(2 – 1) الأسس النسبية

الأمثلة

حاول أن تحل

الفهرس

دعنا نفكر ونتناقش

يقدّر علماء الآثار عمر المحفورات باستخدام الأسس النسبية

عرفت سابقًا أن: $x^3 \cdot x^3 = x^6$

ومنه استنتجنا أن x^3 هو جذر تربيعي لِـ x^6

كذلك $x^2 \cdot x^2 = x^4$ ∴ x^2 جذر تربيعي لِـ x^4

$x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-2}$, $x \neq 0$

∴ x^{-1} جذر تربيعي لِـ x^{-2}

الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب x هو $\sqrt{x}$

ونكتب: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

إذا حاولنا كتابة هذه المعادلة بالصيغة الأسية،

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

$x^{\square} \cdot x^{\square} = x^1 = x$

بالمقارنة مع ما ورد أعلاه نستطيع أن نكتب: $\square + \square = 1$

∴ $\square = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ تكتب $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

وقد اعتمدت الصيغة الأسية وعممت لكتابة أي تعبير جذري.

الصورة الآسية	الصورة الجذرية
$25^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{27}$
$64^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$

الفهرس

مثال (1)

بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a $125^{\frac{1}{3}}$ b $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ c $10^{\frac{1}{3}} \times 100^{\frac{1}{3}}$

a $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

b $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

c $10^{\frac{1}{3}} \times 100^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{1000} = 10$

الفهرس

حاول أن تحل

1 بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a $64^{\frac{1}{3}}$ b $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$ c $(8^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

a $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

b $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

c $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$

مثال (2)

اكتب العدد $25^{\frac{3}{2}}$ بالصورة الجذرية.

$$25^{\frac{3}{2}} = 25^{3\times\frac{1}{2}} = (25^{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25^{3}}$$

الفهرس

حاول أن تحل

2 اكتب العدد $64^{\frac{4}{3}}$ بالصورة الجذرية.

$$64^{\frac{4}{3}} = 64^{4\times\frac{1}{3}} = (64^{4})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^{4}}$$

إذا كان a عددًا حقيقيًّا، $n \geq 2 , n \in \mathbb{Z}^+$:

فإن الجذر النوني للعدد a يرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ ويساوي عددًا حقيقيًّا b حيث $a = b^n$

$\sqrt[n]{x}$ ← المجذور

$\sqrt[n]{x}$ → دليل الجذر

إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًّا، m عددًا صحيحًا، n عددًا طبيعيًّا $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

1. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
2. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$
3. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًّا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًّا} \end{cases}$

مثال (3)

a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من:

1 $x^{\frac{2}{5}}$

2 $y^{-2.5}, \forall y > 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من:

1 $(\sqrt[5]{y})^2$

2 $\sqrt{b^3}, \quad \forall b \geq 0$

a 1 $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$

2 $y^{-2.5} = y^{-\frac{5}{2}} = (\frac{1}{y})^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^5}}$

b 1 $(\sqrt[5]{y})^2 = \sqrt[5]{y^2} = y^{\frac{2}{5}}$

2 $\sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$

حاول أن تحل

3 a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من:

1 $x^{0.4}$

2 $y^{\frac{3}{8}}$, $\forall\, y \geq 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من:

1 $\sqrt[3]{x^2}$

2 $(\sqrt{y})^3$, $\forall\, y \geq 0$

a 1 $x^{0.4} = x^{\frac{4}{10}} = x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} = (\sqrt[5]{x})^2$

2 $y^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{y^3} = (\sqrt[8]{y})^3$

b 1 $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

2 $(\sqrt{y})^3 = \sqrt{y^3} = y^{\frac{3}{2}}$

الفهرس

مثال (4)

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام التوازن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس فيه ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبية الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية: $n = \frac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$

حيث n هي السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية(s).

r هو طول نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر (m).

g هي الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز، طول نصف قطره 1.7 m يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي $9.8\ m/s^2$

$$n = \frac{g^{0.5}}{2 \times \pi \times r^{0.5}}$$

$$n = \frac{9.8^{0.5}}{2 \times 3.14 \times 1.7^{0.5}} \approx 0.382$$

مثال (4)

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام التوازن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس فيه ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبية الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية: $n = \frac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$

حيث n هي السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية(s).

r هو طول نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر (m).

g هي الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز، طول نصف قطره 1.7 m يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي $9.8\ m/s^2$

حاول أن تحل

4 احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (4) ليحاكي جاذبية تحاكي نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

$$n = \frac{g^{0.5}}{2 \times \pi \times r^{0.5}}$$

$$n = \frac{4.9^{0.5}}{2 \times 3.14 \times 1.7^{0.5}} \approx 0.270$$

Laws of Rational Exponents
قوانين الأسس النسبية

ليكن m , n عددين نسبيين، a , b عددين حقيقيين حيث b^m , b^n , a^m , a^n أعدادًا حقيقية.

القانون	المثال
$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$	$8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$
$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$	$(5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{1}{2} \times 4} = 5^2 = 25$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}, b \neq 0$	$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$
$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}, b \neq 0$	$\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$\left(\frac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{-5}{3}$

مثال (5)

بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا قوانين الأسس:

a $(-32)^{\frac{3}{5}}$

b $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}, \quad x > 0$

a

$$(-32)^{\frac{3}{5}} = (-2^5)^{\frac{3}{5}} = (-2)^3 = -8$$

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
	1

b

$$(x^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{4}{3}}) \div x^{\frac{2}{3}} =$$

$$x^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

الفهرس

حاول أن تحل

5 بسِّط كلًّا من الأعداد التالية مستخدمًا قوانين الأسس:

a $25^{-\frac{3}{2}}$ b $(-32)^{\frac{4}{5}}$ c $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, $y > 0$

a $$25^{-\frac{3}{2}} = (5^2)^{-\frac{3}{2}} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

b $$(-32)^{\frac{4}{5}} = (-2^5)^{\frac{4}{5}} = (-2)^4 = 16$$

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
	1

c $$\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2^4 x^{14}}{3^4 y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^2 x^7}{3^2 y^9} = \frac{4x^7}{9y^9}$$

الفهرس

لضرب أو لقسمة $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ يمكن استخدام الصورة الأسية لكل منهما وتطبيق قوانين الأسس أو تطبيق قوانين الجذور النونية.

قوانين الجذور النونية

إذا كان: $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:

1. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
2. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad , \quad y \neq 0$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

مثال (6)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$

b $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

d $\left[\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1} \quad x, y \in \mathbb{Q}^+$

a

$$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{5 \times 7} = \sqrt[4]{35}$$

b

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

c

$$\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$$

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

مثال (6)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$

b $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

d $\left[\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1} \quad x, y \in \mathbb{Q}^+$

d $\left[\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1} = \left[\left(\sqrt{(xy)^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1} = \left[\left(\left((xy)^3\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1} =$

$$\left[(xy)^{3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\right]^{-1} = \left[(xy)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} = [(xy)]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{xy}$$

الفهرس