المجموعة A تمارين مقالية

(1) $F'(x) = 5(3x+2)^4 \times 3 = 15(3x+2)^4 = f(x)$

إذًا F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(2) $F'(x) = x^2 - 2x + 1 = f(x)$

إذًا F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(3) $F'(x) = \frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}} \times 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} = f(x)$

إذًا F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx = \frac{x^6}{6} - 3x^2 + 3x + C$

(5) $\int (3 - 6x^2)dx = 3x - 2x^3 + C$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = x^{\frac{1}{3}} + C$

(7) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int (x^3 - x^{-3})dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{2} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2} + C$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx = \int \frac{x^3 - 27}{x - 3}dx = \int (x^2 + 3x + 9)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 9x + C$

(9) $\int (x-2)(2x+3)dx = \int (2x^2 - x - 6)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 6x + C$

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}dx = \int (\sqrt{x}-1)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$

(11) $\int \frac{x - \sqrt{x}}{x}dx = \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = x - 2\sqrt{x} + C$

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{5}{\sqrt{x}}dx + \int 2\sqrt{x}\,dx = 10\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$

(13) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$

(14) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}\right)dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C$

(15) $F(x) = x^3 - 5x + C$

$F(2) = 3 \quad \therefore \quad C = 5 \quad \therefore \quad F(x) = x^3 - 5x + 5$

(16) $F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + C$

$F(-1) = 0 \quad \therefore \quad C = 10 \quad \therefore \quad F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 10$

(17) $r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + C$

$r(0) = 0 \quad \therefore \quad r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$

(18) ليكن s ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض عند الزمن t. نفرض أن s دالة في t قابلة للاشتقاق مرتين، ونرمز إلى سرعة القذيفة بالرمز v وإلى عجلتها بالرمز a : $v = \frac{ds}{dt}$ ، $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

(a) $a = -9.8$

$$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow -9.8 = \frac{dv}{dt}$$

$$v_{(t)} = -\int 9.8\,dt = -9.8t + C_1$$

$$16 = -9.8(0) + C_1$$

$$v(t) = -9.8t + 16$$

عندما تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع، تكون $v(t) = 0$، أي أن:

$$-9.8t + 16 = 0 \qquad \therefore \qquad t = 1.63s$$

(b) $s(t) = \int v(t)dt = \int (-9.8t + 16)dt = -4.9t^2 + 16t + C_2$

$$s(0) = 115 \qquad \therefore \qquad C_2 = 115$$

$$s(t) = -4.9t^2 + 16t + 115$$

عندما تصل الكرة إلى الأرض يكون ارتفاعها $s(t) = 0$، أي أن:

$$-4.9t^2 + 16t + 115 = 0 \qquad \therefore \qquad t = 6.74\,s$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (b)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (a)	**(8)** (c)
(9) (c)	**(10)** (a)	**(11)** (b)	**(12)** (d)

التكامل بالتعويض — تمرَّنْ 2–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $u = x^2 - 3x + 5 \quad , \quad du = (2x-3)dx$

$$\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2-3x+5)^{\frac{3}{2}} + C$$

(2) $u = 4x - 5 \quad , \quad du = 4dx$

$$\int (4x-5)^8 dx = \int \frac{1}{4}u^8 du = \frac{u^9}{36} + C = \frac{(4x-5)^9}{36} + C$$

(3) $u = x^2 + 4x - 1 \quad , \quad du = (2x+4)dx = 2(x+2)dx$

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

(4) $u = x^3 - 3x + 5 \quad , \quad du = (3x^2 - 3)dx = 3(x^2 - 1)dx$

$$\int (x^2 - 1)\sqrt{x^3 - 3x + 5}\, dx = \int \frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

(5) $u = x^3 - 3x^2 + 4 \quad , \quad du = (3x^2 - 6x)dx = 3(x^2 - 2x)dx$

$$\int (x^2 - 2x)(x^3 - 3x^2 + 4)^5 dx = \int \frac{1}{3} u^5 du = \frac{u^6}{18} + C = \frac{(x^3 - 3x^2 + 4)^6}{18} + C$$

(6) $u = 4 + x^3 \quad , \quad du = 3x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4 + x^3}} dx = \int x^2 (4 + x^3)^{-\frac{1}{3}} dx = \int \frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \frac{(4 + x^3)^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

(7) $u = 2 - 3x \quad , \quad du = -3dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 3x}} = \int (2 - 3x)^{-\frac{1}{3}} dx = \int -\frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}} du = -\frac{u^{\frac{2}{3}}}{2} + C = -\frac{(2 - 3x)^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

(8) $u = 3x + 2 \quad , \quad du = 3dx \quad , \quad x = \frac{u}{3} - \frac{2}{3}$

$$\int x(3x + 2)^6 dx = \int \left(\frac{u}{3} - \frac{2}{3}\right) u^6 \times \frac{1}{3} du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^8}{24} - \frac{2u^7}{21}\right] + C$$

$$= \frac{u^8}{72} - \frac{2u^7}{63} + C = \frac{(3x + 2)^8}{72} - \frac{2(3x + 2)^7}{63} + C$$

(9) $u = 1 + 3x \quad , \quad du = 3dx \quad , \quad x = \frac{u}{3} - \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + 3x}} dx = \int x(1 + 3x)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \left(\frac{u}{3} - \frac{1}{3}\right) u^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3} du = \frac{1}{9} \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2}{27} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{27}(1 + 3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

(10) $u = x - 1 \quad , \quad du = dx \quad , \quad x^2 = (u + 1)^2$

$$\int x^2 \sqrt{x - 1}\, dx = \int (u + 1)^2 \times u^{\frac{1}{2}} \times du = \int (u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du$$

$$= \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7}(x - 1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(11) $u = x^2 - 2 \quad , \quad du = 2x\, dx \quad , \quad x^2 = u + 2$

$$\int x^2 \bullet x\sqrt{x^2 - 2}\, dx = \frac{1}{2} \int (u + 2) u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}} du + \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{5}(x^2 - 2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(12) $u = x^3 + 1 \quad , \quad du = 3x^2 dx \quad , \quad x^3 = u - 1$

$$\int x^3 \bullet x^2 (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{3} \int (u - 1) \times u^{\frac{1}{3}} du = \frac{1}{3} \int u^{\frac{4}{3}} du - \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{3}} du$$

$$= \frac{1}{7}(x^3 + 1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}(x^3 + 1)^{\frac{4}{3}} + C$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (a)	**(6)** (a)	**(7)** (b)	**(8)** (d)
(9) (b)	**(10)** (a)	**(11)** (c)	**(12)** (b)

تكامل الدوال المثلثية

تمرَّنْ 3–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x)dx = \sec x - \cos x + C$

(2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x)dx = -\int -\csc x \cot x\, dx + \int \sec^2 x\, dx = -\csc x + \tan x + C$

(3) $\int \left(-\frac{1}{x^2} + 5\sin 3x\right)dx = \frac{1}{x} - \frac{5}{3}\cos 3x + C$

(4) $\int \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$

(5) $\int \cos^5 x \sin x\, dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$

(6) $\int x^2 \sin(x^3+1)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin(x^3+1)dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3+1) + C$

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int \sin x(\cos x)^{-3}dx = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2}\sec^2 x + C$

(8) $\int \sec^3 x \tan x\, dx = \int \sin x \times (\cos x)^{-4} dx = -\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

(9) $\int \csc^3 x \cot x\, dx = \int \cos x \times (\sin x)^{-4} dx = \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C$

(10) $\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x\, dx = -\int \sqrt{\cot x}(-\csc^2 x)dx = -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} x + C$

(11) $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\, dx = \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + C$

(12) $\int \sqrt{1+\sin x}\cos x\, dx = \frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$

(13) $\int \frac{1}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}dx = -\int \frac{-1}{\sin^2 x}(1+\cot x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2\sqrt{1+\cot x} + C$

(14) $\int \frac{1}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}(1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{1+\tan x} + C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (a)	**(6)** (c)	**(7)** (d)	**(8)** (b)
(9) (c)	**(10)** (c)	**(11)** (b)	**(12)** (b)

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية — تمرَّنْ 4–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{dy}{dx} = (\ln 7) \times 7^x$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 5}{2\sqrt{x+1}} \times 5^{\sqrt{x+1}}$

(3) $\frac{dy}{dx} = (\ln 8)(\sec^2 x) \times 8^{\tan x}$

(4) $\frac{dy}{dx} = 2e^x$

(5) $\frac{dy}{dx} = -e^{-x}$

(6) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}e^{\frac{x}{5}}$

(7) $\frac{dy}{dx} = (2x-1)e^{x^2-x+1}$

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{2\sqrt{x}+3}$

(9) $\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x \cdot e^{\csc x}$

(10) $\frac{dy}{dx} = 4x^3 e^{x^4-5}$

(11) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}$

(12) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$

(13) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}$

(14) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

(15) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$

(16) $\frac{e^{0.1x}}{0.1} + C = 10e^{0.1x} + C$

(17) $-e^{\frac{1}{x}}+C$

(18) $e^{x^2+x+4}+C$

(19) $\frac{1}{3}e^{x^3-6x}+C$

(20) $\frac{1}{0.5}e^{0.5x}+0.5\ln|x|+C$

(21) $\ln(e^x+1)+C$

(22) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C$

(23) $\frac{1}{4}\ln|x^4-2x^2|+C$

(24) $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C$

(25) $\frac{2}{3}\ln|3x+1|+C$

(26) $-2\ln|\cos x|+\cot x+C$

(27) $\ln|\sin x|+\frac{x^3}{3}+C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (a)

(5) (b) **(6)** (b) **(7)** (c) **(8)** (a)

(9) (b) **(10)** (d) **(11)** (c) **(12)** (b)

(13) (a) **(14)** (b)

التكامل بالتجزيء

تمرّنْ 5–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $u=x$ $\qquad dv=\cos(3x)\,dx$

$du=dx$ $\qquad v=\frac{\sin(3x)}{3}$

$$\int x\cos(3x)\,dx=\frac{x}{3}\sin(3x)-\frac{1}{3}\int\sin(3x)\,dx$$
$$=\frac{x}{3}\sin(3x)+\frac{1}{9}\cos(3x)+C$$

(2) $u=x$ $\qquad dv=\sin(5x)\,dx$

$du=dx$ $\qquad v=-\frac{1}{5}\cos(5x)$

$$\int x\sin(5x)\,dx=-\frac{x}{5}\cos(5x)+\frac{1}{5}\int\cos(5x)\,dx$$
$$=-\frac{x}{5}\cos(5x)+\frac{1}{25}\sin(5x)+C$$

(3) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = e^{x-3}dx \qquad v = e^{x-3}$

$$\int x\, e^{x-3}\, dx = x\, e^{x-3} - \int e^{x-3} dx = x\, e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

(4) $\int (x-5)e^{x-5}dx = (x-6)e^{x-5} + C$ (إرشاد: $dv = e^{x-5}dx \quad , \quad u = x-5$)

(5) $u = \ln\sqrt[4]{x} = \ln x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\ln x \qquad du = \frac{1}{4x}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int \ln\sqrt[4]{x}\, dx = \frac{x}{4}\ln x - \int \frac{1}{4x} \times x\, dx = \frac{1}{4}(x\ln x - x) + C$$

(6) $u = \ln(2x-1) \qquad du = \frac{2}{2x-1}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int \ln(2x-1)dx = x\ln(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}dx = x\ln(2x-1) - \int \frac{2x-1+1}{2x-1}dx$$

$$= x\ln(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$= x\ln(2x-1) - x - \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$$

(7) $\int (2x+1)\ln(x+1)dx = (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C$ (إرشاد: $dv = (2x+1)dx \quad , \quad u = \ln(x+1)$)

(8) $u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = \frac{1}{x^2}dx \qquad v = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2}\ln x\, dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

(9) $u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^{-\frac{1}{3}}\, dx \qquad v = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$$\int x^{-\frac{1}{3}}\ln x\, dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \int \frac{1}{x} \times \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C$$

(10) $u = \ln x^2 = 2\ln x \qquad du = \frac{2}{x}dx$

$dv = x^2 dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2\ln x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ln x^2 - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x} \times x^3 dx = \frac{1}{3}x^3\ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C$$

(11) $u = x^2 - 2x \qquad du = 2(x-1)dx$

$dv = \cos x\, dx \qquad v = \sin x$

$$\int (x^2-2x)\cos x\,dx = (x^2-2x)\sin x - 2\int (x-1)\sin x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int (x-1)\sin x\,dx$

$u = x-1 \qquad du = dx$

$dv = \sin x\,dx \qquad v = -\cos x$

$$\int (x^2-2x)\cos x\,dx = (x^2-2x)\sin x - 2\left[-(x-1)\cos x + \int \cos x\,dx\right]$$

$$= (x^2-2x-2)\sin x + 2(x-1)\cos x + C$$

(12) $u = x^2+3x \qquad du = (2x+3)dx$

$dv = \sin x\,dx \qquad v = -\cos x$

$$\int (x^2+3x)\sin x\,dx = -(x^2+3x)\cos x + \int (2x+3)\cos x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int (2x+3)\cos x\,dx$

$u = 2x+3 \qquad du = 2dx$

$dv = \cos x\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int (x^2+3x)\sin x\,dx = -(x^2+3x)\cos x + (2x+3)\sin x - 2\int \sin x\,dx$$

$$= -(x^2+3x-2)\cos x + (2x+3)\sin x + C$$

(13) $u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^{x+1}\,dx \qquad v = e^{x+1}$

$$\int x^2 e^{x+1}\,dx = x^2 e^{x+1} - \int 2x\,e^{x+1}\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int x\,e^{x+1}\,dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{x+1}\,dx \qquad v = e^{x+1}$

$$\int x^2 e^{x+1}\,dx = x^2 e^{x+1} - 2x\,e^{x+1} + 2\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1}(x^2-2x+2) + C$$

(14) $u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^{2x-3}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int x^2 e^{2x-3}\,dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \int x\,e^{2x-3}\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int x\,e^{2x-3}\,dx$

$u = x \qquad du = dx$

$$dv = e^{2x-3}dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$$

$$\int x^2 e^{2x-3}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \left[\frac{x}{2}e^{2x-3} - \int \frac{1}{2}e^{2x-3}dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \frac{x}{2}e^{2x-3} + \frac{1}{4}e^{2x-3} + C = e^{2x-3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$$

(15) $u = (\ln(x))^2 \qquad du = 2\dfrac{\ln(x)}{x}dx$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int (\ln(x))^2\,dx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int \ln x\,dx$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int (\ln(x))^2 dx = x(\ln(x))^2 - 2\left[x\ln x - \int dx\right] = x(\ln(x))^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

(16) $u = \sin x \qquad dv = e^{2x}dx$

$$du = \cos x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\sin x\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int \cos x\,e^{2x}dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية فنحصل على:

$$u = \cos x \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = -\sin x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\sin x\,e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos x\,e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\sin x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\,e^{2x} \Longrightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{2}{5}e^{2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x + C$$

(17) $u = \sin x(\ln x) \qquad du = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int \cos(\ln x)dx$

$$u = \cos(\ln x) \qquad du = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x)] + \int x\bullet\frac{\sin(\ln x)}{x}dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$$

$$\Longrightarrow 2\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)
(5) (a)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (d)
(9) (b)	**(10)** (b)	**(11)** (c)	

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

تمرّنْ 6–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f(x) = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$

$2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 5 $\therefore$ $A_1 = 1$

$\therefore\ f(x) = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}$

$\int f(x)\,dx = \ln|x-5| - \ln|x-3| + C$

(2) $x^2 + 2x = x(x+2)$

$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x+2)}$

$1 = A_1(x+2) + A_2 x$

عوّض عن x بـ -2 $\therefore$ $A_2 = -\frac{1}{2}$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}$

$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

(3) $x^2 + x + 12 = (x-3)(x+4)$

$f(x) = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+4}$

$-x + 10 = A_1(x+4) + A_2(x-3)$

عوّض عن x بـ -4 $\therefore$ $A_2 = -2$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_1 = 1$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x+4}$$

$$\int f(x)\,dx=\ln|x-3|-2\ln|x+4|+C$$

(4) $f(x)=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+3}$

$$12=A_1(x-1)(x+3)+A_2(x)(x+3)+A_3(x)(x-1)$$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1=-4$

عوّض عن x بـ 1 $\quad \therefore \quad A_2=3$

عوّض عن x بـ -3 $\quad \therefore \quad A_3=1$

$$f(x)=\frac{-4}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+3}$$

$$\int f(x)\,dx=-4\ln|x|+3\ln|x-1|+\ln|x+3|+C$$

(5) $2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$

$$\frac{x+17}{(2x-1)(x+3)}=\frac{A_1}{2x-1}+\frac{A_2}{x+3}$$

$$x+17=A_1(x+3)+A_2(2x-1)$$

عوّض عن x بـ $\frac{1}{2}$ $\quad \therefore \quad A_1=5$

عوّض عن x بـ -3 $\quad \therefore \quad A_2=-2$

$$\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx=\int\left(\frac{5}{2x-1}-\frac{2}{x+3}\right)dx$$

$$=\frac{5}{2}\ln|2x-1|-2\ln|x+3|+C$$

(6) $x^3-6x^2+9x=x(x^2-6x+9)=x(x-3)^2$

$$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{(x-3)}+\frac{A_3}{(x-3)^2}$$

$$\therefore \quad -6x+25=A_1(x-3)^2+A_2x(x-3)+A_3x$$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_3=\frac{7}{3}$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1=\frac{25}{9}$

عوّض في المعادلة عن $A_1=\frac{25}{9}$ و $A_3=\frac{7}{3}$ ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_2.

$$\therefore \quad A_2=-\frac{25}{9}$$

$$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}=\frac{25}{9x}-\frac{25}{9(x-3)}+\frac{7}{3(x-3)^2}$$

$$\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx=\frac{25}{9}\ln|x|-\frac{25}{9}\ln|x-3|-\frac{7}{3}\times\frac{1}{(x-3)}+C$$

(7) $x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-3}$$

$\therefore\ 3x^2 - 4x + 3 = A_1 x(x-3) + A_2(x-3) + A_3 x^2$

عوّض عن x بـ 0 $\quad\therefore\quad A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 3 $\quad\therefore\quad A_3 = 2$

عوّض في المعادلة عن $A_2 = -1$ و $A_3 = 2$ ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$\therefore\ A_1 = 1$

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-3}$$

$$\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-3| + C$$

(8) $\dfrac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \dfrac{9x-7}{(x-3)^2}$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$9x - 7 = A_1(x-3) + A_2$

عوّض عن x بـ 3 $\quad\therefore\quad A_2 = 20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$\therefore\ A_1 = 9$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx = x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

(9) $\dfrac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \dfrac{x+5}{x^2-1}$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$x + 5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$

عوّض عن x بـ 1 $\quad\therefore\quad A_1 = 3$

عوّض عن x بـ -1 $\quad\therefore\quad A_2 = -2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}\,dx = \int\left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= 2x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

(10) $\frac{x^3-2}{x^2+x} = x-1+\frac{x-2}{x^2+x}$

$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1}$

$x-2 = A_1(x+1)+A_2x$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1 = -2$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore$ $A_2 = 3$

$\frac{x^3-2}{x^2+x} = x-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}$

$\int \frac{x^3-2}{x^2+x}dx = \frac{x^2}{2}-x-2\ln|x|+3\ln|x+1|+C$

(11) $\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2+\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$

$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}$

$2x-1 = A_1(x-1)+A_2$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_2 = 1$

عوّض عن A_2 بـ 1 ولتكن $x = 0$ $\therefore$ $A_1 = 2$

$\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}\,dx = \frac{x^3}{3}+2\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}+C$

(12) **(a)** $f(x) = \frac{(x-2)(2x^3-x^2-9x+14)}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{2x^3-x^2-9x+14}{x^2-4}$

$= 2x-1+\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)}$

(b) $\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+2} = \frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+2}$

(c) $f(x) = 2x-1+\frac{2}{x-2}+\frac{-3}{x+2}$

$\int f(x)\,dx = x^2-x+2\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)
(5) (d)	**(6)** (c)	**(7)** (b)	**(8)** (c)
(9) (c)	**(10)** (d)		

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\int_{-1}^{1}(3x^2-12x)dx=[x^3-6x^2]_{-1}^{1}=2$

(2) $\int_{0}^{2}(x^2+2x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^2=\frac{26}{3}$

(3) $\int_{0}^{4}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}dx=\int_0^4(x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^4=4$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}[\sin\pi-\sin 0]=0$

(5) $\int_{1}^{4}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(-\frac{4}{x}\right)_1^4-\left(\frac{x^3}{6}\right)_1^4=-\frac{15}{2}$

(6) $\int_{0}^{1}x\bullet x^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1=\frac{2}{5}$

(7) $[3e^x+5\ln|x|]_1^2=3(e^2-e)+5\ln 2$

(8) $\int_{-1}^{2}(-x+2)dx+\int_2^3(x-2)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=5$

(9) $\int_{-1}^{0}-x^3dx+\int_0^1 x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big]_0^1=\frac{1}{2}$

(10) $\int_{-2}^{0}(-x^2+3)dx+\int_0^3(x^2+3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^3=\frac{64}{3}$

(11) $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$

$x_1=-4\quad,\quad x_2=2$

x		-4		2	
x^2+2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore\ x^2+2x-8\leqslant 0\ \therefore\ \forall x\in[-4,2]$

$\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)dx\leqslant 0$

(12) $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)=x(x+1)(x-6)$

	-1		0		6	
$-$		$+$		$-$		$+$

$x^3-5x^2-6x\geqslant 0\qquad \forall x\in[-1,0]$

$\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)dx\geqslant 0$

(13) $f(x) = x^2 - 3x + 7$

$g(x) = 4x - 5$

$f(x) - g(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

x	0 1	3		4	
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) - g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [0,1]$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx \geqslant 0 \Longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \int_0^1 g(x)\,dx$

$\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)dx \geqslant \int_0^1 (4x-5)dx$

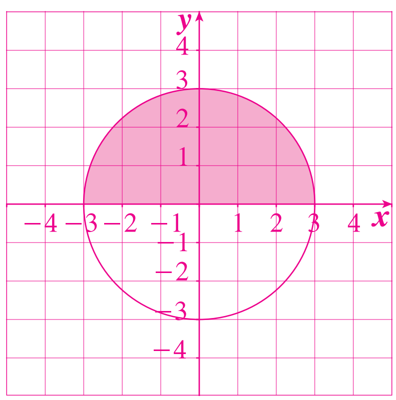
(14) $y = \sqrt{9-x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 9 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y = \sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة تساوي: $\therefore \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9}{2}\pi$



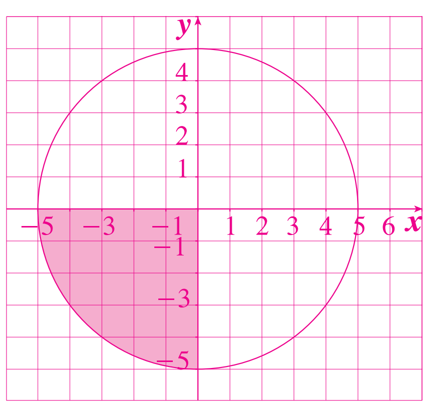
(15) $y = -\sqrt{25-x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

والدالة $y = -\sqrt{25-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة.

$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\,dx = -A$

$= \frac{-1}{4}\pi(5)^2 = \frac{-25}{4}\pi$



(16) $u = 1 + x \quad , \quad du = dx$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2} = \int_1^4 \frac{1}{u^2}\, du = -\frac{1}{u}\Big]_1^4 = \frac{3}{4}$$

(17) $u = \ln x \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$

$x = e \quad , \quad u = 1$

$x = 6 \quad , \quad u = \ln 6$

$$\int_1^{\ln 6} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_1^{\ln 6} = \ln(\ln 6)$$

(18) $u = \ln x \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^6}{x}\, dx = \int_0^1 u^6\, du = \left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(19) $u = x^2 + 1 \quad , \quad du = 2x dx$

$x = -1 \Longrightarrow u = 2 \quad , \quad x = 3 \Longrightarrow u = 10$

$$\int_{-1}^3 \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_2^{10} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}[\ln|u|]_2^{10} = \frac{1}{2}\ln 5$$

(20) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = \sin x\, dx \quad , \quad v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx = -x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(21) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = \cos 3x\, dx \quad , \quad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int_0^{\pi} x\cos 3x\, dx = \frac{x}{3}\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin 3x\, dx = \left[\frac{1}{9}\cos 3x\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{9}$$

(22) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3 \quad , \quad v = \frac{x^4}{4}$

$$\int_1^3 x^3 \ln x\, dx = \frac{x^4}{4}\ln x]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{4}\, dx = \frac{81}{4}\ln 3 - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^3 = \frac{81}{4}\ln 3 - 5$$

(23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx$

$u = \cos x \qquad dv = e^{2x}dx$

$du = -\sin x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = \frac{1}{2}[e^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\, dx$$

نطبق القاعدة مرّة ثانية على التكامل المحدد:

$u = \sin x \qquad dv = e^{2x}dx$

فيكون:

$$du = \cos x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = \frac{e^{\pi}}{5} - \frac{2}{5}$$

(24) $\dfrac{4}{x^2-4} = \dfrac{A_1}{(x-2)} + \dfrac{A_2}{(x+2)}$

$4 = A_1(x+2) + A_2(x-2)$

عوّض عن x بـ -2 $\quad\therefore\quad A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 2 $\quad\therefore\quad A_1 = 1$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}dx = [\ln|x-2| - \ln|x+2|]_{-1}^{1} = -2\ln 3$$

(25) $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$

$\dfrac{5x-1}{x^2+2x-3} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{x+3}$

$5x-1 = A_1(x+3) + A_2(x-1)$

عوّض عن x بـ -3 $\quad\therefore\quad A_2 = 4$

عوّض عن x بـ 1 $\quad\therefore\quad A_1 = 1$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+3}$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}dx = [\ln|x-1| + 4\ln|x+3|]_{-2}^{0} = 3\ln 3$$

(26)
$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x^2 \\ \hline & -\;\underline{x^2+2x+1} \\ & -2x-1 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2}$$

$$-2x-1 = A_1(x+1) + A_2$$

عوّض عن x بـ -1 ، $A_2 = +1$

عوّض عن x بـ 0 مع قيمة A_2 نجد $A_1 = -2$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx = \int_1^3\left[1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = \left[x - 2\ln|x+1| \frac{-1}{x+1}\right]_1^3 = \frac{9}{4} - 2\ln 2$$

حل آخر

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx$$

$u = x+1 \Longrightarrow du = dx$

$x = u-1$

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx = \int_2^4 \frac{(u-1)^2}{u^2}du$$

$$= \int_2^4 \frac{(u^2-2u+1)}{u^2}du$$

$$= \int_2^4 \left(1-\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= \left[u - 2\ln|u| - \frac{1}{u}\right]_2^4$$

$$= \left(4-2\ln 4-\frac{1}{4}\right)-\left(2-2\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{4} - 2\ln 2$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (c)
(9) (c)	**(10)** (a)	**(11)** (b)	**(12)** (d)
(13) (d)	**(14)** (b)	**(15)** (c)	

اختبار الوحدة الخامسة

(1) $F'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x^2+6x+5)^{\frac{1}{2}}(4x+6) = (2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5} = f(x)$

(2) $F(x) = x^3 - x^2 + C$

$F(2) = 6 \quad ; \quad C = 2$

$F(x) = x^3 - x^2 + 2$

(3) $\frac{1}{2}\int(2x+4)(x^2+4x+7)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(x^2+4x+7)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

(4) $\int(2x-1)(x^2-x+7)^{-5}dx = \frac{(x^2-x+7)^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4(x^2-x+7)^4} + C$

(5) $u = x-3 \ , \ x^2 = (u+3)^2 \ , \ du = dx$

$$\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx = \int(u+3)^2\cdot u^{\frac{1}{3}}du = \int\left(u^{\frac{5}{3}}+6u^{\frac{4}{3}}+9u^{\frac{1}{3}}\right)du$$

$$= \frac{3u^{\frac{8}{3}}}{8} + \frac{18u^{\frac{7}{3}}}{7} + \frac{27}{4}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3(x-3)^{\frac{8}{3}}}{8} + \frac{18(x-3)^{\frac{7}{3}}}{7} + \frac{27}{4}(x-3)^{\frac{4}{3}} + C$$

(6) $u = x^2 - 8 \quad , \quad x^2 = u + 8 \quad , \quad du = 2xdx \implies xdx = \frac{1}{2}du$

$$\int x^3\sqrt{x^2-8}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2-8}\,(x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int (u+8)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + 8u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{8u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2-8)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{8(x^2-8)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1\right)}{(\sqrt[3]{x}+1)}dx$

$$= \int \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + x\right)dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$$

(8) $\int \cos x(\sin x)^{-3}dx = \frac{(\sin x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$

(9) $-\int -\sin x(\cos x)^{\frac{2}{3}}dx = -\frac{3\cos x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(10) $\int \sec^7 x\tan x\,dx = \int \sec^6 x(\tan x \cdot \sec x\,dx)$

$u = \sec x \quad , \quad du = \tan x\sec x\,dx$

$$\int \sec^6 x(\tan x\sec x\,dx) = \int u^6 du = \frac{\sec^7 x}{7} + C$$

(11) $\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$

(12) $2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = 2\,e^{\sqrt{x}} + C$

(13) $\frac{1}{3}\int \frac{3x^2-12}{x^3-6x^2+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-6x^2+1| + C$

(14) $\frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}+2x}{e^{2x}+x^2+3}dx = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+x^2+3| + C$

(15) $\int (x^2-4)\cos x\,dx = \int x^2\cos x\,dx - 4\int \cos x\,dx = \int x^2\cos x\,dx - 4\sin x + C_1$

في التكامل: $\int x^2\cos x\,dx$

نأخذ:

$u = x^2 \qquad\qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad\qquad v = \sin x$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرة ثانية لنجد $\int x\sin x\,dx$

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C_2$$

$$\int (x^2-4)\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 6\sin x + C$$

(16) $u = \ln(3x+2) \implies du = \dfrac{3}{3x+2}dx$

$dv = dx \implies v = x$

$$\int \ln(3x+2)\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2}\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x+2-2}{3x+2}\,dx$$

$$= x\ln(3x+2) - x + \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C$$

(17) $u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}dx$

$du = 3dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x+1}$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot 3x\,e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}dx$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)e^{2x+1} + C$$

(18) $u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^{2x-1}dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x-1}$

$$\int x^2 e^{2x-1}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-1} - \int x\,e^{2x-1}dx$$

نستخدم القاعدة مرة ثانية

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{2x-1}dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x-1}$

$$\int x^2 e^{2x-1}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-1} - \frac{x}{2}e^{2x-1} + \int \frac{1}{2}e^{2x-1}dx = e^{2x-1}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$$

(19) $\dfrac{x^2-3x-28+28}{x^2-3x-28} = 1 + \dfrac{28}{x^2-3x-28}$

$x^2-3x-28 = (x-7)(x+4)$

$$\frac{28}{x^2-3x-28} = \frac{A_1}{x-7} + \frac{A_2}{x+4}$$

$28 = A_1(x+4) + A_2(x-7)$

عوّض عن x بـ -4 $\quad \therefore \quad A_2 = -\dfrac{28}{11}$

عوّض عن x بـ 7 $\quad \therefore \quad A_1 = \dfrac{28}{11}$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-3x-28} = 1 + \frac{28}{11(x-7)} - \frac{28}{11(x+4)}$$

$$\int \frac{x^2-3x}{x^2-3x-28}dx = x + \frac{28}{11}\ln|x-7| - \frac{28}{11}\ln|x+4| + C$$

(20) $\dfrac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x} = \dfrac{x(x^3+2x+6)}{x(x^2+4x+4)} = \dfrac{x^3+2x+6}{x^2+4x+4}$

$\dfrac{x^3+2x+6}{x^2+4x+4} = x-4+\dfrac{14x+22}{(x+2)^2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\dfrac{14x+22}{(x+2)^2} = \dfrac{A_1}{x+2}+\dfrac{A_2}{(x+2)^2}$

$14x+22 = A_1(x+2)+A_2$

عوّض عن x بـ -2 نحصل على $A_2 = -6$

نضع $A_2 = -6$ ونأخذ $x=0$ نحصل على $A_1 = 14$

$$\int \frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx = \frac{x^2}{2}-4x+14\ln|x+2|+\frac{6}{x+2}+C$$

(21) $[\ln|x|]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

(22) $-\int_{-1}^{1} -2x\sin(1-x^2)dx = [\cos(1-x^2)]_{-1}^{1} = 0$

(23) $\int_0^{\frac{5}{2}}(-2x+5)dx+\int_{\frac{5}{2}}^{5}(2x-5)dx = [-x^2+5x]_0^{\frac{5}{2}}+[x^2-5x]_{\frac{5}{2}}^{5} = \dfrac{25}{2}$

(24) $y = -\sqrt{36-x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 36-x^2 \quad \therefore \quad y^2+x^2 = 36$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 6 وحدات.

والدالة $y = -\sqrt{36-x^2}$ تمثل النصف السفلي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظلّلة تساوي: $\int_{-6}^{0} -\sqrt{36-x^2}\,dx$

$= \dfrac{1}{4}\pi(6)^2 = 9\pi \text{ units}^2$

(25) $\dfrac{x^2-3}{x^2-3x+2} = 1+\dfrac{3x-5}{x^2-3x+2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\dfrac{3x-5}{x^2-3x+2} = \dfrac{A_1}{(x-2)}+\dfrac{A_2}{(x-1)}$

$3x-5 = A_1(x-1)+A_2(x-2)$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_2 = 2$

عوّض عن x بـ 2 $\therefore$ $A_1 = 1$

$\dfrac{x^2-3}{x^2-3x+2} = 1+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-1}$

$$\int \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}dx = [x+\ln|x-2|+2\ln|x-1|]_3^5 = 2+\ln 3+2\ln 2$$

(26) $\dfrac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x} = 1+\dfrac{-8x^2-9x+2}{x(x+3)^2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\dfrac{-8x^2-9x+2}{x(x+3)^2} = \dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x+3}+\dfrac{A_3}{(x+3)^2}$

$-8x^2-9x+2 = A_1(x+3)^2+A_2x(x+3)+A_3x$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = \frac{2}{9}$

عوّض عن x بـ -3 $\quad \therefore \quad A_3 = \frac{43}{3}$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{2}{9}$ وعن A_3 بـ $\frac{43}{3}$ ولتكن $x = 1$ $\quad \therefore \quad A_2 = -\frac{74}{9}$

$$\frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x} = 1 + \frac{2}{9x} - \frac{74}{9(x+3)} + \frac{43}{3(x+3)^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}\,dx = \left[x + \frac{2}{9}\ln|x| - \frac{74}{9}\ln|x+3| - \frac{43}{3(x+3)}\right]_1^3$$

$$= 2 + \frac{2}{9}\ln 3 + \frac{43}{36} - \frac{74}{9}(\ln 6 - \ln 4)$$

$$= \frac{115}{36} + \frac{2}{9}\ln 3 - \frac{74}{9}(\ln 6 - \ln 4)$$

(27) $-x^2+7x+8 = (x+1)(-x+8)$

x		-1		2		5		8	
$-x^2+7x+8$	$-$	0			$+$			0	$-$

$-x^2+7x+8 \geqslant 0 \qquad \forall x \in [2, 5]$

$\therefore \quad \int_2^5 (-x^2+7x+8)dx \geqslant 0$

(28) $x^2+7x+10 = (x+2)(x+5)$

x		-5		-2	
$x^2+7x+10$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x^2+7x+10 \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-4, -2]$

$\therefore \quad \int_{-4}^{-2} (x^2+7x+10)dx \leqslant 0$

(29) $f(x) = x^2+13x+9$

$g(x) = 5x-6$

$f(x)-g(x) = x^2+8x+15$

$f(x)-g(x) = (x+3)(x+5)$

x		-5		-4		-3	
$f(x)-g(x)$	$+$	0		$-$		0	$+$

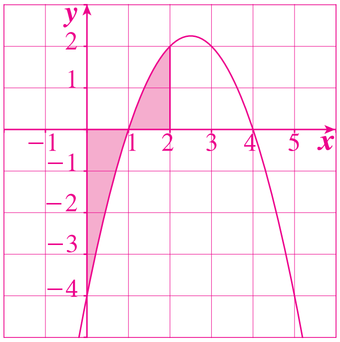
$f(x)-g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-5, -4]$

$\therefore \quad \int_{-5}^{-4} (f(x)-g(x))\,dx \leqslant 0 \implies \int_{-5}^{-4} f(x)dx \leqslant \int_{-5}^{-4} g(x)dx$

$\implies \int_{-5}^{-4} (x^2+13x+9)dx \leqslant \int_{-5}^{-4} (5x-6)dx$

تمارين إثرائية

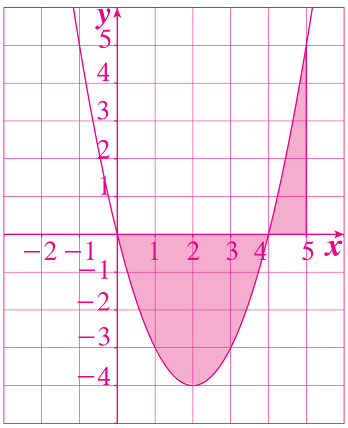
(1) (a) $\int_0^2 (-x^2 + 5x - 4)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_0^2 = -\frac{2}{3}$



(b) $A = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)dx + \int_1^2 (-x^2 + 5x - 4)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^2 = 3$ units square

(2) (a) $\int_0^5 (x^2 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^5 = -\frac{25}{3}$



(b) $A = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx + \int_4^5 (x^2 - 4x)dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_4^5 = 13$ units square

(3) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^2\, dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$\int x^2 \ln x\, dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\ln x - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

(4) $\int \cos\theta \cdot (\sin\theta)^{-2}\, d\theta = -\frac{1}{\sin\theta} + C$

(5) $\frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2 + C_1$

$y'(0) = 4 \quad \therefore \quad C_1 = 4$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2 + 4$

$y = x^2 - x^3 + 4x + C_2$

$y(0) = 1 \quad \therefore \quad C_2 = 1$

$y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

(6) $C(x) = \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} + C_1$

$C(x) =$ التكلفة

$x =$ عدد النسخات

$\therefore \quad C = (25) = 50 \Longrightarrow 50 = 4\sqrt{25} + C_1 \Longrightarrow C_1 = 30$

$C(x) = 4\sqrt{x} + 30$

$C(2\,500) = 4\sqrt{2\,500} + 30 = 230$

التكلفة: 230 دينارًا

(7) $u = x^3 \qquad du = 3x^2 dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية

$u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثالثة

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\, e^x - 6\int e^x dx$

$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

(8) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3 dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$

$\int x^3 \ln x\, dx\, \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$

(9) (a) $2x^2 - 5x + 3 = (2x-3)(x-1)$

$\frac{x-2}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{A_1}{2x-3} + \frac{A_2}{x-1}$

$x - 2 = A_1(x-1) + A_2(2x-3)$

عوّض عن x بـ 1 $\quad \therefore \quad A_2 = 1$

عوّض عن x بـ $\frac{3}{2}$ $\quad \therefore \quad A_1 = -1$

$$\frac{x-2}{2x^2-5x+3} = \frac{-1}{2x-3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{x-2}{2x^2-5x+3}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|2x-3| + \ln|x-1| + C$$

(b) $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

$$\frac{x^2-9}{(2x+1)(x^2+10x+25)} = \frac{A_1}{2x+1} + \frac{A_2}{x+5} + \frac{A_3}{(x+5)^2}$$

$$x^2 - 9 = A_1(x+5)^2 + A_2(2x+1)(x+5) + A_3(2x+1)$$

عوّض عن x بـ -5 $\therefore$ $A_3 = -\frac{16}{9}$

عوّض عن x بـ $-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $A_1 = -\frac{35}{81}$

عوّض عن A_3 بـ $-\frac{16}{9}$ و A_2 بـ $-\frac{35}{81}$ ولتكن $x = 0$ $\therefore$ $A_2 = \frac{58}{81}$

$$\frac{x^2-9}{(2x+1)(x+5)^2} = \frac{-35}{81(2x+1)} + \frac{58}{81(x+5)} - \frac{16}{9(x+5)^2}$$

$$\int \frac{x^2-9}{(2x+1)(x+5)^2}\,dx = \frac{-35}{162}\ln|2x+1| + \frac{58}{81}\ln|x-5| + \frac{16}{9(x+5)} + C$$

(c) $\frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)} = x - 4 + \frac{30x^2-50x+17}{(x-1)^2(x+6)}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$$\frac{30x^2-50x+17}{(x+6)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+6} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$30x^2 - 50x + 17 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+6) + A_3(x+6)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_3 = -\frac{3}{7}$

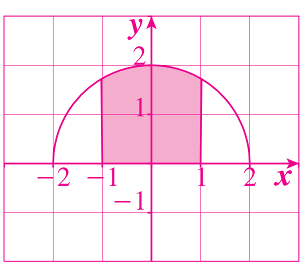
عوّض عن x بـ -6 $\therefore$ $A_1 = \frac{1\,397}{49}$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{1\,397}{49}$ و A_2 بـ $-\frac{3}{7}$ ولتكن $x = 0$ $\therefore$ $A_2 = \frac{73}{49}$

$$\frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)} = x - 4 + \frac{1\,397}{49(x+6)} + \frac{73}{49(x-1)} - \frac{3}{7(x-1)^2}$$

$$\int \frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)}\,dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{1\,397}{49}\ln|x+6| + \frac{73}{49}\ln|x-1| + \frac{3}{7(x-1)} + C$$

(10)



لايجاد التكامل المحدد: $\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$

نفترض: $x = 2\cos\theta \Longrightarrow dx = -2\sin\theta\,d\theta$

عند $x = -1$ تكون $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ؛ عند $x = 1$ تكون $\theta = \frac{\pi}{3}$

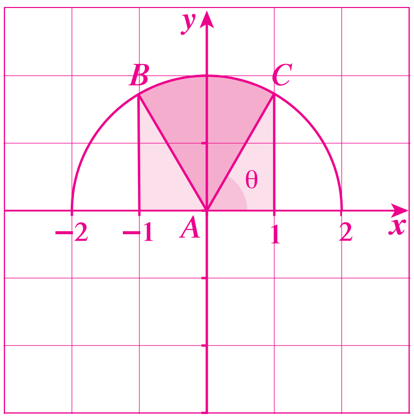
لذا:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sqrt{4-4\cos^2\theta}\right)(2\sin\theta\, d\theta)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 4\sin^2\theta\, d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (1-\cos 2\theta)d\theta = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

حل آخر

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$



قياس زاوية القطاع الدائري (ABC) هو أيضًا $\frac{\pi}{3}$

فتكون مساحته تساوي $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}(2)^2$

أي أن مساحة $(ABC) = \frac{2\pi}{3}$

مساحة كل مثلث $= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مساحة المثلثين $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

المساحة الإجمالية $= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

(11) $\int_{-4}^{4} \frac{1}{\pi}\sqrt{16-x^2}\,dx - \int_{-4}^{4} x\sqrt{16-x^2}\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-4}^{4} -2x\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)(p)(4)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[(16-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{4} = 8 + \frac{1}{3}(0) = 8$$

(12) $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+4} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+4}$$

$$2x+3 = A_1(x+4) + A_2(x+1)$$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore$ $A_1 = \frac{1}{3}$

عوّض عن x بـ -4 $\therefore$ $A_2 = \frac{5}{3}$

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+4} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{3(x+4)}$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5x+4}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{3}\ln|x+4|\right]_0^2 = \frac{1}{3}\ln 3 + \frac{5}{3}\ln 6 - \frac{5}{3}\ln 4 = 2\ln 3 - \frac{5}{3}\ln 2$$

(13) $\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x} = 1 + \frac{-9x+3}{x^3-6x^2+9x}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$$

$$\frac{-9x+3}{x(x-3)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{(x-3)^2}$$

$$-9x+3 = A_1(x-3)^2 + A_2x(x-3) + A_3x$$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = \frac{1}{3}$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_3 = -8$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{1}{3}$ وعن A_3 بـ -8 ولتكن $x = 1$ $\quad \therefore \quad A_2 = -\frac{1}{3}$

$$\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x} = 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x-3)} - \frac{8}{(x-3)^2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}\,dx = \left[x + \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x-3| + \frac{8}{x-3}\right]_1^2 = -3 + \frac{2}{3}\ln 2$$

(14) $\int_3^5 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx = \int_3^5 x^2\sqrt{x^2-4}\,(x\,dx)$

$u = x^2 - 4 \implies du = 2x\,dx$

$x^2 = u + 4$

$$\frac{1}{2}\int_5^{21}(u+4)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_5^{21}u^{\frac{3}{2}}du + 2\int_5^{21}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_5^{21} + \frac{4}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^{21} = \frac{581}{5}\sqrt{21} - \frac{35}{3}\sqrt{5}$$

(15) $-x^2+9x-18 = (-x+6)(x-3)$

x	$0 \quad 2$	3		6	
$-x^2+9x-18$	$-$	0	$+$	0	$-$

$-x^2+9x-18 \leqslant 0 \qquad \forall x \in [0,2]$

$\therefore \quad \int_0^2(-x^2+9x-18) \leqslant 0$

(16) $f(x) - g(x) = x^2 + 13x + 15 - 3x + 6 = x^2 + 10x + 21$

$f(x) - g(x) = (x+3)(x+7)$

x		-7		-3	$-1 \quad 2$
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) - g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [-1,2]$

$\int_{-1}^2 (f(x) - g(x))\,dx \geqslant 0$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 f(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 g(x)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 (x^2+13x+15)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 (3x-6)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 f(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 g(x)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 (x^2+13x+15)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 (3x-6)\,dx$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $A = \int_1^3 8x^3\,dx = 2x^4\big]_1^3 = 160$ units square

(2) $A = \int_0^5 (-x^2+5x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = \frac{125}{6}$ units square

(3) $A = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12-x^2)dx = \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = 32\sqrt{3}$ units square

(4) $A = \int_{-3}^{-2}(x^2-x-6)dx + \int_{-2}^{2}(-x^2+x+6)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{2} = \frac{43}{2}$ units square

(5) يتقاطع منحنى الدالة مع محور السينات إذا كان: $f(x) = 0$

فيكون:

$\Longrightarrow x(x^2-6) = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{6}\ ,\ x = 0\ ,\ x = \sqrt{6}$

$A = \int_0^{\sqrt{6}}(-x^3+6x)dx + \int_{\sqrt{6}}^{3}(x^3-6x)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3x^2\right]_0^{\sqrt{6}} + \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2\right]_{\sqrt{6}}^{3} = \frac{45}{4}$ units square

(6) $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$ units square

(7) $A = \int_0^2 (x^2+x^2-4x+5)dx = \int_0^2 (2x^2-4x+5)dx = \left[2\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^2 = \frac{22}{3}$ units square

(8) $A = \int_1^8 (x - \sqrt[3]{x})dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 = \frac{81}{4}$ units square

(9) حل $3 - x = 2x^2$، إذًا تتقاطع المنحنيات عند $x = 1$

$A = \int_0^1 (3 - x - 2x^2)dx + \int_1^3 (2x^2 - 3 + x)dx$

$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{103}{6}$ *units* square

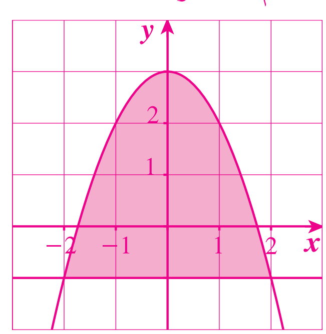
(10) تقاطع المنحنيات عند $x = \pm 2$

استخدم التناظر:

$A = 2\int_0^2 (3 - x^2 + 1)dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx$

$= 2\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0\right]$

$= \frac{32}{3}$ units square



حل آخر

$f(x) > g(x)$

$A = \int_{-2}^{2}(f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{2}(3 - x^2 + 1)dx$

$= \left[3x - \frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{2} = \left(6 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(-6 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{32}{3}$ units square

(11) حل $x^2-2=2$ ؛ $x^2=4$، إذاً تتقاطع المنحنيات عند $x=\pm 2$

$$A=\int_{-2}^{2}[2-(x^2-2)]dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}\text{ units square}$$

(12) حل $4x-x^2=0$ ؛ $2x-x^2=-2x$

إذاً، تتقاطع المنحنيات عند $x=4$ ، $x=0$

$$A=\int_{0}^{4}(4x-x^2)dx=\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{4}=\frac{32}{3}\text{ units square}$$

(13) حل $x^2=1$ ؛ $7-2x^2=x^2+4$، إذاً تتقاطع المنحنيات عند $x=\pm 1$

$$A=\int_{-1}^{1}[((7-2x^2)-(x^2+4)]dx=\int_{-1}^{1}(-3x^2+3)dx=3\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$=3\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=3\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=4\text{ units square}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (b)	**(6)** (d)
(7) (b)	**(8)** (c)	**(9)** (a)	**(10)** (a)		

حجوم الأجسام الدورانية — تمرَّنْ 2–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) الحجم: $V=\int_{0}^{2}\pi x^4dx=\left[\pi\frac{1}{5}x^5\right]_{0}^{2}=\frac{32\pi}{5}\text{ units cube}$

(2) الحجم: $V=\pi\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2}dx=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{4}=\frac{3\pi}{4}\text{ units cube}$

(3) $V=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}\pi\text{ units cube}$

(4) نقاط التقاطع عند $x=2$، $x=-1$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left[(x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx=\pi\int_{-1}^{2}(-x^4-x^2+6x+8)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-1}^{2}=\frac{117\pi}{5}\text{ units cube}$$

(5) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x=-\frac{\pi}{4}$ إلى $x=\frac{\pi}{4}$

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2-\sec^2x)dx=\pi[2x-\tan x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\pi^2-2\pi \qquad \text{units cube}$$

(6) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x=1$ إلى $x=4$

$$V=\pi\int_{1}^{4}((x+1)^2-(x-1)^2)dx=\pi\int_{1}^{4}4x=[2\pi x^2]_{1}^{4}=30\pi\text{ units cube}$$

(7) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 1$

$$V = \pi\int_0^1 (1-x^2)dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\frac{\pi}{3} \text{ units cube}$$

(8) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 4$

$$V = \pi\int_0^4 x\,dx \Longrightarrow V = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \text{ units cube}$$

(9) $V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$

$$V = \pi\frac{r^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ units cube}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (c)	**(6)** (d)
(7) (d)	**(8)** (c)	**(9)** (a)	**(10)** (c)	**(11)** (d)	**(12)** (d)

طول قوس ومعادلة منحنى دالة — تمرَّنْ 3–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+9x}\,dx = \frac{2}{27}\left[(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{14}{27} \text{ units}$$

(2) $f'(x) = 2(7+4x)^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{1 + 4(7+4x)}\,dx = \int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{29+16x}\,dx = \left[\frac{(29+16x)^{\frac{3}{2}}}{24}\right]_1^{\frac{5}{4}}$$

$$L = \frac{343 - 135\sqrt{5}}{24} \approx 1.714 \text{ units}$$

(3) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)dx$$

$$L = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x}\right]_1^2 = \frac{17}{12} \text{ units}$$

(4) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + 19$

(5) $f(x) = -x^4 + x^2 + 5x - 2$

(6) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 3$

(7) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + 1$

(8) $f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x+5|+3$

(9) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + C_1$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow C_1 = 3$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + C_2$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} \Longrightarrow C_2 = 2$

$\Longrightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 2$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (a) **(5)** (c) **(6)** (b)

(7) (b) **(8)** (c) **(9)** (d)

المعادلات التفاضلية — تمرَّنْ 4–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y' = y'' = 3e^x \Longrightarrow 3e^x - 3e^x + 2x = 2x \Longrightarrow 2x = 2x$

إذًا الدالة $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

(2) $y' = y'' = e^x \Longrightarrow e^x + e^x = 2e^x$

إذًا الدالة $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^x$

(3) $y = \int (x^2 + x + 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$

$y(1) = 4$

$\therefore\ C = \frac{7}{6}$

$\therefore\ y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{6}$

(4) $y' = \frac{1}{x} - x$

$\therefore\ y = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$

(5) $y = 4\ln|x| + C$

$\therefore\ C = 1$

$\therefore\ y = 4\ln|x| + 1$

(6) $y(x) = ke^{3x}$

(7) $y = ke^{5x}$

(8) $y = ke^{\frac{5}{2}x}$

$\therefore\ k = 4e^{-5}$

$\therefore\ y = 4e^{\frac{5}{2}x-5}$

(9) $y = ke^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

$y(0) = \sqrt{2}$

$\therefore\ k = \sqrt{2}$

$\therefore\ y = \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

(10) $y = ke^{x} - 1$

(11) $y = ke^{-8x} + \frac{1}{4}$

$ke^{-8x} + \frac{1}{4}$

$k = \frac{e^2}{2}$

$\therefore\ y = \frac{1}{2}e^{2-8x} + \frac{1}{4}$

(12) $y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 4$

$y(0) = 2$

$\therefore\ k = -2$

$\therefore\ y = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 4$

(13) $y' = \cos 4x + C_1$

$y = \frac{1}{4}\sin 4x + C_1 x + C_2$

(14) $y' = 3x^2 - 8x + C_1$

$y = x^3 - 4x^2 + C_1 x + C_2$

(15) $y = C_1 e^{\frac{5}{2}x} + C_2 e^{-3x}$

(16) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$

(17) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

(18) $y = (C_1 x + C_2)e^{x}$

(19) $y = e^{-x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

(20) **(a)** $y = ke^{-2x}$

(b) $k = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}e^{-2x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (b) **(5)** (a) **(6)** (a)

(7) (a) **(8)** (c) **(9)** (b) **(10)** (c) **(11)** (c) **(12)** (d)

(13) (a) **(14)** (d)

اختبار الوحدة السادسة

(1) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 1$.

$$A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ units square}$$

(2) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 1$ إلى $x = 5$.

$$A = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5 = \frac{32}{3} \; units \text{ square}$$

(3) $A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \left|\int_0^2 (x^3 - 4x)dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = 4 + 4 = 8 \text{ units square}$

(4) $A = \int_1^2 (x^2 + 1 - \sqrt{x})dx = \left[\frac{x^3}{3} + x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \text{ units square}$

(5) يتقاطع المنحنيات عند النقط: $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 + 1 - x - 1)dx + \int_0^1 (x + 1 - x^3 - 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ units square}$$

(6) يتقاطع المنحنيات عند $x = -2$ و $x = 2$.

$$V = \pi\int_{-2}^{2} \left(4 - \frac{1}{4}x^4\right)dx = \pi\left[4x - \frac{1}{20}x^5\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{5}\pi \text{ units cube}$$

(7) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = -1$ إلى $x = 2$ ويتقاطعا عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

$$V = \pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}} [(-x + 3)^2 - (x + 2)^2]dx + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} [(x + 2)^2 - (-x + 3)^2]dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (5 - 10x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (-5 + 10x)dx$$

$$= [5x - 5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}} + [-5x + 5x^2]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{135}{4}\pi \text{ units cube}$$

(8) $V = \pi\int_{-2}^{1} [(-x^2 + 4)^2 - (x + 2)^2]dx = \pi\int_{-2}^{1} (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)dx$

$$V = \pi\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^{1} = \frac{108}{5}\pi \text{ units cube}$$

(9) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x}\,dx = \frac{8}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12} = \frac{56}{3} \text{ units}$$

(10) $f'(x) = -\sqrt{3}$

$L = \int_{-3}^{1} \sqrt{1+3}\, dx = \int_{-3}^{1} 2dx = 8$ units

(11) $f'(x) = (-1+2x)^{\frac{1}{2}}$

$L = \int_{2}^{8} \sqrt{1+(-1+2x)}\, dx = \int_{2}^{8} \sqrt{2x}\, dx = \frac{56}{3}$ units

(12) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad \therefore \quad f(x) = x^3 - x^2 + x + C$

يمر بالنّقطة $A(-1,-5) \quad \therefore \quad C = -2$

$\therefore \quad f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

(13) $f'(x) = \frac{-1}{3x-2} \quad \therefore \quad f(x) = -\frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$

يمر بالنّقطة $A(1,-1) \quad \therefore \quad C = -1$

$\therefore \quad f(x) = -\frac{1}{3}\ln|3x-2| - 1$

(14) $A(-1\ ,\ 3)$ نقطة صغرى محليّة إذاً:

$f'(-1) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 4x + C_1 \quad \therefore \quad C_1 = 0$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + C_2$

منحنى f يمرّ بالنقطة $A(-1\ ,\ 3)$ إذاً:

$C_2 = 4$

$\therefore \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

(15) $y = ke^{-\frac{5}{3}x} + \frac{2}{5}$

(16) $y = k\,|x|^{\frac{5}{3}}$

(17) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$

(18) $y = (C_1 + C_2\, x)e^{3x}$

(19) $y = e^{-2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

(20) $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$

تمارين إثرائية

(1) $A=\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$ units square $\qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

(2) استخدم التناظر:

$$2\int_0^2[2x^2-(x^4-2x^2)]dx=2\int_0^2(-x^4+4x^2)dx=2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=2\left[\left(-\frac{32}{5}+\frac{32}{3}\right)-0\right]$$
$$=\frac{128}{15}\text{ units square}$$

(3) استخدم التناظر:

$$2\int_0^1(x^2+2x^4)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{22}{15}\text{ units square}$$

(4) $A=\int_{-2}^{2}(8+2x^2-x^4)dx=\frac{448}{15}\approx 32.5\overline{3}$ units square

(5) $A(x)=\int_{-3}^{5}(15+2x-x^2)dx=\frac{256}{3}$ units square

(6) يتقاطع منحنيا $g(x)=x$ ، $f(x)=\frac{1}{x^2}$ عند $x=1$ ومنه تكون:

$$A=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}-(-1)\right]=1\text{ units square}$$

(7) $V=\pi\int_0^2\left(\frac{2-x}{2}\right)^2dx=\frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)[(2-x)^3]_0^2=\frac{2\pi}{3}$ units cube

(8) $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\cos^2 x)dx$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2x)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx$$
$$=\frac{\pi}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi^2}{16}\text{ units cube}$$

(9) $f(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

$$\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}\cos 3\times\frac{\pi}{3}+C$$
$$\therefore\ C=1$$
$$f(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x+1$$

(10) $f'(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_0^{27}\sqrt{1+\frac{9}{16}x}\,dx=\frac{32}{27}\left[\frac{259}{64}\sqrt{259}-1\right]\approx 76\text{ units}$$

(11) $y(x)=Ae^{-\frac{3}{2}x}+\frac{4}{3}$

(12) $y(x)=A\sin(x)+B\cos(x)$

(13) $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$

(14) **(a)** $y = ke^{ax} + 2$

(b) $k = 168 \;\; \therefore \;\; y = 168e^{ax} + 2$

(c) $7 = 168e^{6a} \Longrightarrow a = -\dfrac{\ln 24}{6}$

(15) $f'(x) = 3x^2 - 6x + C_1$

$A(3,-2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f إذًا:

$f'(3) = 0 \quad \therefore \quad C_1 = -9$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C_2$

$A(3,-2)$ هي نقطة على منحنى الدالة f إذًا:

$f(3) = -2 \quad \therefore \quad C_2 = 25$

$\therefore \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 25$

القطوع المخروطية — القطع المكافئ

تمرَّنْ 1–7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y^2 = -12x$

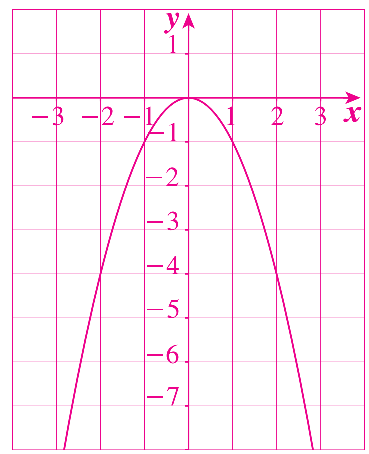
(2) $x^2 = -8y$

(3) $x^2 = 8y$

(4) $x^2 = -y$ البؤرة $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

الدليل: $y = \frac{1}{4}$

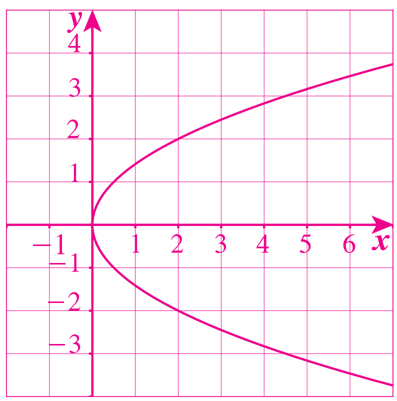
خطّ التماثل محور الصادات



(5) $y^2 = 2x$ البؤرة $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

الدليل: $x = \frac{-1}{2}$

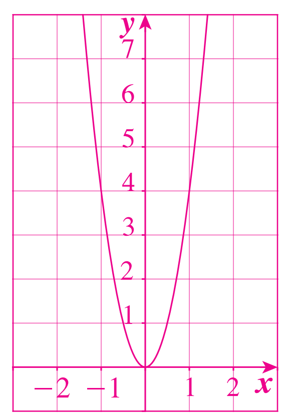
خطّ التماثل محور السينات



(6) $y = 4x^2$ $x^2 = \frac{1}{4}y$ البؤرة $\left(0, \frac{1}{16}\right)$

الدليل: $y = \frac{-1}{16}$

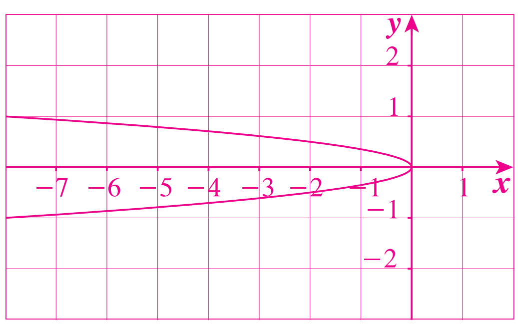
خطّ التماثل محور الصادات



(7) $x = -8y^2$ $y^2 = \frac{-x}{8}$ البؤرة $\left(\frac{-1}{32}, 0\right)$

الدليل: $x = \frac{1}{32}$

خطّ التماثل محور السينات



(8) معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = 4px$

وبالتعويض عن (x, y) بإحداثيات A نحصل على:

$$(2^2) = 4p(-1)$$

$$4 = -4p$$

$$p = -1$$

المعادلة:

$$y^2 = -4x$$

(9) النقطتان $B(3,4)$, $A(-3,4)$ متماثلتان في محور الصادات

معادلة القطع المكافئ هي: $x^2 = 4py$

وبالتّعويض عن (x,y) بإحداثيات A (أو بإحداثيات B) نحصل على:

$$(-3)^2 = 4p(4)$$

$$9 = 16p \Longrightarrow p = \frac{9}{16}$$

المعادلة:

$$x^2 = 4 \times \frac{9}{16} y$$

$$x^2 = \frac{9}{4} y$$

(10) البؤرة $(0\ ;\ -4)$ إذاً المعادلة هي: $x^2 = -16y$

(11) البؤرة $(5\ ;\ 0)$ إذاً المعادلة هي: $y^2 = 20x$

(12) $x^2 = 10y$ $\quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ إذاً البؤرة $\left(0\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

(13) معادلة القطع المكافئ هي على الصورة: $x^2 = 4py$

لنأخذ النقطة $A(50\ ,15)$ وبالتعويض عن (x,y) بإحداثيات A نحصل على:

$$(50)^2 = 4p(15)$$

$$2\,500 = 60p$$

$$p = \frac{125}{3}$$

المعادلة:

$$x^2 = \frac{500}{3} y$$

الإحداثي السيني للدعامة: $50 - 8 = 42$

بالتعويض في المعادلة نوجد y : $(42)^2 = \frac{500}{3} y$ ومنه $y \approx 10.6$

طول الدعامة يكون: $10.6 + 5 = 15.6\,\text{m}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)
(6) (b)	**(7)** (a)	**(8)** (d)	**(9)** (c)	**(10)** (d)
(11) (a)	**(12)** (b)	**(13)** (c)	**(14)** (a)	**(15)** (b)
(16) (c)	**(17)** (b)	**(18)** (d)		

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

$a^2=8^2 \Longrightarrow a=8$

رأسا القطع: $A_1(-8,0)\ ,\ A_2(8,0)$

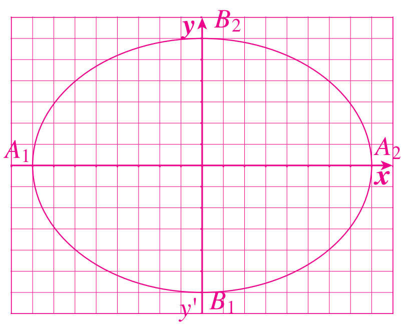
$b^2=6^2 \Longrightarrow b=6$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(0,-6)\ ,\ B_2(0,6)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=8^2-6^2=28 \Longrightarrow c=2\sqrt{7}$

البؤرتان: $F_1(-2\sqrt{7},0)\ ,\ F_2(2\sqrt{7},0)$



معادلتا دليلي القطع الناقص: $x=-\frac{a^2}{c}=\frac{-64}{2\sqrt{7}}=\frac{-32\sqrt{7}}{7}\quad,\quad x=\frac{a^2}{c}=\frac{64}{2\sqrt{7}}=\frac{32\sqrt{7}}{7}$

طول المحور الأكبر: $2a=2\times 8=16$

طول المحور الأصغر: $2b=2\times 6=12$

(2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

$a^2=6^2 \Longrightarrow a=6$

رأسا القطع: $A_1(0,-6)\ ,\ A_2(0,6)$

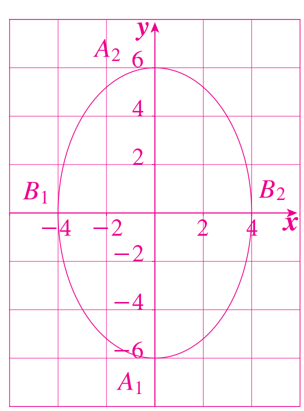
$b^2=4^2 \Longrightarrow b=4$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(-4,0)\ ,\ B_2(4,0)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=6^2-4^2=20 \Longrightarrow c=2\sqrt{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-2\sqrt{5})\ ,\ F_2(0,2\sqrt{5})$



معادلتا دليلي القطع الناقص: $y = -\frac{a^2}{c} = \frac{-36}{2\sqrt{5}} = \frac{-18\sqrt{5}}{5}$ $\quad y = \frac{a^2}{c} = \frac{36}{2\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$

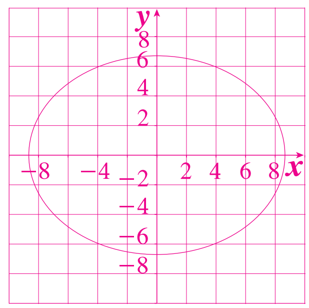
طول المحور الأكبر: $2a = 12$

طول المحور الأصغر: $2b = 8$

(3) $3x^2 + 5y^2 - 225 = 0$

$\frac{3x^2}{225} + \frac{5y^2}{225} = \frac{225}{225}$

$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{45} = 1$ معادلة القطع الناقص:



$a^2 = 75 \Longrightarrow a = 5\sqrt{3}$

$A_1(5\sqrt{3}, 0)\ ,\ A_2(-5\sqrt{3}, 0)$ رأسا القطع:

$b^2 = 45 \Longrightarrow b = 3\sqrt{5}$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(0, -3\sqrt{5})\ ,\ B_2(0, 3\sqrt{5})$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 75 - 45 = 30 \Longrightarrow c = \sqrt{30}$

$F_1(-\sqrt{30}, 0)\ ,\ F_2(\sqrt{30}, 0)$ البؤرتان:

معادلتا دليلي القطع: $x = -\frac{a^2}{c} = \frac{-75}{\sqrt{30}} = \frac{-5\sqrt{30}}{2}$ $\quad x = \frac{a^2}{c} = \frac{75}{\sqrt{30}} = \frac{5\sqrt{30}}{2}$

طول المحور الأكبر: $2a = 10\sqrt{3}$

طول المحور الأصغر: $2b = 6\sqrt{5}$

(4) $4x^2 + y^2 - 28 = 0$

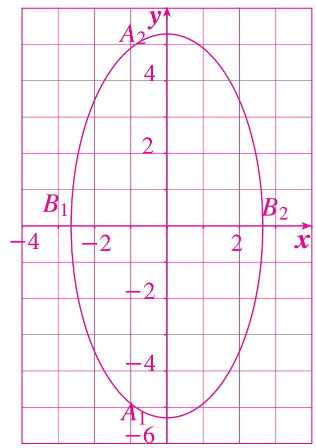
$\frac{4x^2}{28} + \frac{y^2}{28} = \frac{28}{28}$

$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{28} = 1$ معادلة القطع الناقص:

$a^2 = 28 \Longrightarrow a = 2\sqrt{7}$

$A_1(0, -2\sqrt{7})\ ,\ A_2(0, 2\sqrt{7})$ رأسا القطع:

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(-\sqrt{7}\,,0)\ ,\ B_2(\sqrt{7}\,,0)$



$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 28 - 7 = 21 \Longrightarrow c = \sqrt{21}$

البؤرتان: $F_1(0,-\sqrt{21})\ ,\ F_2(0,\sqrt{21})$

معادلتا دليلي القطع الناقص:

$y = -\frac{a^2}{c} = \frac{-28}{\sqrt{21}} = \frac{-28\sqrt{21}}{21} = \frac{-4}{3}\sqrt{21}$

$y = \frac{a^2}{c} = \frac{28}{\sqrt{21}} = \frac{28\sqrt{21}}{21} = \frac{4}{3}\sqrt{21}$

طول المحور الأكبر: $2a = 4\sqrt{7}$

طول المحور الأصغر: $2b = 2\sqrt{7}$

(5) $c = 2\ ,\ b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \quad \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

(6) $2a = 10 \Longrightarrow a = 5\ ;\ c = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$\therefore\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(7) $a = 5\ ,\ 2b = 4 \Longrightarrow b = 2$

فتكون معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

(8) $b = 4$

$2a = 10 \Longrightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(9) $c = 5$

$a^2 = b^2 + 5^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + 25$

$\frac{2^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$

$\Longrightarrow a^2b^2 = 4b^2 + 9a^2 \Longrightarrow (b^2+25)b^2 = 4b^2 + 9(b^2+25) \Longrightarrow b^4 + 25b^2 = 4b^2 + 9b^2 + 225$

$\Longrightarrow b^4 + 12b^2 - 225 = 0 \Longrightarrow b^2 = -6 + 3\sqrt{29}$

$\Longrightarrow a^2 = 19 + 3\sqrt{29}$

$$\frac{x^2}{(19+3\sqrt{29})} + \frac{y^2}{(-6+3\sqrt{29})} = 1$$

(10) $a = 6\ ;\ b = 4$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

(11) $c = 5\ ;\ 2b = 6 \Longrightarrow b = \frac{6}{2} = 3$

$a^2 = c^2 + b^2 \Longrightarrow a^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

(12) $2a = 10 \Longrightarrow a = 5\ ;\ 2c = 6 \Longrightarrow c = \frac{6}{2} = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)	**(6)** (c)
(7) (a)	**(8)** (b)	**(9)** (d)	**(10)** (d)	**(11)** (b)	**(12)** (c)
(13) (b)	**(14)** (c)	**(15)** (d)			

القطع الزائد — تمرّنْ 3–7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

$a^2 = 25 \ \therefore\ a = 5 \ \therefore$ رأسا القطع الزائد: $A_1(0,5)\ ,\ A_2(0,-5)$

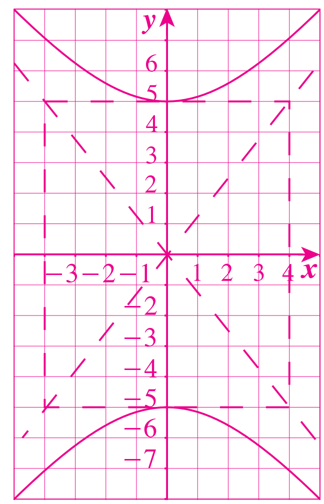
$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41 \Longrightarrow c = \sqrt{41}$

البؤرتان: $F_1(0,\sqrt{41})\ ,\ F_2(0,-\sqrt{41})$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{5}{4}x$

معادلتا الدليلين: $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25\sqrt{41}}{41}$



طول المحور الأكبر: $2a=4\times 5=10$

طول المحور المرافق: $2b=2\times 4=8$

(2) $24x^2-12y^2-192=0$

$\frac{24x^2}{192}-\frac{12y^2}{192}=\frac{192}{192}$

$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{16}=1$

$a^2=8\Longrightarrow a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

رأسا القطع: $A_1(2\sqrt{2},0)\ ,\ A_2(-2\sqrt{2},0)$

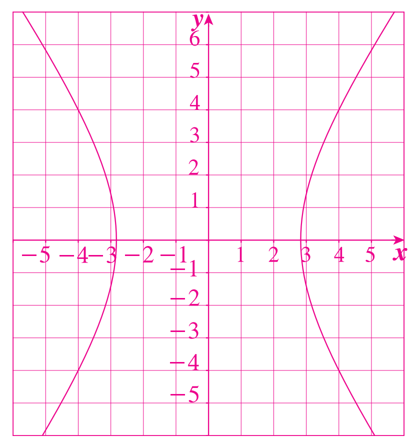
$b^2=16\Longrightarrow b=4$

$c^2=a^2+b^2=8+16=24\Longrightarrow c=2\sqrt{6}$

البؤرتان: $F_1(2\sqrt{6},0)\ ,\ F_2(-2\sqrt{6},0)$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4x}{2\sqrt{2}}=\pm\sqrt{2}\,x$

معادلتا الدليلين: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{8}{2\sqrt{6}}=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$



طول المحور الأكبر: $2a=4\sqrt{2}$

طول المحور المرافق: $2b=2\times 4=8$

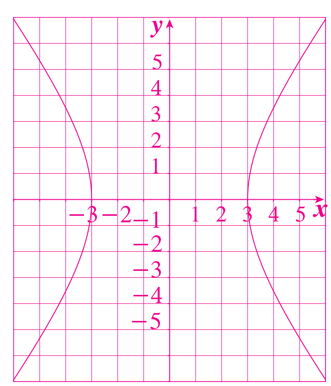
(3) $c=5\ ,\ a=3$

$c^2=a^2+b^2=b^2=c^2-a^2$

$b^2=25-9=16\Longrightarrow b=4$

معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4x}{3}$



(4) $\frac{a}{b} = 2 \Longrightarrow a = 2b$

$c = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow (2b^2) + b^2 = 5 \Longrightarrow 5b^2 = 5$

$\Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$

$\therefore \quad a = 2$

$\Longrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1 \ , \ \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ معادلة القطع الزائد:

(5) $a = \frac{2}{3}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

لنضع إحداثيات النقطة $(1, 1)$ في المعادلة:

$\frac{1}{\frac{4}{9}} - \frac{1}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2 = \frac{4}{5}$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = 1$ معادلة القطع الزائد:

(6) بما أن محوره الأساسي هو جزء من محور السينات فالمعادلة هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

لنضع إحداثيات A في المعادلة:

$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$

$\frac{4}{a^2} = \frac{1}{b^2} + 1 \Longrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4}$

لنضع إحداثيات B في المعادلة:

$\frac{16}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$

بالتعويض نوجد المعادلة التالية:

$16\left(\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{b^2} = 1$

$4 + \frac{4}{b^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{5}{b^2} = 3 \Longrightarrow b^2 = \frac{5}{3}$

$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 \Longrightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{8}{5} \Longrightarrow a^2 = \frac{5}{2}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1$

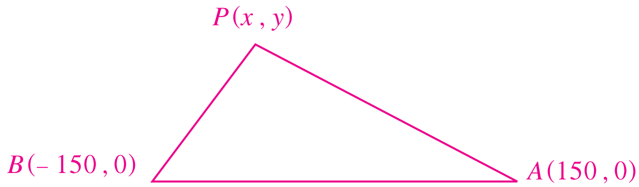
(7) نستخدم قاعدة المسافة بدلالة الزمن والسرعة:

$d = vt \Longleftrightarrow t = \frac{d}{v}$

$t_1 = \frac{PA}{50}$

$t_2 = \dfrac{PB}{50}$

$t_1 - t_2 = \dfrac{PA}{50} - \dfrac{PB}{50}$



ولكن: $t_1 - t_2 = 2$

$2 = \dfrac{PA}{50} - \dfrac{PB}{50} \Longrightarrow PA - PB = 100$

بما أن A, B نقطتان ثابتتان فيكون منحنى النقاط المتغيرة P هي قطع زائد بؤرتاه هما A, B حيث: $2a = 100$

$c = 150 \;,\; a = 50$

$b^2 = (150)^2 - (50)^2 = 20\,000$

معادلة القطع الزائد: $\dfrac{x^2}{2\,500} - \dfrac{y^2}{20\,000} = 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (b)	**(5)** (c)
(6) (a)	**(7)** (d)	**(8)** (b)	**(9)** (c)	**(10)** (b)
(11) (a)	**(12)** (c)	**(13)** (a)	**(14)** (d)	

الاختلاف المركزي — تمرَّنْ 4–7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $e = \dfrac{3}{2} \;,\; \dfrac{3}{2} > 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع زائد

$c = 3 \;,\; e = \dfrac{c}{a} \Longrightarrow \dfrac{3}{a} = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow a = 2$

ولكن في القطع الزائد:

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 9 - 4$

$b^2 = 5$

معادلة القطع الزائد هي: $\dfrac{y^2}{5} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

(2) $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \;,\; \dfrac{\sqrt{7}}{4} < 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع ناقص

$c = \sqrt{7} \;,\; e = \dfrac{c}{a} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{\sqrt{7}}{a} \Longrightarrow a = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 16 - 7 \Longrightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

(3) $e = \frac{5}{3}\ ,\ \frac{5}{3} > 1$

إذاً القطع المخروطي هو قطع زائد

$a = 4\ ,\ e = \frac{c}{a}$

$\frac{c}{4} = \frac{5}{3} \Longrightarrow c = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3}$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = \frac{400}{9} - 16 = \frac{256}{9}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{256}{9}} = 1$

(4) $e = \frac{3}{4}\ ,\ \frac{3}{4} < 1$

إذاً القطع المخروطي هو قطع ناقص

معادلة الدليل: $8 = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow c = \frac{a^2}{8}$

$\frac{3}{4} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{a^2}{8}}{a} \Longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{a}{8} \Longrightarrow a = 6$

$c = e \cdot a = \frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2}$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 36 - \frac{81}{4} = \frac{63}{4}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{63}{4}} = 1$

(5) $(a^2 = 9\ ,\ b^2 = 4) \Longrightarrow (a = 3\ ,\ b = 2)$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = 9 - 4 = 5 \Longrightarrow c = \sqrt{5}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ على الصورة $\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$

(7) $a^2 = 7 \Longrightarrow a = \sqrt{7}$

$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

الرأسان: $A_1(-\sqrt{7}, 0)$, $A_2(\sqrt{7}, 0)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 7 + 16 \Longrightarrow c = \sqrt{23}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{23}, 0)$, $F_2(\sqrt{23}, 0)$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{161}}{7}$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{7}{\sqrt{23}} = \pm\frac{7\sqrt{23}}{23}$

(8) $a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

الرأسان: $A_1(0, -4)$, $A_2(0, 4)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20 \Longrightarrow c = 2\sqrt{5}$

البؤرتان: $F_1(0, -2\sqrt{5})$, $F_2(0, 2\sqrt{5})$

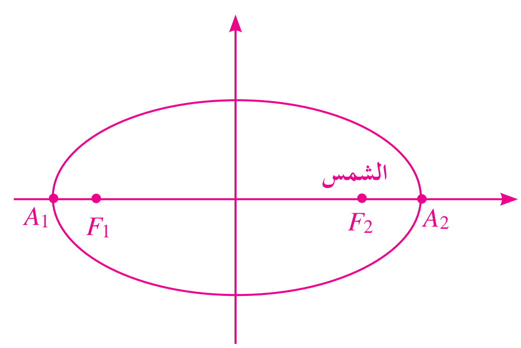
$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

معادلتا الدليلين: $y = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{16}{2\sqrt{5}} = \pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$

(9) $2a = 3\,000\,000 \Longrightarrow a = 150\,000$

$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = e \cdot a = 0.017 \times 150\,000 = 2\,550$

$c = 2\,550$



أصغر بعد للأرض عن الشمس هو: F_2A_2 فيكون:

$F_2A_2 = 150\,000 - 2\,550 = 147\,450$ km

أكبر بعد للأرض عن الشمس هو: F_2A_1 فيكون:

$F_2A_1 = 150\,000 + 2\,550 = 152\,550$ km

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)	**(6)** (a)
(7) (b)	**(8)** (b)	**(9)** (c)	**(10)** (d)	**(11)** (a)	**(12)** (c)
(13) (a)	**(14)** (b)	**(15)** (d)	**(16)** (a)		

اختبار الوحدة السابعة

(1) $4y^2 - 9x^2 = 36 \Longrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 9 \;,\; b^2 = 4$

$\Longrightarrow c^2 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

البؤرتان: $F_1(0, -\sqrt{13}) \;,\; F_2(0, \sqrt{13})$

(2) $-2x^2 + 3y^2 + 10 = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 3y^2 = -10 \Longrightarrow 2x^2 - 3y^2 = 10$

$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{\frac{10}{3}} = 1$

إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 5 \;,\; b^2 = \frac{10}{3}$

$\Longrightarrow c^2 = \frac{25}{3} \Longrightarrow c = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

البؤرتان: $F_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right) \;,\; F_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

(3) $2x^2 + y^2 = 9$

$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{9} = 1$

إذاً هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = \frac{9}{2} \;,\; b^2 = 9$

$c^2 = 9 - \frac{9}{2}$

$c^2 = \frac{9}{2}$

البؤرتان: $F_1\left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \;,\; F_2\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

(4) $2x^2 - y^2 + 6 = 0 \Longrightarrow 2x^2 - y^2 = -6 \Longrightarrow y^2 - 2x^2 = 6$

$\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$

إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 6 \;,\; b^2 = 3 \Longrightarrow c^2 = 9$

البؤرتان: $F_1(0, -3) \;,\; F_2(0, 3)$

(5) $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$

هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2=5^2 \Longrightarrow a=5$

$b^2=2^2 \Longrightarrow b=2$

في القطع الناقص: $a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=5^2-2^2=21 \Longrightarrow c=\sqrt{21}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-\sqrt{21})\ ;\ F_2(0,\sqrt{21})$

معادلتا الدليلين: $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{\sqrt{21}}=\pm\frac{25\sqrt{21}}{21}$

(6) $y^2=5x.$

هي معادلة قطع مكافئ مركزه نقطة الأصل.

$4p=5 \Longrightarrow p=\frac{5}{4}$

الاختلاف المركزي: $e=1$

البؤرة: $F\left(\frac{5}{4},0\right)$

معادلة الدليل: $x=-\frac{5}{4}$

(7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=4 \Longrightarrow a=2$

$b^2=9 \Longrightarrow b=3$

في القطع الزائد: $c^2=a^2+b^2=13 \Longrightarrow c=\sqrt{13}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{13},0)\ ;\ F_2(\sqrt{13},0)$

معادلتا الدليلين: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{2}x$

(8) $\frac{x^2}{18^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$

هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2=18^2 \Longrightarrow a=18$

$b^2=10^2 \Longrightarrow b=10$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 = c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 18^2 - 10^2 = 224 \Longrightarrow c = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$

الاختلاف المركزي: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4\sqrt{14}}{18} = \dfrac{2\sqrt{14}}{9}$

البؤرتان: $F_1(-4\sqrt{14}, 0)\ ;\ F_2(4\sqrt{14}, 0)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{18^2}{4\sqrt{14}} = \pm\dfrac{81\sqrt{14}}{14}$

(9) $y^2 = -3x$

هي معادلة قطع مكافئ مركزه نقطة الأصل.

$4p = -3 \Longrightarrow p = -\dfrac{3}{4}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(-\dfrac{3}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = \dfrac{3}{4}$

(10) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Longrightarrow c = 5$

الاختلاف المركزي: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

البؤرتان: $F_1(0, -5)\ ;\ F_2(0, 5)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{16}{5}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm\dfrac{a}{b}x = \pm\dfrac{4}{3}x$

(11) $x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1$

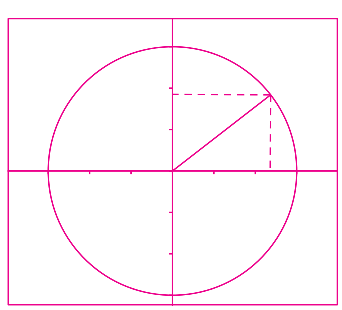
لتكن $M(x, y)$ نقطة على دائرة؛ لنذكّر أنّ $OM = r$.

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\Longrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = r^2$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$



(12) $e = \frac{c}{a} = \frac{213125.9}{107124} \approx 1.99$

$e = 1.99 > 1$ إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$b^2 = c^2 - a^2 \Longrightarrow b^2 = 3.39 \times 10^{10}$

بفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور أفقي.

تكون المعادلة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{1.15 \times 10^{10}} - \frac{y^2}{3.39 \times 10^{10}} = 1$

(13) لتكن $M(x, y)$ نقطة على القطع الزائد و $F_2(155, 0)$ ، $F_1(-155, 0)$ البؤرتين.

$|MF_1 - MF_2| = 80$

$2a = 80 \Longrightarrow a = 40 \Longrightarrow a^2 = 1600$

$\therefore\ c = 155$

في القطع الزائد: $b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 22\,425$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{22\,425} = 1$

(14) **(a)** $e = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

إذاً هي معادلة قطع ناقص.

(b) $e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 2c = \sqrt{2}\,a \Longrightarrow a = \sqrt{2}\,c$

$x = 4 = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow 4 = \frac{(\sqrt{2}\,c)^2}{c} = 2c \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow a = 2\sqrt{2}$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow (2\sqrt{2})^2 = b^2 + 4 \Longrightarrow b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

(c) الصورة العامة للقطع الناقص حيث أن المحور القاطع ينطبق على محور السينات هي:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(15) $e = \frac{5}{4}\ ,\ \frac{5}{4} > 1$ إذاً هي معادلة قطع زائد.

$\frac{5}{4} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 4c = 5a \Longrightarrow a = \frac{4}{5}c$

$c = 5 \Longrightarrow a = \frac{4}{5} \times 5 = 4$

في القطع الزائد: $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$

إذاً الصورة العامة للقطع الزائد هي: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

(16) $x^2 = -4y$

(17) $y^2 = 8x$

(18) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

(19) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

(20) $2a=12 \Longrightarrow a=6$

$2c=20 \Longrightarrow c=10$

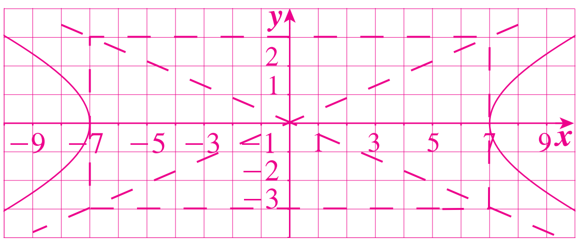
$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow b^2=c^2-a^2=100-36=64 \Longrightarrow b=8$

المعادلة: $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$

تمارين إثرائية

(1) معادلات الخطوط المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$

$y=\pm\frac{b}{a}x \quad \therefore \quad y=\pm\frac{3}{7}x$



(2) $a=10 \qquad b=7$

$c^2=a^2-b^2=100-49=51 \Longrightarrow c=\sqrt{51}$

$\therefore \ F_1(-\sqrt{51},0)\ ,\ F_2(\sqrt{51},0)$

(3) $m=0 \Longrightarrow y^2-x=0$

$y^2=x$

معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل

$4p=1 \Longrightarrow p=\frac{1}{4}$

البؤرة: $F\left(\frac{1}{4},0\right)$

معادلة الدليل $x=-\frac{1}{4}$

(4) $x^2-5y^2+7=0 \Longrightarrow x^2-5y^2=-7 \Longrightarrow 5y^2-x^2=7$

$\frac{y^2}{\frac{7}{5}}-\frac{x^2}{7}=1$

إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=\frac{7}{5} \Longrightarrow a=\sqrt{\frac{7}{5}}$

$b^2=7 \Longrightarrow b=\sqrt{7}$

الرأسان: $A_1\left(0,-\sqrt{\frac{7}{5}}\right)\ ;\ A_2\left(0,\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{\sqrt{\frac{7}{5}}}{\sqrt{7}}x=\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = \frac{7}{5} + 7 = \frac{42}{5} \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{42}{5}}$$

$$F_1\left(0, -\sqrt{\frac{42}{5}}\right) \; ; \; F_2\left(0, \sqrt{\frac{42}{5}}\right)$$

معادلتا الدليلين: $y = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{7}{\frac{5\sqrt{42}}{\sqrt{5}}} = \pm \frac{\sqrt{210}}{30}$

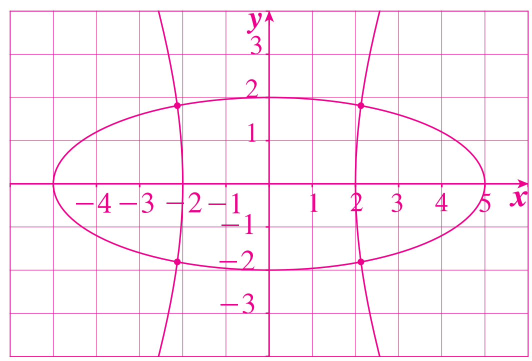
(5) (a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

إذاً هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

(b)



يبيّن الشكل وجود 4 نقاط تقاطع بين المنحنيين.

(c) $\frac{x^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{25}$

$$x^2 = 4\left(1 + \frac{y^2}{25}\right)$$

$$\frac{x^2}{25} = 1 - \frac{y^2}{4}$$

$$x^2 = 25\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow 4\left(1 + \frac{y^2}{25}\right) = 25\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow 4 + \frac{4}{25}y^2 = 25 - \frac{25}{4}y^2 \Longrightarrow y^2\left(\frac{4}{25} + \frac{25}{4}\right) = 25 - 4$$

$$\frac{641}{100}y^2 = 21$$

$$y^2 = \frac{2\,100}{641}$$

$$y = \pm 10\sqrt{\frac{21}{641}}$$

$$x^2 = \frac{2\,900}{641}$$

$$x = \pm 10\sqrt{\frac{29}{641}}$$

يوجد 4 نقاط تقاطع بين المنحنيين.

(6) $e=\frac{7}{5}\ ,\ \frac{7}{5}>1$

إذاً قطع زائد.

$\frac{7}{5}=\frac{c}{a}\Longrightarrow 7a=5c\Longrightarrow a=\frac{5}{7}c$

$\frac{25}{7}=\frac{a^2}{c}=\frac{\frac{25}{49}c^2}{c}=\frac{25}{49}c\Longrightarrow c=7\Longrightarrow a=5$

$c^2=a^2+b^2\Longrightarrow b^2=c^2-a^2=7^2-5^2=24$

معادلة القطع الزائد: $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$

(7) $e=\frac{5}{7}\ ,\ \frac{5}{7}<1$

إذاً إنه قطع ناقص

$c=5$

$\frac{c}{a}=\frac{5}{7}\ ;\ \frac{5}{a}=\frac{5}{7}\Longrightarrow a=7$

$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow b^2=a^2-c^2\Longrightarrow b^2=49-25\Longrightarrow b^2=24$

المعادلة: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$

(8) الخط المقارب $y=\frac{b}{a}x$ يمر بالنقطة $A(3,5)$ فيكون:

$5=\frac{b}{a}(3)\Longrightarrow \frac{b}{a}=\frac{5}{3}\Longrightarrow a=\frac{3}{5}b$

$c^2=a^2+b^2\Longrightarrow 34=\frac{9b^2}{25}+b^2\Longrightarrow 34=\frac{34b^2}{25}\Longrightarrow b^2=25\Longrightarrow b=5$

$a=\frac{3}{5}(5)=3$

فتكون معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$

(9) $\frac{a}{b}=2\ ,\ c=\sqrt{5}\ ,\ a=2b$

$c^2=a^2+b^2\Longrightarrow 5=b^2+4b^2\Longrightarrow 5=5b^2\Longrightarrow b^2=1\Longrightarrow b=1$

ولكن: $a=2b\Longrightarrow a=2$

لذا معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{4}-x^2=1$

(10) $a^2=25\Longrightarrow a=5$

$b^2=9\Longrightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow c^2=b^2-a^2=25-9=16\Longrightarrow c=4$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-4)\ ,\ F_2(0,4)$

معادلتا الدليلين: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{4}$

(11) $8y^2-25x^2=200 \Longrightarrow \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{8}=1$

$a^2=25 \Longrightarrow a=5$

$b^2=8 \Longrightarrow b=2\sqrt{2}$

$c^2=a^2+b^2=25+8=33 \Longrightarrow c=\sqrt{33}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{33}}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-\sqrt{33})$; $F_2(0,\sqrt{33})$

معادلتا الدليلين: $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{\sqrt{33}}=\pm\frac{25\sqrt{33}}{33}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{4}x$

(12) $x^2=-2y$

$4p=-2 \Longrightarrow p=-\frac{1}{2}$

الاختلاف المركزي: $e=1$

البؤرة: $F\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

معادلة الدليل: $y=\frac{1}{2}$

(13) $y^2=-x$

$4p=-1 \Longrightarrow p=-\frac{1}{4}$

الاختلاف المركزي: $e=1$

البؤرة: $F\left(-\frac{1}{4},0\right)$

معادلة الدليل: $x=\frac{1}{4}$

(14) $5x^2-9y^2=45 \Longrightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$

$a^2=9 \Longrightarrow a=3$

$b^2=5 \Longrightarrow b=\sqrt{5}$

$c^2=a^2+b^2=9+5=14 \Longrightarrow c=\sqrt{14}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{14}}{3}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{14},0)$; $F_2(\sqrt{14},0)$

معادلتا الدليلين: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{9\sqrt{14}}{14}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}x$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) فضاء العينة: $(S) = \{(H,T),(T,T),(T,H),(H,H)\}$

عدد عناصره: $n(S) = 4$

(b) $X \in \{0,1,2\}$

(c) $P(X=0) = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = \frac{1}{4}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2) (a) $X = \{0,1,2,3\}$

X متغير عشوائي متقطّع.

(b) $Y = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$

Y متغير عشوائي متقطّع.

(c) $Z = \{1,2,3,4\}$

Z متغير عشوائي متقطّع.

(3) $k = 1 - (0.1 + 0.3 + 0.2 + 0.3) = 0.1$

(4) $f(2) = 1 - (0.1 + 0.4 + 0.2) = 0.3$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2

(5) (a) عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = {}_{10}C_5 = 252$

(b) $X \in \{0,1,2,3,4\}$

(c) $P(X=0) = \frac{{}_6C_5 \times {}_4C_0}{252} = \frac{1}{42}$

$P(X=1) = \frac{{}_6C_4 \times {}_4C_1}{252} = \frac{5}{21}$

$$P(X=2)=\frac{{}_6C_3\times{}_4C_2}{252}=\frac{10}{21}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_3}{252}=\frac{5}{21}$$

$$P(X=4)=\frac{{}_6C_1\times{}_4C_4}{252}=\frac{1}{42}$$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

(6) $\mu=0\times0.2+1\times0.3+2\times0.4+3\times0.1=1.4$

إذًا، التوقع: $(\mu)=1.4$

(7) **(a)** $\mu=7\times\frac{1}{8}+8\times\frac{3}{8}+9\times\frac{3}{8}+10\times\frac{1}{8}=\frac{17}{2}$

إذًا، التوقع: $(\mu)=\frac{17}{2}$

(b) $\sigma^2=49\times\frac{1}{8}+64\times\frac{3}{8}+81\times\frac{3}{8}+100\times\frac{1}{8}-\left(\frac{17}{2}\right)^2=0.75$

إذًا، التباين: $(\sigma^2)=0.75$

(c) $\sigma=\sqrt{0.75}=0.866$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma)=0.866$

(8) $F(0)=P(X\leqslant 0)=0.2$

$F(1)=P(X\leqslant 1)=P(X<1)+P(X=1)=0.2+0.15=0.35$

$F(2)=P(X\leqslant 2)=P(X<2)+P(X=2)=0.2+0.15+0.1=0.45$

$F(3)=P(X\leqslant 3)=P(X<3)+P(X=3)=0.2+0.15+0.1+0.25=0.7$

$F(3.5)=P(X\leqslant 3.5)=P(X<3)+P(X=3)=0.2+0.15+0.1+0.25=0.7$

$F(4)=P(X\leqslant 4)=P(X<4)+P(X=4)=0.2+0.15+0.1+0.25+0.3=1$

$F(5)=P(X\leqslant 5)=P(X<5)+P(X=5)=1$

(9) **(a)** $P(-1<X<5)=F(5)-F(-1)=0.7-0.1=0.6$

(b) $P(3\leq X<7)=F(7)-F(3)=1-0.45=0.55$

(c) $P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-F(3)=1-0.45=0.55$

(10) **(a)** $P(X=0)={}_8C_0\times0.3^0\times(1-0.3)^8=0.0576$

(b) $P(2<X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$={}_8C_3\times0.3^3\times0.7^5+{}_8C_4\times0.3^4\times0.7^4+{}_8C_5\times0.3^5\times0.7^3=0.437$

(11) **(a)** $P(X=0) = {}_{10}C_0 \times 0.5^0 \times 0.5^{10} = 9.766.10^{-4}$

(b) $P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$

$$= {}_{10}C_3 \times 0.5^3 \times 0.5^7 + {}_{10}C_4 \times 0.5^4 \times 0.5^6 = 0.322$$

(12) $n = 100 \ , \ p = 0.03$

$\mu = n\,p = 100 \times 0.03 = 3$

إذاً، التوقع: $(\mu) = 3$

$\sigma^2 = n\,p(1-p) = 100 \times 0.03 \times 0.97 = 2.91$

إذاً، التباين: $(\sigma^2) = 2.91$

$\sigma = \sqrt{2.91} = 1.7059$

إذاً، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 1.7059$

(13) $n = 12 \ , \ p = 0.5$

$\mu = n\,p = 12 \times 0.5 = 6$

إذاً، التوقع: $(\mu) = 6$

$\sigma^2 = n\,p(1-p) = 12 \times 0.5 \times 0.5 = 3$

إذاً، التباين: $(\sigma^2) = 3$

$\sigma = \sqrt{3} = 1.732$

إذاً، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 1.732$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (b)	**(6)** (a)
(7) (b)	**(8)** (b)	**(9)** (b)	**(10)** (c)	**(11)** (b)	**(12)** (a)
(13) (d)	**(14)** (d)	**(15)** (a)	**(16)** (b)	**(17)** (c)	**(18)** (c)
(19) (b)	**(20)** (c)	**(21)** (b)			

المجموعة A تمارين مقالية

(1) **(a)** $P(0 \le X \le 5) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$

(b) $P(X = 3) = 0$

(c) $P(X \le 2) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(d) $P(X > 2) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(2) **(a)** $P(2 \le X \le 4) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

(b) $P(X \ge 2.5) = (4 - 2.5) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

(3) **(a)** $x = 3 \quad \therefore \; y = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$P(0 \le X \le 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3} = 1$

(b) $x = 1 \quad \therefore \; y = \frac{2}{9}$

$P(X < 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

(c) $P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

(4) **(a)** المساحة تحت المنحنى (وهو منطقة مستطيلة)

$$\frac{1}{6} \times (5 - (-1)) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$$

$\therefore$ الدّالة هي كثافة إحتمال.

(b) لإثبات أنّ الدّالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدّالة f على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \le x \le b \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$a = -1 \;,\; b = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-(-1)} = \frac{1}{6} & : \quad -1 \le x \le 5 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذًا f هي دالة توزيع احتمالي منتظم.

(c) $P(0 < X \le 3) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

(d) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 2$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-1))^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

إذًا، التباين $(\sigma^2) = 3$

(5) **(a)** لإثبات أنّ الدّالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدّالة f على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \leq x \leq b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$a = 0 \;,\; b = 7$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7-0} = \frac{1}{7} & : \quad 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذًا f هي دالة توزيع إحتمالي منتظم.

(b) $P\left(0 \leq X \leq \frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{8}$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+7}{2} = \frac{7}{2}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{7}{2}$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(7-0)^2}{12} = \frac{49}{12}$$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{49}{12}$

(6) **(a)** $P(z \leq 2.16) = 0.98461$

(b) $P(z \geq 2.51) = 1 - P(z < 2.51) = 1 - 0.99396 = 0.00604$

(c) $P(1.5 \leq z \leq 2.4) = P(z \leq 2.4) - P(z \leq 1.5) = 0.99180 - 0.93319 = 0.05861$

(7) **(a)** $P(z \leq -0.64) = 0.26109$

(b) $P(-1.7 \leq z \leq 2.85) = P(z \leq 2.85) - P(z \leq -1.7)$

$$= 0.99781 - 0.04457 = 0.95324$$

(c) $P(-1.23 \leq z \leq 0.68) = P(z \leq 0.68) - P(z \leq -1.23)$

$$= 0.75175 - 0.10935 = 0.6424$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (b)	**(5)** (a)	**(6)** (a)
(7) (a)	**(8)** (b)	**(9)** (a)	**(10)** (b)	**(11)** (d)	**(12)** (b)
(13) (a)	**(14)** (d)	**(15)** (c)	**(16)** (d)	**(17)** (c)	

اختبار الوحدة الثامنة

(1) $f(5) = 1 - (0.3 + 0.2 + 0.1) = 0.4$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	2	3	4	5
$f(x)$	0.3	0.2	0.1	0.4

(2) (a) $n(S) = {}_8C_4 = 70$

(b) $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

(c) $P(X = 0) = \frac{{}_5C_4}{70} = \frac{1}{14}$

$P(X = 1) = \frac{{}_5C_3 \times {}_3C_1}{70} = \frac{3}{7}$

$P(X = 2) = \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{70} = \frac{3}{7}$

$P(X = 3) = \frac{{}_5C_1 \times {}_3C_3}{70} = \frac{1}{14}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

(3) (a) $\mu = 3 \times \frac{2}{11} + 4 \times \frac{5}{11} + 5 \times \frac{3}{11} + 6 \times \frac{1}{11} = \frac{47}{11}$

إذاً، التوقع: $(\mu) = \frac{47}{11}$

(b) $\sigma^2 = 9 \times \frac{2}{11} + 16 \times \frac{5}{11} + 25 \times \frac{3}{11} + 36 \times \frac{1}{11} - \left(\frac{47}{11}\right)^2 = \frac{90}{121}$

إذاً، التباين: $(\sigma^2) = \frac{90}{121}$

(c) $\sigma = \sqrt{\frac{90}{121}} = \frac{3}{11}\sqrt{10}$

إذاً، الانحراف المعياري: $(\sigma) = \frac{3}{11}\sqrt{10}$

(4) $F(1) = p(X \leq 1) = 0$

$F(2) = p(X \leq 2) = p(X < 2) + p(X = 2) = 0.14$

$F(3) = p(X \leq 3) = p(X = 3) + p(X < 3) = p(X = 3) + p(X = 2) = 0.3$

$F(3.5) = p(X \leqslant 3.5) = p(X = 3) + p(X < 3) = p(X = 3) + p(X = 2) = 0.3$

$F(4) = p(X \leq 4) = p(X = 4) + p(X < 4) = p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 0.65$

$F(5) = p(X \leq 5) = p(X = 5) + p(X < 5) = p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 0.8$

$F(6) = p(X \leq 6) = p(X = 6) + p(X < 6) = p(X = 6) + p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 1$

$F(7) = p(X \leqslant 7) = p(X = 7) + p(X < 7) = p(X = 6) + p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 1$

(5) $n = 1250\ ,\ p = 0.04$

(a) $\mu = n\,p = 1250 \times 0.04 = 50$

إذاً، التوقع: $(\mu) = 50$

(b) $\sigma^2 = n\,p(1-p) = 1250 \times 0.04 \times 0.96 = 48$

إذاً، التباين: $(\sigma^2) = 48$

(c) $\sigma = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

إذاً، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 4\sqrt{3}$

(6) (a) $P(0 \leq X \leq 3) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(b) $P(-2 \leq X \leq 0) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(c) $P(X = 2) = 0$

(d) $P(-1 \leq X \leq 2) = (2-(-1)) \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(7) (a) $x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad y = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

(b) $P\left(X \geq \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(8) (a) المساحة تحت منحنى الدّالة f هي: $(5-(-3)) \times \frac{1}{8} = 8 \times \frac{1}{8} = 1$

$\therefore$ الدّالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $P(-1 \leq x \leq 3) = (3-(-1)) \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$

إذاً، التوقع: $(\mu) = 1$

$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-3))^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$

إذاً، التباين: $(\sigma^2) = \frac{16}{3}$

(9) (a) $P(z \leq 2.24) = 0.98745$

(b) $P(z \geq 1.52) = 1 - P(z < 1.52) = 1 - 0.93574 = 0.06426$

(c) $P(1.4 \leq z \leq 2.6) = P(x \leq 2.6) - P(x \leq 1.4) = 0.99534 - 0.91924 = 0.0761$

(10) (a) $x_1 = 30 \quad \therefore \quad z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{30-40}{8} = -\frac{5}{4} = -1.25$

$x_2 = 65 \quad \therefore \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{65-40}{8} = \frac{25}{8} = 3.125$

$P(30 < X < 65) = P(-0.125 < z < 3.125) = P(z < 3.125) - P(z < -1.25)$

$= \frac{0.99910 + 0.99913}{2} - 0.10565 = 0.893465$

(b) $X = 45 \quad \therefore \quad z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{45 - 40}{8} = \dfrac{5}{8} = 0.625$

$$P(X \geq 45) = 1 - P(X < 45) = 1 - P(z < 0.625) = 1 - \frac{0.73237 + 0.73565}{2}$$

$$= 1 - 0.73401 = 0.26599$$

(11) $K = 1 - (0.16 + 0.24 + 0.15 + 0.2) = 0.25$

(12) **(a)** $P(z \leq 1.45) = 0.92647$

(b) $P(z > 0.27) = 1 - P(z \leq 0.27) = 1 - 0.60642 = 0.39358$

(c) $P(-1.32 \leq z \leq 1.75) = P(z \leq 1.75) - P(z \leq -1.32) = 0.95994 - 0.09342 = 0.86652$

(d) $P(-2.87 \leq z \leq -1.42) = P(x \leq -1.42) - P(x \leq -2.87) = 0.07780 - 0.00205 = 0.07575$

تمارين إثرائية

(1) $\sigma^2 = 25 \quad \therefore \quad \sigma = 5$

(a) $x = 55 \quad \therefore \quad z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{55 - 55}{5} = 0$

$$P(X > 55) = 1 - P(X \leq 55) = 1 - P(z \leq 0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

(b) $x = 50 \quad \therefore \quad z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{50 - 55}{5} = -\dfrac{5}{5} = -1$

$$P(X < 50) = P(z < -1) = 0.15866$$

(c) $x_1 = 30 \quad \therefore \quad z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = \dfrac{30 - 55}{5} = -5$

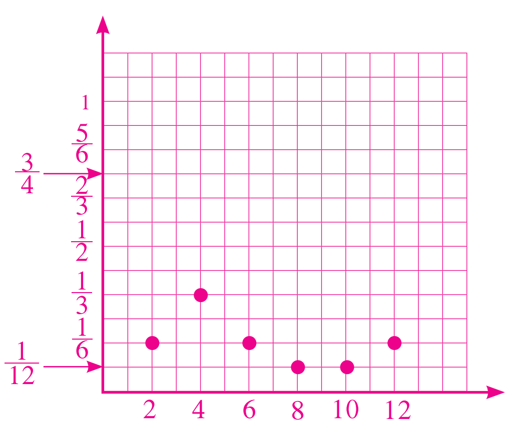
$x_2 = 40 \quad \therefore \quad z_2 = \dfrac{x_2 - \mu}{\sigma} = \dfrac{40 - 55}{5} = -3$

$$P(30 < X < 40) = P(-5 < z < -3) = P(z < -3) - P(z < -5)$$

$$= 0.00135 - 0 = 0.00135$$

(2) **(a)** $K = 1 - \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{6}$

(b)



(c) $F(2) = P(X \le 2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

$F(4) = P(X \le 4) = P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{1}{2}$

$F(6) = P(X \le 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{2}{3}$

$F(8) = P(X \le 8) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) = \frac{3}{4}$

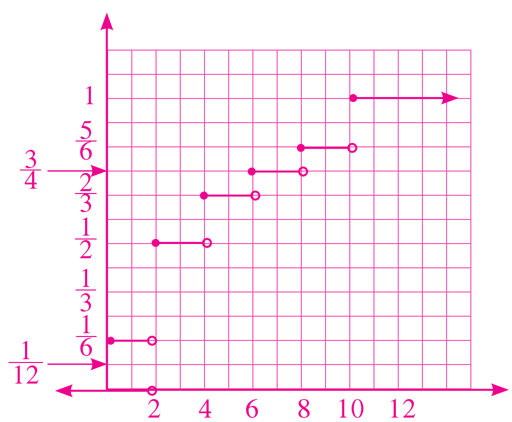
$F(10) = P(X \le 10) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) = \frac{5}{6}$

$F(12) = P(X \le 12) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) + P(X = 12) = 1$

جدول التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	2	4	6	8	10	12
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1

(d)



(3) $\mu = 14$ $\qquad\qquad \sigma = \sqrt{1} = 1$

(a) $x = 15 \;\therefore\; z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = 15 - 14 = 1$

$P(X > 15) = P(z > 1) = 1 - P(z \le 1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$

(b) $x = 11 \;\therefore\; z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = 11 - 14 = -3$

$P(X < 11) = P(z < -3) = 0.00135$

(c) $x_1 = 13 \;\therefore\; z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = 13 - 14 = -1$

$x_2 = 15 \;\therefore\; z_2 = \dfrac{x_2 - \mu}{\sigma} = 15 - 14 = 1$

$P(13 < X < 15) = P(-1 < z < 1) = P(z < 1) - P(z < -1)$

$= 0.84134 - 0.15866 = 0.68268$

(4) (a) $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = P\left(X \le \frac{3}{2}\right) - P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$$P\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=2$$

(b) $P\left(X\ge\frac{1}{2}\right)=1-P\left(X<\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\right)=\frac{3}{4}$

(5) $n=7\ ,\ p=\frac{1}{2}$

(a) $P(X=5)={}_7C_5\times 0.5^5\times 0.5^2=0.164$

(b) $P(X>0)=1-P(X\le 0)=1-P(X=0)=1-{}_7C_0\times 0.5^0\times 0.5^7=0.992$

(c) $P(X=0)+P(X=1)=7.8125\,.\,10^{-3}+{}_7C_1\times 0.5^1\times 0.5^6=0.0625$

(6) **(a)** $P(z\le 2.65)=0.99598$

(b) $P(-2.85\le z\le -1.96)=P(z\le -1.96)-P(z\le -2.85)=0.025-0.00219=0.02281$

(c) $P(z\ge 1.56)=1-P(z<1.56)=1-0.94062=0.05938$

(7) **(a)** $\mu=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{12}+5\times\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$

إذاً، التوقع: $(\mu)=\frac{17}{6}$

(b) $\sigma^2=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{3}+16\times\frac{1}{12}+25\times\frac{1}{6}-\left(\frac{17}{6}\right)^2=\frac{59}{36}$

إذاً، التباين: $(\sigma^2)=\frac{59}{36}$

(c) $\sigma=\sqrt{\frac{59}{36}}=\frac{\sqrt{59}}{6}$

إذاً، الانحراف المعياري: $(\sigma)=\frac{\sqrt{59}}{6}$

(8) $F(2)=P(X\le 2)=0$

$F(3)=P(X\le 3)=P(X<3)+P(X=3)=P(X=3)=0.17$

$F(4)=P(X\le 4)=P(X<4)+P(X=4)=P(X=3)+P(X=4)=0.41$

$F(4.5)=P(X\leqslant 4.5)=P(X<4)+P(X=4)=P(X=3)+P(X=4)=0.41$

$F(5)=P(x\le 5)=P(X<5)+P(X=5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0.64$

$F(6)=P(X\le 6)=P(X<6)+P(X=6)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=1$

$F(6.5)=P(X\leqslant 6.5)=P(X<6)+P(X=6)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=1$