الأعداد المركبة

$\sqrt{-1} = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$

$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$

العدد المركب على الصورة $a + bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$

$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ، } b_1 = b_2$

$Z_1 \mp Z_2 = (a_1 + a_2) \mp (b_1 + b_2) i$

$c Z_1 = c a_1 + c b_1$

$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

$\overline{Z} = \overline{(a + bi)} = a - bi$

$Z_1 + \overline{Z}_1 = 2a \text{ ، } Z_1 - \overline{Z}_1 = 2bi \text{ ، } \overline{(\overline{Z})} = Z$

$Z_1 \cdot \overline{Z}_1 = a^2 + b^2 \text{ ، } \overline{Z_1 \mp_{\times} Z_2} = \overline{Z}_1 \mp_{\times} \overline{Z}_2$

$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{a + bi} \times \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$

$Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{a^2 + b^2}$

القيمه المطلقه لعدد مركب

$|Z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

الصوره الجبريه للعدد المركب $Z = x + iy$

الصوره الديكارتيه للعدد المركب $(x \cdot y)$

الصوره القطبيه للعدد المركب (r, θ)

التحويل من الشكل القطبي الى الشكل الديكارتي

$x = r\cos$ ، $y = r\sin\theta$

التحويل من الشكل الديكارتي الى الشكل القطبي

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

α زاويه الإسناد للزاويه التي قياسها θ

θ تقع في الربع الأول : $\theta = \alpha$

θ تقع في الربع الثاني : $\theta = 180 - \alpha$

θ تقع في الربع الثالث : $\theta = 180 + \alpha$

θ تقع في الربع الرابع $\theta = 360 - \alpha$

الصوره المثلثيه للعدد المركب :

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

الصوره المثلثيه في حالات خاصه

بفرض $a>0$ ، $b>0$

$$Z_1 = a \Longrightarrow Z_1 = a(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$Z_2 = -a \Longrightarrow Z_2 = a(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$Z_3 = bi \Longrightarrow Z_3 = b\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Z_4 = -bi \Longrightarrow Z_4 = b\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

في حل المعادلات

* في المعادله التربيعيه $ax^2+bx+c=0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$

يكون مجموع الجذرين $\frac{-b}{a}$ وحاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$

* إذا كان $Z = a+bi : b \neq 0$ جذراً لمعادله معاملاتها اعداد حقيقيه

فإن $\bar{Z} = a - bi$ جذراً آخر لها «المرافق»

* اذا كان Z_1 ، Z_2 جذرين تربيعيين للعدد Z

فإن $Z_1 + Z_2 = 0$ « احدهما نظير جمعي للآخر

الوحدة السابعة
الأعداد المركبة

P.13 ① بسّط كل عدد مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i:

ⓐ $\sqrt{-2} = 2i$

ⓑ $-\sqrt{-12} = -\sqrt{4\times3}\, i = -2\sqrt{3}\, i$

ⓒ $\sqrt{-36} = -6i$

P.14

② اكتب كلاً مما يلي على الصورة الجبرية:

ⓐ $\sqrt{-18} + 7 = 7 + \sqrt{9\times2}\, i = 7 + 3\sqrt{2}\, i$

ⓑ $\dfrac{10 - \sqrt{-100}}{5} = \dfrac{10}{5} - \dfrac{\sqrt{100}}{5} i = 2 - 2i$

ⓒ $\dfrac{\sqrt{-9} + 5}{7} = \dfrac{5}{7} + \dfrac{3}{7} i$

P.15 ③ اوجد قيم كل من $x, y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

ⓐ $x + 5i = 7 - 3yi$

$x = 7$ ، $-3y = 5$

$y = \dfrac{5}{-3}$

ⓑ $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$

$x + 3 = 5$

$x = 5 - 3$

$x = 2$

$y^2 = -y$

$y^2 + y = 0$

$y(y+1) = 0$

$y = 0$ or $y = -1$

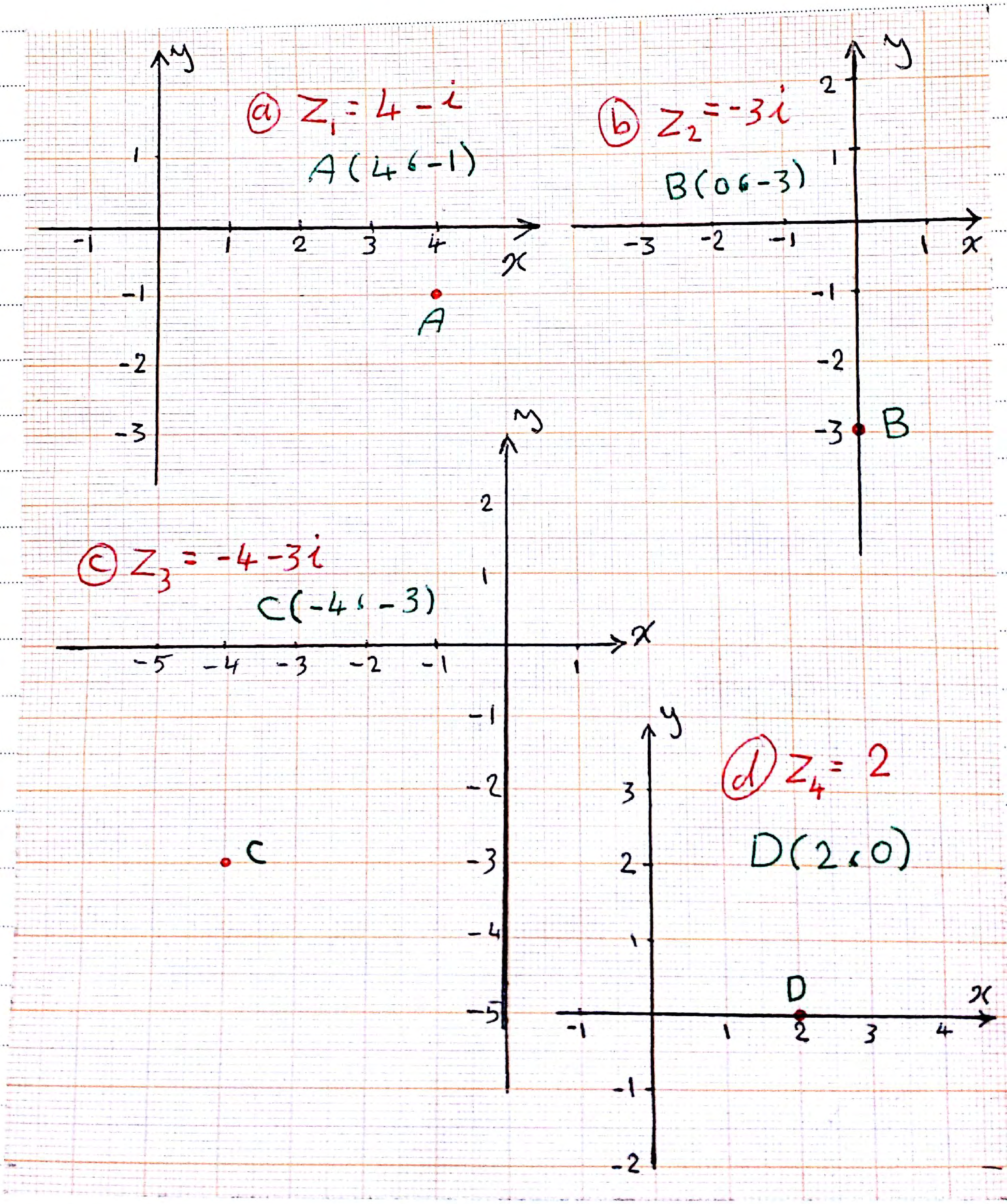
ⓒ $3i = 2x - 5yi$

$2x = 0 \qquad -5y = 3$

$x = 0 \qquad y = \frac{3}{-5}$

P. 16

④ مثل كلا مما يلي في المستوى المركب :



P.16

⑤ اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط

$K(7,0) = 7$

$H(1,-2) = 1-2i$

$N(-4,1) = -4+i$

P.17

⑥ إذا كانت $Z_1 = -2+5i$ ، $Z_2 = 3.4-1.2i$, $Z_3 = -0.3i$

ⓐ $Z_1 + Z_2 = -2+5i + 3.4-1.2i = 1.4+3.8i$

ⓑ $Z_2 - Z_1 = 3.4-1.2i - (-2+5i) = 5.4-6.2i$

ⓒ $Z_3 - Z_2 - Z_1 = -0.3i - (3.4-1.2i) - (-2+5i) = -1.7-3.8i$

P.19

⑦ اوجد ناتج:

ⓐ $(6-5i)(4-3i) = 24-18i-20i+15i^2 = 9-38i$

ⓑ $(9+4i)(4-9i) = 36-81i+16i-36i^2 = 72-65i$

ⓒ $(12i)(7i)(i+1) = -84(i+1) = -84-84i$

⑧ P.20

$Z_1 = 2-3i$ ، $Z_2 = 1+4i$

ⓐ $\frac{1}{2}Z_1 = \frac{1}{2}(2-3i) = 1-\frac{3}{2}i$

ⓑ $Z_1 \cdot Z_2 = (2-3i)(1+4i) = (2\times1-(-3)(4)) + (2\times4+(-3)(1))i = 14+5i$

$i \qquad i^2=-1 \qquad i^3=-i \qquad i^4=1$

* اكتب في ابسط صوره

* $i^{17} = i^{16+1} = i \qquad i^{22} = i^{20+2} = i^2 = -1$

$i^{35} = i^3 = -i \qquad i^{24} = 1 \qquad i^{25} = i$

$i^{41} = i \qquad i^{27} = i^3 = -i \qquad i^{13} = i \qquad i^{38} = i^2 = -1$

P. 21 (9) اوجد

(a) $5i^{73} = 5i^{19\times4+1} = 5i$

(b) $\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)^3 = \left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)^2\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)$

$=\left(\frac34 + 2\times\frac{\sqrt3}{2}\times\frac12 i + \frac14 i^2\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)$

$=\left(\frac12 + \frac{\sqrt3}{2} i\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)$

$=\left(\frac{\sqrt3}{4}-\frac{\sqrt3}{4}\right)+\left(\frac14+\frac34\right)i = 0+1i = i$

(c) $\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)^4 = \left[\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)^2\right]^2 = \left[\frac24 + 2\times\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}i - \frac24\right]^2 = [i]^2 = -1$

P. 22 (10) $Z_2 = 3+5i$ ، $Z_1 = 2-7i$ فأوجد

(a) $\overline{Z_1}+\overline{Z_2} = \overline{(2-7i)}+\overline{(3+5i)} = (2+7i)+(3-5i) = 5+2i$

(b) $\overline{Z_1-Z_2} = \overline{(2-7i)-(3+5i)} = \overline{(-1-12i)} = -1+12i$

(c) $\overline{Z_1\cdot Z_2} = \overline{(6+35)+(10+-21)i} = \overline{41+-11i} = 41+11i$

(d) $\overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2} = (2+7i)\cdot(3-5i) = (6--35)+(-10+21 = 41+11i$

المعكوس الضربي Z^{-1} :

$$Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

P. 23 (11) اوجد المعكوس الضربي لكل من

(a) $Z_1 = -3i - 7 = -7 - 3i$

$$Z_1^{-1} = \frac{-7+3i}{(-7)^2+(-3)^2} = \frac{-7+3i}{49+9} = \frac{-7}{58} + \frac{3}{58} i$$

(b) $Z_2 = 5 + 11i$

$$Z_2^{-1} = \frac{5-11i}{5^2+11^2} = \frac{5}{146} - \frac{11}{146} i$$

(c) $Z_3 = 6i$

$$Z_3^{-1} = \frac{1}{6i} = \frac{1}{6i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-6} = -\frac{1}{6} i$$

P. 24 (12) اوجد ناتج قسمة $2i - 3$ على $1+2i$

$$\frac{-3+2i}{1+2i} = \frac{-3+2i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{-3+6i+2i-4i^2}{1^2+2^2}$$

$$= \frac{-3-4(-1)+8i}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5} i$$

P. 24 (13) اكتب في الصورة الجبرية

(a) $$\frac{3+i}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{(6+5)+(-15+2)i}{2^2+5^2}$$

$$= \frac{11}{29} - \frac{13}{29} i$$

(b) $\frac{2-i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{4-2\times 2\times i+1}{2^2+1^2} = \frac{5}{5} - \frac{4}{5}i$

(c) $\frac{\overline{5+i}}{\overline{2-3i}} = \frac{5-i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{10-3+(15-2)i}{4+9} = \frac{7}{13} - \frac{17}{13}i$

* إذا كان $Z_1 = 2+i$ ، $Z_2 = -3+4i$ فأوجد

* $Z_1 \cdot Z_2 = (2+i)(-3+4i) = (-6-4)+(8-3)i = -10+5i$

* $Z_1^3 = (2+i)^3 = (2+i)^2(2+i) = (4+4i-1)(2+i)$

$= (3+4i)(2+i) = (6-4)+(3+8)i = 2+11i$

$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{\overline{Z_1}} \cdot \overline{Z_2} = Z_1 \cdot \overline{Z_2} = (2+i)(-3-4i)$

$= (-6+4)+(-8-3)i = -2-11i$

* إذا كان $Z = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}}$ فأوجد $\overline{Z}$

$\frac{1}{1+i\sqrt{3}} = (1+i\sqrt{3})^{-1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$

$Z = 4i \times \frac{1}{1+i\sqrt{3}} = 4i\left(\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\right) = 4i\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)$

$= i(1-i\sqrt{3})$

$= i - i^2\sqrt{3} = \sqrt{3}+i$

القيمة المطلقة لعدد مركب

P. 26 ① اوجد:

ⓐ $|6-4i| = \sqrt{6^2+(-4)^2} = 2\sqrt{13}$

ⓑ $|-2+5i| = \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{29}$

الإحداثيات القطبية

P. 27 ② أوجد الزوج المرتب (x, y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من

ⓐ $A(5, 300^\circ)$ $\quad r=5 \quad \theta = 300^\circ$

$x = r\cos\theta$ | $y = r\sin\theta$
$x = 5\cos 300$ | $y = 5\sin 300$
$= \frac{5}{2}$ | $= \frac{-5\sqrt{3}}{2}$

$$A(x, y) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

ⓑ $B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ $\quad r=2 \quad \theta = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

$x = r\cos\theta$ $\quad$ $y = r\sin\theta$
$= 2\cos 120$ $\quad$ $= 2\sin 120$
$= -1$ $\quad$ $= \sqrt{3}$

$$B(-1, \sqrt{3})$$

③ أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leq \theta < 2\pi$ P.28

ⓐ $D(3\sqrt{3}, 3)$

$$r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$$

بفرض α زاوية اسناد الزاوية θ فيكون

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

D تقع في الربع الأول $\Leftarrow$ $\theta = \alpha = 30^\circ$

وبالتالي:

$$D(r, \theta) = (6, 30^\circ) = \left(6, \frac{\pi}{6}\right)$$

ⓑ $C(4, -2\sqrt{5})$

$$r = \sqrt{4^2 + (-2\sqrt{5})^2} = 6$$

بفرض α زاوية اسناد الزاوية θ فيكون

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-2\sqrt{5}}{4}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} = 48^\circ\, 11'\, 23''$$

C تقع في الربع الرابع $\Leftarrow$ $\theta = 360 - \alpha$

$$= 311^\circ\, 48'\, 37'' = 1.73\pi$$

وبالتالي:

$$C = (6, 311^\circ\, 48'\, 37'') = (6, 1.73\pi)$$

الصوره المثلثيه

ضع كلاً مما يلي في الصوره المثلثيه : ④ P. 30

ⓐ $Z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} i$

$x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ ، $y = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

$r_1 = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5$

بفرض α_1 زاويه اسناد الزاويه θ_1 فيكون

$\tan\alpha_1 = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{\frac{-5}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{\sqrt{2}}}\right| = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 45 = \frac{\pi}{4}$

θ_1 يقع في الربع الرابع $\Leftarrow$

$\theta_1 = 360 - 45 = 315$

$= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

∴ الصوره المثلثيه هي

$Z_1 = 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

ⓑ $Z_2 = -1 - i$

$x = -1$ $y = -1$

$r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

بفرض α_2 زاويه اسناد الزاويه θ_2 فيكون

$\tan\alpha_2 = \left|\frac{-1}{-1}\right| = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45 = \frac{\pi}{4}$

θ_2 يقع في الربع الثالث $\Leftarrow$

$\theta_2 = 180 + 45 = 225$

$= \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

∴ الصوره المثلثيه هي $Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓒ $Z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

$x = -2 \qquad y = 2\sqrt{3}$

$r_3 = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

بفرض α_3 زاوية اسناد الزاوية θ_3 فيكون

$\tan\alpha_3 = \left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha_3 = 60 = \frac{\pi}{3}$

θ_3 تقع في الربع الثاني $\Leftarrow$

$\theta_3 = 180 - 60 = 120$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

∴ الصورة المثلثية هي

$Z_3 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

---

⑤ ضع كلا مما يلي في الصورة المثلثية P.31

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ⓐ $Z_1 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$-\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos\frac{2\pi}{3}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$

ⓑ $Z_2 = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}$

ⓒ $Z_3 = -\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ⑤ P.31

$= -\sqrt{3}\left[-\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ⓓ $Z_4 = 3(\cos 50 - i\sin(-130))$

$\sin(-130) = -\sin(130)$

$= -\sin(180-130)$

$= -\sin 50$

$= 3(\cos 50 - i[-\sin 50])$

$= 3(\cos 50 + i\sin 50)$

ضع كلاً مما يأتي في الصوره الجبريه ⑥ P.31

ⓐ $Z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

ⓑ $Z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

الصوره المثلثيه في حالات خاصه

ضع في الصوره المثلثيه كلاً من الأعداد ⑦ P.32

ⓐ $Z_1 = 2i$

$r_1 = |2| = 2$ ، $\theta_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

ⓑ $Z_2 = 5$

$r_2 = |5| = 5$ ، $\theta_2 = 0 \Rightarrow Z_2 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$

ⓒ $Z_3 = \frac{-3}{4}$

$r_3 = \left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{3}{4}$ ، $\theta_3 = \pi \Rightarrow Z_3 = \frac{3}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$

ⓓ $Z_4 = -\frac{5}{2}i$

$r_4 = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$ ، $\theta_4 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow Z_4 = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

حل المعادلات

P.33 ① اوجد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

$2Z + i = 3 + 2i$

$2Z = 3 + 2i - i$

$2Z = 3 + i$

$Z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i \Rightarrow$ مجموعة الحل $= \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i\right\}$

P.34 ② اوجد مجموعة حل المعادلة

$Z + i = 2\bar{Z} + 1$

بفرض $Z = x + yi$

$x + yi + i = 2(\overline{x + yi}) + 1$

$x + yi + i = 2(x - yi) + 1$

$x + yi + i = 2x - 2yi + 1$

$x - 2x + yi + 2yi = 1 - i$

$-x + 3yi = 1 - i$

$-x = 1$ and $3y = -1$

$x = -1$ $\quad y = \frac{-1}{3} \Rightarrow Z = -1 - \frac{1}{3} i$

P.35 ③ أوجد حل كل معادلة مما يلي:

(a) $3x^2 + 48 = 0$

$3x^2 = -48 \Rightarrow x^2 = -16 \Rightarrow x = \mp 4i$

مجموعة الحل: $\{4i, -4i\}$

(b) $-5x^2 - 150 = 0$

$-5x^2 = 150 \Rightarrow x^2 = -30 \Rightarrow x = \mp\sqrt{30}\, i$

(c) $8x^2 + 2 = 0$

$8x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow x = \mp \frac{1}{2} i$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{1}{2} i, -\frac{1}{2} i\right\}$

P.35 ④ اوجد مجموعة حل المعادلة :

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4$$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{-4}}{2 \times 1} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{-4}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

مجموعة الحل : $\{1 + i \,،\, 1 - i\}$ « الجذرين مترافقان »

P.36 ⑤

$$2z^2 - 6z + 5 = 0$$

ⓐ اثبت أن العدد $z_1 = \frac{3 - i}{2}$ هو جذر للمعادلة

ⓑ اوجد الجذر الثاني

$$2\left(\frac{3 - i}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3 - i}{2}\right) + 5 =$$

$$= 2\,\frac{9 - 6i + i^2}{4} - 3(3 - i) + 5$$

$$= \frac{9 - 6i - 1}{2} - (9 - 3i) + 5$$

$$= 4 - 3i - 9 + 3i + 5 = 0$$

$\therefore \frac{3 - i}{2}$ هو جذر المعادلة

ⓑ وبالتالي $\frac{3 + i}{2}$ هو الجذر الآخر

الجذرين التربيعيين لعدد مركب

$Z = -3 - 4i$ اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب ⑥ P. 37

بفرض أن $w = m + ni$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (m + ni)^2 = -3 - 4i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$$

بالمطابقة

$$m^2 - n^2 = -3 \quad \dots (1)$$

$$2mn = -4 \quad \dots (2)$$

بالتربيع والجمع

$$m^2 + n^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad \dots (3)$$

بجمع (1), (3)

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow$$

$m = 1$ or $m = -1$

بالتعويض في (2) نجد

$2mn = -4$	$2mn = -4$
$2(1)n = -4$	$2(-1)n = -4$
$n = -2$	$n = 2$

∴ الجذرين التربيعيين

$1 - 2i$ $\quad$ $-1 + 2i$

ونلاحظ ان هذين الجذرين احدهما نظير جمعي للآخر

$Z = 5 + 12i$ اوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب ⑦ P.38

بفرض أن $w = m + ni$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (m+ni)^2 = 5 + 12i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = 5 + 12i$$

بالمطابقة

$m^2 - n^2 = 5$ ... ①

$2mn = 12$ ... ②

بالتربيع والجمع

$$m^2 + n^2 = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$m^2 + n^2 = 13$ ... ③

بجمع ① , ③

$$2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow$$

$m = 3$ or $m = -3$

$2mn = 12$	$2mn = 12$
$2(3)n = 12$	$2(-3)n = 12$
$n = 2$	$n = -2$

∴ الجذرين التربيعين

$3 + 2i$ $\quad$ $-3 - 2i$

ونلاحظ ان هذين الجذرين التربيعين احدهما النظير الجمعي للآخر

Subject: .... / /

$Z = 7+24i$ اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب ⑧ P.38

بفرض انه $w = m+ni$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (m+ni)^2 = 7+24i$$
$$m^2 - n^2 + 2mni = 7+24i$$

بالمطابقة

$$m^2 - n^2 = 7 \quad \text{---} \ (1)$$
$$2mn = 24 \quad \text{---} \ (2)$$

بالتربيع والجمع نجد

$$m^2 + n^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$
$$m^2 + n^2 = 25 \quad \text{---} \ (3)$$

بجمع ① و ③

$$2m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow$$
$$m = 4 \quad \text{or} \quad m = -4$$

بالتعويض في ②

$2mn = 24$
$2(4)n = 24$
$n = 3$

$2mn = 24$
$2(-4)n = 24$
$n = -3$

∴ الجذرين التربيعيين هما

$4+3i$

$-4-3i$

ونلاحظ أن الجذرين التربيعيين احدهما نظير جمعي للآخر

الوحده الثامنه
حساب المثلثات

دالة جيب التمام $y = a\cos bx \quad : a \neq 0$

دالة الجيب $y = a\sin bx \quad : a \neq 0$

$|a|$ سعة الداله الجيبيه

$|b|$ عدد الدورات في $[0, 2\pi]$

$\frac{2\pi}{|b|}$ يمثل دورة الداله

دالة الظل $y = a\tan bx \quad : a \neq 0$

ليس لها سعه

الدوره $\frac{\pi}{|b|}$ وتكرر نفسها في الفتره $\left(\frac{-\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b}\right)$

مجالها

$R - \{x : x = \frac{\text{الدوره}}{2} + \text{الدوره} \times n, \; n \in \mathbb{Z}\}$

التمدد/ الإنكماش الرأسي وسعة الدالة الجيبية

سعة الدالة $= \dfrac{\max f - \min f}{2}$

$f(x) = a\sin(bx - h) + k$

$: b > 0$

$f(x) = a\cos(bx - h) + k$

السعة $|a|$

دورة الدالة $\dfrac{2\pi}{|b|}$ — الإنكماش الأفقي $\dfrac{1}{|b|}$

الإزاحة الأفقية $\dfrac{h}{b}$ — الى جهة اليمين عندما $h > 0$
الى جهة اليسار عندما $h < 0$

الإزاحة الرأسية k — الى أعلى عندما $k > 0$
الى أسفل عندما $k < 0$

الإزاحة الرأسية $k = \dfrac{\max f + \min f}{2}$

التمدد

الرأسي	الأفقي
$\lvert a \rvert > 1$ تمدد	$\lvert b \rvert > 1$ انكماش
$\lvert a \rvert < 1$ انكماش	$\lvert b \rvert < 1$ تمدد
بمعامل $\lvert a \rvert$	بمعامل $\dfrac{1}{\lvert b \rvert}$

$$f(x) = a\sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + K$$

$$g(x) = a\cos\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + K$$

يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين f ، g من

$\cos x$ ، $\sin x$

عن طريق التحويلات التاليه وبحسب الترتيب التالي

① التمدد الأفقي $\frac{1}{|b|}$

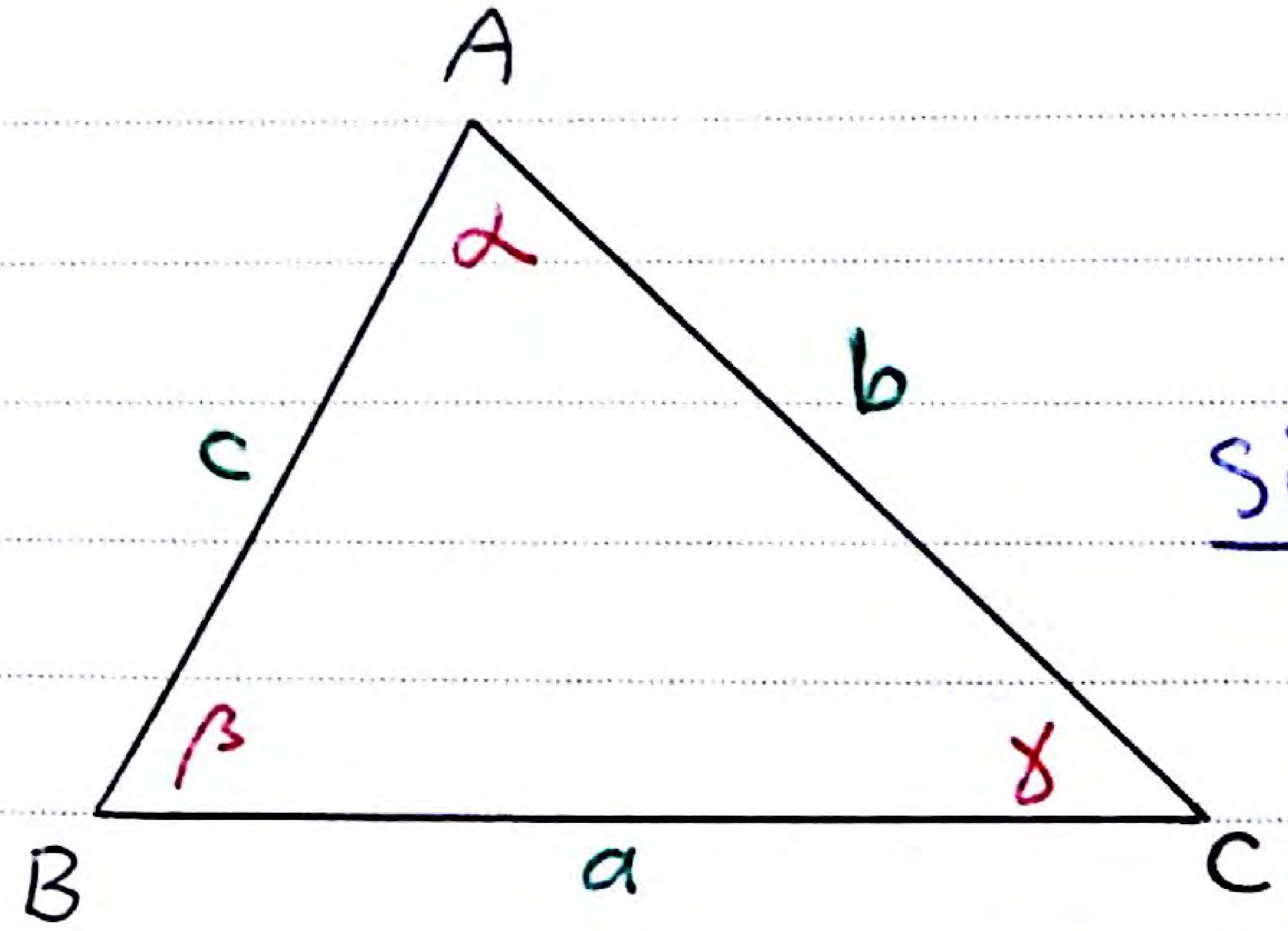
② الإزاحه الأفقيه $\frac{h}{b}$

③ التمدد الرأسي $|a|$

④ الإزاحه الرأسيه K

* السعه $|a|$

* الدوره $\frac{2\pi}{|b|}$



قانون الجيب :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

قانون جيب التمام :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

مساحة المثلث :

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2}ac\sin\beta$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

قاعدة هيرون

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

حيث $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$

التمثيل البياني للدوال المثلثية

P.46

① اوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي

ⓐ $y = -2\cos 5x$

$a = -2 \qquad b = 5$

السعة $= |-2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5}$

ⓑ $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

$a = \frac{1}{2} \qquad b = -1$

السعة $= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الدورة $= \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

P.46

② اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كان:

ⓐ $a = -2$ ، الدورة $\frac{\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |b| = 6 \Leftrightarrow b = 6 \ , \ b = -6$

$y = -2\cos 6x \ , \ y = -2\cos(-6x)$

ⓑ $a = 0.25$ ، الدورة $= \pi$

$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = 2 \ ، \ b = -2$

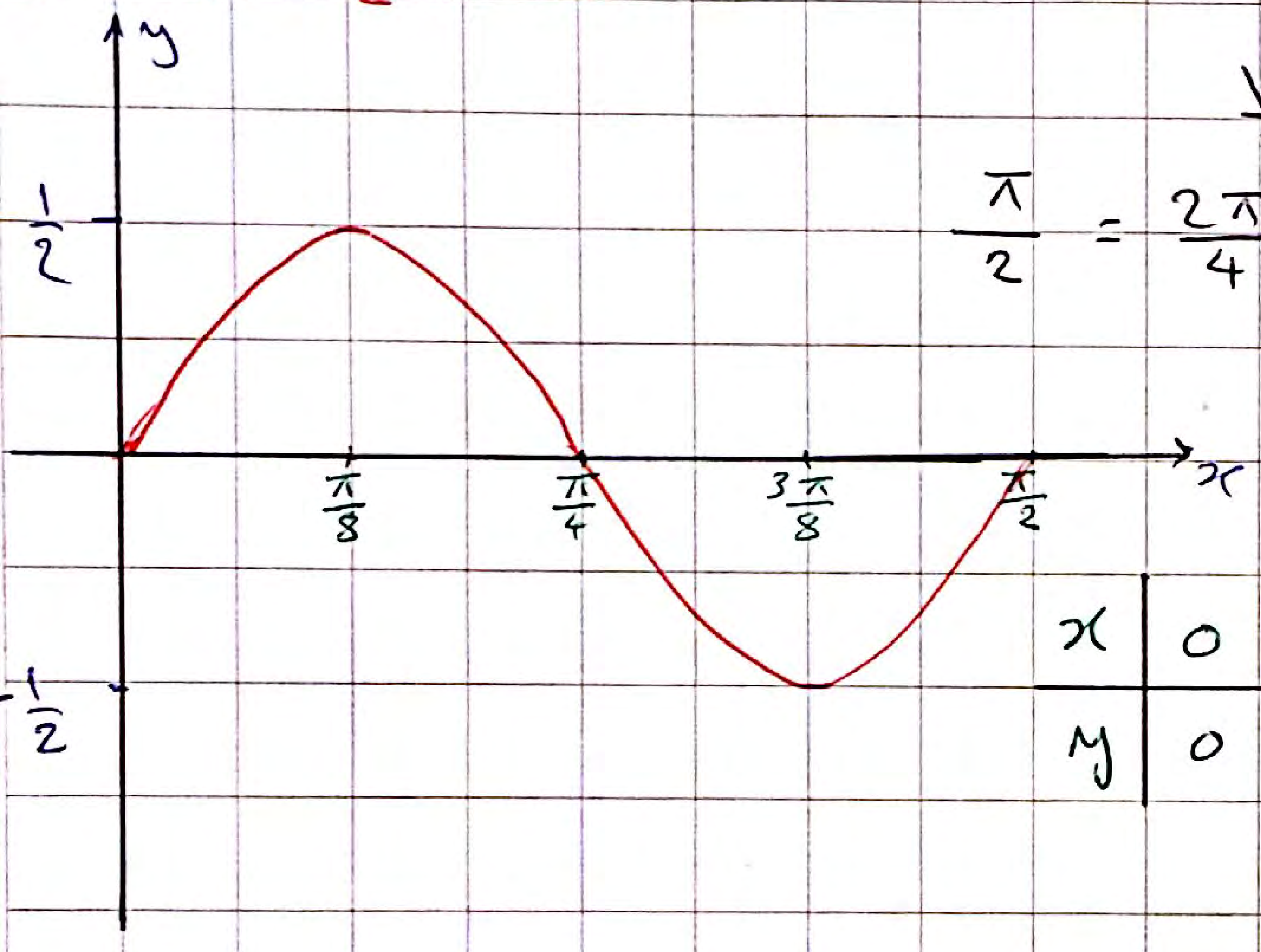
$y = 0.25\cos 2x \ ، \ y = 0.25\cos(-2x)$

ⓒ $y = \cos(\pi x) \qquad y = \cos(-\pi x)$

التمثيل البياني للدوال المثلثية

③ P48 اوجد السعه والدوره لكل داله مما يلي ثم ارسم بيانها

ⓐ $y = \frac{1}{2}\sin 4x$



السعه $= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الدوره $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

ربع الدوره $: \frac{\pi}{8}$

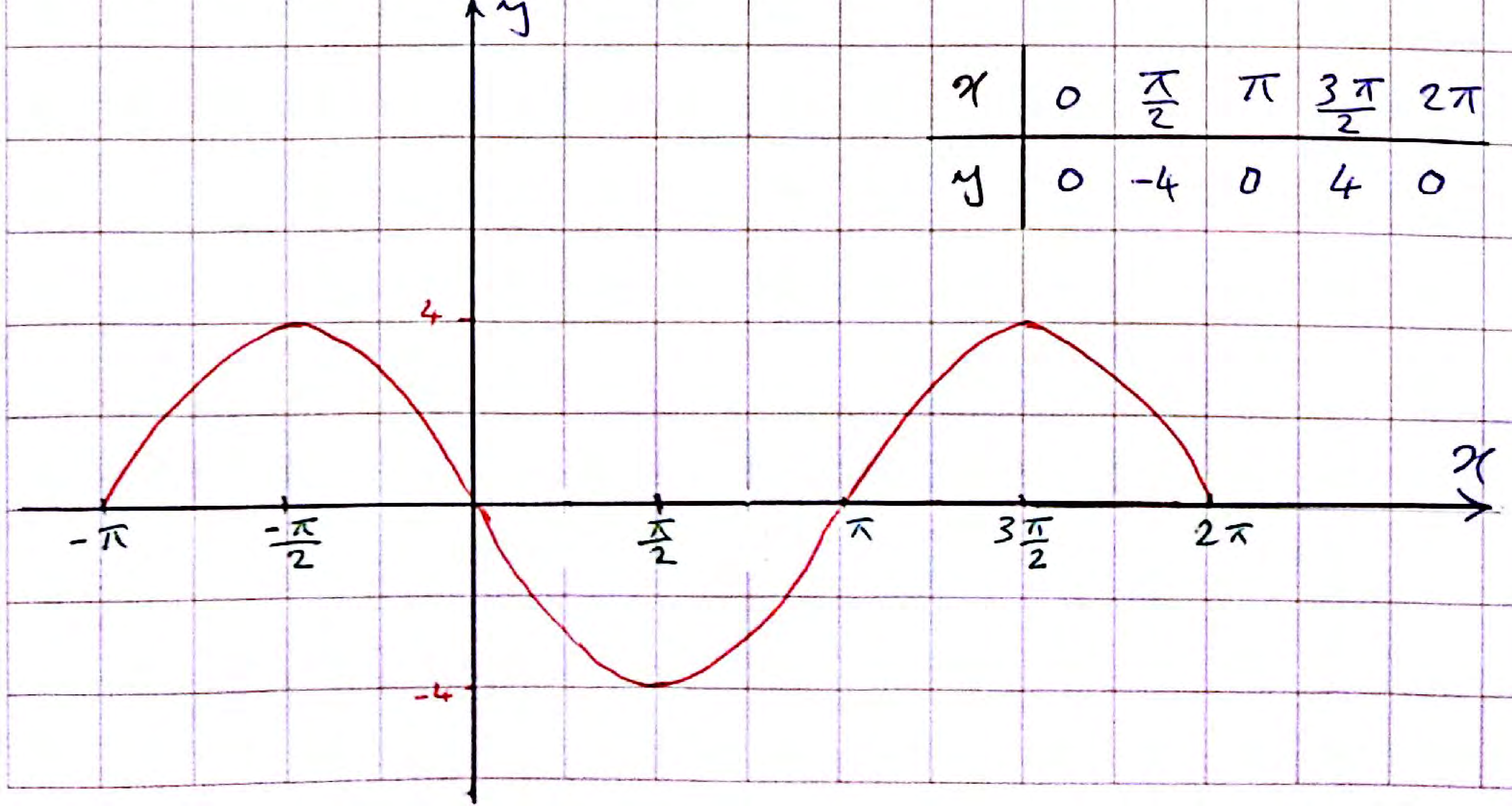
x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

ⓑ $y = -4\sin x \quad : x\,[-\pi , 2\pi]$

السعه $= |-4| = 4$

الدوره $= \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ ، ربع الدوره $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	-4	0	4	0



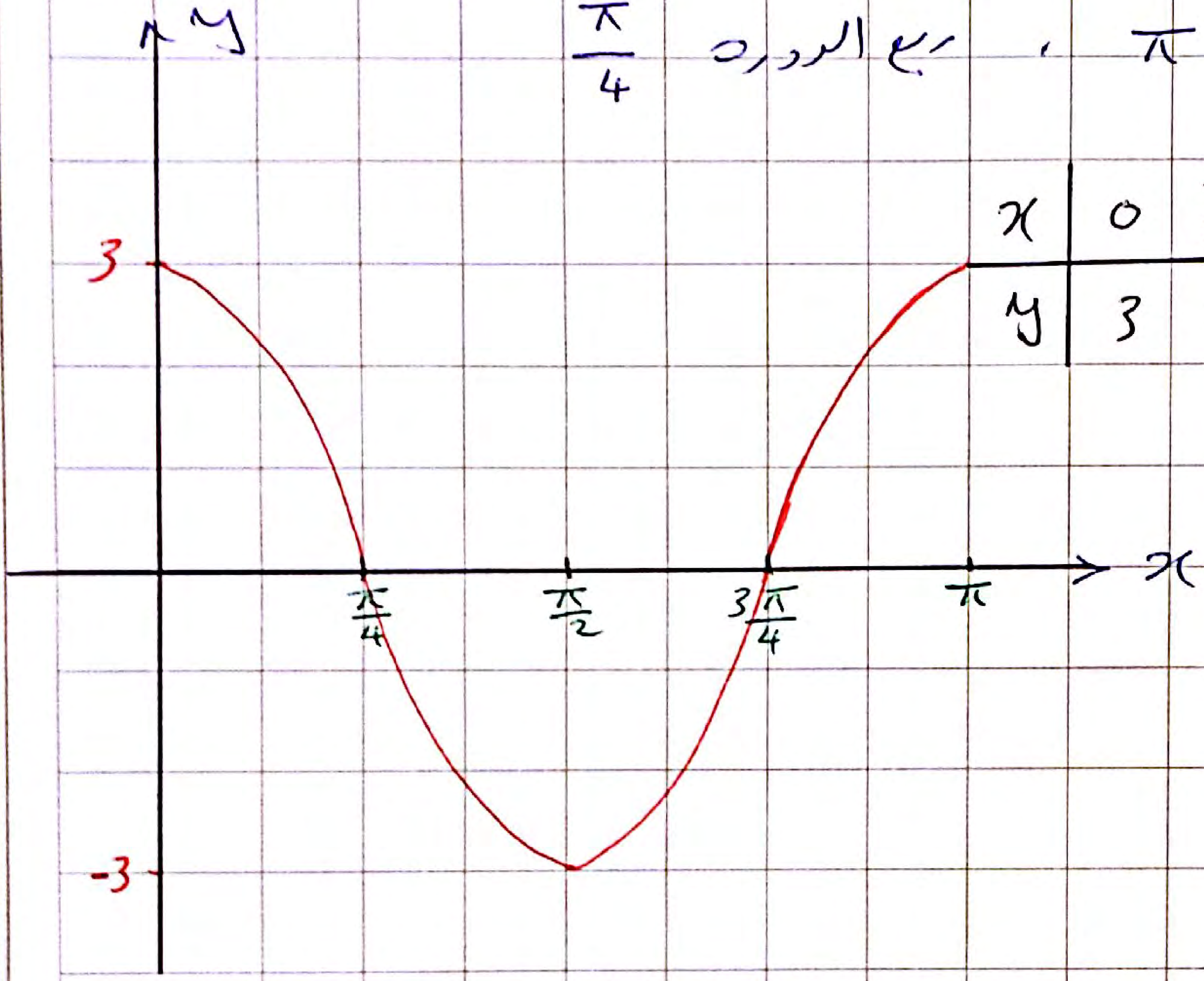
④ اوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانيا P49

ⓐ $y = 3\cos 2x$

السعة = $|3| = 3$

الدورة = $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ، ربع الدورة $\frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	3	0	-3	0	3

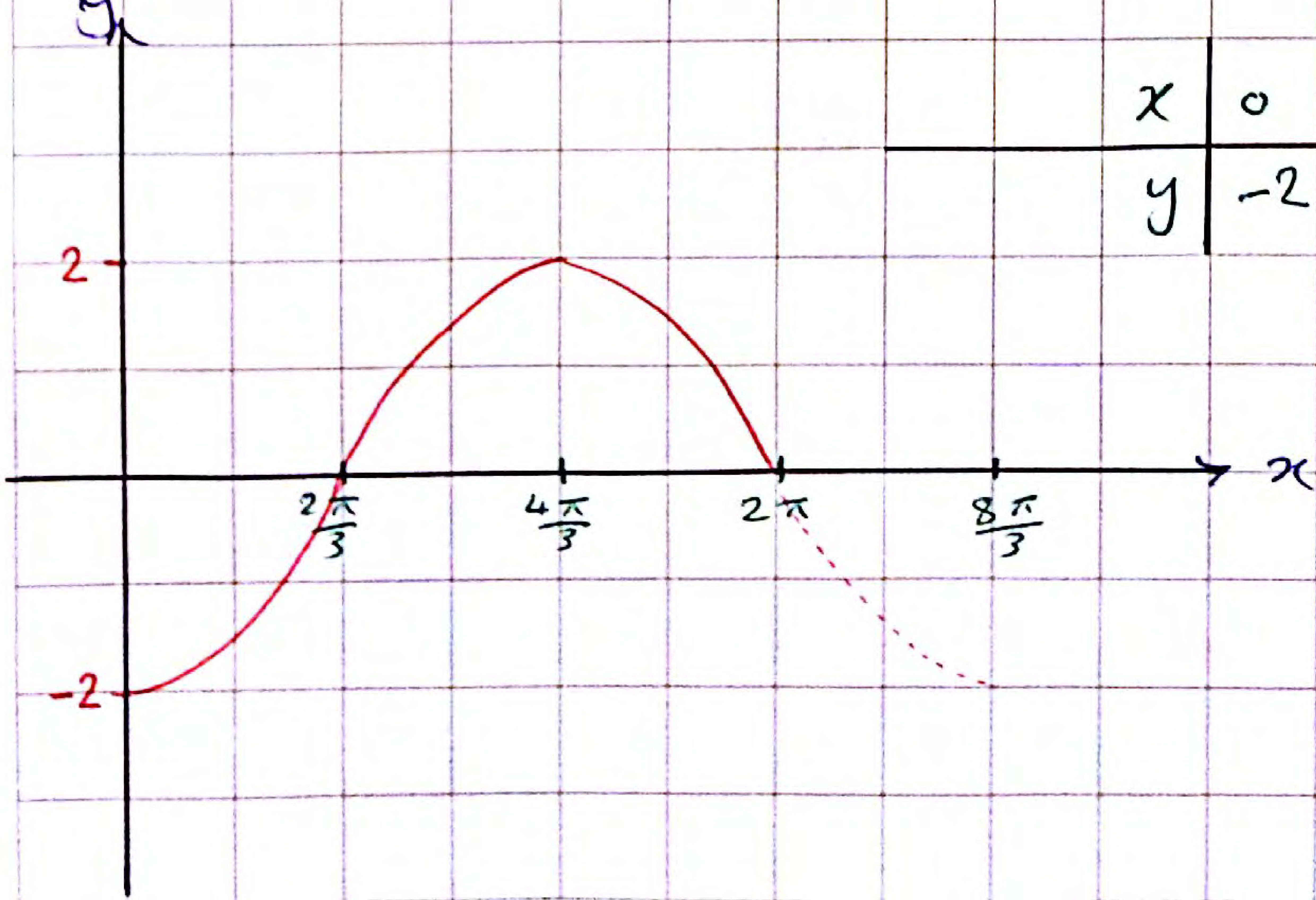


ⓑ $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$ ، $0 \le x \le 2\pi$

السعة = $|-2| = 2$

الدورة = $\frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$ ، ربع الدورة = $\frac{2\pi}{3}$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$
y	-2	0	2	0	-2



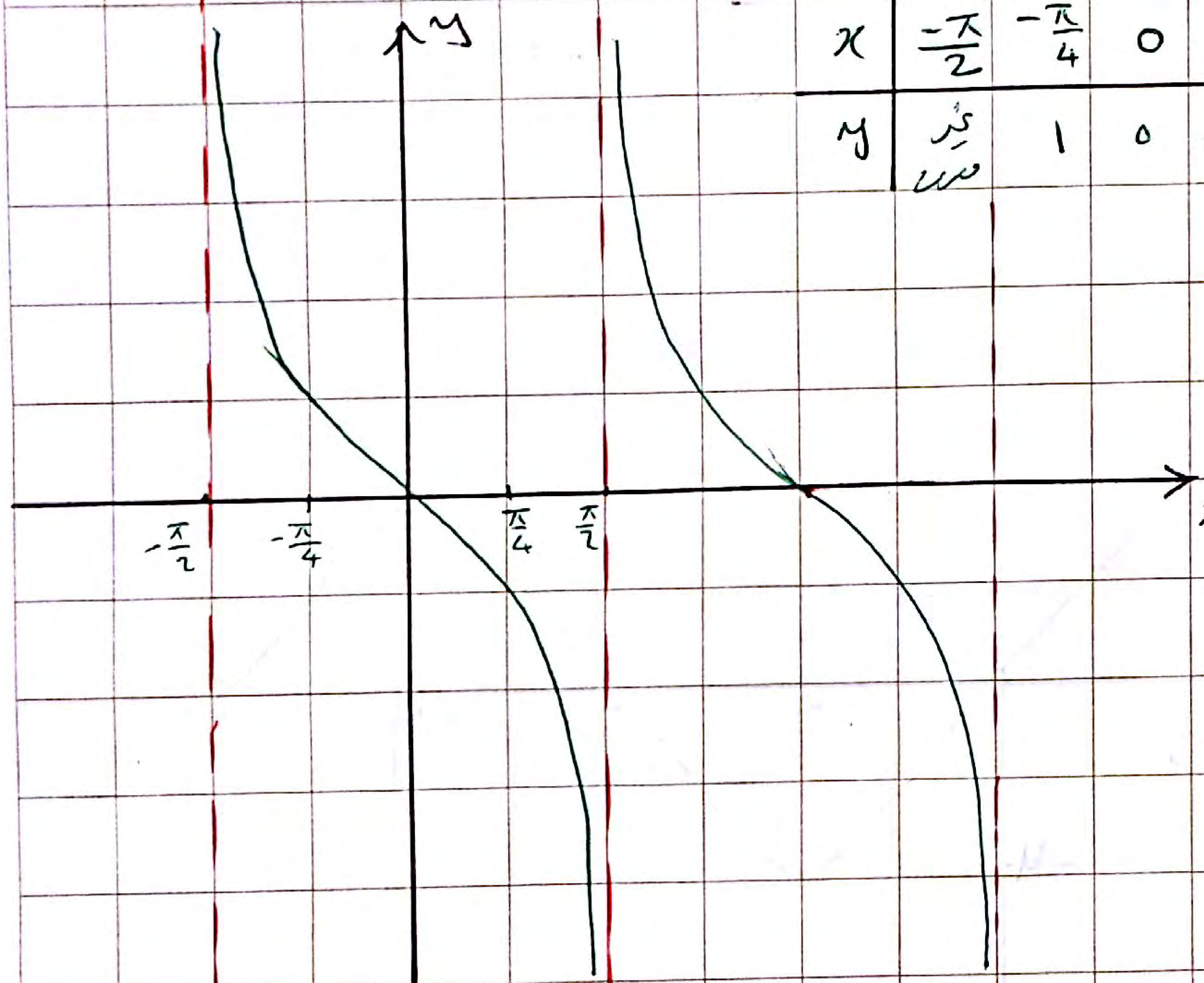
دالة الظل

P.51 ⑤ اوجد الدورة لكل مما يأتي ثم ارسم بيانياً

(a) $y = -\tan x$

الدورة = $\frac{\pi}{1} = \pi$ ربع الدورة = $\frac{\pi}{4}$

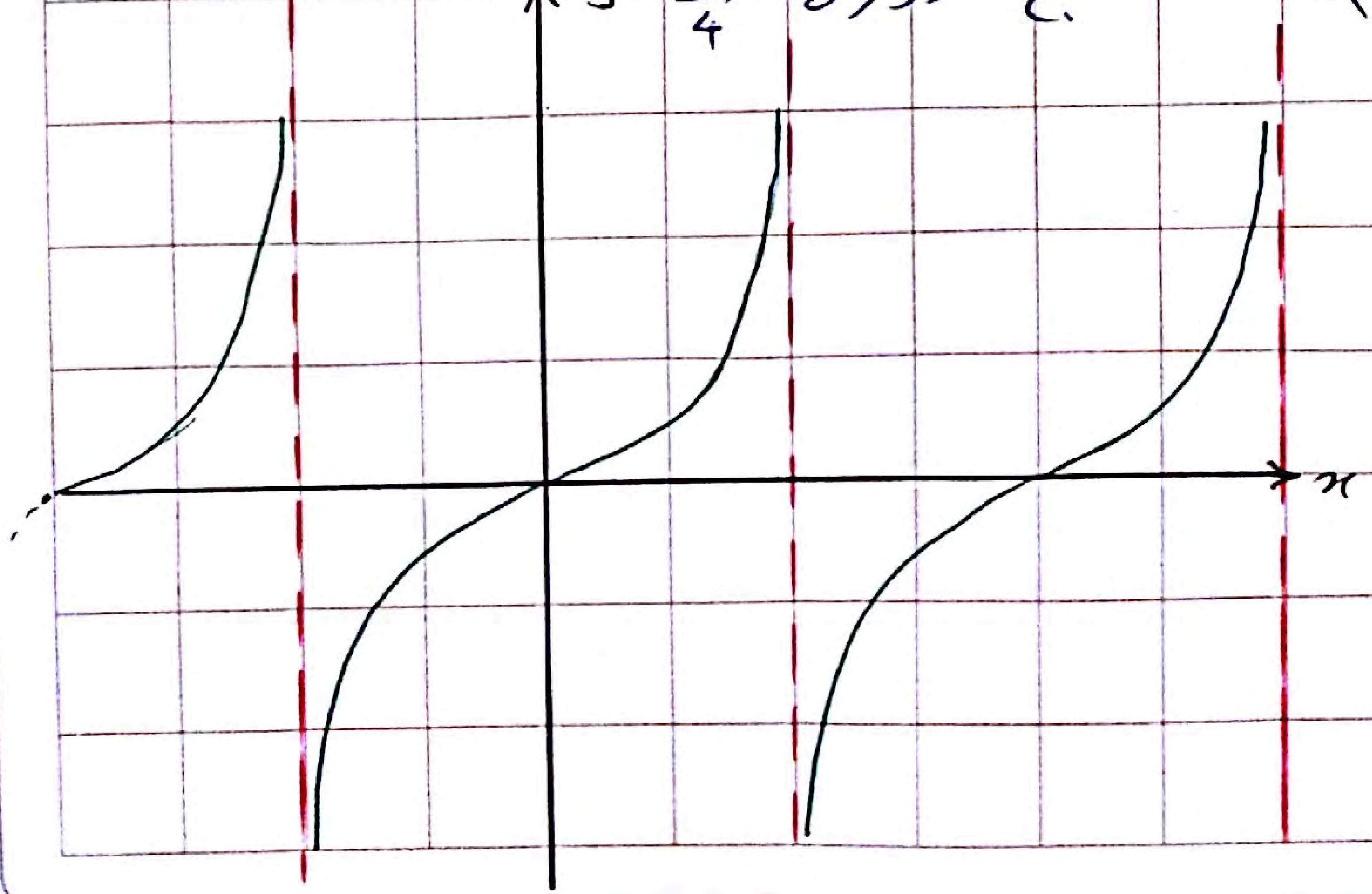
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	غير معرف	1	0	-1	غير معرف



(b) $y = \frac{1}{2}\tan x$

الدورة = $\frac{\pi}{1} = \pi$ ربع الدورة $\frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	غير معرف	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	غير معرف



التمدد/الإنكماش الرأسي

وسعة الدالة الجيبية

P.55 ① صف التمثيل البياني لكل من الدالتين

$y_1 = \sin x$ $\qquad$ $y_2 = \frac{1}{3} \sin x$

سعة الدالة y_2 هو $|a| = |\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$

$\because a < 1$

$\therefore$ التمثيل البياني للدالة $y_2 = \frac{1}{3} \sin x$ هو انكماش رأسي

للدالة $y_1 = \sin x$ بمعامل $\frac{1}{3}$

P.56 صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين

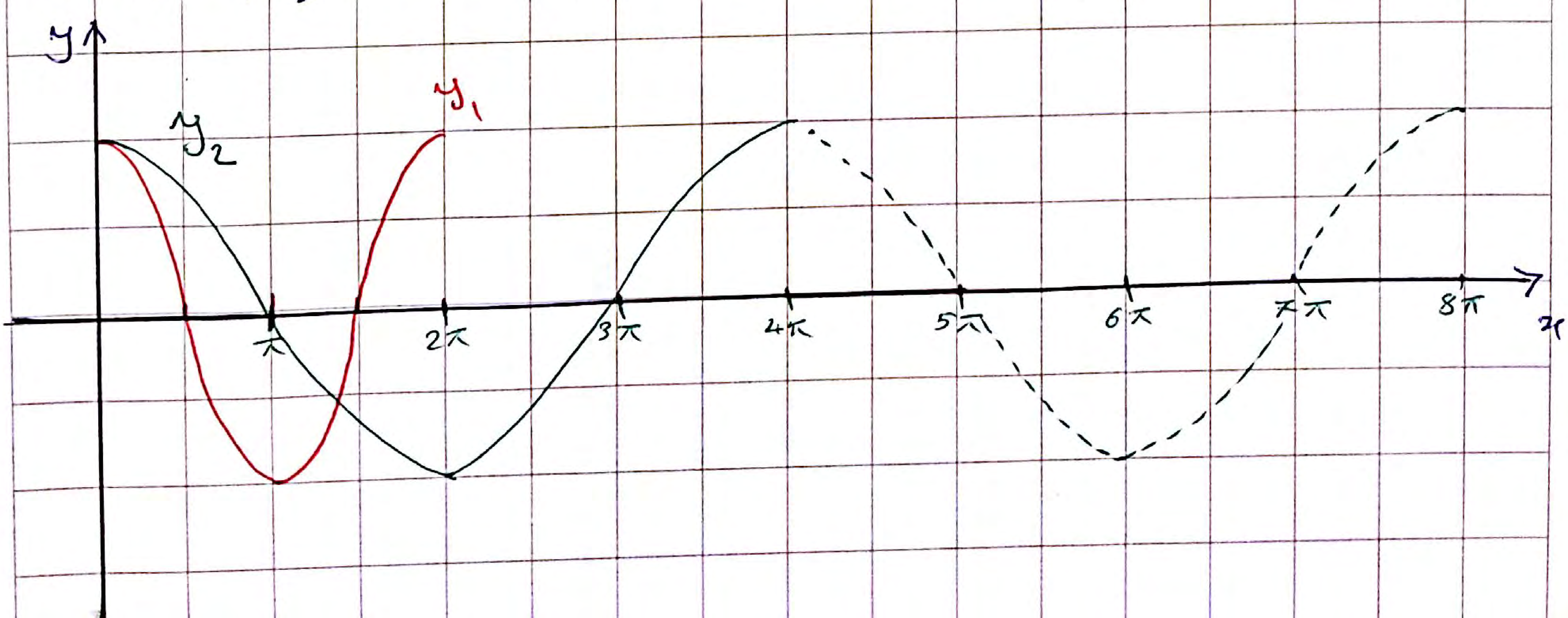
$y_1 = \cos x$

$y_2 = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

y_1 دورة $= 2\pi$

y_2 دورة $= \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

يمكن الحصول على بيان y_2 من بيان y_1 بتمدد أفقي بمعامل $= 4$

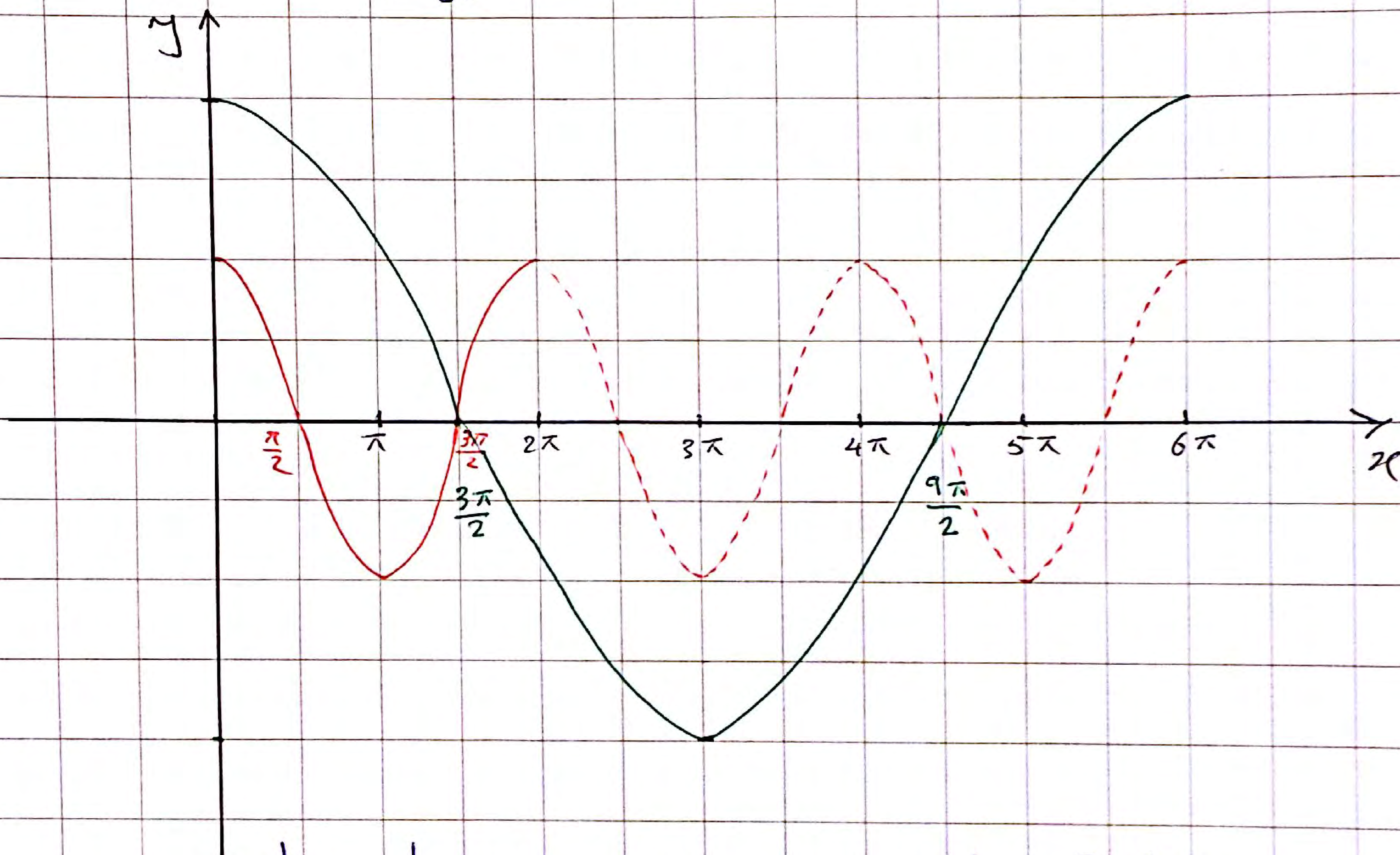


③ صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين P56

$y_1 = \cos x \qquad y_2 = 2\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

y_2 سعة $= 2 \qquad y_1$ سعة $= 1$

y_2 دورة $= \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 6\pi \qquad y_1$ دورة $= 2\pi$



y_2 هي تمديد أفقي لـ y_1 بمعامل : $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 3$

④ صف العلاقة بين التمثيل البياني للدالتين P.58

ⓐ $y_1 = \cos x \qquad y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$y_2 = \cos\left(x - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{3\pi}{4}$ للجهة اليسار

ⓑ $y_1 = \sin 3x \qquad y_2 = \sin(3x - 7)$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة أفقية مقدارها 7 للجهة اليمين

الإزاحة الرأسية:

P59 ⑤ صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين

$y_1 = \frac{3}{4}\sin x$ $\quad$ $y_2 = \frac{3}{4}\sin x + 2$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة رأسية بمقدار 2 نحو الأعلى

لأن $K = 2$

P.61 ⑥ وضح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين عن طريق التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

ⓐ $y = \cos(1-x) + 2$

$y = 1\cos(-1(x-1)) + 2$

$a = 1 \quad b = -1 \quad \frac{h}{b} = 1 \quad K = 2$

∴ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة y من التمثيل البياني للدالة $\cos x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية

① تمدد أفقي بمعامل $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{|-1|} = 1$

② إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار 1

③ تمدد رأسي بمعامل $|a| = 1$

④ إزاحة رأسية إلى أعلى بمقدار $K = 2$

السعة: $|a| = |1| = 1$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ⓑ $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

$y = 2\sin\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{-3\pi}{4}\right)\right) - 1$

$a = 2 \quad b = \frac{1}{3} \quad \frac{h}{b} = \frac{-3\pi}{4} \quad K = -1$

قانون الجيب

① حل المثلث ΔABC حيث P.64

$\alpha = 36^\circ ، \beta = 48^\circ \quad a = 8\ cm$

$\gamma = 180 - (36 + 48) = 96^\circ$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 48}{b} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$b = \frac{8 \sin 48}{\sin 36} = 10.1\ cm$$

$$c = \frac{8 \sin 96}{\sin 36} = 13.5\ cm$$

P.66

② ΔABC ; $a = 7cm \quad b = 6cm \quad \alpha = 26.3^\circ$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin\beta}{6} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{6 \sin 26.3}{7} = 0.37 \Rightarrow \beta = 22.32 \quad or \quad \beta = 157.6$$

مرفوضة

$\gamma = 180 - (26.3 + 22.32) = 131.38^\circ$

$$c = \frac{7 \sin 131.38}{\sin 26.3} = 11.8\ cm$$

(3) $\Delta(ABC)$ $a = 6\ cm$ $b = 7\ cm$ $\alpha = 30^\circ$ P.67

$$\frac{\sin 30}{6} = \frac{\sin\beta}{7} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{7\sin 30}{6} = 0.58 \Rightarrow \beta_1 = 35.6 \quad \text{or} \quad \beta_2 = 144.3$$

المثلث الأول

$$\gamma_1 = 180 - (30 + 35.6) = 114.4$$

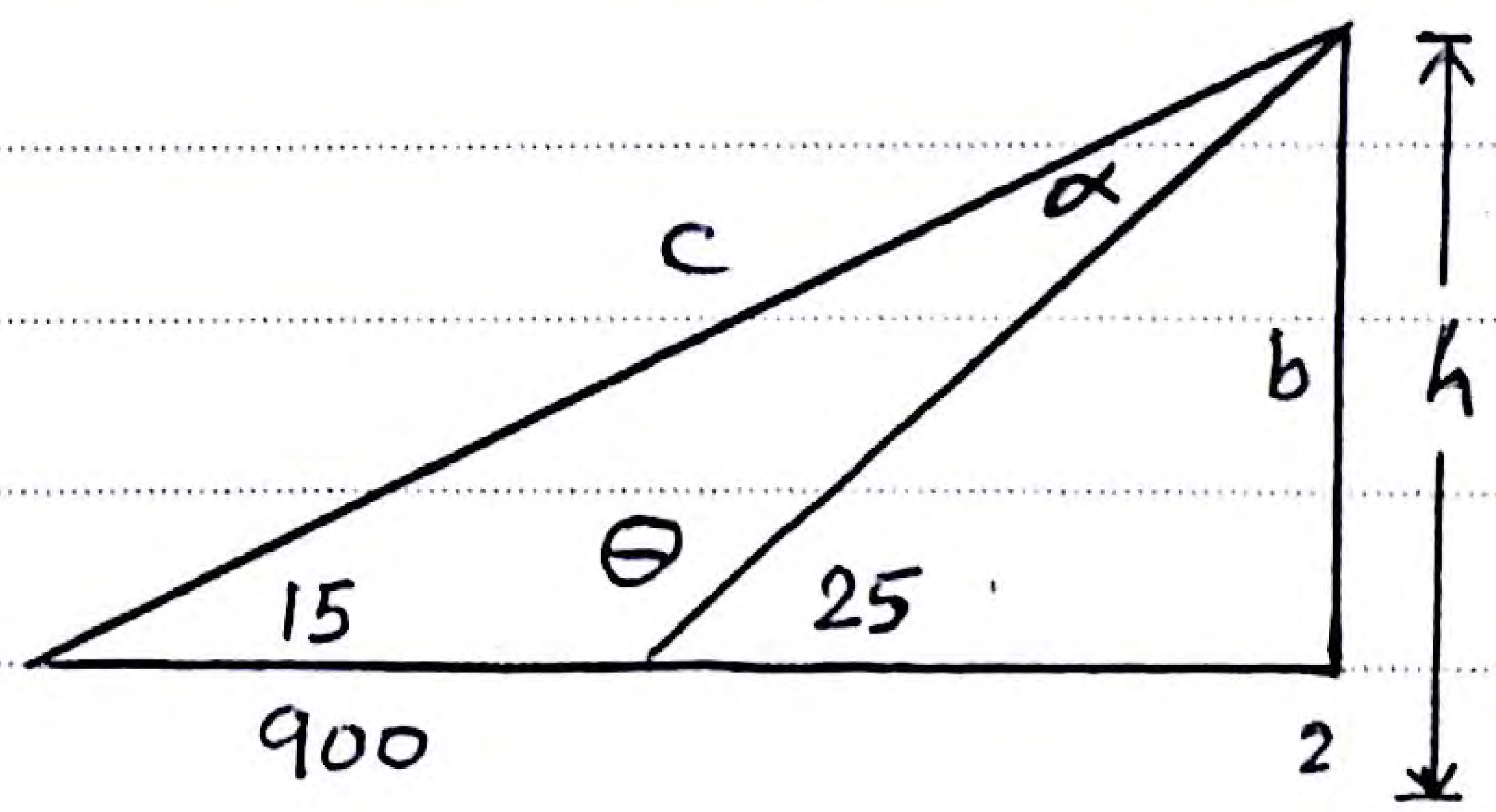
$$c_1 = \frac{6\sin 114.4}{\sin 30} = 10.9\ cm$$

المثلث الثاني

$$\gamma_2 = 180 - (30 + 144.3) = 5.7$$

$$c_2 = \frac{6\sin 5.7}{\sin 30} = 1.19\ cm$$

(4) في مثال (4) اوجد ارتفاع الجبل اذا كان قياس الزاويتين $15^\circ, 25^\circ$ P.68



$$\theta = 180 - 25 = 155^\circ$$

$$\alpha = 180 - (15 + 155) = 10$$

$$\frac{\sin 10}{900} = \frac{\sin 155}{c} \Rightarrow$$

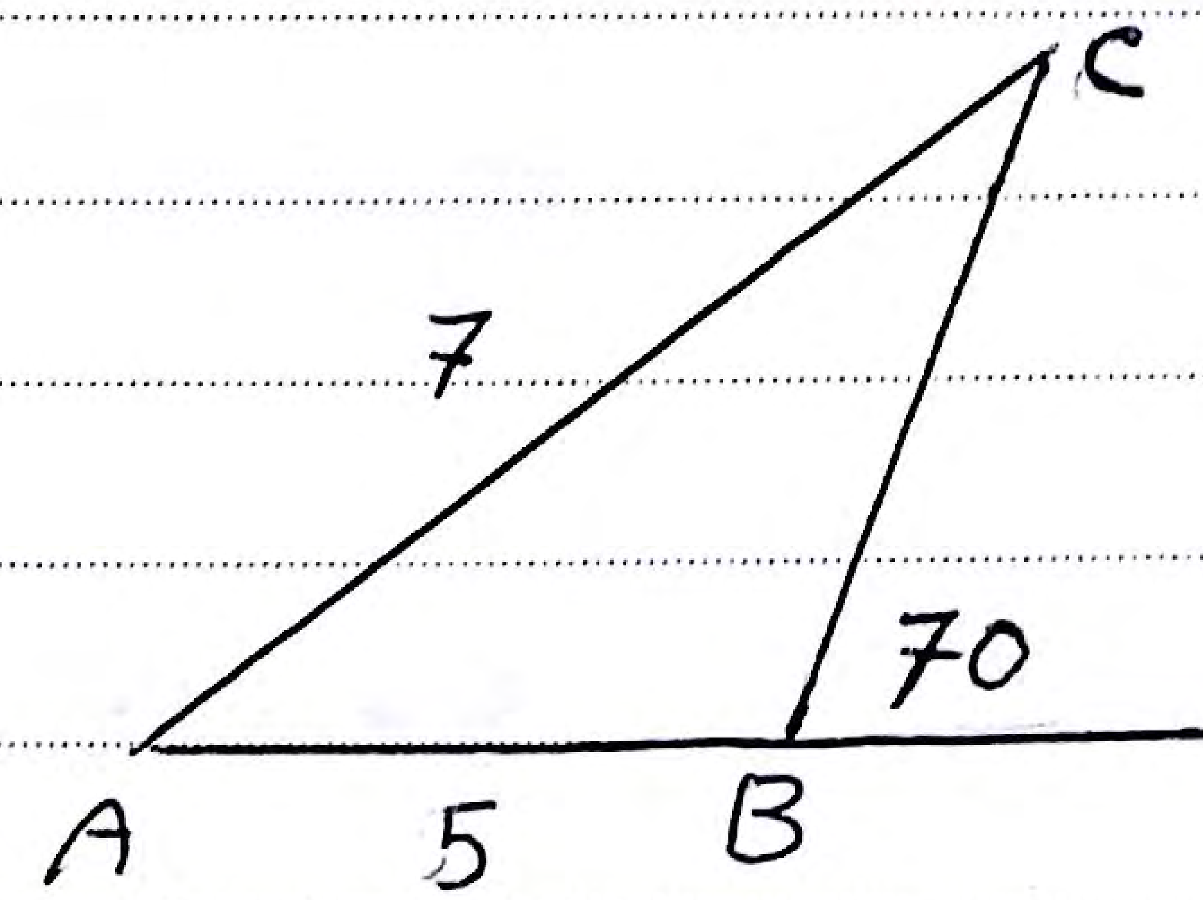
$$c = \frac{900\sin 155}{\sin 10} = 2190.3$$

$$\sin 15 = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 2190.3\sin 15$$

$$= 566.9$$

ارتفاع الجبل $= 566.9 + 2 = 568.9\ m$

⑤ يمثل الشكل المسار لسباق اليخوت اوجد مسافة السباق   P.69



$\beta = 180 - 70 = 110^\circ$

$$\frac{\sin 110}{7} = \frac{\sin \gamma}{5}$$

$$\sin \gamma = \frac{5 \sin 110}{7} = 0.67$$

$\gamma = 42.16^\circ$

$\therefore \alpha = 180 - (110 + 42.16) = 27.83$

$$\frac{\sin 110}{7} = \frac{\sin 27.83}{a}$$

$$a = \frac{7 \sin 27.83}{\sin 110} = 3.5 \text{ K.m}$$

مسافة السباق $= 5 + 3.5 + 7 = 15.5$ K.m

قانون جيب التمام

P.72

① ΔABC $a = 11\ cm$ $b = 5\ cm$ $\gamma = 20°$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$= (11)^2 + (5)^2 - 2(11)(5)\cos 20$$
$$= 42.63 \Rightarrow c = 6.52$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + (6.52)^2 - 11^2}{2(5)(6.52)} =$$
$$= -0.81839$$
$$\alpha = 144.92°$$

$$\beta = 180 - (20 + 144.92) = 15.08°$$

P.72 ② في ΔABC حيث $a = 9\ cm$ $b = 7\ cm$ $c = 5\ cm$

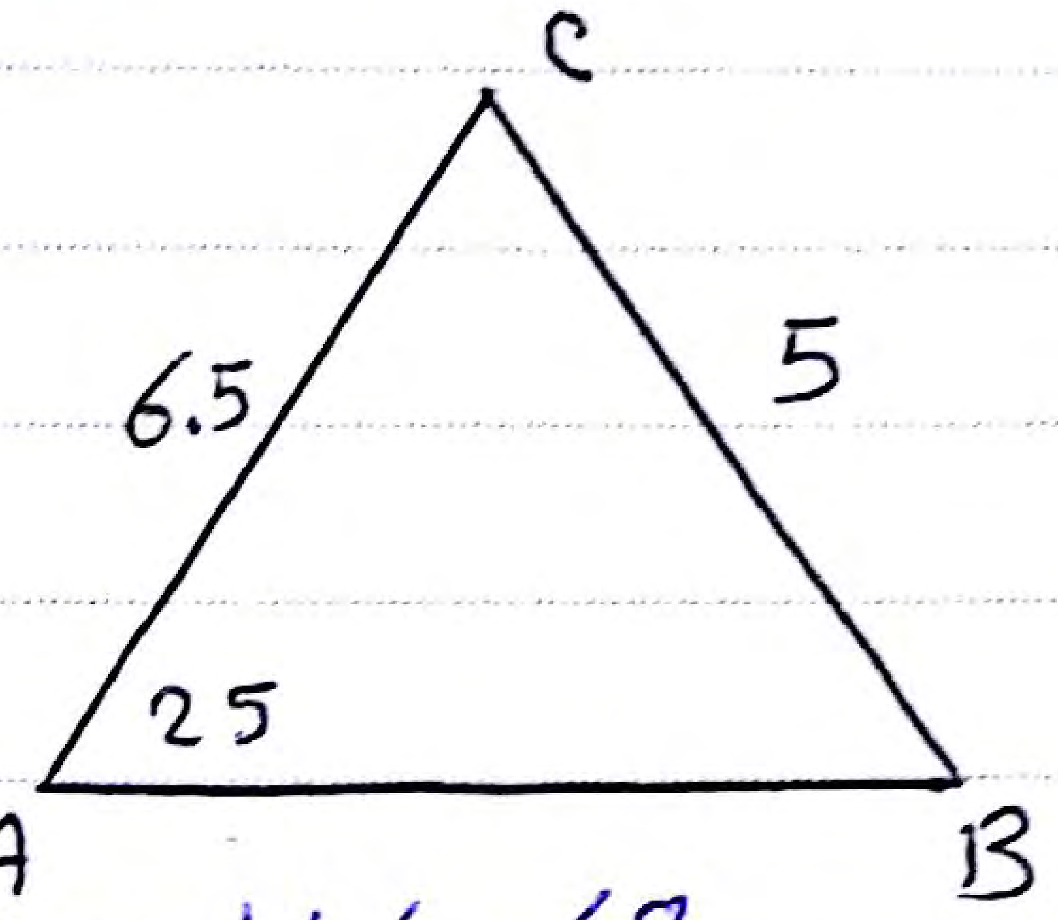
اوجد قياس الزاوية الأكبر

الزاوية الكبرى هي α

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 5^2 - 9^2}{2(7)(5)} = -0.1$$

$$\cos\alpha = -0.1 \Rightarrow \alpha = 95.73°$$

③ في ΔABC $a = 5\,cm$ $b = 6.5\,cm$ $\alpha = 25°$ P. 73



$$\frac{\sin 25}{5} = \frac{\sin \beta}{6.5}$$

$$\sin\beta = \frac{6.5 \sin 25}{5} = 0.54$$

$\beta = 33.32$ or $\beta = 180 - 33.32 = 146.68$

$$\gamma = 180 - (33.32 + 25)$$
$$= 121.67$$

$$\frac{\sin 25}{5} = \frac{\sin 121}{c}$$

$$c = \frac{5 \sin 121}{\sin 25} = 10.1\ cm$$

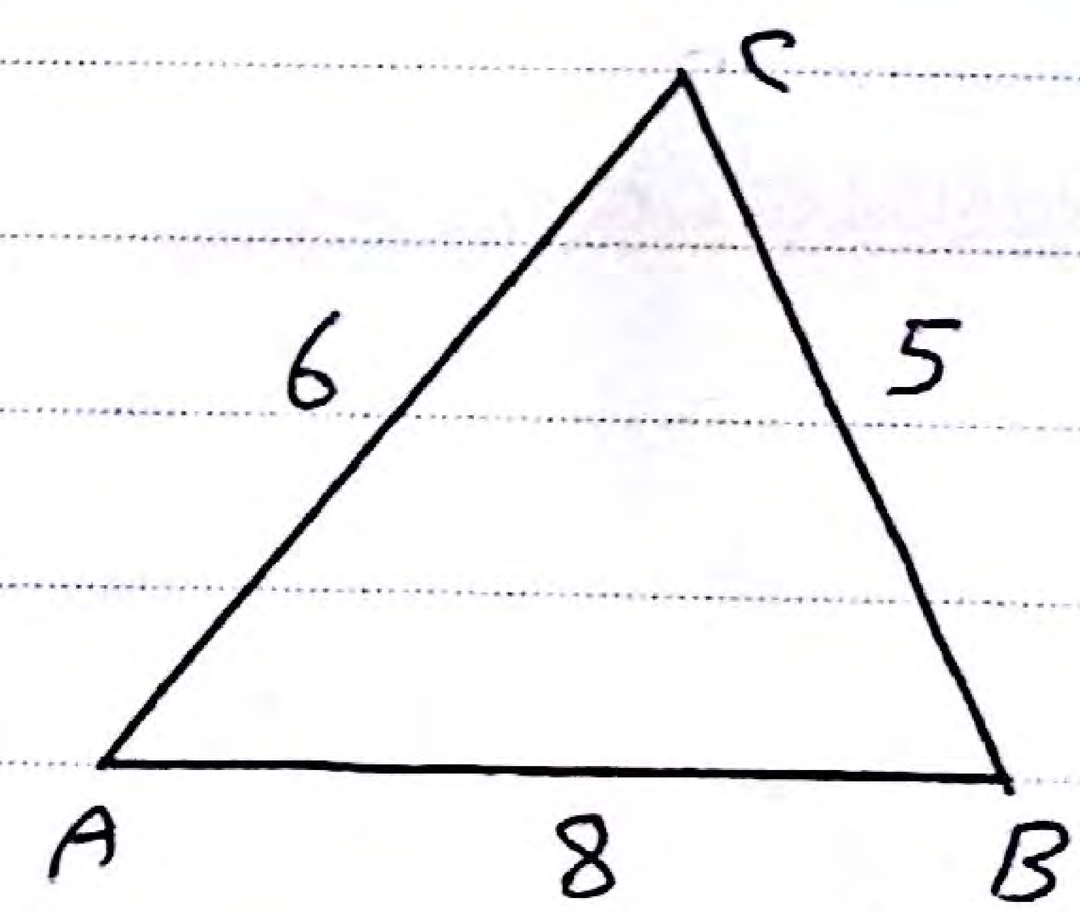
$$\gamma = 8.32$$

$$\frac{\sin 25}{5} = \frac{\sin 8.32}{c}$$

$$c = \frac{5 \sin 8.32}{\sin 25} = 1.7\ cm$$

مساحة المثلث

① اوجد مساحة المثلث ABC حيث $c = 8\,cm$ $b = 6\,cm$ $a = 5\,cm$ P.75



$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 6^2 - 8^2}{2(5)(6)}$$

$$= -0.05$$

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$$

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - (-0.05)^2} = 0.998$$

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}\, a \cdot b \sin\gamma$$
$$= \frac{1}{2}(5)(6)(0.998) = 14.97\ cm^2$$

قاعدة هيرون

② اوجد مساحة المثلث ABC حيث : P.75

$a = 4cm \quad b = 4cm \quad c = 3cm$

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(4+4+3) = 5.5$$

$$Area = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$
$$= \sqrt{5.5(5.5-4)(5.5-4)(5.5-3)}$$
$$= 5.56$$

③ في المثال (3) هل يسمح لمركب شراعه على شكل مثلث ابعاده $4m, 4m, 6m$ بالإشتراك في المسابقة؟ P.76

$$S = \frac{1}{2}(4+4+6) = 7$$

$$Area = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{7(7-4)(7-4)(7-6)}$$

$$= 7.937$$

∴ هذا المركب لا يسمح له بالمشاركة لأنه

$$7.937 > 7.5$$

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

حاول أن تحل

1 بسّط المقادير التالية:

a $3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta$

$= 3(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= 3 \times 1$

$= 3$

b $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$

$= \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta)$

$= \cos^2\theta \times \sec^2\theta$

$= \cos^2\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta}$

$= 1$

حاول أن تحل

2 بسّط التعبير المثلثي التالي:

$\sec\theta \cot\theta$

$= \frac{1}{\cancel{\cos\theta}} \times \frac{\cancel{\cos\theta}}{\sin\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta}$

$= \csc\theta$

حاول أن تحل

3 بسّط المقادير التالية:

a $\cos^2 x(1+\tan^2 x)$

$= \cos^2 x \cdot \sec^2 x$

$= \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

$= 1$

b $\frac{1-\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1-\cos x}$

$= \frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{\sin x(1-\cos x)} + \frac{\sin x \cdot \sin x}{\sin x(1-\cos x)}$

$= \frac{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}$

$= \frac{1-2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}$

$= \frac{1-2\cos x+1}{\sin x(1-\cos x)}$

$= \frac{2-2\cos x}{\sin x(1-\cos x)} = \frac{2\cancel{(1-\cos x)}}{\sin x\cancel{(1-\cos x)}}$

$= \frac{2}{\sin x} = 2\csc x$

حاول أن تحل

4 بسّط المقدار:

$$\tan x \cot x - \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \sin^2 x$$

$$= 1 - \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x$$

5 بسّط المقدار التالي: $\frac{\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)}{\sec(-\theta)}$

$$= \frac{(\sec\theta)^2 - (-\tan\theta)^2}{\sec\theta}$$

$$= \frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{\sec\theta}$$

$$= \cos\theta$$

حاول أن تحل

6 اكتب $\sin^4 x - \sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

$$\sin^4 x - \sin^2 x$$
$$= \sin^2 x(\sin^2 x - 1)$$
$$= \sin^2 x(\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

7 حلّل المقدار: $\sin^2 x - \frac{5}{4}\sin x + \frac{3}{8}$

الحل

$$\sin^2 x - \frac{5}{4}\sin x + \frac{3}{8}$$
$$= \left(\sin x - \frac{3}{4}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$$

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

حاول أن تحل 1 أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+1+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{1+1+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\cancel{(1+\cos\theta)}}{\cancel{(1+\cos\theta)}\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

2 أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\tan x\bullet\sec x$$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)-(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$=\frac{(1+2\sin x+\sin^2 x)-(1-2\sin x+\sin^2 x)}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x-1+2\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{4\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{4\sin x}{\cos^2 x}=4\,\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=4\tan x\cdot\sec x$$

3 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$

$$(\csc x-\cot x)^2=\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1-\cos x)}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

4 أثبت أن: $\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$

$$\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=(\sec x+\tan x)\div(\cot x+\cos x)$$

$$=\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)\div\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\cos x\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\div\left(\frac{\cos x+\cos x\sin x}{\sin x}\right)$$

$$=\frac{1+\sin x}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x+\cos x\sin x}$$

$$=\frac{\cancel{1+\sin x}}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x\cancel{(1+\sin x)}}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\sin x\times\frac{1}{\cos^2 x}=\sin x\sec^2 x=\sin x(1+\tan^2 x)=$$

$= \sin x + \sin x \tan^2$

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

إرشاد: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) - 2\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

حاول أن تحل

1 حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

الحل

$\sqrt{2}\cos x = 1$

$\therefore \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\therefore \cos\alpha = |\cos x| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

$\because \cos x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الرابع	عندما x تقع في الربع الأول
$x = (2\pi - \frac{\pi}{4}) + 2K\pi,\ K \in Z$ $x = \frac{7\pi}{4} + 2K\pi$	$x = \frac{\pi}{4} + 2K\pi,\ K \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{4} + 2K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{4} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

الحل

$$5\sin\theta - 3 = \sin\theta$$
$$5\sin\theta - \sin\theta = 3$$
$$4\sin\theta = 3$$
$$\therefore \boxed{\sin\theta = \frac{3}{4}}$$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية θ

$$\sin\alpha = |\sin\theta| = \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$$
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 48.59^\circ$$
$$\alpha \approx 0.85 \text{ radians}$$
$$\because \sin\theta > 0$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما θ تقع في الربع الأول

$$\theta = \alpha$$
$$\theta \approx 0.85 + 2K\pi, \quad K \in Z$$

عندما θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = (\pi - \alpha) + 2K\pi, \quad K \in Z$$
$$\theta \approx (\pi - 0.85) + 2K\pi$$
$$\theta \approx 2.29 + 2K\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة:

$$\theta \approx 0.85 + 2K\pi$$

أو $\theta \approx 2.29 + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $\tan x = 1$

الحل

$\tan x = 1$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan \alpha = |\tan x| = 1$

$\alpha = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$

$\therefore \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

$\because \tan x > 0$

$\therefore$ x تقع فى الربع الأول أو فى الربع الثالث .

ولكن الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\tan(\pi + x) = \tan x$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{\pi}{4} + K\pi$

حيث $K \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

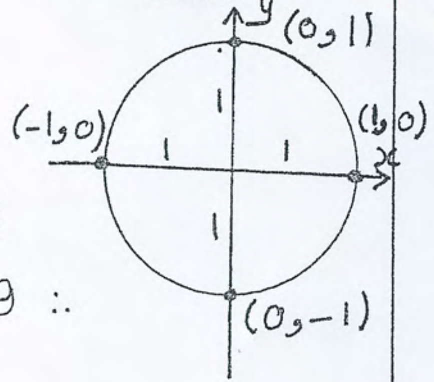
الحل

$\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - 1 = 0$

$\sin\theta = 1$



$\sin\theta = 1$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ ، $K \in \mathbb{Z}$

أو

$\cos\theta = 0$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ ، $K \in \mathbb{Z}$

أو $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة :

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

أو $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$

حيث $K \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

الحل

$$\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$$

$$(\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0$$

$\cos x = -1$ أو $\cos x = -2$

$\cos x = -2$

$y = \cos x$ مداها $[-1, 1]$

$\therefore -2 \notin [-1, 1]$

$\therefore \cos x = -2$ ليس لها حل

$\cos x = -1$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\cos\alpha = |\cos x| = |-1| = 1$

$\therefore \alpha = 0$

$\cos x < 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

* عندما x تقع في الربع الثاني

$x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, k \in Z$

$x = \pi + 2k\pi$

* عندما x تقع في الربع الثالث

$x = (\pi + \alpha) + 2k\pi, k \in Z$

$x = \pi + 2k\pi$

أو حل آخر: $\cos x = -1$

$\therefore$ x زاوية ربعية

$\therefore x = \pi$

$\therefore x = \pi + 2k\pi, k \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة:

$$x = \pi + 2k\pi \quad , k \in Z$$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة: $4\cos 2x = 2$ حيث $0^\circ \le x < 360^\circ$

الحل

$$4\cos 2x = 2$$
$$0^\circ \leqslant x < 360^\circ$$
$$0^\circ \leqslant x < 2\pi$$
$$0^\circ \leqslant 2x < 4\pi$$

$\therefore$ $2x$ تقع في دورتين

$4\cos 2x = 2 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية $2x$

$\therefore \cos\alpha = |\cos 2x| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}}$

$\cos 2x > 0 \Leftarrow$ $\therefore$ $2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $2x$ تقع في الربع الأول

$2x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + K\pi}$

$K=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi$

$x = \frac{7\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi$

$x = \frac{13\pi}{6}$ و $\frac{13\pi}{6} \notin [0, 2\pi)$

عندما $2x$ تقع في الربع الرابع

$2x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2K\pi$

$2x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi$

$\boxed{x = \frac{5\pi}{6} + K\pi}$

$K=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$

$\frac{11\pi}{6} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$

$x = \frac{17\pi}{6}$ و $\frac{17\pi}{6} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{7\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ و $x = \frac{11\pi}{6}$

تدريب إثرائي

حل المعادلة: $4\cos^2 2x = 1$

الحل

$$4\cos^2 2x = 1$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{4}$$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ أو $\cos 2x = \frac{-1}{2}$

أو

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α_1 هي زاوية الاسناد للزاوية $2x$

$\therefore \cos\alpha_1 = |\cos 2x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\boxed{\alpha_1 = \frac{\pi}{3}}$

$\because \cos 2x > 0 \quad \therefore 2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $2x$ تقع في الربع الأول:

$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in Z$

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

عندما $2x$ تقع في الربع الرابع

$2x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi , k \in Z$

$2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$\cos 2x = \frac{-1}{2}$

نفرض أن α_2 هي زاوية الاسناد للزاوية $2x$

$\therefore \cos\alpha_2 = |\cos 2x| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\boxed{\therefore \alpha_2 = \frac{\pi}{3}}$

$\because \cos 2x < 0 \quad \therefore 2x$ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث

عندما $2x$ تقع في الربع الثاني

$\therefore 2x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \ , \ k \in Z$

$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

عندما $2x$ تقع في الربع الثالث

$\therefore 2x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \ , k \in Z$

$2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة:

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ و $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ و

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ و $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$

مثال (7) تطبيقات

لعبة مربوطة بنابض شد إلى الأسفل ثم أفلت من سكون.

تنمذج المعادلة : $h = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$، ارتفاع اللعبة بالسنتيمترات (cm) أعلى أو أدنى من مستوى الاتزان كدالة في الزمن t بالثواني.

متى تكون اللعبة لثاني مرة أدنى من مستوى الاتزان بـ 5 cm؟

الحل

$h = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

بالتعويض عن h بـ 5 -

$-5 = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد :

$\therefore \cos\alpha = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\boxed{\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) > 0$

∴ الزاوية تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما تقع الزاوية في الربع الأول

$\frac{2\pi}{3}t = \frac{\pi}{3}$

$\therefore t = \frac{\pi}{3} \times \frac{3}{2\pi} = \frac{1}{2}$

أو

عندما تقع الزاوية في الربع الرابع

$\frac{2\pi}{3}t = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}t = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore t = \frac{5\pi}{3} \times \frac{3}{2\pi} = \frac{5}{2} = 2.5$

∴ تكون اللعبة لثاني مرة أدنى من مستوى الاتزان بـ 5 Cm بعد ثانيتين ونصف الثانية

ص 100

(1)

أثبت أن: $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$

الحل

الطرف الأول

$$\cos\left[\theta - \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \sin\theta$$

الطرف الثاني

$b - a = -(a - b)$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

ص 101

(2) أثبت أن: $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \csc\theta$

الطرف الأول

$$\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sec\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

الطرف الثاني

$b - a = -(a - b)$

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

ص 103

(3)

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a) $\sin 15^\circ$ b) $\cos 75^\circ$ c) $\tan 105^\circ$

a) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(b) $\cos 75^\circ$

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$\cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(c) $\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$

$\tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$

$= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$

ص 104

إذا كان: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos \beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًا مما يلي:

a. $\cos(\alpha + \beta)$

الحل

نوجد أولًا $\cos\alpha , \sin\beta , \tan\alpha , \tan\beta$

متطابقة فيثاغورث $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

بالتعويض

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = \frac{-3}{5}$ أو $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}$

متطابقة فيثاغورث

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$\sin^2\beta + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$

$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$

$\sin\beta = \frac{5}{13}$ أو $\sin\beta = -\frac{5}{13}$

$\because \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$

$\therefore \sin\beta = -\frac{5}{13}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$

a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{-5}{13}$$

$$= \frac{-36+20}{65} = \frac{-16}{65}$$

b) $\tan(\alpha+\beta)$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha \times \tan\beta}$$

$$= \frac{4/3 + \frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{5}{12}} = \frac{63}{16}$$

c) $\sin(\beta-\alpha)$

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$$

$$= \frac{-5}{13}\times\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\times\frac{-12}{13}$$

$$= \frac{33}{65}$$

وزارة التربية _ منطقة الجهراء التعليمية _ التوجيه الفني للرياضيات _ مدرسة ثانوية الجهراء بنات _ ورشة الصف الحادي عشر علمي

بند (5 - 9)

ص 105

① أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

الطرف الأول

$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta)$

$= \cos\theta \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \sin\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

بالتعويض من متطابقة فيثاغورث $\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

الطرف الثاني

ص 106

② إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$= 1 - 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{50}{169}$

$\cos 2x = \frac{119}{169}$

ص 106

3 إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\therefore \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2\theta = \frac{16}{25}$$

$$\sin\theta = \frac{4}{5} \quad \text{أو} \quad \sin\theta = -\frac{4}{5}$$

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

ص 107

4 إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\times\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2}$$

$$\tan 2\theta = -\sqrt{3}$$

ص 107

5 أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

الطرف الأول

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ بالضرب ×2

$2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

= الطرف الثاني

ص 108

6 أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

الطرف الأول

$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$

$= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta$

$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta$

$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

الطرف الثاني

ص 109

7 استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15°$

$$\cos 15° = \cos\left(\frac{30}{2}\right)$$

$$0° < 15° < 90°$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm 0.9659$$

$$\cos 15° = 0.9659$$

ص 109

8 في المثال (8)، أوجد: $\cos\frac{\theta}{2}$, $\tan\frac{\theta}{2}$

$$\sin\theta = -\frac{24}{25} \qquad \cos\theta = \frac{-7}{25} \qquad \because 180° < \theta < 270°$$

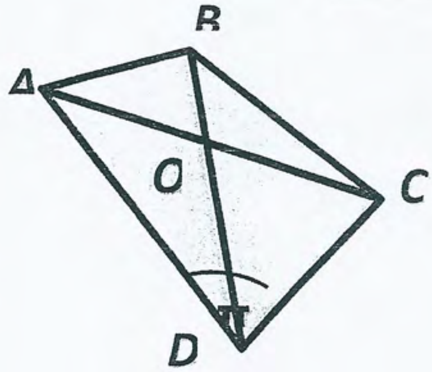
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{24}{25} \times \frac{25}{-7} = \frac{24}{7} \qquad \therefore 90° < \frac{\theta}{2} < 135°$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}} = -\frac{4}{3}$$

حاول أن تحل الكتاب صفحة 119رقم (1)



في الشكل المقابل $\overline{AC}, \overline{BD}$ يتقاطعان في O

تقع جميعها في مستوٍ واحد $ABCD$أثبت أن أضلاع الرباعي

المعطيات $\overline{AC}, \overline{BD}$ يتقاطعان في O

المطلوب أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد

البرهان $\because$ $\overline{AC}, \overline{BD}$ يتقاطعان في O

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π

$\because$ النقطتين A, B تتنميان إلى المستوي π $\Longleftarrow$ $\overline{AB} \subset \pi$

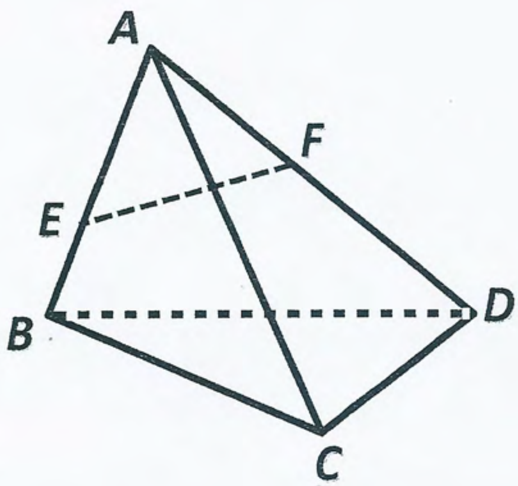
$\because$ النقطتين B, C تتنميان إلى المستوي π $\Longleftarrow$ $\overline{BC} \subset \pi$

$\because$ النقطتين C, D تتنميان إلى المستوي π $\Longleftarrow$ $\overline{CD} \subset \pi$

$\because$ النقطتين D, A تتنميان إلى المستوي π $\Longleftarrow$ $\overline{DA} \subset \pi$

$\therefore$ أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد

حاول أن تحل الكتاب صفحة 122رقم (2)



المعطيات $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة .

المطلوب $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD)

البرهان $\overleftrightarrow{EF} \not\parallel \overleftrightarrow{BD}$

$$\overleftrightarrow{EF} \subset (ABD)\ ,\ \overleftrightarrow{BD} \subset (ABD) \Longrightarrow \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{H\}$$

$$\overleftrightarrow{BD} \subset (BCD) \Longrightarrow H \in (BCD)\ ,\ E \notin (BCD)$$

$\overleftrightarrow{EF}$ يشترك مع (BCD) في نقطة واحدة

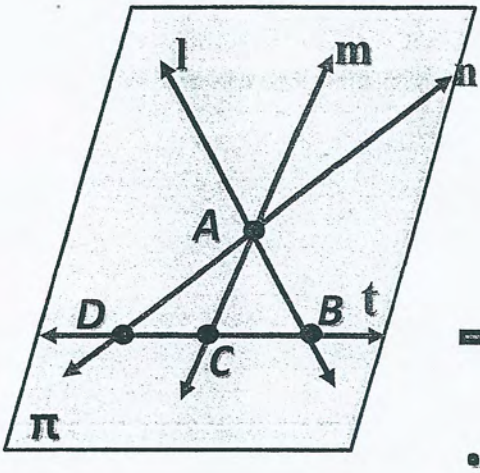
$\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD)

حاول أن تحل الكتاب صفحة 123رقم (3)

المعطيات $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A .

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B , C , D على الترتيب .

المطلوب أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد .



البرهان

$A \notin \overleftrightarrow{t}$

$\longrightarrow$ $A , \overleftrightarrow{t}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π

$\therefore \quad A , B , C , D \in \pi$

$A , B \in \pi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \subset \pi$

$A , C \in \pi \Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

$A , D \in \pi \Longrightarrow \overleftrightarrow{n} \subset \pi$

$\therefore$ المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد .

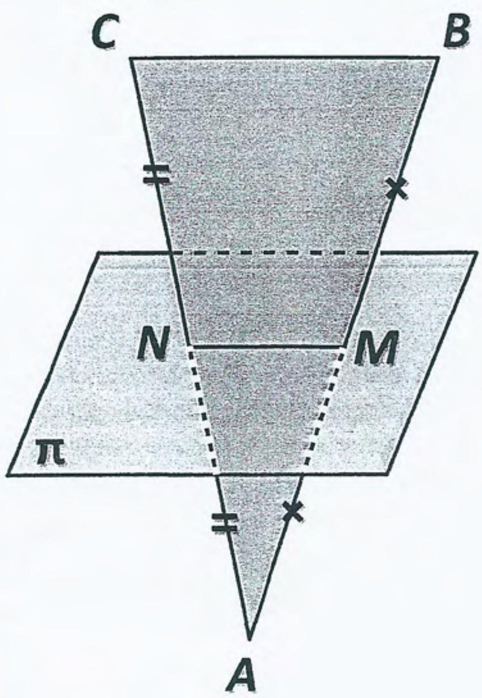
حاول أن تحل الكتاب صفحة 125رقم (1)

المعطيات المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$

M , N تنتميان إلى المستوي π .

المطلوب إثبات أن : $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$

البرهان $\because$ M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$



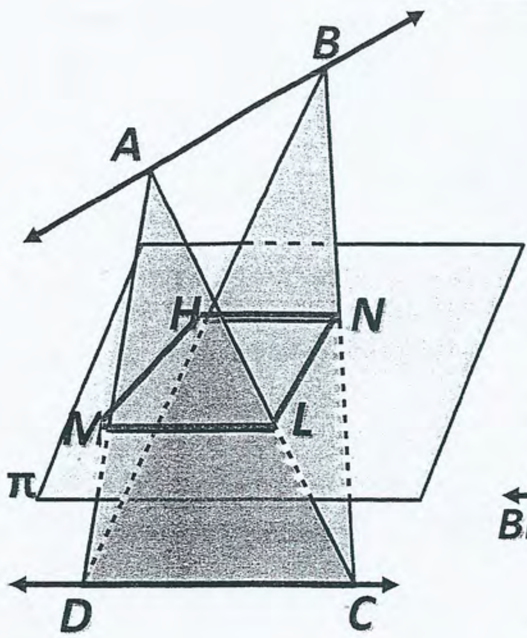
$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ——— $\boxed{1}$

$\because$ M , N تنتميان إلى المستوي π

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \subset \pi$ ——— $\boxed{2}$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$

حاول أن تحل الكتاب صفحة 126رقم (2)



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متخالفان , $\overleftrightarrow{CD} // \pi$

$\overleftrightarrow{AB} // \pi$,

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$,

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$

المطلوب أثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع

البرهان $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ مستقيمان متقاطعان فى A فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ADC)

$$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\},\ \overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\} \Longrightarrow (ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$$

$$\because \overleftrightarrow{CD} // \pi,\ \overleftrightarrow{CD} \subset (ADC)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{ML} \quad \text{———} \boxed{1}$$

$\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ مستقيمان متقاطعان فى B فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (BDC)

$$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\},\ \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\} \Longrightarrow (BDC) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$$

$$\because \overleftrightarrow{CD} // \pi,\ \overleftrightarrow{CD} \subset (BDC)$$

$$\therefore \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{HN} \quad \text{———} \boxed{2}$$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{NM} // \overleftrightarrow{NH}$

$\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ مستقيمان متقاطعان فى C فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ABC)

$\because \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$ ، $\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\} \Longrightarrow (ABC) \cap \pi = \overleftrightarrow{NL}$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (ABC)$

$\therefore \boxed{\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{LN}}$ —— $\boxed{1}$

$\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AD}$ مستقيمان متقاطعان فى D فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ABD)

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$, $\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\} \Longrightarrow (ABD) \cap \pi = \overleftrightarrow{MH}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (ABD)$

$\therefore \boxed{\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MH}}$ —— $\boxed{2}$

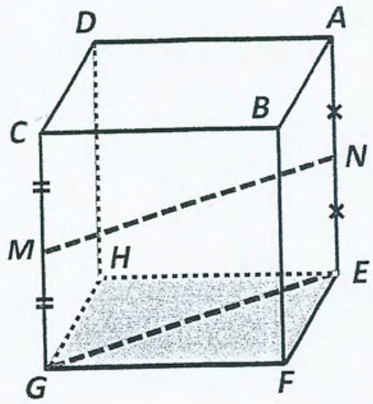
من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ $\therefore \overleftrightarrow{LN} \parallel \overleftrightarrow{MH}$

$\overleftrightarrow{LN} \parallel \overleftrightarrow{MH}$, $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

$\overline{LN} \parallel \overline{MH}$ $\overline{LM} \parallel \overline{NH}$

$LMHN$ متوازي أضلاع

حاول ان تحل رقم 3صفحة 127



المعطيات $ABCDEFGH$ شبه مكعب

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$

المطلوب أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$

البرهان نرسم $\overline{GE}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AE} \,//\, \overleftrightarrow{CG}$, $AE = CG$,

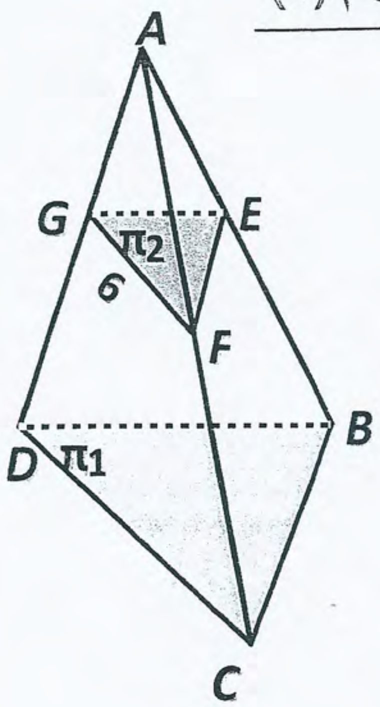
M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{NE} \,//\, \overleftrightarrow{MG}$, $NE = MG$ $\Longrightarrow$ $NEGM$ متوازي أضلاع

$\therefore$ $\overleftrightarrow{NM} \,//\, \overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{GE} \subset (EFGH)$

$\therefore$ $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$

حاول أن تحل الكتاب صفحة 129رقم (4)



المعطيات $ABCD$ هرم ثلاثي , $\pi_1 // \pi_2$

$FG = 6\text{ cm}$, $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$

المطلوب إيجاد DC

البرهان

$\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ مستقيمان متقاطعان فى A

فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ABC)

$\because \pi_1 // \pi_2$

$\pi_1 \cap (ABC) = \overleftrightarrow{CB}$, $\pi_2 \cap (ABC) = \overleftrightarrow{FE}$

$\therefore \overleftrightarrow{CB} // \overleftrightarrow{FE}$

المثلثان ACB , AFE متشابهان

$$\frac{AF}{AC} = \frac{FE}{CB} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4} \quad \text{——} \boxed{1}$$

حيث $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$

$\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}$ مستقيمان متقاطعان فى A فهما يعينان مستوٍ وحيد هو (ACD)

$\because \pi_1 // \pi_2$, $\pi_1 \cap (ACD) = \overleftrightarrow{CD}$, $\pi_2 \cap (ACD) = \overleftrightarrow{FG}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{FG}$ المثلثان ACD , AFG متشابهان

$$\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{CD} = \frac{AG}{AD} \quad \text{——} \boxed{2}$$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$

$\frac{FG}{CD} = \frac{1}{4} \Longrightarrow CD = 4\ FG$

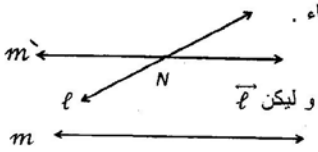
$CD = 24\text{ cm}$

بند 10-3

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له و مواز للأخر

$\overleftrightarrow{\ell}$, $\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء .



نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين و ليكن $\overleftrightarrow{\ell}$

نرسم$\overleftrightarrow{m`}$ يوازي $\overleftrightarrow{m}$ و يمر بالنقطة N

الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\ell}$ ، $\overleftrightarrow{m`}$ هي أحدى الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{\ell}$ ، $\overleftrightarrow{m`}$

$\hat{N}$ الزاوية الحادة بين المستقيمين ℓ ، m

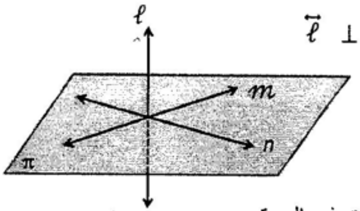
ملاحظة : لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

تعريف

يكون المستقيم ℓ عموديا على المستوى π إذا كان $\overleftrightarrow{\ell}$ عموديا على جميع المستقيمات الواقعة في π و يرمز له بـ : $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$

نقول أيضا ان π عمودي على $\overleftrightarrow{\ell}$ $\qquad \pi \perp \overleftrightarrow{\ell}$

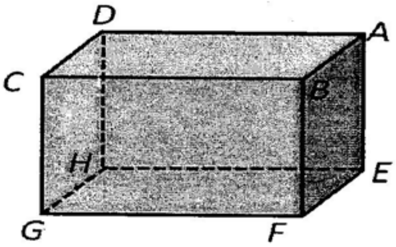
في الشكل المجاور : إذا كان $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$



فإن ℓ عموديا على كل المستقيمات في المستوى π

نظرية (5)

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديا على مستويهما



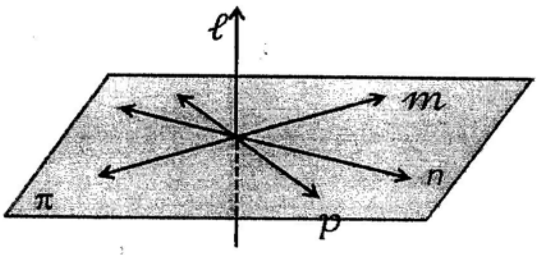
$$\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\}$$

$$\overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH} \quad ، \quad \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}$$

$$\overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواه في مستو واحد عموديا على المستقيم المعلوم

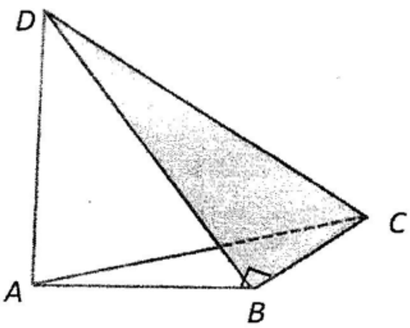


مثال (1) صـ 131

في الشكل المقابل ،المثلث ABCقائم في $\hat{B}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

إثبت أن المثلث DBC قائم في $\hat{B}$

البرهان



(معطى) $\overleftrightarrow{BC} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

(نظرية)(1)⟹ $\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\because$ المثلث ABC قائم في $\hat{B}$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ⟹(2)

$\because$ المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ متقاطعان

$\therefore$ يعينان المستوي (ABD) ⟵ (3)

من (1) ، (2) ، (3) $\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (ABD)$ ⟹ $\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (نظرية)

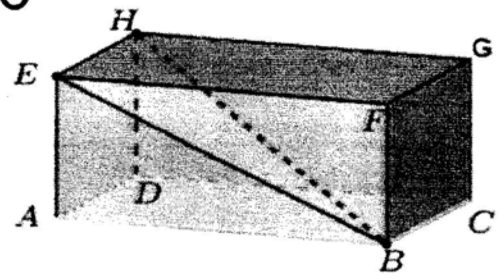
$\therefore$ المثلث BCD قائم في $\hat{B}$

أ / وليد البنا

حاول أن تحل (1)

صـ132

في شبه المكعب المقابل ،
أثبت أن المثلث BEH قائم في $\hat{E}$



البرهان

$\because \ \overline{EH} \perp \overline{EF} \ , \ \overline{EH} \perp \overline{EA}$

$\therefore \ \overleftrightarrow{EH} \perp (AEFB)$

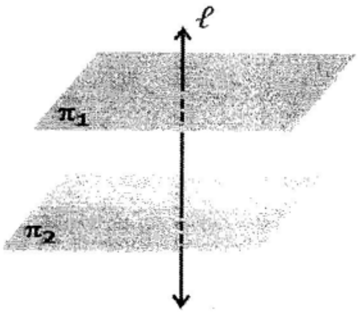
$\because \ \overleftrightarrow{EB} \subset (AEFB)$

$\therefore \ \overline{EH} \perp \overline{EB}$

المثلث BEH قائم في $\hat{E}$

نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيان



$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2$

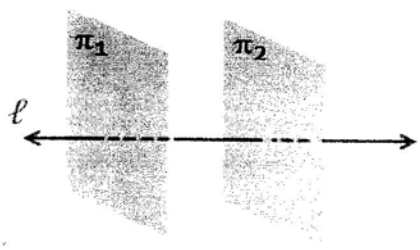
$\longrightarrow \ \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الأخر

$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$

$\longrightarrow \ \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_2$



أ/ وليد البنا

مثال (2)

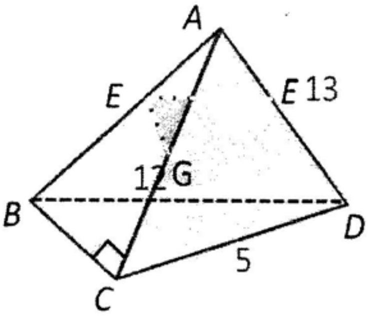
صـ132

في الشكل المقابل : Aنقطة خارج المستوى BCD،

و النقاط E,G,F منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب

إذا كان $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ و كان CD=5cm , AC=12cm , AD=13cm

فأثبت أن $(BCD) \mathbin{/\!/} (EGF)$



البرهان

في المثلث : ACD

$(AD)^2 = 169$ ، $(AC)^2+(CD)^2 = 169$

∴ المثلث ACD قائم في $\hat{C}$

∴ $\overline{AC} \perp \overline{CD}$, $\overline{AC} \perp \overline{CB}$ (معطى)

وحيث أن $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CB}$ متقاطعان

∴ $\overleftrightarrow{AC} \perp (BCD) \Longrightarrow (1)$ نظرية

في المثلث : ABC ∵ E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$

∴ $\overleftrightarrow{EG} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CB}$

و لكن $m(\hat{BCA}) = 90°$

∴ $m(A\hat{G}E) = 90 \longrightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$

و بالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

∴ $\overleftrightarrow{AG} \perp (EGF) \longrightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp (EGF) \longrightarrow (2)$

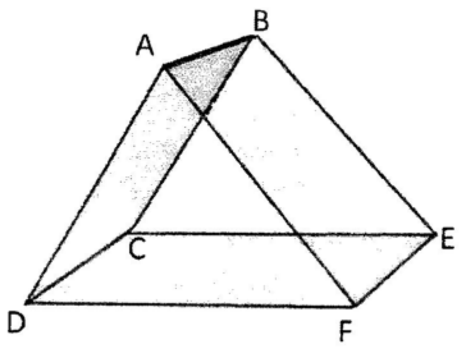
من (1) ، (2) ∴ $(EGF) \mathbin{/\!/} (BCD)$

صـ133

حاول أن (2)

في الشكل المقابل : $ABEF$, $ABCD$ مستطيلان

أثبت أن : $(AFD) \mathbin{/\!/} (BEC)$



البرهان

∵ $ABEF$ مستطيل

∴ $\overline{AB} \perp \overline{AF}$

∵ $ABCD$ مستطيل

∴ $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (AFD) \Longrightarrow$ **(1)**

و بالمثل $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$ ،

∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp (EBC) \Longrightarrow$ **(2)**

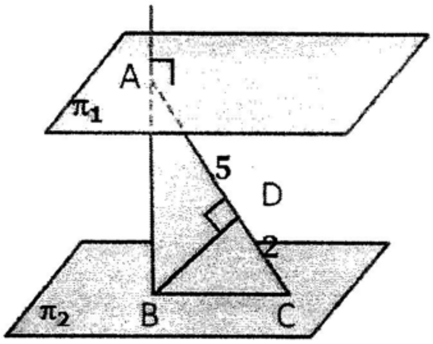
من (1) ، (2)

∴ $(AFD) \mathbin{/\!/} (BEC)$

مثال (3) في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $\pi_1 \parallel \pi_2$

رسم $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ في المستوى ABC , $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$, $A \in \pi_1$

أوجد : BD



البرهان

$\because \pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

نظرية 7 $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$

$\therefore$ $\overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$\because \overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2 \Longrightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم في $\hat{B}$

$\because \overline{BD} \perp \overline{BC}$

ص132

$$\therefore (BD)^2 = AD \times DC = 5 \times 2 = 10$$

$$BD = \sqrt{10}\ cm$$

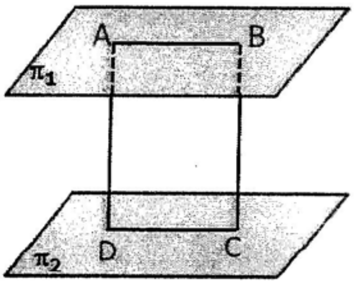
ص134

حاول أن تحل (3)

في الشكل المقابل : $\pi_1 \parallel \pi_2$, A,B نقطتان في π_1

، C,D نقطتان في π_2 : $\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$

اثبت أن $ABCD$ مستطيل



البرهان

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2$, $\overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2$

نظرية $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC} \longrightarrow (1)$

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويا $ABCD$

$\because \pi_1 \parallel \pi_2$,

و المستوي ABCD يقطع كلا من π_1 و π_2 في $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{AB}$

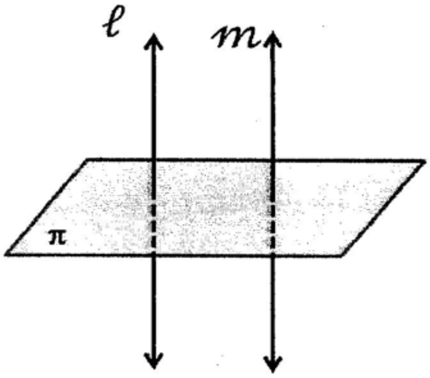
$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{DC} \longrightarrow (2)$

$\because \overline{AD} \perp \pi_2$, $\overline{DC} \subset \pi_2 \longrightarrow \overline{AD} \perp \overline{DC} \longrightarrow (3)$

من (3) , (2 , (1) ينتج أن

$ABCD$ مستطيل

نظرية (8) المستقيمان العموديان على مستو متوازيان .



$$\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \;,\; \overleftrightarrow{m} \perp \pi \Longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديا على مستو كان المستقيم الأخر عموديا على المستوى أيضا

$$\overleftrightarrow{\ell} \parallel \overleftrightarrow{m} \;,\; \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi \Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

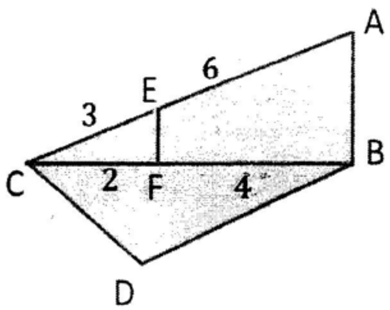
ص 135

مثال (4)

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان CE=3cm , EA=6cm , CF=2cm , FB=4cm

إثبت أن : $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



البرهان $\because$ $\overline{CA}, \overline{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستو وحيد (ABC)

في المثلث CAB :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ نظرية طاليس

$\because \overline{AB} \perp (CBD)$

$\therefore \overline{EF} \perp (CBD) \longrightarrow (1)$

$\overleftrightarrow{DB} \subset (CBD) \longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نستنتج أن $\overline{EH} \perp \overline{DB}$

أ / وليد البنا

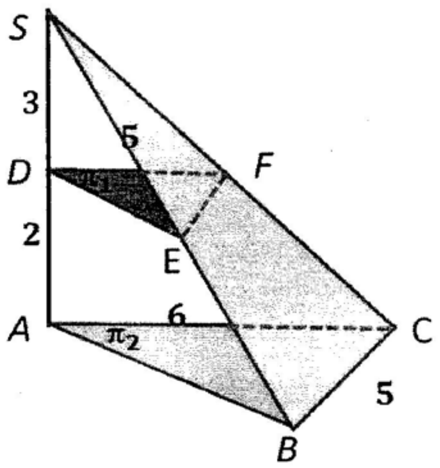
حاول أن تحل (4)

في الشكل المقابل : المستويان (ABC) , (DEF) متوازيان

إذا كان $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ SD=3cm , DA=2cm , BC=5cm, AC=6cm

SE = 5cm فأوجد محيط المثلث DEF

البرهان



$\pi_1 \ // \pi_2$, $\overleftrightarrow{SA} \perp \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp \pi_1 \Rightarrow \overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{DE}$

في المثلث SDE القائم في $\hat{D}$:

$(DE)^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow$ **DE = 4 cm**

$\because \overleftrightarrow{SA} \cap \overleftrightarrow{SC} = \{S\}$

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويا وحيدا (SAC)

يقطع π_1 ، π_2 في $\overline{DF}$, $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{DF} \ // \ \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \frac{SD}{SA} = \frac{DF}{AC} = \frac{SF}{SC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{DF}{6}$

DF = 3.6 cm

و بالمثل يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{EF} \ // \ \overleftrightarrow{BC}$

$\frac{SF}{SC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{EF}{5} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ EF = 3 cm

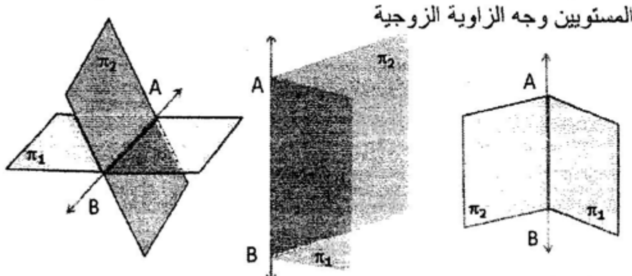
محيط المثلث DEF :

= 4 + 3.6+3 = 10.6 cm

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية)

إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم و ينتج من هذا التقاطع أربع زوايا زوجية

يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلي نصفين و يسمى المستقيم المشترك حافة الزاوية الزوجية أو الفاصل المشترك و يسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية

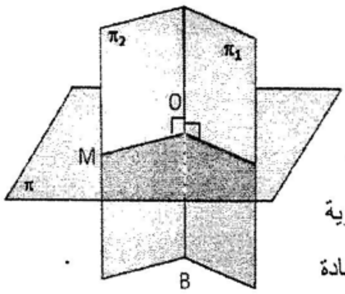


أو نرمز للزاوية الزوجية بحافتها فنكتب الزاوية $\overleftrightarrow{AB}$ $(\pi_1, \overleftrightarrow{AB}, \pi_2)$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

هي الزاوية

التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستو عمودي على حافتها



و تكون قياس الزاوية الزوجية

هو قياس إحدي زواياها المستوية

و دائما نأخذ قياس الزاوية الحادة

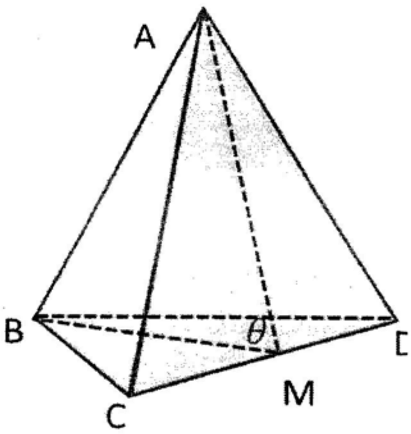
مثال (1)

صـ 139

في الشكل المقابل هرما ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm ، m منتصف $\overline{DC}$

(a) حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC, BDC

(b) أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$



البرهان

نحدد الزاوية المستوية بين المستويين: $ADC\ ,\ BDC$

$\overleftrightarrow{CD}$ حافة الزاوية الزوجية ⟵ (1)

المثلث ADC متطابق الأضلاع

∵ M منتصف $\overline{CD}$ من خواص المثلث المتطابق الأضلاع

∴ $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$: حيث $\overleftrightarrow{AM} \subset (ADC)$ ⟵ (2)

∴ $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{DC}$: حيث $\overleftrightarrow{BM} \subset (BDC)$ ⟵ (3)

نجد أن : $A\hat{M}B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

البرهان المثلث AMD قائم الزاوية في M

من فيثاغورث : $(AM)^2 = 8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 48$

$AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ cm\ ,\ BM = AM = 4\sqrt{3}\ cm$

في المثلث ABM

$$(AB)^2 = (AB)^2 + (AB)^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot COS\theta$$

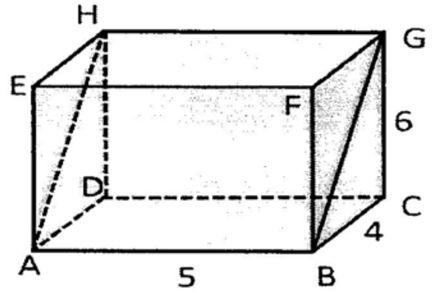
$$\cos\theta = \frac{(AM)^2 + (MB)^2 - (AB)^2}{2 \cdot AM \cdot MB} = \frac{48 + 48 - 64}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5287^\circ$$

قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالي $70^\circ\ 31'\ 44''$

أ / وليد البنا

حاول أن (1) في شبه المكعب المقابل ،
أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABGH),(ABCD)$، ثم أوجد قياسها



البرهان $ABCD$ مستطيل

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BF}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$

$\because \overleftrightarrow{BG} \subset (BCGF)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BG}$

حافة الزاوية $\overleftrightarrow{AB}$

$\because \overleftrightarrow{BC} \subset (ABCD)$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$

$\because \overleftrightarrow{BG} \subset (BGHA)$, $\overline{BG} \perp \overline{AB}$

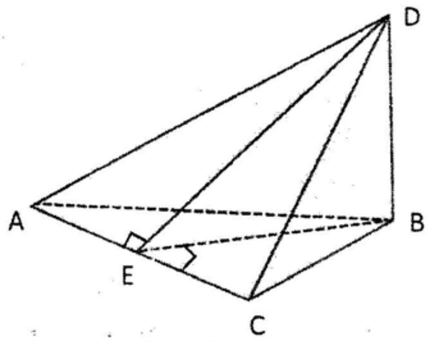
$G\hat{B}C$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين (ABGH) , (ABCD)

$$\mathbf{m(GBC)} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx \mathbf{56.31^\circ}$$

مثال (2) في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

DB=5cm , AB=10cm , $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$



أوجد : (a) BE , DE

(b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

البرهان

$\because \overline{BE} \perp \overline{AC} \Longrightarrow \therefore m(B\hat{E}A) = \frac{\pi}{2}$

$\because m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

AEB مثلث ثلاثيني - ستيني

$BE = \frac{1}{2}\ AB = 5\ cm$

$\overleftrightarrow{DB} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BE} \subset (ABC)$

$\therefore \overline{DB} \perp \overline{BE}$

المثلث DBE قائم في $\hat{B}$ ، و متطابق الضلعين

$DE = \sqrt{2} \cdot BE = 5\sqrt{2}$ cm

البرهان

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC , DAC

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في المستوى BAC

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ في المستوى DAC

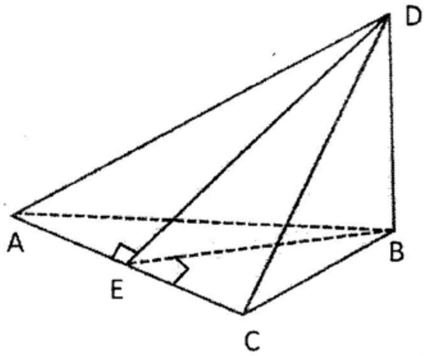
$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC هي $B\hat{E}D$

$\because$ المثلث DBE قائم الزاوية في $\hat{B}$ و متطابق الضلعين

$\because m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{4}$

قياس الزاوية الزوجية $= \frac{\pi}{4}$

حاول أن (2) في مثال (2) أوجد قياس الزاوية بين المستويين
صـ 141 (DAC) , (BAC) إذا كان $m(B\hat{A}C) = 45$
البرهان



$\overline{DE} \subset (ACD)$, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$
$\overline{BE} \subset (ABC)$, $\overline{BE} \perp \overline{AC}$
حافة الزاوية الزوجية $\overline{AC}$
∴ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين DAC , BAC هي $D\hat{E}B$

في المثلث ABC قائم

$EB = 10(\sin 45) = 5\sqrt{2}$ cm

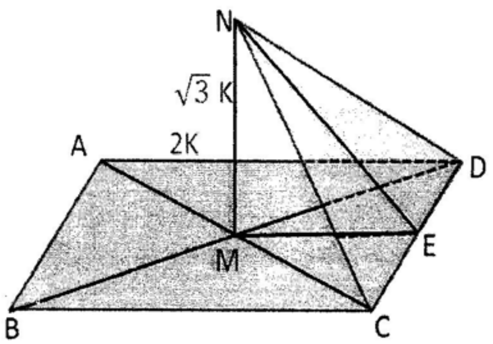
في المثلث EBD

$\tan(D\hat{E}B) = \frac{DB}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}}$

$m(D\hat{E}B) = 35^\circ\ 15'\ 51''$

صـ 142
مثال (3) $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه AD= 2K
أقيم $\overline{NM}$ عمودا على (ABCD) حيث N خارج مستواه بحيث
$MN = \sqrt{3}$ K أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD

المعطيات



$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M
AD= 2K MN= $\sqrt{3}$ K
$\overline{MN} \perp (ABCD)$

المطلوب

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD

العمل
نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

البرهان $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $ABCD,NCD$

$\overline{MN} \perp (ABCD)$, $\overline{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{CD} \Longrightarrow (1)$

في المثلث CDM المتطابق الضلعين

$\because$ E منتصف $\overline{CD}$

$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD} \Longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن $\overline{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$

∴ $M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث BCD : M منتصف $\overline{BD}$ ، E منتصف $\overline{CD}$

$\therefore ME = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot 2K = K$

في المثلث MEN القائم في M

$\tan(M\hat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}K}{K} = \sqrt{3}$

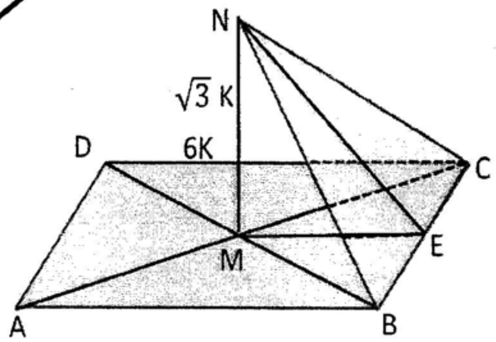
$m(M\hat{E}N) = 60^\circ$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD هو 60°

حاول أن (3)
صـ 142

في المثال (3) إذا كان AB = 6K ،
فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD, NBC$

أ / وليد البنا



المعطيات

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M

$AD= 6K$ $MN= \sqrt{3}$ K

$\overline{MN} \perp (ABCD)$

المطلوب

أوجد قياس الزاوية الزوجية
بين المستويين $ABCD , NCD$

العمل

نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CB}$

البرهان

في المثلث CDM المتطابق الضلعين ∵ E منتصف $\overline{BC}$

$\therefore \overline{ME} \perp \overline{BC} \Longrightarrow (1)$

$\because \overline{MN} \perp (ABCD) , \overline{BC} \subset (ABCD)$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{BC} \Longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن $\therefore \overline{BC} \perp (NME)$

AEB مثلث ثلاثيني - ستيني $\therefore \overline{BC} \perp \overline{NE}$

$\overline{NE} \subset (NBC) , \overline{NE} \perp \overline{BC}$

$\overline{ME} \subset (ABCD) , \overline{ME} \perp \overline{BC}$

$\hat{NEM}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\overline{NM} \perp (ABCD) \quad \therefore \overline{MN} \perp \overline{ME}$

$DC = AB = 6K \qquad ME = 3K$

في المثلث NME القائم في M $\tan(N\hat{E}M) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}K}{3K} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو 30° $m(D\hat{E}B) = 30^\circ$

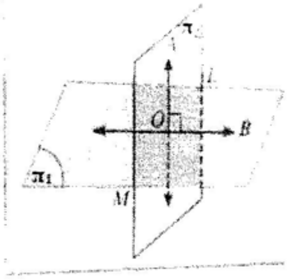
أ/ وليد البنا

بند 5-10

المستويات المتعامدة يكون المستويان متعامدان

إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة

أى أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90°

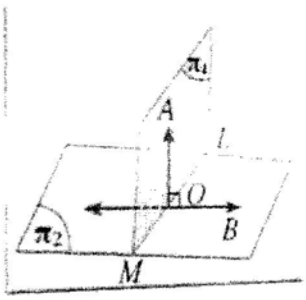


في المستوي π_1 : $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$

في المستوي π_2 : $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$

$\therefore \overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{OA}$ أي أن المستويين متعامدان

نظرية (10)

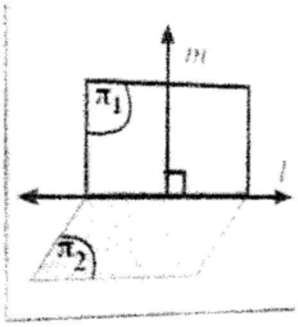


إذا كان مستقيم عموديا على مستو ، فكل مستو يمر بذلك المستقيم يكون عموديا على المستوي

$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2$

$\Longrightarrow \pi_1 \perp \pi_2$

نتيجة (3)



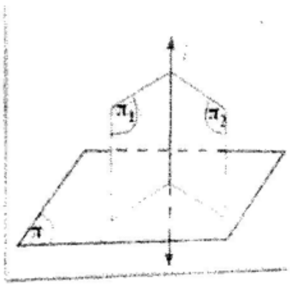
إذا تعامد مستويان و رسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديا على المستوي الأخر

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\ell} \ , \ \pi_1 \perp \pi_2$

$\overleftrightarrow{\ell} \perp \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$

نتيجة (4)



إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستو ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديا على هذا المستوي الثالث

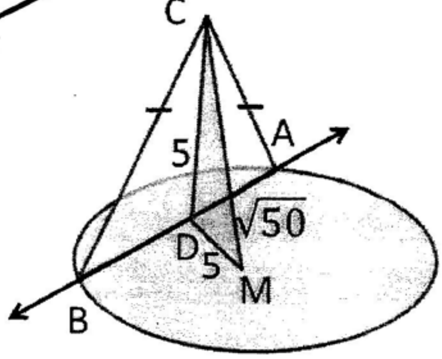
$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\ell} \ , \ \pi_2 \perp \pi \ , \ \pi_1 \perp \pi$

$\Longrightarrow \overleftrightarrow{\ell} \perp \pi$

أ/ وليد البنا

مثال (1)

في الشكل المقابل :



C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M ، D منتصف $\overline{AB}$ ، ABC مثلث فيه CA = CB. إذا كان DM = DC = 5cm , MC = $\sqrt{50}$ cm

أثبت ان (a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

(b) مستوي الدائرة $\perp$ (ACB)

المعطيات

$\overline{AB}$ وتر في الدائرة ، D منتصف $\overline{AB}$ ،

ABC مثلث فيه CA = CB ،

$DM = DC = 5cm\ ,\ MC = \sqrt{50}\ cm$

المطلوب

(a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

(b) مستوي الدائرة $\perp$ (ACB)

البرهان

في المثلث ABC متطابق الضلعين

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$

$\therefore\ \overline{CD} \perp \overline{AB} \longrightarrow (1)$

في مستوي الدائرة

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$ ، M مركز الدائرة

$\therefore\ \overline{MD} \perp \overline{AB} \longrightarrow (2)$

من (1) , (2) نجد أن $\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \perp (CDM)$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MC}$

(b) مستوي الدائرة $\perp$ (ACB)

البرهان

$\because\ \overline{CD} \perp \overline{AB} \longrightarrow (1)$

$$(CM)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 = 50$$

$$(CD)^2 + (DM)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

$\because\ \overline{CD} \perp \overline{DM} \longrightarrow (2)$

$\therefore$ المثلث CDM قائم الزاوية في D

من (1) , (2) نجد أن : $\overline{CD} \perp$ مستوي الدائرة

$\because\ \overleftrightarrow{CD} \subset (ACB)$

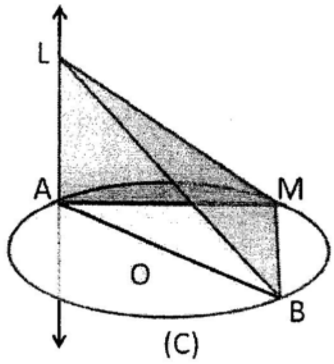
$\therefore\ (ACB) \perp$ مستوي الدائرة

حاول أن تحل (1)

في الشكل المقابل :

C دائرة مركزها O ، $\overline{AB}$ قطر فيها ، M نقطة تنتمي إلى الدائرة

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة



أثبت ان
ⓐ $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$
ⓑ $(LBM) \perp (LAM)$

المعطيات

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة ،

$\overleftrightarrow{LM} \perp$ مستوي الدائرة

المطلوب

ⓐ $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$
ⓑ $(LBM) \perp (LAM)$

ⓐ $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

البرهان

$\because$ $\overline{AB}$ قطر في الدائرة

$\therefore\ m(\hat{AMB}) = 90^\circ$

$\therefore\ \overline{BM} \perp \overline{MA} \Longrightarrow (1)$

$\because$ مستوي الدائرة $\perp \overleftrightarrow{LA}$ ،

$\overleftrightarrow{BM} \subset$ مستوي الدائرة

$\therefore\ \overline{LA} \perp \overline{BM} \Longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن : $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

ⓑ $(LBM) \perp (LAM)$

البرهان

$\because\ \overleftrightarrow{BM} \subset (LBM)$ $\qquad \therefore\ (LBM) \perp (LAM)$

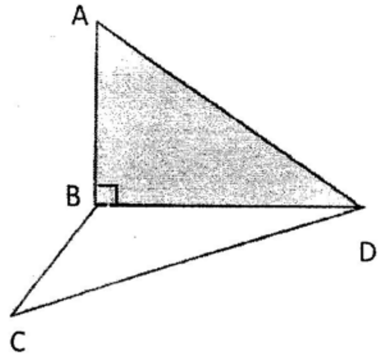
صـ 145 مثال (2)

A,B,C,D أربع نقاط ليست مستوية معا . إذا كان$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

و كان $(AD)^2=(AB)^2 + (BC)^2+(CD)^2$

أثبت ان (a) $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

(b) $(ABD) \perp (CBD)$



البرهان (a) إثبات أن $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD) \Longrightarrow \overline{BD} \subset (BCD)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BD}$

$\therefore$ ABD مثلث قائم الزاوية في B ومنه

$(AD)^2=(AB)^2 + (BD)^2 \Longrightarrow (1)$

معطى $(AD)^2=(AB)^2 + (BC)^2+(CD)^2 \Longrightarrow (2)$

من (2) , (1) نجد أن : $(BD)^2=(BC)^2 + (CD)^2$

$\therefore$ BDC مثلث قائم الزاوية في $\hat{C}$ عكس فيثاغورث

$\therefore \overline{BC} \perp \overline{DC}$

(b) إثبات أن $(ABD) \perp (CBD)$

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ معطى $\because \overline{AB} \subset (ABD)$

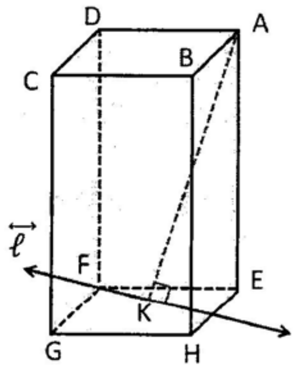
$\therefore (ABD) \perp (CBD)$

صـ 146 حاول أن تحل (2) في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل :

$\overleftrightarrow{\ell}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F ، $\overleftrightarrow{AK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

أثبت ان (a) $\overleftrightarrow{EK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

(b) $(FDK) \perp (AEK)$



المعطيات

$ABCDEFGH$ شبه مكعب

$\overleftrightarrow{AK} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

المطلوب أثبت ان

(a) $\overline{EF} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

(b) $(FDK) \perp (AEK)$

البرهان (a) إثبات أن $\overline{BC} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

$\because \overline{AE} \perp \overline{EH}\ ,\ \overline{AE} \perp \overline{EF}$

$\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp (GFEH)$

$\overleftrightarrow{\ell} \subset (GFEH)$

$\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{\ell}$

$\because \overleftrightarrow{\ell} \perp \overline{AE}\ ,\ \overleftrightarrow{\ell} \perp \overline{AK}$

$\therefore \overleftrightarrow{\ell} \perp (AEK)$

$\overleftrightarrow{EK} \subset (AEK) \qquad \therefore \overleftrightarrow{\ell} \perp \overline{EK}$

(b) $(FDK) \perp (AEK)$

$\because \overleftrightarrow{FK} \subset (FDK) \qquad \therefore (FDK) \perp (AEK)$

1 / /

الوحدة الحادية عشر
مبدأ العد و التباديل والتوافيق

① P.153

مئات عشرات احاد

ⓐ عدد الأعداد $= 2 \times 5 \times 5 = 50$

ⓑ عدد الأعداد $= 3 \times 5 \times 5 = 75$

ⓒ عدد الأعداد $= 4 \times 3 \times 3 = 36$

② P.154

ⓐ

الوف	مئات	عشرات	احاد
5	5	4	3

عدد الأعداد $= 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

ⓑ عدد الأعداد $= 1 \times 6 \times 6 \times 5 = 180$

ⓒ عدد الأعداد $= 3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$

③ P.155

الطرق : ADECF ، ABCEF

ABDEF ، ADBCF

يوجد 4 طرق

التباديل

④ P. 156

$$\text{عدد الطرق} = {}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$

⑤ P. 157

ⓐ ${}_nP_7 = 12\ {}_nP_5$

$$\frac{n!}{(n-7)!} = 12 \times \frac{n!}{(n-5)!}$$

$$\frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-7)!}} = 12 \times \frac{\cancel{n!}}{(n-5)(n-6)\cancel{(n-7)!}}$$

$$1 = 12 \times \frac{1}{(n-5)(n-6)}$$

$$(n-5)(n-6) = 12$$

$$(n-5)(n-6) = 4 \times 3 \Rightarrow n-5 = 4 \Rightarrow n = 9$$

ⓑ ${}_8P_r = 4 \times {}_8P_{r-1}$

$$\frac{8!}{(8-r)!} = 4\ \frac{8!}{(8-r+1)!}$$

$$\frac{8!}{(8-r)!} = 4\ \frac{8!}{(8-r+1)(8-r)!}$$

$$1 = \frac{4}{8-r+1} \Rightarrow 8-r+1 = 4$$

$$r = 5$$

⑥ P. 158

ⓐ $_{15}C_7 = \frac{15!}{(15-7)\times 7!} = 6435$

ⓑ $_{15}C_8 = 6435$

ⓒ $_{15}C_7 = {}_{15}C_8$

⑦ P. 159

$_{10}C_5 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_0 = 638$

⑧ P. 159

$_{24}C_2 \times {}_{28}C_3 + {}_{24}C_3 \times {}_{28}C_2 + {}_{24}C_4 \times {}_{28}C_1 + {}_{24}C_5 \times {}_{28}C_0 =$

$= 904176 + 765072 + 297528 + 42504$
$= 2009280$

⑨ P. 160

ⓐ $_{18}C_{11} = 31824$

ⓑ $_{17}C_{10} = 19448$

ⓒ $_{17}C_{11} = 12376$ "طريقه اولى"

"طريقه ثانيه"

$= {}_{18}C_{11} - {}_{17}C_{10} = 31824 - 19448$
$= 12376$

/ /

10 P.161

a $_nC_2 = 105$

$$\frac{_nP_2}{2!} = 105 \Rightarrow {_nP_2} = 105 \times 2! \Rightarrow$$

$n(n-1) = 210$ $\quad n^2 - n - 210 = 0$

$n(n-1) = 15 \times 14$ $\quad (n-15)(n+14) = 0$

$n = 15$ $\quad n = 15 \quad n = -14$

مقبول مرفوض

b $_nC_4 = {_nC_5}$

$$\frac{_nP_4}{4!} = \frac{_nP_5}{5!} \Rightarrow \frac{_nP_4}{\cancel{4!}} = \frac{_nP_5}{5 \times \cancel{4!}}$$

$$5\,\cancel{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \cancel{n(n-1)(n-2)(n-3)}(n-4)$$

$$5 = n - 4 \Rightarrow n = 9$$

نظرية ذات الحدين

① P. 165

ⓐ $(a-b)^4 = {}_4C_0\, a^4 + {}_4C_1\, a^3 (-b)^1 + {}_4C_2\, a^2 (-b)^2 +$
$+ {}_4C_3\, a\, (-b)^3 + {}_4C_4\, (-b)^4$

$= a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$

ⓑ $(d+2)^7 = {}_7C_0\, d^7 + {}_7C_1\, d^6 (2) + {}_7C_2\, d^5 (2)^2 + {}_7C_3\, d^4 (2)^3$
$+ {}_7C_4\, d^3 (2)^4 + {}_7C_5\, d^2 (2)^5 + {}_7C_6\, d (2)^6 + {}_7C_7 (2)^7$

$= d^7 + 14d^6 + 84d^5 + 280d^4 + 560d^3 + 672d^2 + 448d + 128$

ⓒ $(2x - y^2)^5 = {}_5C_0 (2x)^5 + {}_5C_1 (2x)^4 (-y^2)^1$
$+ {}_5C_2 (2x)^3 (-y^2)^2 + {}_5C_3 (2x)^2 (-y^2)^3$
$+ {}_5C_4 (2x)(-y^2)^4 + {}_5C_5 (-y^2)^5$

$= 32x^5 - 80x^4 y^2 - 40x^2 y^6 + 10xy^8 - y^{10}$

P.165 ② في مفكوك $(3x^2-y)^{15}$ اوجد

$$T_{r+1} = {}_nC_r\, x^{n-r}\, y^r$$

$$T_{12} = T_{11+1} = {}_{15}C_{11}\,(3x^2)^{15-11}\,(-y)^{11}$$

$$= {}_{15}C_{11}\,(3)^4\,(x^2)^4\,(-y)^{11}$$

$$= -110565\, x^8 y^{11}$$

P.166 ③ اوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

$\because y^3 \quad \therefore r=3 \quad \therefore$ الحد المطلوب هو الحد الرابع

$$T_{r+1} = {}_nC_r\, x^{n-r}\, y^r$$

$$T_4 = T_{3+1} = {}_5C_3\,(3x)^{5-3}\,(-y)^3$$

$$= {}_5C_3\,(3)^2\,(-1)^3\,x^2y^3$$

$$= -90\,x^2y^3$$

الإحتمال

الحدث: مجموعة جزئية من فضاء العينة S ، وعدد نواتجه $n(A)$

الحدث البسيط : $n(A) = 1$

الحدث المركب : $n(B) > 1$

الحدث المستحيل $n(D) = 0 \Leftarrow P(D) = 0$

الحدث المؤكد $n(A) = n(S) \Leftarrow P(A) = 1$

الحدثان المتنافيان $A \cap B = \phi \Leftarrow P(A \cap B) = 0$

الحدثان المستقلان $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

الحدث المتمم $\bar{A}$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$A \cap \bar{A} = \phi \quad , \quad A \cup \bar{A} = S$

$0 \leq P(A) \leq 1$

اي حدثين $\Leftrightarrow$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\bar{A}$ متمم A $\longleftrightarrow$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

A, B حدثان متنافيان $\longleftrightarrow$ $P(A \cap B) = 0$

A, B حدثان مستقلان $\longleftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

الإحتمال

① P. 170

ⓐ $A = \{$كرة المضرب$\}$

$n(A) = 1 \rightarrow$ حدث بسيط

$B = \{$كرة الطائرة ، كرة القدم ، كرة السلة$\}$

$n(B) = 3 \rightarrow$ حدث مركب

$C = \{$ركوب الدراجات ، السباحة$\}$

$n(C) = 2 \rightarrow$ حدث مركب

ⓑ (1) $B \cup C = \{$ركوب دراجات ، السباحة ، كرة القدم ، السلة ، الطائرة$\}$

$B \cup C \neq S \Rightarrow$ B ، C غير متتامان

(2) $A \cap C = \phi \Rightarrow$ A ، C متنافيان

② P. 171 في المثال (2)

ⓐ نفرض أن الحدث N هو طالب من الذين يقلونهم أهلهم الى المدرسة $n(N) = 14$

$$P(N) = \frac{n(N)}{n(S)} = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$$

ⓑ نفرض ان الحدث M طالب من الشعبة B

$n(M) = 28$

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

P.172 ③ اعتذر طه من رحلة كم احتمال اختيار محمد؟

عندما يعتذر طه يكون الإختيار من 4 فقط

$n(S) = {}_4C_3 = 4$

يكون اختيار محمد بطريقة واحده $_1C_1 = 1$

ويكون اختيار الطالبين من ثلاثه $_3C_2 = 3$

∴ عدد النواتج $_1C_1 \times {}_3C_2 = 1 \times 3 = 3$

احتمال اختيار محمد $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

P.173 ④ إذا اختارت الإذاعه 5 متصلين كل ساعه ما احتمال أن يتم اختيار ... ؟

الحدث A تم اختياره من بين متصلين الساعه الثامنه
الحدث B تم اختياره من بين متصلين الساعه الثالثه
الحدثان A و B مستقلان

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{124}C_4}{{}_{125}C_5} = \frac{1}{25}$

$P(B) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{199}C_4}{{}_{200}C_5} = \frac{1}{40}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{25} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{1000}$

P.173 (5) في المثال (5)

(a) (a) عمر الطالب بين 25 عاماً و 34 عاماً

الحدث " عمر الطالب بين 25 و 34 عاماً "
هو الحدث المتمم لـ $A \cup B$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0.74 = 0.26$$

(b) عمر الطالب 34 عاماً وأقل

الحدث " عمر الطالب 34 وأقل "
هو الحدث المتمم لـ B

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.21 = 0.79$$

P.174 (6) في المثال (6) ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{6}$$

7 ما احتمال أن يفوز راشد بجائزه واحده فقط؟ P.175

$m = 0.4 \qquad K = 1 \qquad n = 3$

احتمال ان يفوز راشد بجائزه واحده فقط

$$P(E) = {}_nC_k \, m^k \, (1-m)^{n-k}$$

$$= 3C_1 \cdot (0.4)^1 \, (1-0.4)^{3-1} = 0.432$$

8 ما احتمال استخدم 3 بطاريات مدة عام كامل P.175

$n = 4 \qquad m = 0.9 \qquad 1-m = 0.1 \qquad k = 3$

$$P(E) = {}_nC_k \, m^k \, (1-m)^{n-k}$$

$$= 4C_3 \, (0.9)^3 \, (0.1)^{4-3}$$

$$= 0.2916$$

12 * A، B حدثان مستقلان، $P(B)=0.4$ ، $P(\bar{A})=0.8$

اوجد $P(A)$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$

الحل:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$= 1 - 0.8 = 0.2$$

∵ A، B حدثان مستقلان إذن

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$= 0.2 \times 0.4$$
$$= 0.08$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= 0.2 + 0.4 - 0.08$$

$$= 0.52$$

A، B حدثان متنافيان $P(A)=0.2$ $P(B)=0.7$

اوجد $P(\bar{B})$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$
$$= 1 - 0.7 = 0.3$$

∵ A، B حدثان متنافيان إذن

$$A\cap B = \phi \Rightarrow P(A\cap B) = 0$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$= 0.2 + 0.7 - 0$$

$$= 0.9$$

كراسة التمارين P.72 (5)

(5)

$n(S) = 6C2 = 6 \times 5 = 30$

$n(a) = 4C2 = 4 \times 3 = 12$

$P(a) = \frac{n(a)}{n(S)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

$n(b) = 4C1 \times 2C1 = 4 \times 2 = 8$

$P(b) = \frac{n(b)}{n(S)} = \frac{8}{30}$

$n(C) = 4C2 + 2C2 = 12 + 2 = 14$

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

(9) P.73

الحدث A العمر تحت سن العشرين ⇐ $P(A) = 0.3$

الحدث B العمر فوق سن الستين ⇐ $P(B) = 0.17$

المطلوب $P(A \cup B)$

A ، B حدثان متنافيان ⇐ $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.3 + 0.17 - 0$

$= 0.47$

(10) P 73

$S=\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(S)=6$

$a=\{1,3,5\} \Rightarrow n(a)=3$

$$P(a)=\frac{n(a)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$b=\{2,4,6,1,3\} \Rightarrow n(b)=5$

$$P(b)=\frac{n(b)}{n(S)}=\frac{5}{6}$$

$c=\{1,3,5,2\} \Rightarrow n(c)=4$

$$P(c)=\frac{n(c)}{n(S)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$d=\{4,1,2,3,5\} \Rightarrow n(d)=5$

$$P(d)=\frac{n(d)}{n(S)}=\frac{5}{6}$$

---

(11) P.73

$m=40\%=0.4$

$1-m=0.6$ $\qquad n=10$, $K=4$

$$P(E)={}_nC_K\,(m)^k\,(1-m)^{n-k}$$

$$={}_{10}C_4\,(0.4)^4\,(0.6)^{10-4}=0.25$$

$m=0.11$, $n=30$, $K=4$ (12)

$$P(E)={}_nC_K\,(m)^k\,(1-m)^{n-k}$$

$$={}_{30}C_4\,(0.11)^4\,(1-0.11)^{30-4}=0.193$$