طول قوس ومعادلة منحنى دالة

① P.81

$f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+1$: أوجد طول القوس من منحنى الدالة f

في الفترة [3 ، 8]

$$f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+1 \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_3^8\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$=\int_3^8\sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx=\int_3^8\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_3^8=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(1+x)^3}\right]_3^8$$

$$=\frac{2}{3}\left[\sqrt{9^3}-\sqrt{4^3}\right]=\frac{38}{3}\ \text{units}$$

② P.82

$f(x)=\frac{2}{9}(9+3x)^{3/2}$: أوجد طول القوس من منحنى الدالة f

في الفترة [2 ، 5]

$$f(x)=\frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}(9+3x)^{\frac{1}{2}}(3)$$

$$=(9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_2^5\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$=\int_2^5\sqrt{1+((9+3x)^{\frac{1}{2}})^2}\,dx=\int_2^5\sqrt{1+9+3x}\,dx$$

$$=\int_2^5\sqrt{10+3x}\,dx=\frac{1}{3}\int_2^5 3(10+3x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(10+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5=\frac{2}{9}\left[25^{\frac{3}{2}}-16^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{2}{9}[125-64]=\frac{122}{9}\ \text{units}$$

③ P.83 أوجد معادلة منحنى f الذي ميله عند النقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2+x$ ويمر بالنقطة $(2,2)$

$$\because f'(x) = 3x^2 + x \Rightarrow f(x) = \int 3x^2 + x \, dx$$

$$\therefore f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$$

لتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $(2,2)$

$$2 = 2^3 + \frac{1}{2}(2)^2 + c$$

$$2 = 8 + 2 + c \Rightarrow c = -8$$

$\therefore$ معادلة المنحنى F المطلوب هي

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

④ P. 83 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $-8x^3+3x^2-2x+4$ ويمر بالنقطة $(-1,-5)$

$$\because f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$$\therefore f(x) = \int -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4 \, dx$$

$$= \frac{-8x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x + c$$

$$= -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + c$$

ولتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $(-1,-5)$

$$-5 = -2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + c$$

$$\therefore c = 3$$

$\therefore$ معادلة المنحنى المطلوب

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 3$$

⑤ P.84 إذا كان ميل العمودي لمنحنى f عند أي نقطة عليه (x, y)

هو $2x-1$ فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $B(1,0)$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{-1}{f'(x)} = 2x-1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2x-1}$$

∴ معادلة المنحنى هي:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{-1}{2x-1}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{2}{2x-1}\,dx = \frac{-1}{2}\ln|2x-1| + c$$

لتعيين قيمة الثابت c

$$f(1) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}\ln|2(1)-1| + c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2}\ln|1| + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{-1}{2}\ln|2x-1|$$

⑥ P.85 $f''(x) = 5x-2$ أوجد معادلة f إذا كانت $P(2,-2)$ نقطة حرجة

$$f''(x) = 5x-2 \Rightarrow f'(x) = \int 5x-2\,dx = \frac{5}{2}x^2 - 2x + c$$

∵ $P(2,-2)$ نقطة حرجة إذن

$$f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}(2)^2 - 2(2) + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6 \Rightarrow f(x) = \int \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6\,dx \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + c$$

∵ $P(2,-2)$ نقطة حرجة فهي تنتمي الى منحنى f فهي تحقق معادلته أي

$$f(2) = -2 \Rightarrow \frac{5}{6}(2)^3 - (2)^2 - 6(2) + c = -2 \Rightarrow c = \frac{22}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + \frac{22}{3}$$