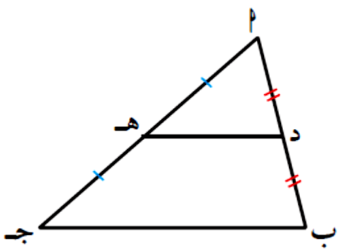
المنهج التكميلى للصف العاشر

نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

في المثلّث أ ب جـ :



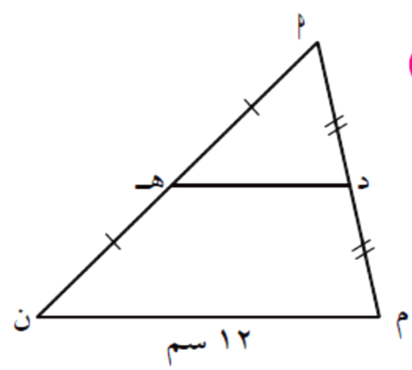
∵ د منتصف أب ، هـ منتصف أجـ

∴ دهـ // ب جـ ، د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

تدرّب (١) :

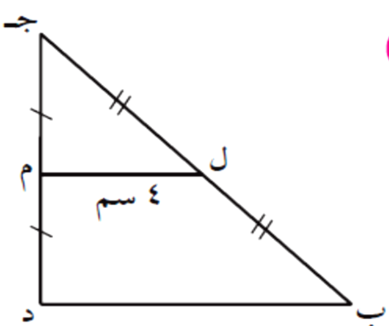
في كلّ من المثلّثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ



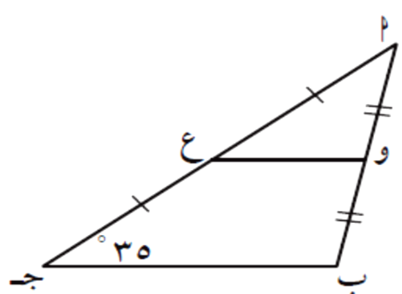
د هـ = ...

ب



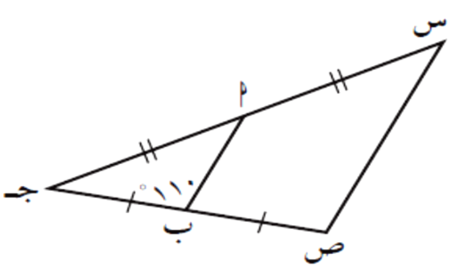
ب د = ...

جـ



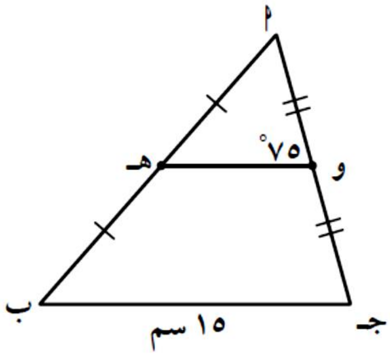
ق (أ$\hat{ع}$ و) = ...

د



ق ($\hat{ص}$) = ...

مثال (١) :



في الشكل المقابل أ ب جـ مثلّث فيه :

أو = و جـ ، أهـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق (أ$\hat{\text{و}}$ هـ) = ٧٥° .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{و هـ}}$ (٢) ق ($\hat{\text{جـ}}$) .

الحلّ :

المعطيات : أو = و جـ ، أهـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق (أ$\hat{\text{و}}$ هـ) = ٧٥°

المطلوب : إيجاد (١) طول $\overline{\text{و هـ}}$ (٢) ق ($\hat{\text{جـ}}$)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ و منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ و هـ = $\frac{1}{2}$ جـ ب ، $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$

و هـ = $\frac{1}{2}$ × ١٥ = ٧ $\frac{1}{2}$ سم

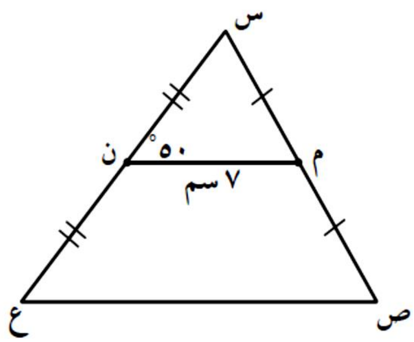
∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ق (أ$\hat{\text{و}}$ هـ) = ٧٥° (بالتناظر والتوازي)

تدرّب (٢) :

س ص ع مثلّث فيه :

م منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،

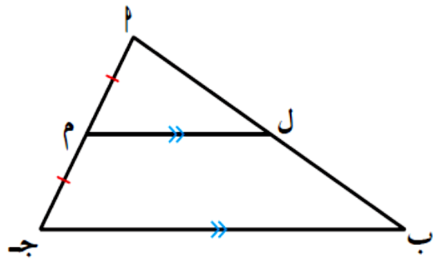
ق (س $\hat{\text{ن}}$ م) = ٥٠° ، م ن = ٧ سم .



أوجِد بالبرهان : (١) ص ع (٢) ق ($\hat{\text{ع}}$) .

نظرية :

إذا رُسِم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلّث موازِيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنّه ينصّف الضلع الثالث .

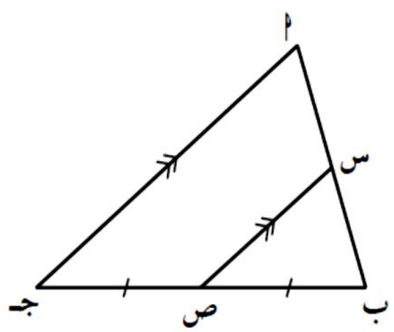


في المثلّث ا ب جـ :

∵ م منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ل منتصف $\overline{\text{ا ب}}$

تدرّب (٥) :



ا ب جـ مثلّث فيه : ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ ا}}$ ، ا س = ٦ سم .

أوجِد بالبرهان ب س .

المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : في المثلّث ا ب جـ :

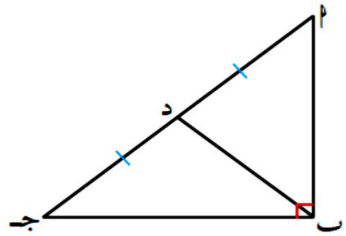
∵ ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ص س}}$ // ....

∴ س منتصف ....

∴ ب س = ا س = ... سم

نظرية :

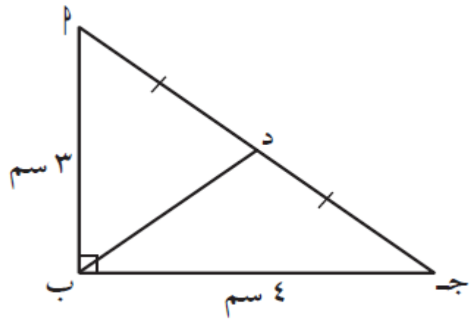
طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلّث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .



في المثلّث ﺃ ب جـ :

∵ ق ($\hat{ب}$) = ٩٠°، د منتصف $\overline{ﺃ جـ}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ﺃ جـ



مثال (١) :

ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ﺃ ب = ٣ سم ،
ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{ﺃ جـ}$.
أوجِد بالبرهان طول $\overline{ب د}$.

الحلّ :

المعطَيات : ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ﺃ ب = ٣ سم ،
ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{ﺃ جـ}$.

المطلوب : إيجاد طول $\overline{ب د}$.

البرهان : ∵ ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

∴ (ﺃ جـ)^٢ = (ﺃ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ **(نظرية فيثاغورث)**

= (٣)^٢ + (٤)^٢

= ٩ + ١٦ = ٢٥

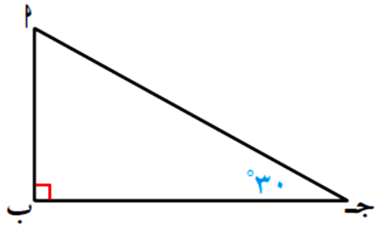
∴ ﺃ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∵ د منتصف $\overline{ﺃ جـ}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ﺃ جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٥ = ٢$\frac{١}{٢}$ سم

نتيجة (١) : في المثلّث الثلاثيني الستّيني يكون طول الضلع المقابِل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساوِيًا نصف طول الوتر .



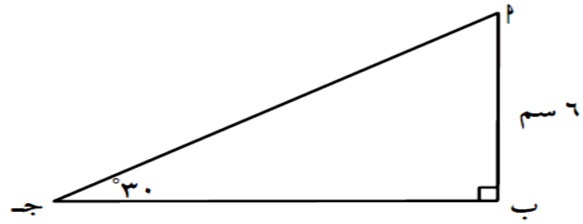
∵ أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ق (جـ^) = ٣٠°

∴ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

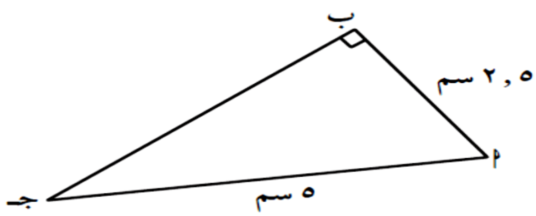
وعكس ذلك أيضًا صحيح :

تدرّب (٣) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

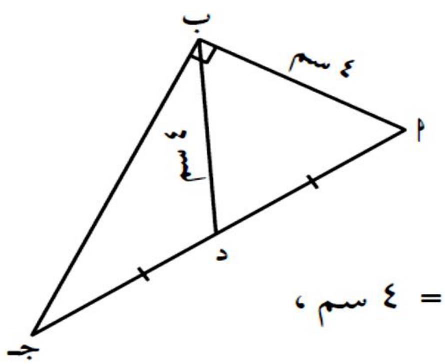


أجـ = ...



ق (جـ^) = ...

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل :

أوجد بالبرهان : (١) ق (جـ^) (٢) ق (أ^) .

الحلّ :

المعطَيات : أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أب = ٤ سم ، ب د = ٤ سم ، د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$.

المطلوب : إيجاد (١) ق (جـ^) (٢) ق (أ^) .

البرهان : ∵ المثلّث أب جـ قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ أجـ = ٢ × ٤ = ٨ سم

∵ أب = $\frac{١}{٢}$ أجـ

∴ ق (جـ^) = ٣٠°

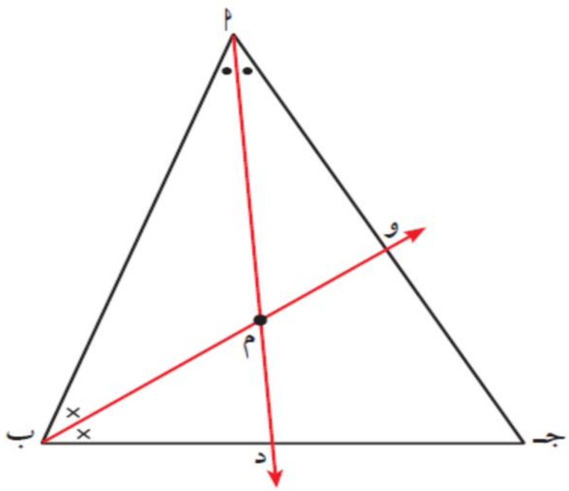
∴ أب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني

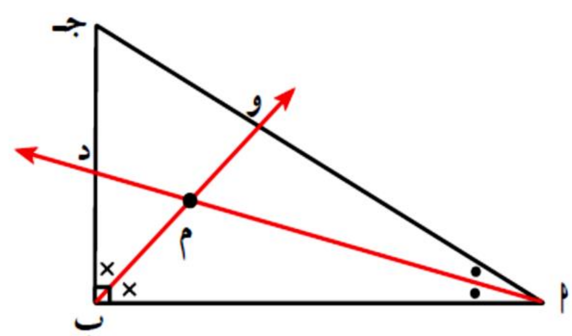
∴ ق (أ^) = ٦٠°

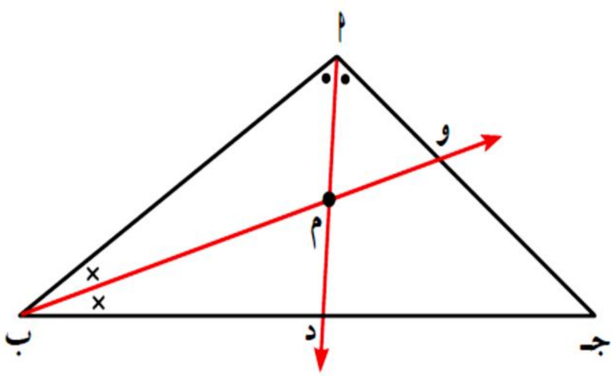
منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث

في المثلّثات التالية :

$\overleftarrow{أد}$ منصِّف الزاوية أ ، $\overleftarrow{ب و}$ منصِّف الزاوية ب ، $\overleftarrow{أد} \cap \overleftarrow{ب و}$ = { م }

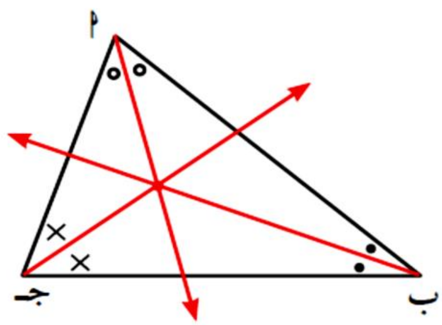






نظرية :

منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .



نتيجة : نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث

∴ م ل = م ن = م و

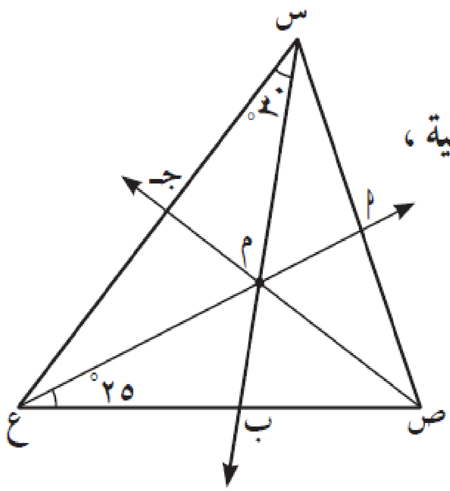
مثال (١) :

Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (م عَ^ ص) = ٢٥° ، ق (م سَ^ ع) = ٣٠° ،

فأوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ق (س صَ^ ع) (٢) ق (م صَ^ ع)



الحلّ :

المعطيات : م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع ،

ق (م عَ^ ص) = ٢٥° ، ق (م سَ^ ع) = ٣٠°

المطلوب : إيجاد (١) ق (س صَ^ ع) (٢) ق (م صَ^ ع)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع

∴ $\overleftarrow{\text{ع م}}$ منصِّف عَ^

∴ ق (س عَ^ ص) = ٢ × ٢٥° = ٥٠°

وبالمثل $\overleftarrow{\text{س م}}$ منصِّف سَ^

∴ ق (ص سَ^ ع) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

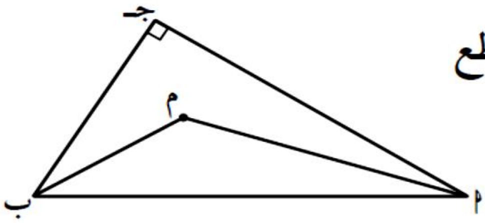
∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°

∴ ق (س صَ^ ع) = ١٨٠° − (٥٠° + ٦٠°) = ٧٠°

∵ $\overleftarrow{\text{ص جـ}}$ منصِّف صَ^

∴ ق (م صَ^ ع) = ٧٠° ÷ ٢ = ٣٥°

مثال (٢) :



Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ، إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ، فأوجِد بالبرهان ق (أ م̂ ب) .

الحلّ :

المعطَيات : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ،

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية .

المطلوب : إيجاد ق (أ م̂ ب)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°

∴ ق (جـ أ̂ ب) + ق (جـ ب̂ أ) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث أ ب جـ

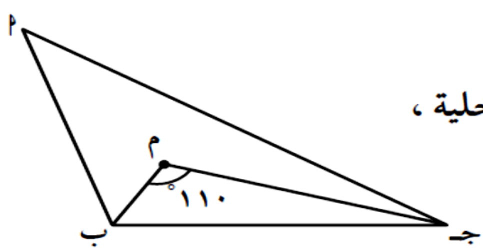
∴ ق (م أ̂ ب) + ق (م ب̂ أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (جـ أ̂ ب) + ق (جـ ب̂ أ)]

= $\frac{١}{٢}$ × ٩٠° = ٤٥°

∴ في Δ أ ب م :

ق (أ م̂ ب) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

تدرّب (٤) :



Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (جـ م̂ ب) = ١١٠° .

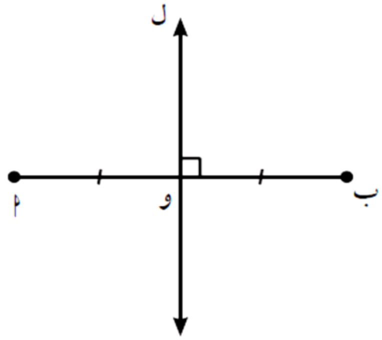
فأوجِد بالبرهان ق (جـ أ̂ ب) .

المعطيات : --

المطلوب : --

البرهان : --

محاور أضلاع المثلّث



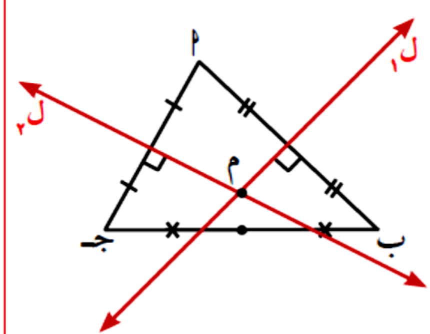
محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصِّف لها .

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overline{\text{أب}}$ ، أو = ب و

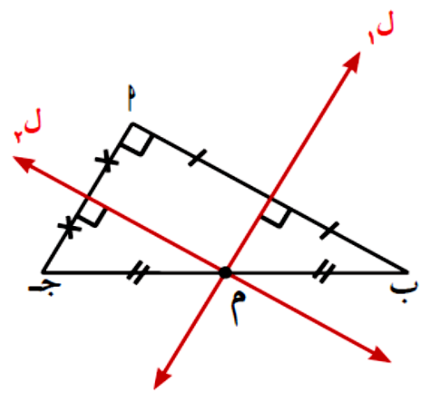
∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ محور $\overline{\text{أب}}$

في المثلّثات التالية :

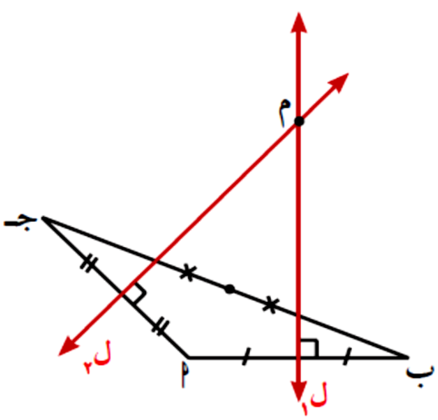
$\overleftrightarrow{\text{ل}}_1$ محور ------------- ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ محور ------------- ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}_1 \cap \overleftrightarrow{\text{ل}}_2$ = ------------------



مثلّث حادّ الزوايا



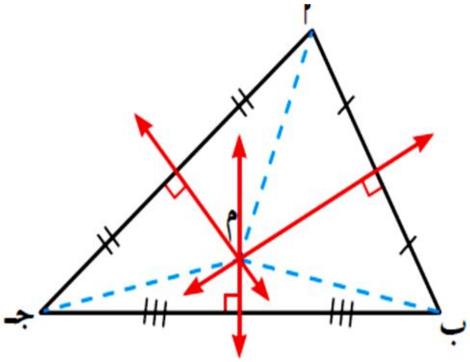
مثلّث قائم الزاوية



مثلّث منفرج الزاوية

نظرية :
محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

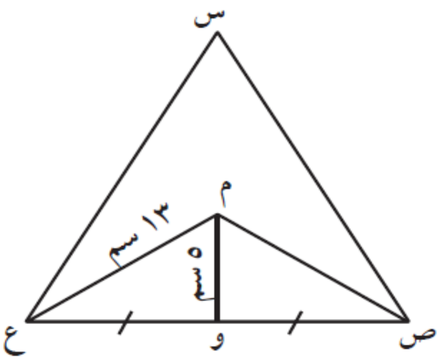
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث الحادّ الزوايا تقع **داخله** .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية تقع في **منتصف الوتر** .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع **خارجه** .



نتيجة : نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ا ب جـ

∴ م ا = م ب = م جـ



مثال :

س ص ع مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف ص ع ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

الحل :

المعطيات : س ص ع مثلّث فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف ص ع ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

المطلوب : إيجاد كلّ من : (١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع

∴ م ص = م ع = ١٣ سم

∵ و منتصف ص ع

∴ م و ⊥ ص ع

∴ Δ م ص و قائم الزاوية في و

∴ (ص و)^{٢} = (م ص)^{٢} − (م و)^{٢} (نظرية فيثاغورث)

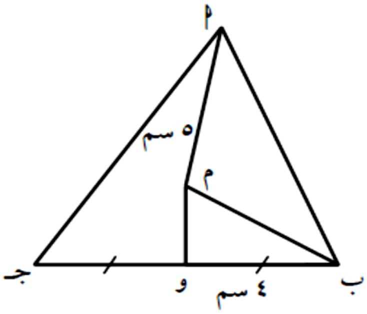
ص و = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦٩ - ٢٥}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

∴ ص ع = ٢ × ص و

= ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

تدرّب (٢) :



Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

أم = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و .

المعطَيات : Δ أ ب جـ فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

أم = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب : إيجاد كلّ ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث أ ب جـ

∴ م ب = ---------------- = ---------------- سم

∵ و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ---------------- ⊥ ----------------

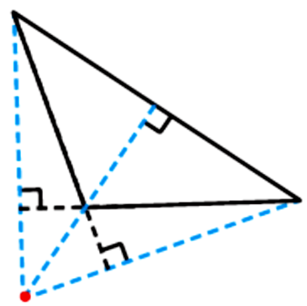
∵ Δ م ب و قائم الزاوية في و

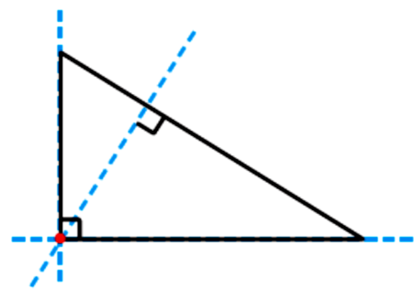
∴ (م و)^{٢} = (----------)^{٢} – (----------)^{٢} (نظرية فيثاغورث)

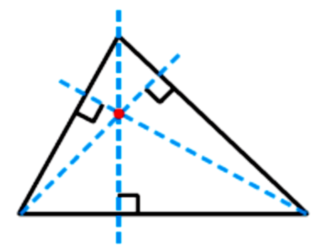
= --

∴ م و = -------------------- = ------------ سم

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه

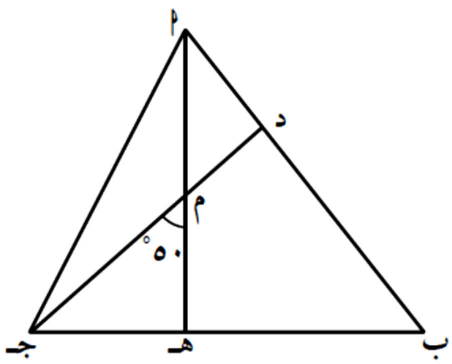






نظرية :

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .



مثال :

أب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (جـ م̂ هـ) = ٥٠° ،

إذا كان $\overline{\text{جـ د}}$ ∩ $\overline{\text{أ هـ}}$ = { م } .

فأوجِد بالبرهان ق (ب̂) .

الحل :

المعطَيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،

ق (جـ م̂ هـ) = ٥٠°

المطلوب : إيجاد ق (ب̂) .

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث أ ب جـ على أضلاعه

∴ Δ م هـ جـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية ١٨٠°

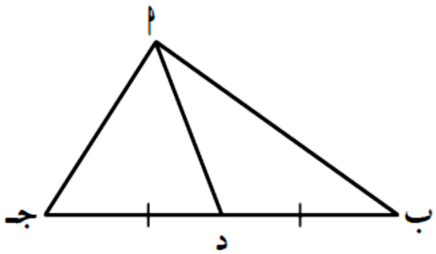
∴ ق (م جـ̂ هـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٩٠°) = ٤٠°

في Δ جـ د ب القائم الزاوية في د

ق (ب̂) = ١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°) = ٥٠°

القطع المتوسّطة للمثلّث

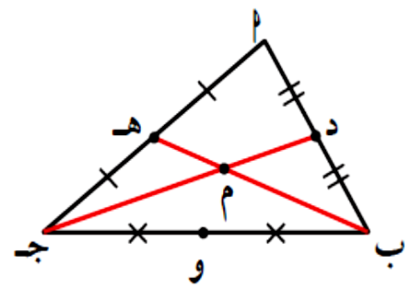
القطعة المستقيمة التي تصل أيّ رأس للمثلّث بمنتصف الضلع المقابِل له تسمى قطعة متوسّطة للمثلّث .

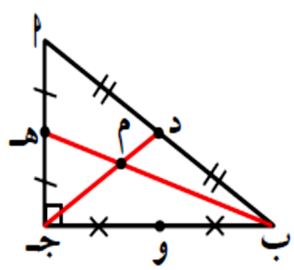


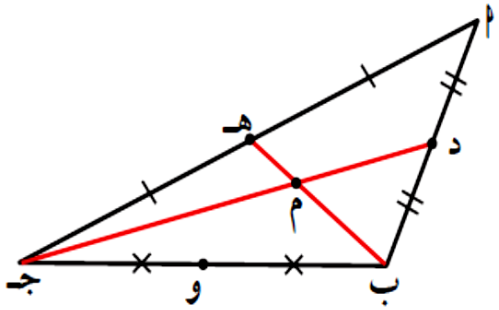
في Δ أب جـ :

∵ د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أد}}$ قطعة متوسّطة للمثلّث أب جـ .

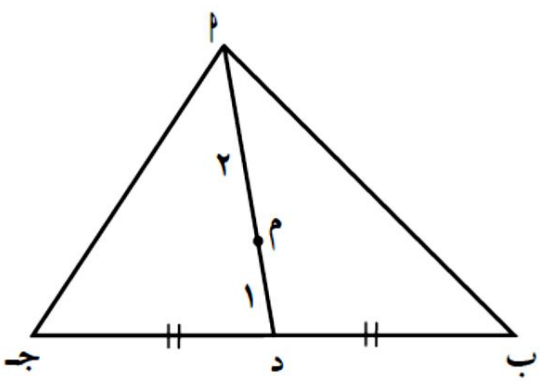






نظرية :

القطع المتوسّطة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلّ منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في Δ أب جـ :

$\overline{\text{أد}}$ قطعة متوسّطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

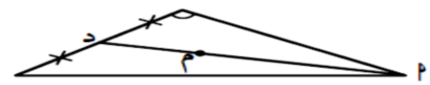
أكمِل :

أم = ... م د | م د = ... أد | أم = ... أد

م د = ... أم | أد = ... م د | أد = ... أم

تدرّب (١) :

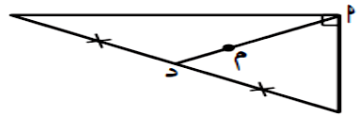
في كلّ من المثلّثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة ، أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



د م = ٣ سم

أ م = ... سم

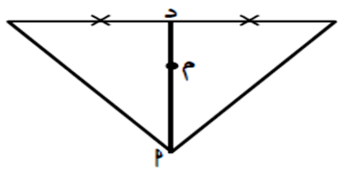
أ د = ... سم



أ م = ٤ سم

د م = ... سم

أ د = ... سم

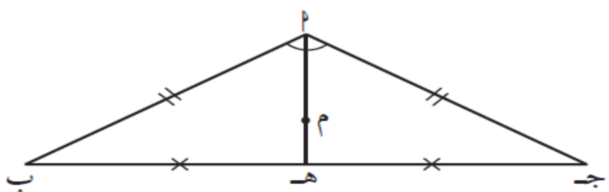


أ د = ١٨ سم

د م = ... سم

أ م = ... سم

مثال :



أ ب جـ مثلّث فيه :

أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ،

ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ،
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة في المثلّث

المطلوب : إيجاد كلٍّ من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ

البرهان : في Δ أ ب جـ :

$\because$ أ ب = أ جـ ، هـ منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$

$\therefore$ $\overline{\text{أ هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$

$\because$ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

$\therefore$ Δ أ جـ هـ ثلاثيني ستّيني

$\therefore$ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ = ١٢ سم

$\because$ م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ

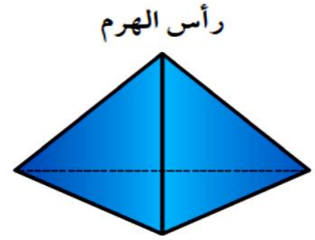
م هـ = $\frac{١}{٣}$ أ هـ

= $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

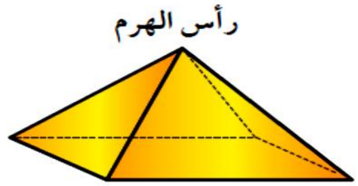
م أ = ٢ م هـ

= ٢ × ٤ = ٨ سم

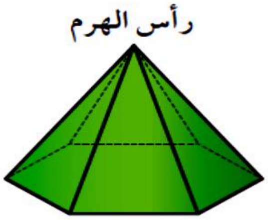
الهرم المنتظم : مجسَّم متعدّد الأوجه له قاعدة واحدة منتظمة وأوجهه الجانبية الأخرى مثلّثات متطابقة تلتقي عند أعلى الهرم في نقطة تُسمّى رأس الهرم . يُسمّى الهرم بحسب عدد أضلاع قاعدته .



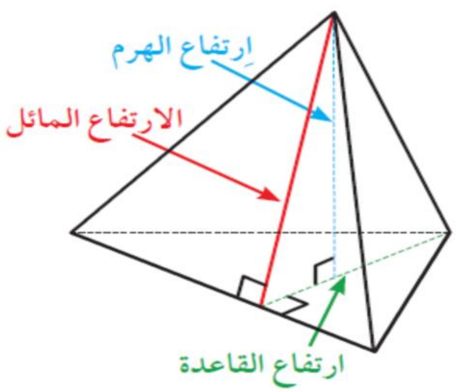
هرم ثلاثي القاعدة



هرم رباعي القاعدة



هرم سداسي القاعدة



اِرتفاع الهرم : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى القاعدة المقابِلة .

الارتفاع المائل : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى أحد أحرف قاعدة الهرم .

المساحة السطحية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

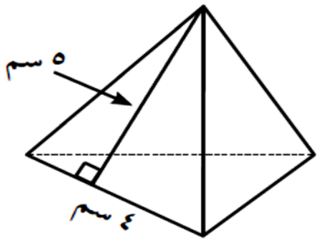
المساحة الجانبية للهرم المنتظم = عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

تدرّب (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم ومساحة قاعدته $٤\sqrt{٣}$ سم^{٢} وارتفاعه المائل ٥ سم ، أوجِد مساحته السطحية .

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × .... × ....

= ....

مساحة القاعدة = ...

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × .... + ...

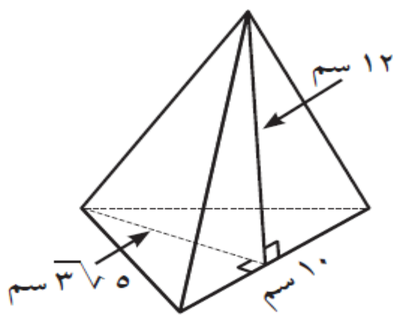
= (........ + ...) سم^{٢}

مثال (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاع قاعدته $٥\sqrt{٣}$ سم ، وارتفاعه المائل ١٢ سم . أوجد مساحته السطحية .

الحل :

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٢

= ٦٠ سم^{٢}

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × $٥\sqrt{٣}$

= $٢٥\sqrt{٣}$ سم^{٢}

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × ٦٠ + $٢٥\sqrt{٣}$

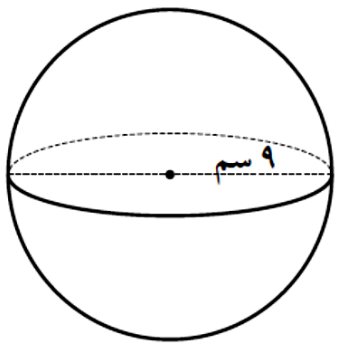
= (١٨٠ + $٢٥\sqrt{٣}$) سم^{٢}

حجم الكرة

$$\text{حجم الكرة} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \pi \ \text{نق}^{\text{٣}}$$

مثال (١) :

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم . (بدلالة π)



الحلّ :

$$\text{حجم الكرة} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \pi \ \text{نق}^{\text{٣}}$$

$$= \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \pi \times (\text{٩})^{\text{٣}}$$

$$= \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \pi \times \text{٩} \times \text{٩} \times \text{٩}$$

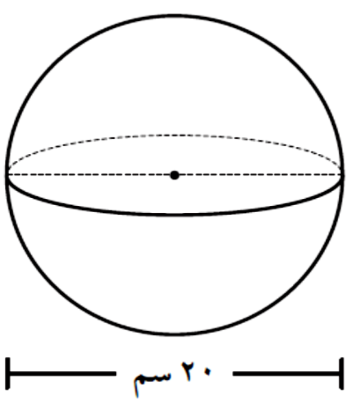
$$= \text{١٢} \times \pi \times \text{٨١}$$

$$= \text{٩٧٢} \ \pi \ \text{سم}^{\text{٣}}$$

مثال (٢) :

من خلال الشكل المقابِل :

أوجِد حجم الكرة المرسومة . (اعتبر π = ٣,١٤)



الحل :

نق = ١٠ سم

$$\text{حجم الكرة} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \pi \ \text{نق}^{\text{٣}}$$

$$= \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \text{٣,١٤} \times (\text{١٠})^{\text{٣}}$$

$$= \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \text{٣,١٤} \times \text{١٠٠٠}$$

$$= \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \times \text{٣١٤٠}$$

$$= \frac{\text{١٢٥٦٠}}{\text{٣}}$$

$$\approx \text{٤١٨٦,٧} \ \text{سم}^{\text{٣}}$$