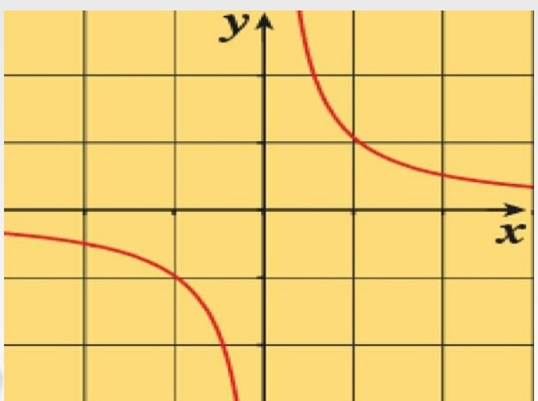
a



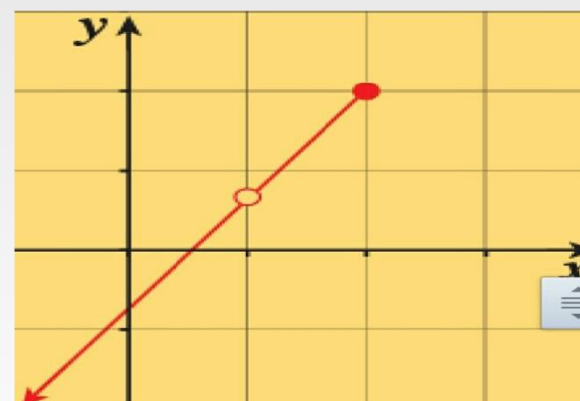
b



c



d

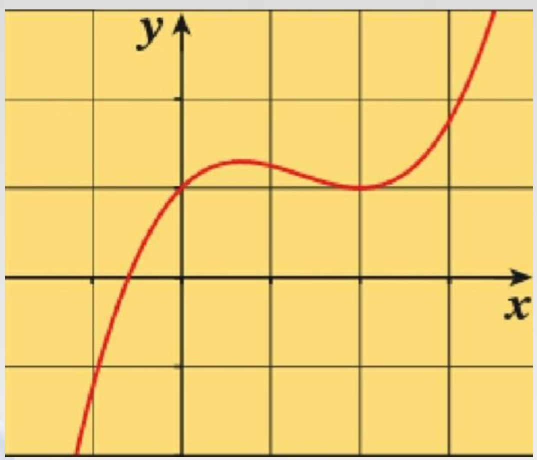


أي من المنحنيات أمكن رسمه دون رفع سن القلم؟ وأيها لزم رفع سن القلم؟

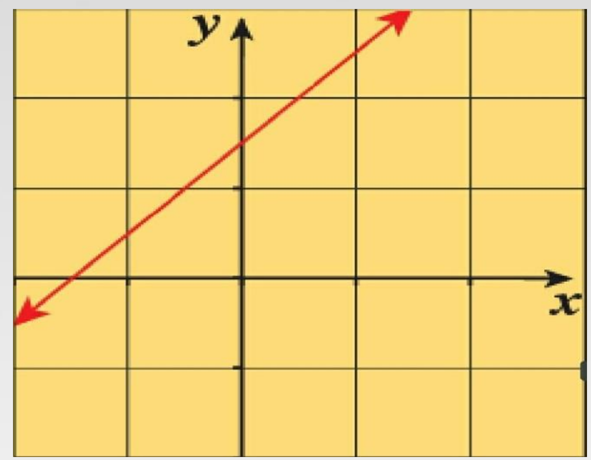
الاتصال عند نقطة

1- المنحنيات في البيانات

a



b

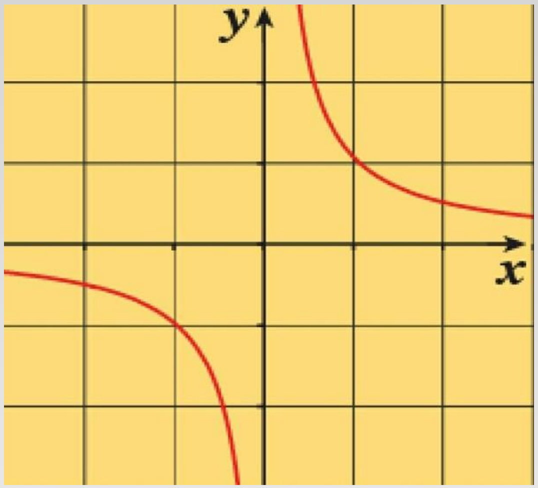


نقول عنها أن ليس بها نقاط انفصال

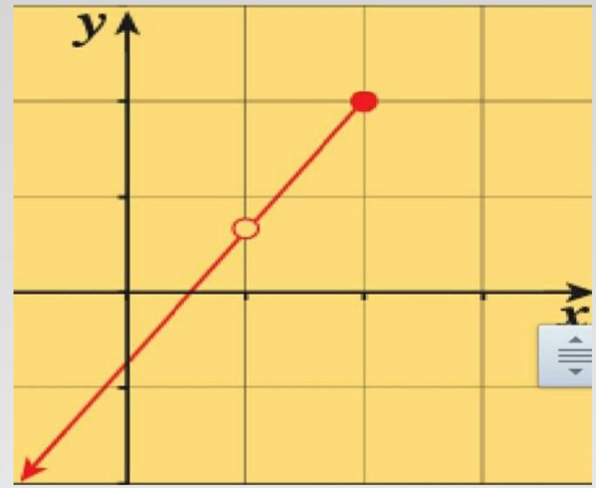
(متصلة عند كل نقطة من نقاطها)

2- المنحنيات في البيانات

c

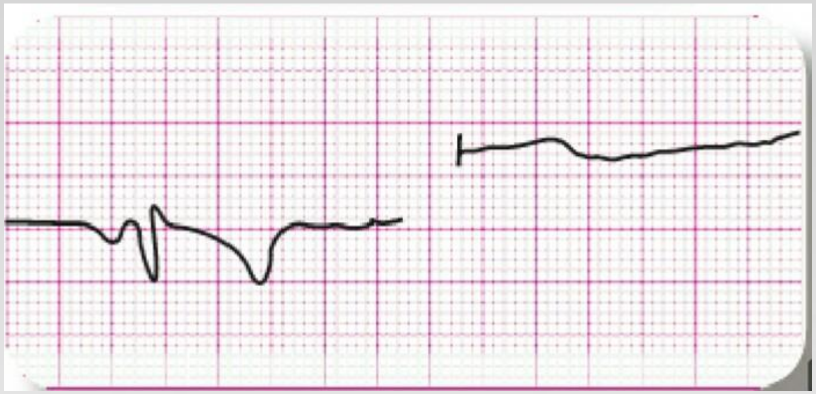


d



نقول إن هذه المنحنيات لها نقاط انفصال

شكل (1)



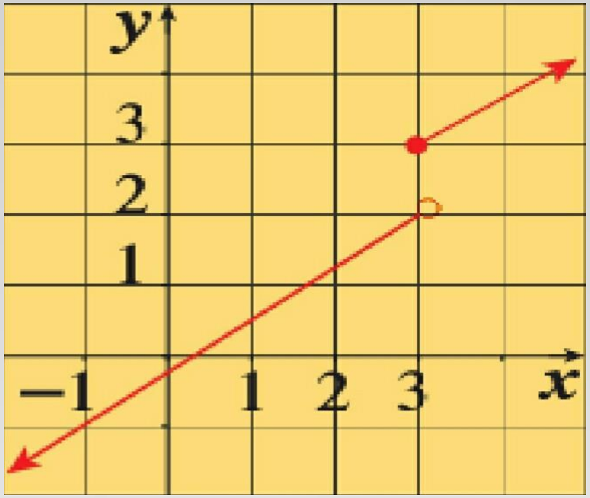
شكل (2)

يستخدم الأطباء مبدأ الاتصال لدراسة منحنى تخطيط القلب

يبين الشكل (1) تخطيطا متصلا بينما يبين الشكل (2) تخطيطاً به نقاط انفصال

تدريب

1



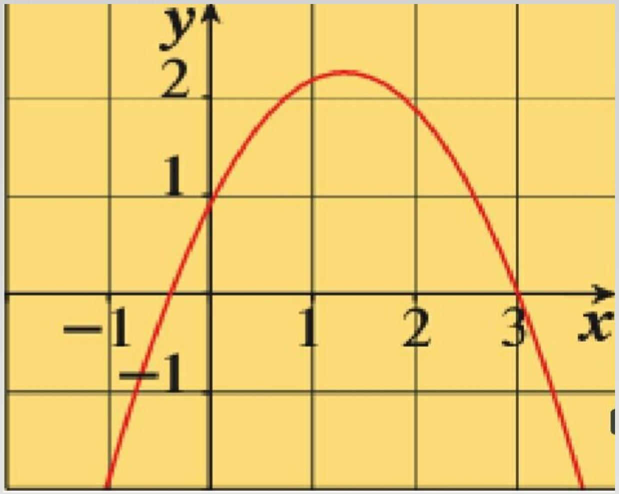
$$\lim_{x\to 3} f(x) =$$ غير موجودة

$$f(3) = 3$$

ماذا تلاحظ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

2



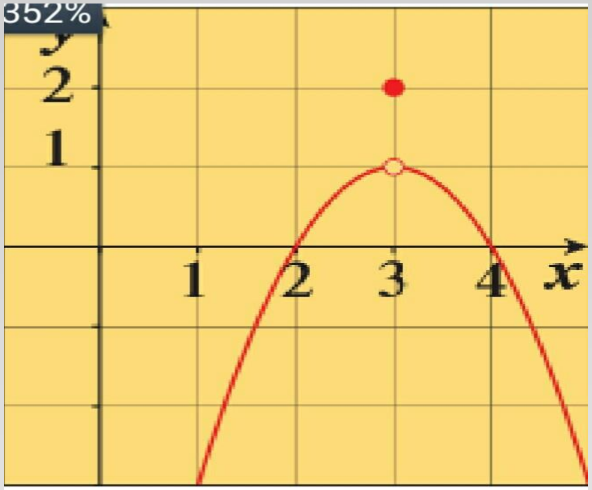
$$\lim_{x\to 3} f(x) = 0$$

$$f(3) = 0$$

ماذا تلاحظ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

3



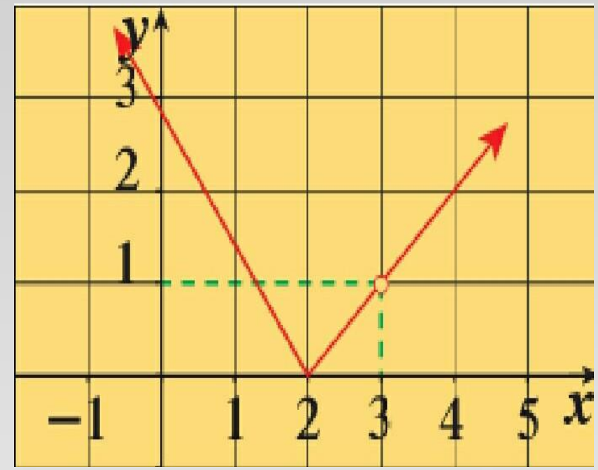
$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

$$f(3) = 2$$

ماذا تلاحظ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

4



$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

$f(3) =$ غير موجودة

ماذا تلاحظ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

تعريف (8) : الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت :

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c

يجب أن تتحقق الشروط الثلاثة التالية :

1. الدالة f معرفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة $\lim_{x \to c^{+}} f(x) = \lim_{x \to c^{-}} f(x)$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

و إذا لم يتحقق أي شرط من الشروط السابقة فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$

مثال 1

لتكن الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : x \ge 1 \\ 5x-1 & : x < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

الحل:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : x \geq 1 \\ 5x-1 & : x < 1 \end{cases}$$

$$f(1)=(1)^2+3(1)=1+3=4 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(5x-1)=5(1)-1=4$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+3x)=(1)^2+3(1)=4$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=4$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=4 \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

E f متصلة عند $x=1$

حاول أن تحل 1

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

الحل:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x \le 0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

$$f(0)= (0)^3 + (0)=0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)= \lim_{x\to 0^-} (x^3+x)= 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{x+1}$$

$$\mathbf{e}\lim_{x\to 0^+}(x+1) = 0+1 = 1, \quad 1 \neq 0$$

$$\text{E}\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 0+} x^2}{\lim\limits_{x\to 0+} (x+1)} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad (2)$$

من (1)و (2) نجد

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(1)$$

E f متصلة عند $x = 0$

مثال 2

لتكن الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3\\ 7 & : x\le 3\end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$

الحل:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3 \\ 7 & : x\le 3 \end{cases}$$

$$f(3)=7$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3-} 7 = 7$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3+}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(x+3)= 6$$

e $\lim_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim_{x\to 3+} f(x)$

$\lim_{x\to 3} f(x)$ ليست موجودة

E f ليست متصلة عند $x=3$

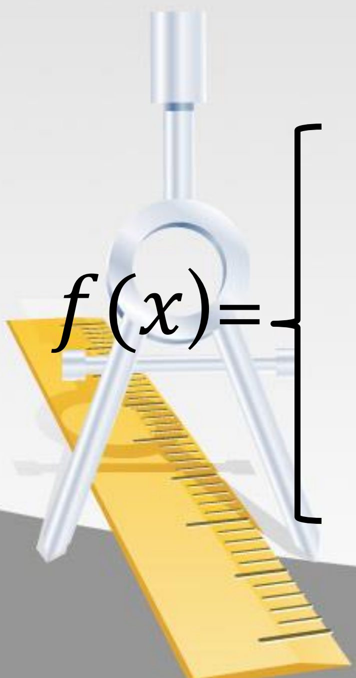
ملاحظة

في المثال 2 نجد أن $\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=7$

في هذه الحالة تكون الدالة f متصلة عند $x=3$ من جهة اليسار

حاول أن تحل 2

ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$



$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & : x<2 \\ 1 & : x=2 \\ x^2+1 & : x>2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & : x<2 \\ 1 & : x=2 \\ x^2+1 & : x>2 \end{cases}$$

$$f(2)=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(2x+1)=2(2)+1=5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+1)=\lim_{x\to 2^+}(2^2+1)=5$$

$$\text{e}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)$$

$$\text{E}\lim_{x\to 2} f(x)=5$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$$

E f ليست متصلة عند $x=2$

مثال 3

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{|x - 2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

الحل:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & : x > 2 \\ -(x - 2) & : x < 2 \end{cases}$$

تابع للحل

$$\frac{x-2}{|x-2|}=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-2} & : x>2\\[2ex] \dfrac{x-2}{-(x-2)} & : x<2\end{cases}$$

$$\text{E}f(x)=\begin{cases}1 & : x>2\\ -1 & : x<2\\ 1 & : x=2\end{cases}$$

$$f(2)=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-1 \quad ، \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2+} f(x)$$

$\text{E}\lim_{x\to 2} f(x)$ ليست موجودة

E f ليست متصلة عند $x=2$

ملاحظة:

الدالة f متصلة عند $x=2$

من جهة اليمين . لماذا ؟

حاول أن تحل 3

ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

الحل:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & : x > -1 \\ -(x+1) & : x < -1 \end{cases}$$

$$\frac{|x+1|}{x+1}-2x=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x+1}-2x & : x>-1\\[2ex] \dfrac{-(x+1)}{x+1}-2x & : x<-1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & : x>-1\\ -1-2x & : x<-1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1-2x & : x > -1 \\ -1-2x & : x < -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

$$f(-1)=2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1-}(-1-2x) = -1-2(-1) = 1$$

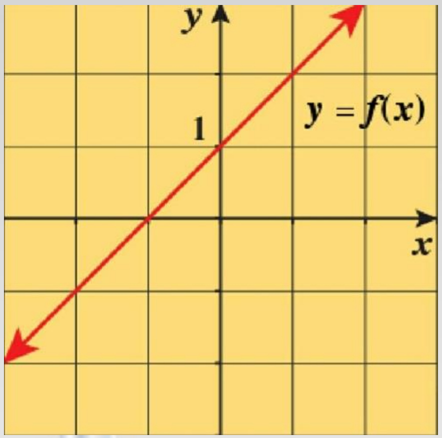
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1+}(1-2x) = 1-2(-1) = 3$$

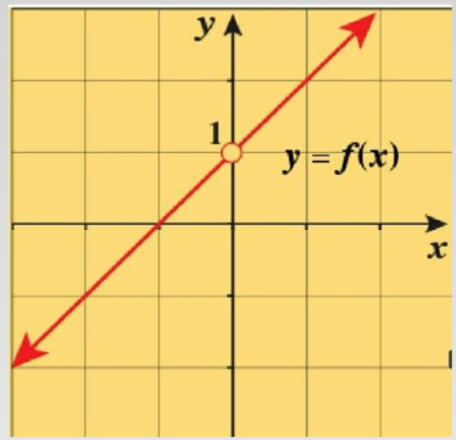
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1+} f(x)$$

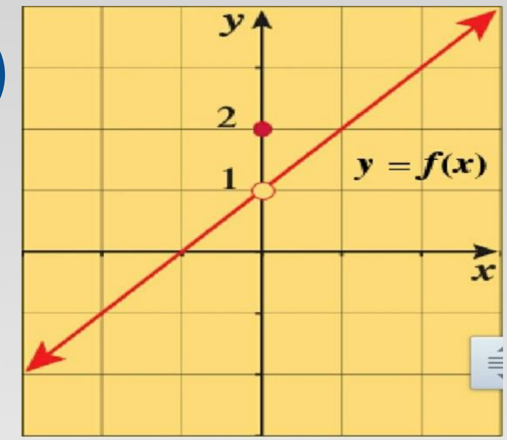
E $\lim_{x\to -1} f(x)$ ليست موجودة

E f ليست متصلة عند $x=-1$

يبين الشكلان b , c أدناه أمثلة توضيحية لبعض الأنواع المختلفة للانفصال :

a


b


c


الدالة الموضحة في الشكل a متصلة عند $x = 0$

و الدالة الموضحة في الشكل b ليست متصلة عند $x = 0$

و لكي تكون متصلة يقتضي أن تكون $f(0) = 1$

الدالة الموضحة في الشكل c ليست متصلة عند $x = 0$

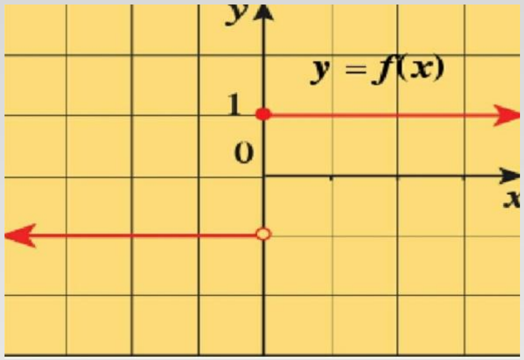
و لكي تكون متصلة يقتضي أن تكون $f(0)$ مساوية لـ 1 بدلاً من 2 .

الانفصال في c b هو انفصال يمكن التخلص منه من خلال إعادة تعريف الدالة عند

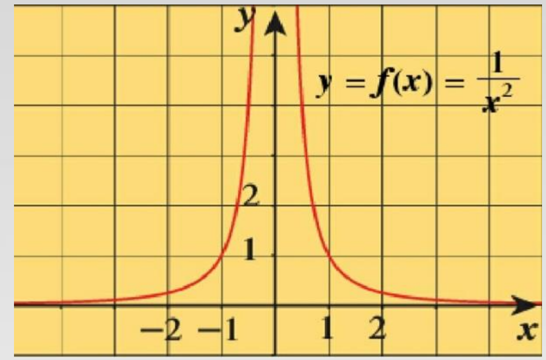
$x = 0$ و ذلك بوضع $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

والأشكال التالية أمثلة أخرى لدوال منفصلة

d



e



إذا نظرنا إلى الانفصال في ، e d حيث $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

ولا توجد طريقة لإصلاح ذلك الوضع بتغير f عند الصفر. للدالة في d لها

انفصال نتيجة قفزة والنهايات ذات الجانب الواحد موجودة لكن لها قيم مختلفة.

(نهاية الدالة من جهة اليمين ≠ نهاية الدالة من جهة اليسار)

والدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في e لها انفصال لا نهائي (النهاية غير موجودة)

The Removal of Discontinuity التخلص من الانفصال

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

لاحظ أن مجال f هو $D = R - \{-3, 3\}$

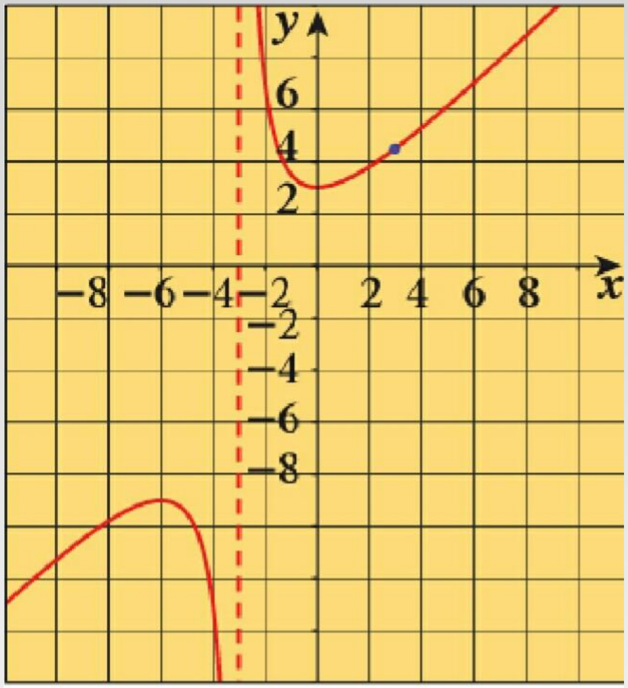
$$f(x) = \frac{\cancel{(x-3)}(x^2 + 3x + 9)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 3x + 9)}{(x+3)} \quad : x \neq 3$$

ومن الرسم البياني للدالة f نلاحظ أن لبيان انفصال f عند $x = 3$

يمكن التخلص منه لأن النهاية موجودة بينما الانفصال عند $x = -3$ لا يمكن التخلص منه

وللتخلص من الانفصال نعرّف f عند $x = 3$



بحيث نجعل $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 + 3x + 9)}{(x + 3)}$$

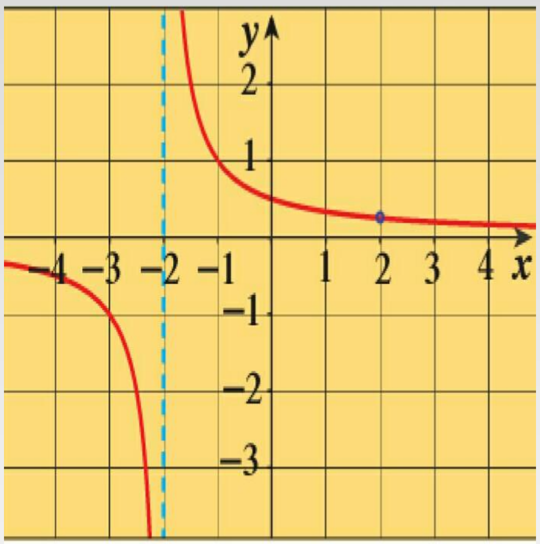
$$= \frac{9 + 9 + 9}{3 + 3} = \frac{9}{2}$$

نسمي الدالة بـ g بعد إعادة تعريفها:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} & : x \neq 3 \quad , x \neq -3 \\[2ex] \dfrac{9}{2} & : x \neq 3 \end{cases}$$

مثال 4

لتكن الدالة $f:$ $\quad f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ الموضح بيانها بالشكل :



a) بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x=-2$ ، $x=2$

b) أعد تعريف الدالة f بحيث تصبح متصلة عند $x=2$

الحل:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

مجال f هو $D = R - \{-2 , 2\}$

f غير متصلة عند $x = -2$ ، $x = 2$ لأنها غير معرفة عندهما

يمكن إعادة تعريف f عند $x = 2$ لأن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4}$

نسمي الدالة بـ g بعد إعادة تعريفها:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & : x \neq 2 \ , \ x \neq -2 \\ \dfrac{1}{4} & : x \neq 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل 4

أعد تعريف الدالة f : $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ لتصبح دالة متصلة عند $x=1$

الحل:

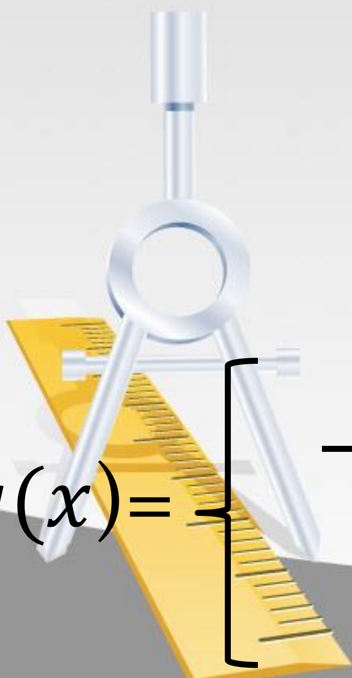
$$f(x)=\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{x-1}}=x+4$$

مجال f هو $D=R-\{1\}$

f غير متصلة عند $x=1$ لأنها غير معرفة عندها

يمكن إعادة تعريف f عند $x=1$ لأن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$

نسمي الدالة بـ g بعد إعادة تعريفها:



$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} & : \quad x\neq 1\\ 5 & : \quad x=1\end{cases}$$