مشتقات الدوال المثلثية

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x.\tan x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x.\cot x$$

$$\sec^2 = 1+\tan^2 x \qquad \csc^2 x = 1+\cot^2 x$$

① أوجد المشتقات للدوال المثلثية : P. 101

ⓐ $h(x) = \cos^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\cos x.\cos x) = \cos x.\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x.\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos x(-\sin x) + \cos x(-\sin x)$$

$$= -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$

ⓑ $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{1.\cos x - x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$

ⓒ $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\sin x\cos x} + \cos^2 x - \cancel{\sin x\cos x} + \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 + 2\sin x.\cos x} = \frac{1}{1+\sin 2x}$$

② P. 102 اوجد مشتقات الدوال التاليه

ⓐ $f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan x} = \cot x + 1$

$f'(x) = -\csc^2 x$

ⓑ $g(x) = \sec x + \csc x$

$g'(x) = \sec x \cdot \tan x - \csc x \cot x$

ⓒ $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \Rightarrow h'(x) = \sec^2 x$

طريقة ثانية

$h'(x) = \frac{\sec x \cdot \tan x \csc x - \sec x(-\csc x \cdot \cot x)}{\csc^2 x}$

$= \frac{\sec x \cdot \csc x(\tan x + \cot x)}{\csc^2 x}$

$= \frac{\sec x(\tan x + \cot x)}{\csc x}$

③ P. 102 اوجد معادلة المستقيم العمودي عند النقطة $(\frac{\pi}{3}, 2)$

$y = \sec x$

$y' = \sec x \tan x$

$y'(\frac{\pi}{3}) = \sec\frac{\pi}{3} \cdot \tan\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$

∴ ميل المماس $m = 2\sqrt{3}$ وعليه ميل العمودي $m_1 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$

وتكون معادلة العمودي

$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})$

$y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 1.7$

قاعدة السلسلة

① P. 104

مثال (1):

ⓐ $f(x) = 3x^2+1$ ، $g(x) = x^{10}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{10})$$

$$= 3(x^{10})^2+1 = 3x^{20}+1$$

$$(f\circ g)'(x) = 3(20)x^{19} = 60x^{19}$$

ⓑ $f(x) = -2x^3+4$ ، $g(x) = x^{13}$

اوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(x)$

$$f'(x) = -6x^2 \quad ، \quad f'(g(x)) = -6(x^{13})^2$$

$$= -6x^{26}$$

$$g'(x) = 13x^{12}$$

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$= -6x^{26}\cdot 13x^{12}$$

$$= -78x^{38}$$

---

② P. 105 اوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4} \quad ، \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4)-2x(x^2-4)}{(x^2+4)^2} \quad ، \quad g(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(g(1)) = f'(1) = \frac{2(1)(1^2+4)-2(1)(1^2-4)}{(1^2+4)^2} = \frac{16}{25}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(f\circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1)$$

$$= \frac{16}{25}\times\frac{1}{2} = \frac{8}{25}$$

③ P.105 اوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

$y = u^2 + 4u - 3$ ، $u = 2x^3 + x$

$\frac{dy}{du} = 2u + 4$ ، $\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u+4)(6x^2+1)$

$= (2(2x^3+x)+4)(6x^2+1)$

$= (4x^3+2x+4)(6x^2+1)$

$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$

---

④ P.106 اوجد مشتقة y بالنسبة الى المتغير x

$y = \sin(x^2 + x)$

$y = \sin u$ ، $u = x^2 + x$

$\frac{dy}{du} = \cos u$ $\quad \frac{du}{dx} = 2x + 1$

$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2+x) \cdot (2x+1)$

---

⑤ P.106 باستخدام قاعدة السلسلة اوجد مشتقة الدالة:

$f(x) = \cos^5 x$

بفرض $g(x) = \cos x$ ، $h(x) = x^5$

$\therefore f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = (\cos x)^5 = \cos^5 x$

$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$h'(x) = 5x^4$ ، $h'(g(x)) = 5(\cos x)^4$

$g'(x) = -\sin x$

$f'(x) = (h \circ g)'(x) = 5(\cos x)^4(-\sin x)$

$= -5\cos^4 x \cdot \sin x$

P.107 ⑥ اوجد y' :

$$y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$$

$$y = (2x^4 - 3x^2 + 4)^{\frac{3}{4}}$$

$$y' = \frac{3}{4}(2x^4 - 3x^2 + 4)^{-\frac{1}{4}} \cdot (8x^3 - 6x)$$

$$= \frac{3(8x^3 - 6x)}{4\sqrt[4]{2x^4 - 3x^2 + 4}}$$

P.107 ⑦ بين ان ميل المماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائماً

يكون موجباً عندما $x \neq -\frac{1}{2}$

$$y = (-2x-1)^{-3}$$

ميل المماس $= y' = -3(-2x-1)^{-4}(-2)$: $x \neq -\frac{1}{2}$

$$= \frac{6}{(-2x-1)^4}$$ «مقدار موجب دوماً»

المشتقات ذات الرتب العليا

P.109 ① اوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة

$$y = 4x^5 - 5x^3 + 7$$

$$y' = 20x^4 - 15x^2$$

$$y'' = 80x^3 - 30x$$

$$y''' = 240x^2 - 30$$

P.109 ② بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$ حيث

$y = \cos x$

$y' = -\sin x \;,\; y'' = -\cos x \;,\; y''' = \sin x \;,\; y^{(4)} = \cos x$

$\therefore\; y^{(4)} + y'' = \cos x + (-\cos x) = 0$

P.110 ③ اوجد y''

$y = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x$

$y' = -\csc x \cdot \cot x$

$y'' = (-\csc x)'(\cot x) + (-\csc x)(\cot x)'$

$= (\csc x \cot x)(\cot x) + (-\csc x)(-\csc^2 x)$

$= \csc x \cot^2 x + \csc^3 x$

$= \dfrac{1}{\sin x}\,\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\sin^3 x} = \dfrac{\cos^2 x + 1}{\sin^3 x}$

P.112 ④ لتكن $y^2 = x^2 - 2x$ أوجد $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$2yy' = 2x - 2$

$y' = \dfrac{2x-2}{2y}$

$y' = \dfrac{x-1}{y}$

الإشتقاق الضمني

⑤ P. 112 اوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته عند النقطة (1،1)

$$x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$$

بالإشتقاق الضمني

$$2x - 2yy' + y'x + y = 0$$

$$-2yy' + y'x = -y - 2x$$

$$y'(-2y + x) = -y - 2x$$

$$y' = \frac{-y - 2x}{-2y + x}$$

$$\text{ميل المماس} = y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-1 - 2(1)}{-2(1) + 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

⑥ P. 113 اوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته عند النقطة (2،1)

$$x^2 + y^2 - 2xy = 1$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2y - 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y - 2x) = 2y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$$

∴ ميل المماس عند النقطة (2 ، 1) = 1

⑦ P. 114 اوجد y' ثم اوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند (1،1)

$$y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$$

$$2yy' + \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}y' + 2x = 0$$

$$y'\left(2y + \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

$$\text{ميل المماس} = y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-2(1)}{2(1) + \frac{1}{2(1)}} = \frac{-4}{5}$$

⑧ P. 114 إذا كانت $y = x\sin x$ فأثبت أن

$$y''' + y' + 2\sin x = 0$$

$$y' = \sin x + x\cos x$$

$$y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$$

$$y''' = -2\sin x - \sin x - x\cos x$$

$$= -3\sin x - x\cos x$$

$$LHS = -3\sin x - x\cos x + \sin x + x\cos x + 2\sin x$$

$$= -3\sin x - x\cos x + 3\sin x + x\cos x$$

$$= 0$$

P. 115 ⑨ لتكن $f(x) = \frac{1}{1-x}$ أثبت أن

$$f'''(x) = \frac{3!}{(1+x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-(-2)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-(2)(-3)(1-x)^2}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{3!}{(1-x)^4}$$

P.116 مسأله إضافيه

$$S(t) = 9t^3 - 7t + 3$$

ⓐ المسافه المطلوبه $= S(3) = 9(3)^3 - 7(3) + 3 = 225$ m

ⓑ دالة السرعه $= S'(t) = 27t^2 - 7$

ⓒ متوسط السرعه $= \frac{S(3) - S(0)}{3-0} = \frac{225 - 3}{3-0} = 74$ m/s

السرعه اللحظيه $= S'(3) = 27(3)^2 - 7 = 236$ m/s