# ثانوية سلمان الفارسي

## قسم الرياضيات

## الصف الثاني عشر علمي

## الفصل الدراسي الثاني

## الوحدة السادسة

## نسخة غير محلولة



M.ATA

# ( 1 ـ 6 ) المساحات فى المستوى

## المساحات

### دالة واحدة $f(x)$

فترة واحدة $[a,b]$

$$A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

فترتين $[a,b],[b,c]$

$$A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|+\left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$$

### دالتين $g(x), f(x)$

فترة واحدة $[a,b]$

$$A=\left|\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$$

فترتين $[a,b],[b,c]$

$$A=\left|\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+\left|\int_b^c \left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$$

في حالة الأسئلة الموضوعية اذا علمت فترة التكامل $[a,b]$ يمكن حساب المساحة على الحاسبة مباشرة

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

دالة واحدة f (x) | فترة واحدة [a,b]

## أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة $[a , b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت $f$ دالة متصلة على $[a , b]$ فإن مساحة المنطقة $A$ المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$

إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \qquad \forall\, x \in [a , b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)\,dx$

إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \in [a , b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

### مثال (2)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

كن ايجابيا و لا تنظر خلفك

## حاول أن تحل

**2** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

**مثال (1)**

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

ومحور السينات والمستقيمين $x = 2 \ , \ x = 5$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

فترتين [a,b],[b,c]

دالة واحدة f (x)

لتكن $f$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ، $c\in(a,b)$ حيث $f(c)=0$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي:

$$A=\left|\int_a^c f(x)dx\right|+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x)=x^2+4-4x$

ومحور السينات والمستقيمين $x=4$ , $x=-1$.

لايوجد مستحيل

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 , \frac{3}{2}\right]$

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

حاول أن تحل

**3** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة المبينة.

**a** $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2 , 1]$

ثق في نفسك

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة المبينة.

**b** $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

هل اديت فروضك ؟؟

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة المبينة.

b $f(x) = \cos x \quad , \quad [0 \ , \ \pi]$

كن طموح وحقق اهدافك

[a,b] فترة واحدة

دالتين f( x ), g( x )

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من $f , g$ متصلتين على الفترة $[a , b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين $g$ ، $f$ والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)dx \right|$$

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ $y_1 = 2 - x^2$ و المستقيم $y_2 = -x$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

## حاول أن تحل

**6** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5$ ، $y_1 = x^2 + 2$

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

## مثال (7)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 9$

نحن من نصنع مصائرنا

## حاول أن تحل

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$

انار الله
دربك
ووفقك
لما يحب
ويرضاه

## دالتين $f(x), g(x)$

## فترتين $[a,b],[b,c]$

### مثال (8)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومنحنى الدالة $g$ حيث:

$$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$$

النجاح
ملك من
يدفع
ثمنه

## حاول أن تحل

**8** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومنحنى الدالة $g$ في كل مما يلي:

$f(x) = 1 - x^3 \quad , \quad g(x) = -4x + 1$

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

## مثال (9)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $g(x) = 3 - 3x^2$ , $f(x) = x^3 - x$

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري

انهض وواصل الطريق

**حاول أن تحل**

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $g(x)=\frac{x}{2}$ , $f(x)=\sqrt{x}$

والمستقيمين $x=9$ , $x=0$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

# دالتين g , f غير متقاطعتين

**مثال (5)**

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = -1 - x^2$
والمستقيمين $x = 3$ , $x = 0$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين $f, g$ غير متقاطعين.

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل
ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

حاول أن تحل

5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = -x^2 - 3$

والمستقيمين $x = 1$ , $x = -1$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين $g$ , $f$ غير متقاطعين.

من لا يشكر الناس لا يشكر الله

مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$ , $x = 0$

علمًا بأن: $\forall x \in [0,1]$ , $f(x) > g(x)$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

**حاول أن تحل**

**4** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x)=x^2+3$

ومنحنى الدالة $g$ : $g(x)=x^2+1$ والمستقيمين $x=-1\ ,\ x=1$

علمًا بأن: $\forall x\in[-1,1]\quad ,\quad f(x)>g(x)$

اشكر ثلاث اشخاص غدا

## ( 2 – 6 ) حجوم الاجسام الدورانية

# الحجوم

فترة واحدة $[a, b]$

دالة واحدة $f(x)$

$$A=\pi\int_a^b (f(x))^2\ dx$$

فترة واحدة $[a, b]$

دالتين $g(x), f(x)$

$$A=\pi\int_a^b \left[(f(x))^2-(g(x))^2\right] dx$$

$f(x)\ge g(x)\ge 0$ **حيث** $f(x)\le g(x)\le 0$

في حالة الأسئلة الموضوعية اذا علمت فترة التكامل $[a, b]$ يمكن حساب الحجم على الحاسبة مباشرة

دالة واحدة $f(x)$

$$A=\pi\left|\int_a^b (f(x))^2\ dx\right|$$

دالتين $g(x), f(x)$

$$A=\pi\left|\int_a^b \left[(f(x))^2-(g(x))^2\right] dx\right|$$

## ملحوظة : مسائل الحجوم تكون علي فترة واحدة فقط

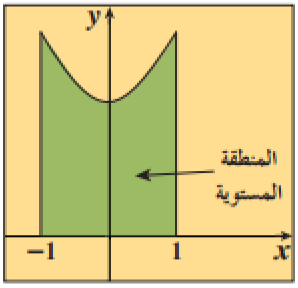
### دالة واحدة f (x)

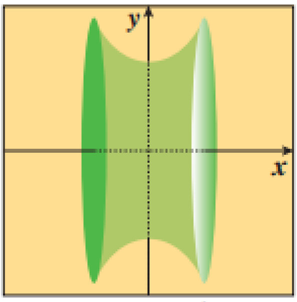
إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة $f$ ومحور السينات والمستقيمين $x = b$ ، $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$$

**مثال (1)**

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.



شكل توضيحي

ابتسم للحياة

## حاول أن تحل

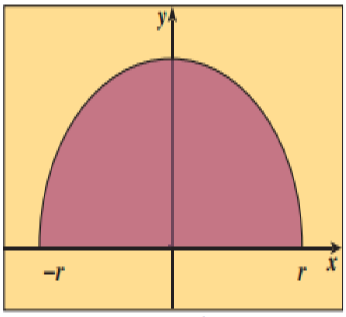
1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة $f$:

$f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.

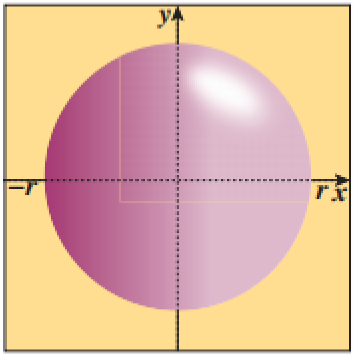
ساصير يوما ما اريد

## مثال (2)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$




شكل توضيحي




احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

## حاول أن تحل

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة $f$ : $r \neq 0$ ، $f(x) = r$ في الفترة $[0, h]$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطى حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه h (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته $r$ (وحدة طول) من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات.
(إرشاد: استخدم الدالة $f$ : $f(x)=\frac{r}{h}x$ في الفترة $[0,h]$ )

تعود علي العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

# دالتين $f(x), g(x)$

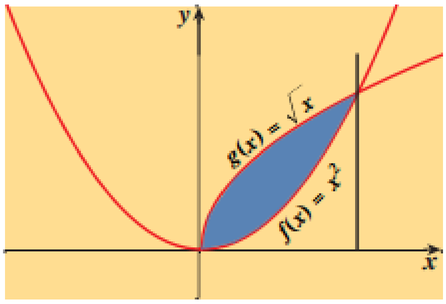
إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين $g$ , $f$ والمستقيمين $x = a$ , $x = b$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث $f, g$ لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a , b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

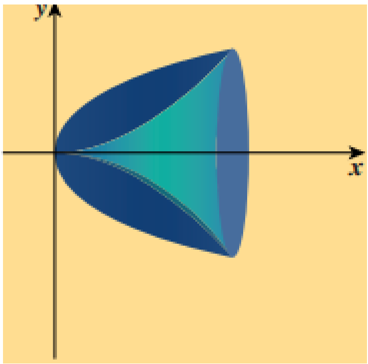
$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

## مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $g$ : $g(x) = \sqrt{x}$ , $f(x) = x^2$




نتعلم من الفشل اكثر من النجاح

حاول أن تحل

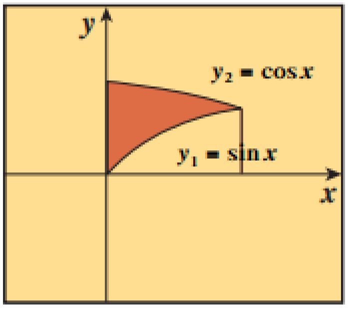
**3** أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

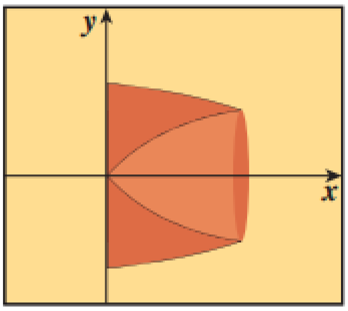
$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$

الجميع يفكر في تغيير العالم ،لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

## مثال (4)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين $y_1 = \sin x$ ، $y_2 = \cos x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

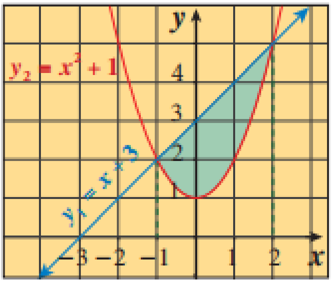



تستطيع ان تفعلها

## حاول أن تحل

**4** أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين: $y_1 = x + 3 \ , \ y_2 = x^2 + 1$




رايك في نفسك اهم من راي الاخريين فيك

أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات المحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

$y = x \ , \ y = 1 \ , \ x = 0$

$y = \sqrt{x} \ , \ y = 0 \ , \ x = 4$

قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

# ( 3 – 6 ) طول القوس

## طول القوس

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$$

( 1 ) نوجد $f'(x)$ ← نوجد المشتقة

( 2 ) نوجد $\left(f'(x)\right)^2$ ← تربيع

( 3 ) تعويض بالقانون $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$

( 4 ) اختيار احدى طرق التكامل لإيجاد قيمة التكامل المحدد يمكن استخدام هذه الطريقة

يمكن استخدام هذه الطريقة لحل معظم المسائل

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+c$$

M ATA

# ( 3 – 6 ) طول القوس

**قاعدة طول القوس**

إذا كانت الدالة $f'$ متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

**مثال (1)**

أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0 , 4]$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

## حاول أن تحل

1 أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+1$ في الفترة $[3, 8]$

الامال العظيمة تصنع الاشخاص العظماء

## مثال (2)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0\ ,6]$

بالسؤال يتعلم الانسان

## حاول أن تحل

**2** أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \frac{2}{9}(9 + 3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2 , 5]$

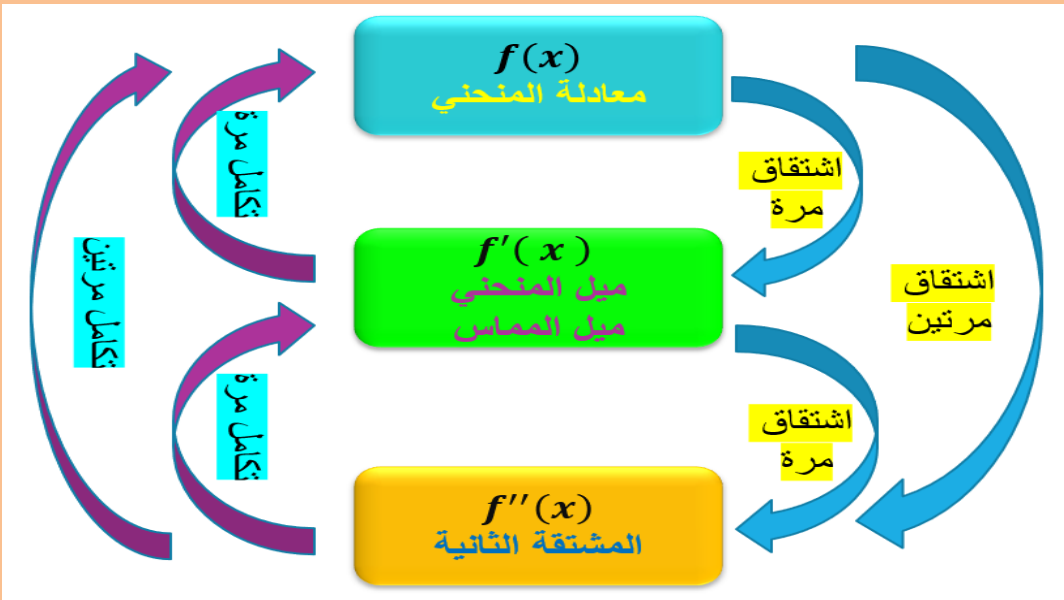
اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}$ في الفترة $[1,2]$.

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

# ( 3 – 6 ) معادلة منحنى دالة

## معادلة المنحنى




**الحالة الاولي**

بمعلومية:

$f'(x)$، نقطة (a,b)

خطوات الحل

تكامل مرة واحدة

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

نستخدم $f(a)=b$ إيجاد الثابت

ثم معادلة المنحني

**الحالة الثانية**

بمعلومية:

ميل العمودي ، نقطة (a,b)

$f'(x)$ ميل المنحني $= \dfrac{-1}{\text{ميل العمودي على المنحني}}$

خطوات الحل

تكامل مرة واحدة

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

نستخدم $f(a)=b$ لإيجاد الثابت

ثم معادلة المنحني

**الحالة الثالثة**

بمعلومية:

$f''(x)$، نقطة حرجة (a,b)

خطوات الحل

تكامل مرتين

$f'(x)=\int f''(x)\,dx$

نستخدم $f'(a)=0$ لإيجاد الثابت $c_1$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

نستخدم $f(a)=b$ لإيجاد الثابت $c_2$

ثم معادلة المنحني

MATA

# ( 3 – 6 ) معادلة منحنى دالة

**مثال (3)**

أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة $P(x , y)$ يساوي: $3x^2 - 4x + 1$ ويمر بالنقطة $A(1 , 2)$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

حاول أن تحل

**4** أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة $f$ عند أي نقطة عليه $(x , y)$ يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5 , 3)$

لا تبحث عن الاخطاء بل ابحث عن الصواب

حاول أن تحل

**5** إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة $f$ عند أي نقطة عليه $(x\,,y)$ هو $2x-1$
فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1\,,0)$

وفقك الله دائما

مثال (6)

لتكن: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة $f$ إذا كانت النقطة $(15 , 1-)$ نقطة حرجة للدالة.

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

حاول أن تحل

**6** لتكن: $f''(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة $f$ إذا كانت النقطة $P(2 , -2)$ نقطة حرجة للدالة.

لايوجد مستحيل

# ( 4 – 6 )المعادلات التفاضلية

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

تدريب:

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

| المعادلة التفاضلية | الرتبة | الدرجة |
|---|---|---|
| $y' = 5y$ | | |
| $y'^2 = \frac{4x}{y}$ | | |
| $y'' = 5y' + xy$ | | |
| $(y'')^2 = 1 + (y')^3$ | | |
| $y''' = (y')^2 + x^3$ | | |

مثال (1) أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

حاول أن تحل 1 أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

اننا نصنع مصائرنا،اننا نصبح ماتفعله

# المعادلات التفاضلية

## $y'$ في الطرف الأيسر بمفردها

**الحالة الاولى**

$y'$ دالة في $x$

$y' = f(x)$

حل المعادله:

$y = \int y'\,dx$

تكامل مرة

$y'' = f(x)$

حل المعادله:

$y' = \int y''\,dx$

تكامل مرتين

**الحالة الثانية**

$y'$ دالة في $y$

$y' = a\,y + b$

حل المعادله:

$y = k\,e^{ax} + \frac{b}{a}$

$a \neq 0$
$b \neq 0$

$y = k\,e^{ax}$

$a \neq 0$
$b = 0$

**الحالة الثالثة**

$y'$ دالة في $x\,,y$

$y' = f(x).h(y)$

ترتيب الخطوات

$\frac{dy}{dx} = f(x).h(y)$

ثم فصل المتغيرات

$\frac{dy}{h(y)} = f(x)\,dx$

باخذ تكامل الطرفين

$\int \frac{dy}{h(y)} = \int f(x)\,dx$

نكمل الحل بالطريقه العاديه

الطموح هو الوقود للوصول الي النجاح

مثال (3)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

حاول ان تصنع النجاح

**مثال (7)**

حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

**حاول أن تحل**

7 حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

مثال (6)

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

مثال (5) أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

حاول أن تحل

5 أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

اذا لم تجد طريق اصنع واحدا

مثال (4) حل المعادلة التفاضلية:

a) $y' - 2xy = 0$

اليأس ليس من شيم الابطال

حاول أن تحل

4 حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

# ( 1 – 6 ) المساحات فى المستوى

**في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.**

**(1)** مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات والمستقيمين $x = b$ , $x = a$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$ — (a) 🙂

**(2)** مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$: $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$ — 🙂 (b)

**(3)** إذا كانت: $\forall x \in [a,b]$ $\quad f(x) \le 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$ — 🙂 (b)

**(4)** إذا كان منحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$ ، $x = 3$.
فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^3 f(x)\,dx$ — (a) 🙂

**(5)** مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = |x|$ في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة — (a) 🙂

**في التمارين (6—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.**

**(6)** مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) $9\pi$ units$^2$ (b) $6\pi$ units$^2$
(c) $3\pi$ units$^2$ 🙂 $\frac{9}{2}\pi$ units$^2$

**(7)** مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $g$ : $g(x) = (x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)\,dx$ 🙂 $-2\int_0^2 g(x)\,dx$
(c) $\int_0^4 g(x)\,dx$ (d) $-2\int_2^4 g(x)\,dx$

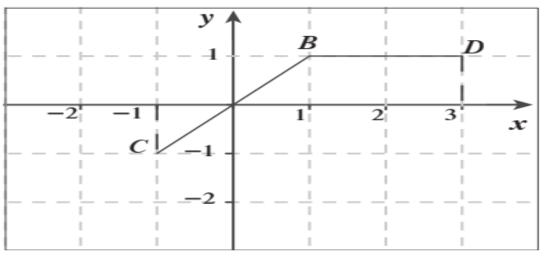
**(8)** مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = 2$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = -\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 4$ هي:

(a) 20 units$^2$ (b) $\frac{8}{3}$ units$^2$
🙂 $\frac{40}{3}$ units$^2$ (d) 8 units$^2$

**(9)** مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = x + 2$ هي:

🙂 $\pi - 2$ units$^2$ (b) $\pi$ units$^2$
(c) $\pi + 2$ units$^2$ (d) 2 units$^2$

**(10)** إذا كان بيان الدالة $f$ يمثله $\overline{CB} \cup \overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$ , $x = -1$ هي:




🙂 3 units$^2$ (b) 4 units$^2$ (c) 2 units$^2$ (d) 5 units$^2$

**في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.**

**(1)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V = \pi \int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx$ (a)

**(2)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = 2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V = \pi \int_0^4 4x dx - \pi \int_0^1 4x dx$ (b)

**(3)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ هو: $V = \pi \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$ (a)

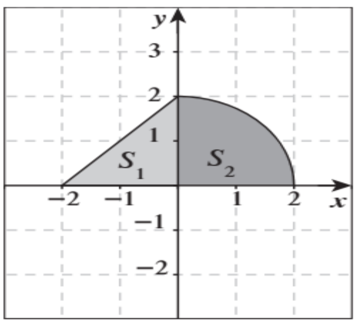
**(4)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^3$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = 8$ , $x = 0$ يساوي حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنحنى الدالة $f$ ومنحنى الدالة $h$: $h(x) = -8$ , $x = 0$ (b)

**في التمارين (5–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.**

**(5)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = 3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) $6\pi$ (b) $18$ $18\pi$ (d) $81\pi$

**(6)** المنطقة المظللة $S = S_1 \cup S_2$ حيث $S_1$ منطقة مثلثة، $S_2$ منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.




حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة $S$ بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4 + 2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ $8\pi$

**(7)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = -\sqrt{4 - x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) $4\pi$ (b) $6\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ $\frac{32}{3}\pi$

**(8)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \frac{1}{x}$ والمستقيمات $x = 1$ , $x = 2$ , $y = 0$ هو:

(a) $\pi$ units$^3$ (b) $\frac{\pi}{3}$ units$^3$ $\frac{\pi}{2}$ units$^3$ (d) $\frac{\pi}{4}$ units$^3$

**(9)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{x+1}$ والمستقيمين $x = 3$ , $x = -1$ بالوحدات المكعبة هو:

a) $8\pi$  b) $7\pi$  c) $8$  d) $\frac{5}{2}\pi$

**(10)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات $x = 0$ , $y = -2$ ومنحنى الدالة $f$ : $f(x) = -\sqrt{x}$ بالوحدات المكعبة هو:

a) $4\pi$  b) $16\pi$  c) $8\pi$  d) $2\pi$

**(11)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}$ , $x = 2y$ هو:

a) $\int_0^4 \left(x - \frac{x}{2}\right)^2 dx$  b) $\pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right) dx$  c) $\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$  d) $\pi \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$

**(12)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى $y = \sqrt{x}$ ومنحنى $x = 2y$، هو:

a) $\frac{64\pi}{15}$ units$^3$  b) $\frac{32\pi}{15}$ units$^3$  c) $\frac{64\pi}{5}$ units$^3$  d) $\frac{8\pi}{3}$ units$^3$

# ( 3 – 6 ) طول القوس

# ( 3 – 6 ) معادلة منحنى دالة

**في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.**

**(1)** طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x)=\frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,1]$ هو $L=\frac{2}{3}$ وحدة طول.

☺ (a)

**(2)** منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x,y)$ هو: $x^3+2$ ويمر بالنقطة $A(2,6)$ معادلته: $f(x)=\frac{x^4}{4}+2x+2$

☺ (a)

**(3)** منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x,y)$ هو: $-\sqrt{x}+x$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلته: $f(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x^2+\frac{2}{3}$

☺ (a)

**(4)** لتكن $A(1,3)$ نقطة على منحنى الدالة $f$ : $f'(x)=3x^2-12x+9$ فإن معادلة الدالة $f$ هي $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

(b) ☺

**في التمارين (5–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.**

**(5)** طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x)=\frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو:

(a) 7 units (b) 6 units ☺ 5 units (d) 1 unit

**(6)** طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x)=x-3$ في الفترة $[0,2]$ هو:

(a) $\sqrt{2}$ units ☺ $2\sqrt{2}$ units (c) $3\sqrt{2}$ units (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

**(7)** معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة $(x,y)$ هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي $y$ تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ ☺ $\ln|3-x|+3$ (c) $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ (d) $3-\ln|3-x|$

**(8)** معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة $(x,y)$ هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

(a) $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ (b) $x^2-2\sqrt{x^3}$ ☺ $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ (d) $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

**(9)** إذا كانت النقطة $A(0,2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة $f$ : $f''(x)=12x-6$ فإن النقطة الحرجة الأخرى للدالة $f$ هي:

(a) $B(-2,0)$ (b) $B(0,-2)$ (c) $B(1,-1)$ ☺ $B(1,1)$

# ( 4 – 6 )المعادلات التفاضلية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (b)

(2) المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a)

(3) إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ ، $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a)

(4) إذا كان $y = 1$ ، عند $x = 0$ ، $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a)

(5) إذا كان $y'' + 2y' + 2y = 0$ فإن $y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)e^{-x}$ معلق (b)

(6) إذا كان $y'' + y = 0$ فإن $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ معلق (b)

(7) إذا كان $y'' - y = 0$ فإن $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ معلق (b)

في التمارين (8–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y'' + x)^2}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

(9) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

$y = x^2 - 3$

(a) $y = x^2 + 3$

(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$

(10) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$

(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1 x$

$y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2$

(11) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$

(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$

$y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$

(12) إذا كان $y'' - 3y' + 2y = 0$ فإنّ: معلق

(b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

(a) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

(d) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

(c) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

نطمح
نحلم
نتامل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل