المعادلات التفاضلية

خريطة ذهنية

معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى

رتبة أولى

$y' =$

- $= f(x)$
  تكامل مرة واحدة
- $= g(x) . h(x)$
  نفصل المتغيرات
- $= ay$
  الحل: $y = ke^{ax}$
- $= ay + b$
  الحل: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

رتبة ثانية

$y'' = f(x)$

تكامل مرتين

$ay'' + by' + cy = 0$

المعادلة المميزة

$ar^2 + br + c = 0$

حلين حقيقيين

- $r_1 = r_2$
  $y = (c_1 x + c_2) e^{rx}$
- $r_1 \neq r_2$
  $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

حلين تخيليين

$r = a \mp i\beta$

$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

المعادلات التفاضلية

① P.87

اثبت أن الدالة $y = 2e^{3x} + 1$ حل للمعادلة $y' + 3 = 3y$

$$y = 2e^{3x} + 1 \Rightarrow y' = 6e^{3x}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$y' + 3 = 6e^{3x} + 3 = 3(2e^{3x} + 1) = 3y$$

② P.88 حل المعادلة $y' = 7x^2 + 9x - 1$

$$y = \int y'\,dx = \int 7x^2 + 9x - 1\,dx$$

$$y = \frac{7}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - x + c$$ حيث c ثابت :

③ P.88 حل المعادلة $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$ والتي تجعل $y = 5$ عند $x = 1$

$$y = \int y'\,dx = \int 8x^3 - 3x^2 + 4\,dx$$

$$= \frac{8}{4}x^4 - \frac{3}{3}x^3 + 4x + c$$

$$= 2x^4 - x^3 + 4x + c$$

بالتعويض عن قيمتي x, y

$$5 = 2(1)^4 - 1^3 + 4 \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore\ y = 2x^4 - x^3 + 4x$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ حل المعادلة التفاضلية ④ P. 89

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x} \Rightarrow$

$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x|^2 + c$

$|y| = e^{\ln|x|^2 + c} \Rightarrow |y| = e^{\ln|x|^2} \cdot e^c$

$\therefore y = \pm e^c \cdot e^{\ln|x|^2}$

$e^{\ln|x^2|} = |x|^2 = x^2$

$y = \pm e^c \cdot x^2 \Rightarrow y = K x^2$

$y' = -2y$ أوجد حلاً للمعادلة ⑤ P. 90

إذا كان $y = 3$ عندما $x = 0$

$y' = -2y \Rightarrow y = K e^{-2x}$

بالتعويض عن x، y نجد

$3 = K e^{-2(0)} \Rightarrow 3 = K \times 1 \Rightarrow K = 3$

$\therefore y = 3e^{-2x}$

⑥ P. 90

$3y' - 2y = 4 \Rightarrow 3y' = 2y + 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

$\Rightarrow y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ، $\frac{b}{a} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow y = Ke^{\frac{2}{3}x} - 2 \xrightarrow{\text{بالتعويض}} 3 = Ke^0 - 2 \Rightarrow 3 + 2 = Ke^0$

$K = 5$

$\therefore y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$

$y'' = -3x^2 + 6x$ حل المعادلة : ⑦ P. 91

$y' = \int(-3x^2 + 6x)dx$

$y' = -x^3 + 3x^2 + c_1$

$y = \int(-x^3 + 3x^2 + c_1)dx$

$y = -\frac{x^4}{4} + x^3 + c_1 x + c_2$

$2y'' - 5y' + 3y = 0$ حل المعادلة : ⑧ P. 92

المعادلة المميزة

$2r^2 - 5r + 3 = 0$

$(2r-3)(r-1) = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$ or $r = 1$

بتطبيق القاعدة VI - (a)

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$

$4y'' - 12y' + 9y = 0$ حل المعادلة ⑨. P. 92

المعادلة المميزة

$(2r - 3)^2 = 0$

$2r - 3 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{3}{2}$

بتطبيق VI - (b)

$y = (c_1 x + c_2) e^{rx}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$y = (c_1 x + c_2) e^{\frac{3}{2}x}$

P. 93 ⑯ حل المعادلة $y'' + 2y' + 8y = 0$

المعادلة المميزة

$$r^2 + 2r + 8 = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 - 32 = -28 = 28i^2$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{-2 - \sqrt{28}\, i}{2} = \frac{-2}{2} - \frac{2\sqrt{7}}{2} i = -1 - \sqrt{7}\, i$$

$$r_2 = \frac{-2 + \sqrt{28}\, i}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{2\sqrt{7}}{2} i = -1 + \sqrt{7}\, i$$

$$\alpha = -1 \ ,\ \beta = \sqrt{7}$$

بتطبيق القاعدة (c) - $\underline{VI}$

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو

$$y = e^{-x} (c_1 \cos \sqrt{7}\, x + c_2 \sin \sqrt{7}\, x)$$