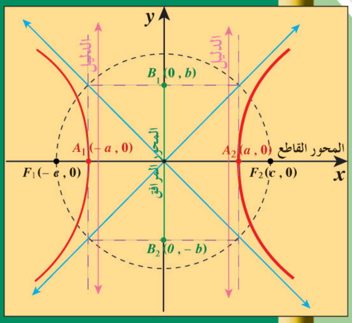
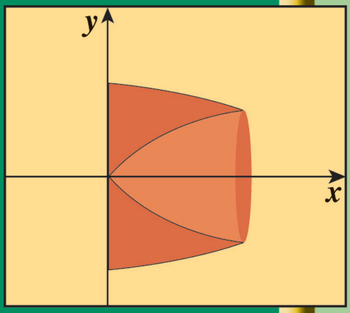
وزارة التربية

الرياضيات

كتاب المعلّم





الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

١٢

الطبعة الثانية

وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب المعلّم

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٣٧ - ١٤٣٨ هـ

٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. صديقة أحمد صالح الأنصاري **أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف**

أ. مجدي محمد يس دراز **أ. يحيى عبد السلام خالد عقل**

أ. وضحى ابراهيم مزعل الدوسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٤

الطبعة الأولى ٢٠١٤

الطبعة الثانية ٢٠١٦

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدّمة من كتاب المعلِّم

توجيهات عامّة للمعلِّم

هذه السلسلة تعمل على تنمية أساليب التفكير، وذلك بتركيزها على بناء المفاهيم الرياضيّة وربطها بالواقع الحياتيّ من خلال:

١ - الأنشطة العمليّة في استكشاف المفاهيم ودعم إحساس الطالب بهذه المفاهيم، وذلك باستخدام عدّة طرائق مختلِفة:

العمل في فريق.

عمل مجلّات رياضيّة.

اِستخدام المحسوسات وشبه المحسوسات.

التعبير الشفهيّ (التواصل) - التفكير الناقد.

٢ - الاعتماد على المصوَّرات، وذلك من خلال التمثيل البيانيّ للمعلومات وقراءة البيانات الممثَّلة بيانيًّا.

٣ - الاعتماد على المواقف والقصص الحياتيّة وربطها بالموضوعات، وكذلك توظيف الموضوعات الرياضيّة في حلّ المسائل الحياتيّة.

٤ - التأكيد على فهم المفاهيم واستيعابها، والربط بين الرياضيّات وباقي الموادّ.

تطبيق السلسلة

لتطبيق السلسلة، يجب مراعاة ما يلي:

وجود ملفّين لكلّ تلميذ بحيث يُخصَّص أحدهما للأنشطة الصفّيّة واللاصفّيّة، أمّا الآخر فيُخصَّص للاختبارات والملحوظات الميدانيّة على أداء الطالب، ويُدوِّنها المعلِّم، وهذا أوّل ما يقوم به، مقرونةً بتواريخ المتابعة.

يُنوِّع المعلِّم في طرائق التدريس، وخاصّةً التي تشمل الاستكشاف وحلّ المشكلات.

نماذج المعلِّم لتقييم الطلاب تشمل:

- تقييم الأداء في حلّ المسائل.
- التقييم المستمرّ في حلّ المسائل والملاحظة والتعليم التعاونيّ.
- التقييم الفرديّ في الملاحظة والمراقبة.
- التقييم العامّ للطالب.

تقييم الأداء في حلّ المسائل

الِإسم .... التّاريخ ....

تقييم الأداء في حلّ المسائل

❶ ضع إشارة ✓ قرب العبارة التي تصف بدقّة أداء الطالب.

اِفهَمْ

- يقرأ المسألة بتأنٍّ.
- يقرأ أيّ جدوَل أو أيّ تمثيل بياني.
- يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصّة.
- يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.
- يستطيع فهم وإدراك السؤال الذي يجب الإجابة عليه.

خَطِّطْ

- يختار الخطّة الأنسب لحلّ المسألة.
- يقدِّر الإجابة الصحيحة.

حُلَّ

- يعمل وفقًا لمنهجية معيّنة.
- يعرض الحلّ بطريقة منظَّمة وسليمة.
- يحسب بطريقة صحيحة.
- يعطي الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.

راجِعْ ولاحِظْ

- يُلاحِظُ معقولية الإجابة.
- يجرِّب طرقًا أخرى لحلّ المسألة.

❷ اِتبعِ المواصفات التالية لتقييم أداء الطالب:

مستوى ٤ (يتقن الطالب ١١–١٣ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا عميقًا للمسألة ويفسِّرها بشكل موجز وواضح ويكون قادرًا على ربط المسألة بعمل سبق أن أنجزه.

مستوى ٣ (يتقن الطالب ٨–١٠ من المهمات السابق ذكرها). يفهم الطالب المسألة ويعرض الحلّ الصحيح بطريقة منظَّمة وواضحة.

مستوى ٢ (يتقن الطالب ٤–٧ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا إجماليًّا للمسألة غير أنّه قد يرتكب بعض الأخطاء في تفاصيل معيّنة.

مستوى ١ (يتقن الطالب ٠–٣ فقط من المهمات السابق ذكرها). لا يُظهر الطالب إلّا فهمًا سطحيًّا أو جزئيًّا للمسألة وهو ليس قادرًا على إتمام العمل المطلوب أو حتى اعتماد المنهجية الصحيحة، كما أنّه لا يعطي إجابة صحيحة أو تكون خطّته غير مناسبة، وفي أغلب الأحيان لا نجد حلًّا ولا تجاوبًا مناسبًا أو إجابة صحيحة مرفقةً بجهد ما.

التقييم المستمرّ: حلّ المسائل

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.ت غير قابل للتطبيق

	يقرأ المسألة بتأنٍّ	يدرس الصوَر والجداول والتمثيلات البيانيّة	يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاصّ	يستطيع تحديد المعلومات	يستطيع تحديد الأسئلة التي تتطّلب الإجابة عليها	يختار الخطّة المناسبة	يقدّر ما ستكون عليه الإجابة	يعمل بانتظام	يكتب الحلّ بطريقة منظّمة	يجري العمليات الحسابية بدقّة	يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة	يلاحظ صحة الإجابة ومعقوليتها	يجرّب طرقًا أخرى للحلّ
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: الملاحظة

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:	
+	إذا كان ممتازًا
✓	إذا كان مقبولًا
–	بحاجة للتطوير
غ.ت	غير قابل للتطبيق

	يُظهر معرفة بالمهارات	يدرك المفاهيم	يعمل بترتيب وانتظام	يعمل بنجاح مع الآخرين	يُظهر مواقف إيجابية	يحترم أفكار الغير ويستخدمها	يُظهر صبرًا ومثابرة	يطلب المساعدة عند الحاجة	يستخدم الوقت بإنتاجية	يجرّب طرقًا أخرى			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: التعلُّم التعاوني

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.**ت** غير قابل للتطبيق

	يُظهر قدرة على حلّ المسائل	يعمل بانتظام	يعمل مع آخرين في الفريق	يوجّه ويساعد الآخرين	يحترم آراء الآخرين ويستخدمها	يتكلّم بهدوء	يُثير أسئلة	يظهر ميولًا إيجابية	يُظهر صبرًا ومثابرة	يُظهر عدم موافقة دون اشمئزاز			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

المحتويات

الوحدة الخامسة: التكامل Integral

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

5–1: التكامل غير المحدد.

جزء 1: المشتقة العكسية.

جزء 2: قواعد التكامل غير المحدد وتطبيقاتها.

جزء 3: خواص التكامل غير المحدد وتطبيقاتها.

5–2: التكامل بالتعويض.

جزء 1: قاعدة التكامل بالتعويض وتطبيقاتها.

5–3: تكامل الدوال المثلثية.

جزء 1: قواعد تكامل بعض الدوال المثلثية وتطبيقاتها.

5–4: الدوال الأسية واللوغاريتمية.

جزء 1: قواعد مشتقات الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتطبيقاتها.

جزء 2: قواعد تكامل الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتطبيقاتها.

5–5: التكامل بالتجزيء.

جزء 1: قاعدة التكامل بالتجزيء وتطبيقاتها.

5–6: التكامل باستخدام الكسور الجزئية.

جزء 1: المقام هو ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

جزء 2: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر.

جزء 3: درجة البسط في الحدودية النسبية مساوية أو أكبر من درجة المقام.

5–7: التكامل المحدد.

جزء 1: خواص التكامل المحدد.

جزء 2: التفسير البياني للتكامل المحدد.

جزء 3: استخدام طرائق التكامل غير المحدد في التكامل المحدد.

مقدمة الوحدة

أظهرت الاكتشافات أن المصريين كانوا قد استخدموا التكامل حوالي سنة 1800 قبل الميلاد، حيث دلّت «بردية موسكو الرياضية» على درايتهم بصيغة لحساب حجم الهرم المقطوع. وتعدّ طريقة التجزئة (أو الاستنزاف) من أوائل الطرائق المستخدمة في إيجاد التكاملات، ويعود تاريخها إلى سنة 370 قبل الميلاد، حيث يتم حساب الحجوم والمساحات بتقسيمها إلى أشكال صغيرة غير منتهية يمكن إيجاد مساحتها أو حجمها. وبعد ذلك قام أرخميدس بتطوير هذه الطريقة ليجد مساحة تقريبية للدائرة. أما الخطوة التالية والهامة في هذا المضمار فقد كانت في القرن الحادي عشر على يد الحسن بن الهيثم، وتعرف باسم (مسألة ابن الهيثم)، وهي مدرجة في كتابه «المناظر» حيث قام بعملية تكامل لإيجاد حجم السطح المكافئ. كما أنه استخدم الاستقراء الرياضي لتعميم هذه النتيجة على دوال كثيرات الحدود حتى الدرجة الرابعة، وبالتالي كان قادرًا على إيجاد صيغة عامة لتكاملات كثيرات الحدود.

وفي القرن السادس عشر بدأ التقدم الملحوظ يخطو سريعًا في علم التفاضل والتكامل على يد كافالييري وفيرما وهذا سمح لنيوتن وتورشيلي بتوسيع هذا العلم.

إن اكتشاف النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل على يد نيوتن ولايبنتز حقّقت تقدمًا مهمًا لهذا العلم، فهي توضّح العلاقة بين التفاضل والتكامل، وتساعد كثيرًا في حل مسائل متقدمة ومعقدة.

والمهم في هذا العلم أنه يدخل في العديد من التطبيقات الهندسية وفي علوم أخرى، حيث يتوجه إلى دراسة سلوك الدالة والتغير فيها، ويحل مشاكل كثيرة يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة.

الوحدة الخامسة

التكامل

Integral

مشروع الوحدة: إيجاد مساحة تحت منحنى دالة

1 مقدمة المشروع: تعرّف الطلاب قوانين إيجاد مساحات أشكال هندسيّة مثل: المربع، المستطيل، المثلث، متوازي الأضلاع، الدائرة... ولكن كيف يمكن إيجاد مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة ومحور السينات في فترة معينة.

2 الهدف: يريد متعهد تقدير مساحة إحدى المنطقتين المحصورة بين مدرّج مسرح يمثل قطعًا مكافئًا معادلته: $y = x^2$ ومستوى الأرض، علمًا أن طول الممر 10 m من كل جهة ونمثله على مستوى الإحداثيات.

3 اللوازم: آلة حاسبة بيانية — حاسوب — أوراق رسم.

4 أسئلة حول التطبيق:

a ارسم منحنى الدالة f : $f(x) = x^2$ على الفترة المغلقة $[0,10]$، لتكن S المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات و $x = 0$, $x = 10$.

b اقسم الفترة المغلقة $[0 , 10]$ إلى خمسة أجزاء متساوية بحيث أن طول كل جزء يساوي 2. (لاحظ أن: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$). انظر الشكل (1).

c استخدم أطوال الفترات الجزئية: $[8,10]$، $[6,8]$، $[4,6]$، $[2,4]$، $[0,2]$ كأطوال لأضلاع مستطيلات حيث ارتفاع كل مستطيل يحقق: $y = x^2$ وذلك من جهة اليمين لكل فترة جزئية (انظر الشكل 2). احسب قيمة R_5 حيث إن R_5 هو مجموع مساحات المستطيلات الخمسة اليمنى. (تسمى أيضًا المجاميع العليا للمساحة الأساسية S).

d استخدم أطوال الفترات الجزئية: $[8,10]$، $[6,8]$، $[4,6]$، $[2,4]$، كأطوال لأضلاع مستطيلات حيث إن ارتفاع كل مستطيل يحقق: $y = x^2$ وذلك من جهة اليسار لكل فترة جزئية (انظر الشكل 3). احسب قيمة L_5 حيث إن L_5 هو مجموع مساحات المستطيلات الأربعة اليسرى. (تسمى أيضًا المجاميع السفلى للمساحة الأساسية S).

e اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_5، S، L_5.

f استخدم الخطوات السابقة في حالة تقسيم $[0,10]$ إلى 10 أجزاء متساوية الطول. ثم اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_{10}، S، L_{10}.

g أكمل الجدول التالي: حيث n عدد فترات التجزيء.

n	R_n	L_n
5		
10		
20		
50		
100		

اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_n، S، L_n في كل حالة. ماذا تلاحظ؟

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن حساباتك والنتائج التي توصلت إليها. اشرح ماذا يحدث كلما كبرت n بلا حدود $(n \to \infty)$.

شكل (1)

شكل (2)

شكل (3)

دروس الوحدة

التكامل غير المحدد	التكامل بالتعويض	تكامل الدوال المثلثية	الدوال الأسية واللوغاريتمية	التكامل بالتجزيء	التكامل باستخدام الكسور الجزئية	التكامل المحدد
5−1	5−2	5−3	5−4	5−5	5−6	5−7

10

في النهاية من المفيد الإشارة إلى أنه يوجد عدة تعريفات مستخدمة للتكامل وعدة طرائق ولكن النتيجة تبقى هي نفسها. ويمكن الربط بين التكامل المحدد ومساحة منطقة مستوية.

مشروع الوحدة

يوفر مشروع الوحدة فرصة أمام الطلاب للتعرف على كيفية إيجاد قيمة تقريبية لمساحة منطقة محددة بمنحنى دالة $y = x^2$، محور السينات، محور الصادات، المستقيم $x = 10$ وذلك باستخدام قواعد المساحة في الأشكال الهندسية التي تعرّف عليها سابقًا.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a)، (b) تحقق من رسومات الطلاب.

(c) $R_5 = 2(2)^2 + 2(4)^2 + 2(6)^2 + 2(8)^2 + 2(10)^2$

$= 440$ **units square**

(d) $L_5 = 2(2)^2 + 2(4)^2 + 2(6)^2 + 2(8)^2$

$= 240$ **units square**

(e) من الرسم البياني نلاحظ أن:

$L_5 \le S \le R_5 \Longrightarrow 240 \le S \le 440$

(f) $R_{10} = 1(1)^2 + 1(2)^2 + 1(3)^2 + 1(4)^2 + 1(5)^2$

$+1(6)^2 + 1(7)^2 + 1(8)^2 + 1(9)^2 + 1(10)^2$

$R_{10} = 385$ **units square**

$L_{10} = 1(1)^2 + 1(2)^2 + 1(3)^2 + 1(4)^2 + 1(5)^2$

$+1(6)^2 + 1(7)^2 + 1(8)^2 + 1(9)^2$

$L_{10} = 285$ **units square**

$L_{10} \le S \le R_{10} \Longrightarrow 285 \le S \le 385$

(g) تحقق من حسابات الطلاب.

التقرير

اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن كافة الحسابات والنتائج التي حصلت عليها والمتباينات التي تربط بين المجاميع. اعرض عملك أمام زملائك، ناقش معهم ما توصلت إليه، أعد النظر ببعض النتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

تعلمت:

- تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة معرفة.
- تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة متصلة.
- إيجاد متوسط معدل التغير لدالة على فترة معينة.
- إيجاد معدل التغير اللحظي لدالة في لحظة معينة.
- إيجاد ميل المماس عند نقطة لبيان الدالة.
- إيجاد ميل الخط العمودي على المماس عند نقطة لبيان الدالة.
- إيجاد مشتقة دالة على الفترة التي تكون فيها معرّفة ومتصلة.
- دراسة سلوك بيان الدالة باستخدام مشتقتها.
- إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة لدالة على فترة معينة.
- إيجاد المشتقة الثانية ومن الرتب العليا.
- دراسة تقعر منحنى الدالة.
- اختبار المشتقة الثانية.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرّف المشتقة العكسية لدالة متصلة والربط مع مشتقة هذه الدالة.
- استخدام التكامل غير المحدد وجدول التكاملات وخواص التكامل.
- إيجاد تكامل الدوال المثلثية.
- إيجاد مشتقة دالة أسيّة ومشتقتها العكسية.
- إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية ومشتقتها العكسية.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكاملات باستخدام التجزيء.
- تفكيك حدودية نسبية إلى كسور جزئية.
- إيجاد تكاملات بعض الدوال النسبية.
- تعرف التكامل المحدد وخواصه.

المصطلحات الأساسية

التكامل غير المحدد – مشتقة عكسية – ثابت التكامل – تكامل الدوال المثلثية – مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية – تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية – قابلية الاشتقاق – قاعدة القوى للتكامل – التكامل بالتعويض والتجزيء – الكسور الجزئية – عوامل خطية ومن الدرجة الثانية – التكامل المحدد – خواص التكامل المحدد – التفسير البياني للتكامل المحدد – المساحة.

أضف إلى معلوماتك

عمر الخيّام وأبو الوفاء البوزجاني زادا على بحوث الخورازميّ في الجبر زيادة تعدّ أساسًا لعلاقة الجبر بالهندسة، وقد مهّدت لعلماء أوروبا بالهندسة التحليليّة التي قادت إلى التكامل والتفاضل، وعليه قامت أكثر الاختراعات والاكتشافات العلميّة.

حساب التكامل: تستطيع أن تعتبر أن ثابت بن قرّة والكوهي ومن بعدهما ابن الهيثم، قد ساهموا في نشأة حساب التكامل الحديث. دفعهم إلى ذلك حساب حجم المجسّم الناشئ عن دوران قطعة من قطع مكافئ حول محور ما.

ابتكر ثابت بن قرّة، ولأوّل مرّة في تاريخ البشريّة، نوعًا من الحساب يُكافئ حساب التكامل الذي نعرفه في الوقت الحاضر، وذلك قبل نيوتن بمئات السنين. أمّا نوع التكامل الذي أحرزه فهو من نوع $\int_0^a x^n dx$ قيمة أسيّة تساوي الوحدة، أي التكامل $M\int_a^b x\,dx$ عندما تعرض لحساب عزم كتلة قضيب متجانس ساكن بالنسبة إلى أحد المحاور. وأثبت أن العزم الكليّ يساوي مجموع العزوم الأولية.

عمر الخيام: عالم وفيلسوف وشاعر، تخصص في الرياضيات والفلك واللغة والفقه. وهو أول من اخترع طريق حساب المثلثات والمعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة.

11

سلّم التقييم

4	الحسابات دقيقة بالكامل – المتباينات صحيحة – الجدول مكتمل – التقرير مفصل وواضح – النتائج واقعية ومعقولة.
3	الحسابات بمعظمها دقيقة – المتباينات صحيحة – أخطاء طفيفة في الجدول – التقرير مفصل – معظم النتائج واقعية ومقبولة.
2	أخطاء كثيرة في الحسابات – المتباينات غير دقيقة – الجدول غير مكتمل – التقرير غير منظم وغير مفصل – النتائج لا ترتبط بالمعطيات.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة أو غير موجودة.

5–1: التكامل غير المحدد

1 الأهداف

- يوجد المشتقة العكسية.
- يوجد التكامل غير المحدد.
- يتعرف مصطلحات التكامل ورموزه ويستخدمها.
- يتعرف قواعد التكامل غير المحدد.
- يتعرف خواص التكامل غير المحدد.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مشتقة عكسية – تكامل غير محدد – قاعدة القوى – خاصية الضرب بعدد ثابت – خاصية الجمع والطرح.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب إيجاد مشتقات الدوال التالية:

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ **(b)** $f(x) = x^2 - 4x + 10$

(c) $f(x) = x^2 - 4x$ **(d)** $f(x) = \sin 4x + 5$

(e) $f(x) = \sin 4x - 8$ **(f)** $f(x) = \sin 4x$

اسألهم ملاحظة النتائج التي حصلوا عليها.

5 التدريس

بعد الأمثلة في فقرة التمهيد وفقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، ناقش مع الطلاب نظرية (1) التي تعطي فكرة واضحة للطلاب بأن المشتقة العكسية لدالة متصلة ليست واحدة.

وأن العلاقة: $G(x) = F(x) + C$ تعبّر بشكل واضح عن مفهوم المشتقة العكسية للدالة حيث القيمة الثابتة C تحدث هذا الفرق كما أن النظرية (2) وبيان الدوال المرفقة مع قيم الثابت C توفر للطالب فرصة مهمة لملاحظة عدد من المشتقات العكسية لدالة واحدة.

في المثال (1)

يبدأ هذا المثال بدالة واحدة معروفة F ومشتقتها دالة محددة f والأهم في هذا المثال هو كتابة الصورة العامة للدالة F حيث يضاف الثابت C.

5–1

التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

سوف تتعلم

- المشتقة العكسية.
- التكامل غير المحدد.
- مصطلحات التكامل ورموزه.
- قواعد التكامل غير المحدد.
- خواص التكامل غير المحدد.

المفردات والمصطلحات:

- مشتقة عكسية Antiderivative
- تكامل غير محدد Indefinite Integral
- قاعدة القوى Power Rule
- خاصية الضرب بعدد ثابت Constant Multiple Property
- خاصية الجمع والطرح Sum and Difference Property

دعنا نفكر ونتناقش

أكمل الجداول التالية:

a

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
	$x^2 - 1$
	$x^2 + 5$
	$x^3 + 4$
	$x^3 - 2$

b

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
$2x$	
$3x^2$	
5	
x^3	

c هل يمكن إيجاد $F(x)$ أخرى في الجزء b بحيث يكون لها المشتقة نفسها؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» في الجزء a أوجدنا F' مشتقة دالة معلومة F باستخدام قواعد الاشتقاق، أمّا في الجزء b أوجدنا دالة F بمعلومية مشتقتها F' وذلك بعكس ما تمّ في الجزء a وتسمى الدالة F مشتقة عكسية (دالة مقابلة).

تعريف: المشتقة العكسية Antiderivative

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

استنادًا إلى هذا التعريف:

إذا كان $f(x) = x$ فيمكن أن تكون: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ مشتقة عكسية للدالة f.

لأن: $F'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{2-1}$

$= x = f(x)$ باستخدام قاعدة القوى لاشتقاق الدالة

وأيضًا يمكن أن تكون $F(x) = \frac{x^2}{2} + 4$ مشتقة عكسية لها لأن $F'(x) = x = f(x)$ (مشتقة الثابت تساوي الصفر)،

كما أن $F(x) = \frac{x^2}{2} + 50$ يمكن أن تكون مشتقة عكسية أخرى لها لأن $F'(x) = x = f(x)$.

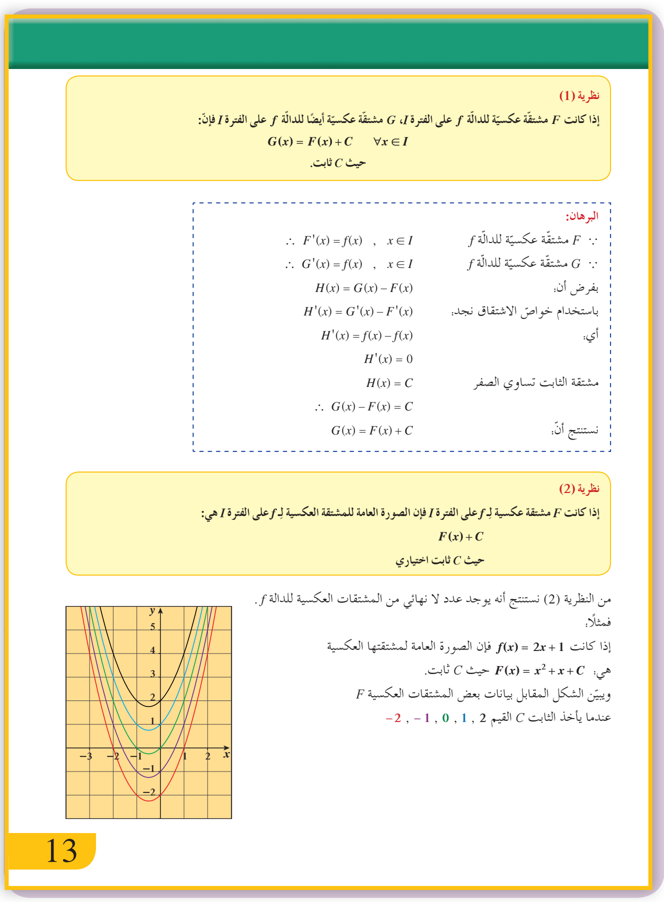
ملاحظة: سنتعامل في دراستنا مع دوال متصلة على فترات معينة.

هل تعلم؟

- يستطيع المهندس قياس معدل التغير لتسرب الماء من الخزان، ولكنه يريد معرفة كمية الماء التي تتسرب من هذا الخزان خلال فترة محددة من الزمن.
- يستطيع عالم الأحياء معرفة معدل التغير لتزايد مجتمع من الجراثيم ولكنه بحاجة لاستنتاج حجم هذا التزايد خلال فترة محددة من الزمن.

عن هذه المسائل يمكن الإجابة بإيجاد مشتقة عكسية لدالة تمثل تسرب الماء من الخزان ومشتقة عكسية لدالة تمثل تزايد مجتمع من الجراثيم.

12



نظرية (1)

إذا كانت F مشتقّة عكسيّة للدالّة f على الفترة I، G مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة f على الفترة I فإنّ:

$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in I$

حيث C ثابت.

البرهان:

∵ F مشتقّة عكسيّة للدالّة f $\quad \therefore\ F'(x) = f(x) \ ,\ x \in I$

∵ G مشتقّة عكسيّة للدالّة f $\quad \therefore\ G'(x) = f(x) \ ,\ x \in I$

بفرض أن: $H(x) = G(x) - F(x)$

باستخدام خواصّ الاشتقاق نجد: $H'(x) = G'(x) - F'(x)$

أي: $H'(x) = f(x) - f(x)$

$H'(x) = 0$

مشتقة الثابت تساوي الصفر $H(x) = C$

$\therefore\ G(x) - F(x) = C$

نستنتج أنّ: $G(x) = F(x) + C$

نظرية (2)

إذا كانت F مشتقة عكسية لِـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لِـ f على الفترة I هي:

$F(x) + C$

حيث C ثابت اختياري

من النظرية (2) نستنتج أنه يوجد عدد لا نهائي من المشتقات العكسية للدالة f.

فمثلًا:

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن الصورة العامة لمشتقتها العكسية

هي: $F(x) = x^2 + x + C$ حيث C ثابت.

ويبيّن الشكل المقابل بيانات بعض المشتقات العكسية F عندما يأخذ الثابت C القيم $2 , 1 , 0 , -1 , -2$

13

في المثال (2)

مشابه للمثال **(1)** حيث يجب إثبات أن: $F'(x) = f(x)$.

اشرح للطلاب التكامل غير المحدد. ركّز لديهم فكرة التعريف على أن التكامل غير المحدد هو «مجموعة كل المشتقات العكسية» اكتب على السبورة: $\int f(x)dx = F(x) + C$. أكّد لهم أن $\int$ هو رمز للتكامل وأن dx تعبّر في الأساس عن متغير التكامل x وأنه عندما نكامل $f(x)d(x)$ نحصل على مجموعة كافة المشتقات العكسية أي بإضافة C.

اكتب قواعد التكامل وخواص التكامل غير المحدد أخبرهم أنه لا يمكن إيجاد تكامل لدوال مع متغيرين معًا وأن: $\int f(x) \cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

ومثله $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

في الأمثلة (3), (4), (5)

تطبيقات مباشرة على قواعد وخواص التكامل غير المحدد. تأكد دائمًا من ملاحظة الطلاب لـ: $\int f(x)dx = F(x) + C$

في المثال (6)

يوفّر هذا المثال فرصة أمام الطلاب لتطبيق قاعدة القوى وإيجاد التكامل غير المحدد، حيث يتعرف على كيفية تحويل الجذور إلى قوى ثم استخدام القاعدة.

في المثال (7)

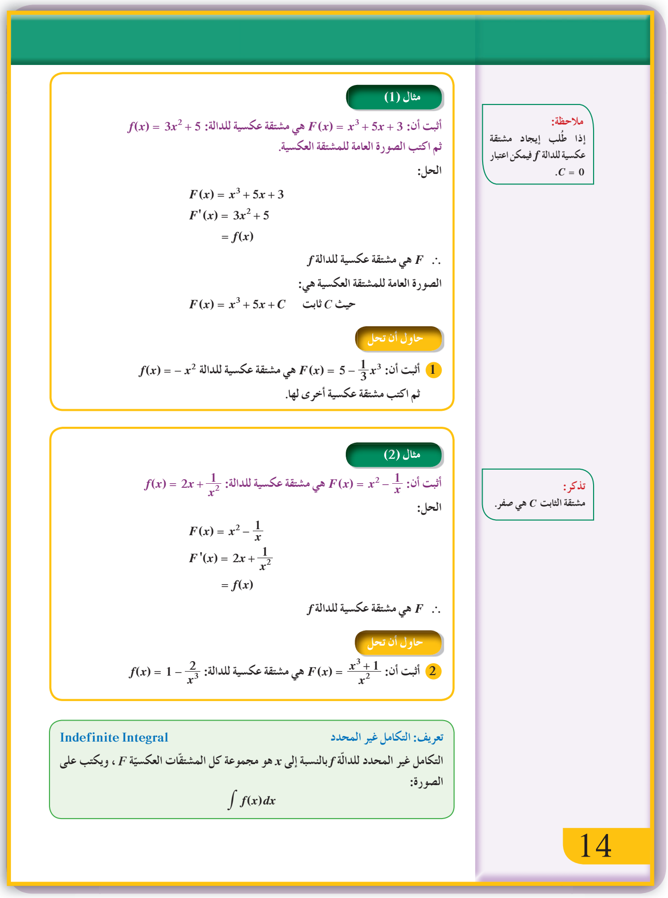
يبيّن هذا المثال كيفية استخدام معطيات محددة لإيجاد قيمة واحدة للثابت C أي مشتقة عكسية واحدة.

في المثال (8)

تطبيق التكامل غير المحدد مع معطيات محددة لإيجاد الزمن الذي تصل فيه الكرة إلى أعلى ارتفاع إذا ألقيت من سطح برج والزمن الذي سوف تستغرقه بعد ذلك لتصل إلى الأرض.

6 الربط

يوفر المثال **(8)** فرصة أمام الطلاب لربط عجلة جاذبية الأرض $(a(t) = 9.8 \text{ m/s}^2)$، حيث يستخدم التكامل غير المحدد لإيجاد سرعة الكرة بعدما ألقيت إلى الأعلى، ومن ثم يوجد التكامل غير المحدد لسرعة الكرة.


ملاحظة:
إذا طُلب إيجاد مشتقة عكسية للدالة f فيمكن اعتبار $C = 0$.

مثال (1)

أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 3x^2 + 5$ ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

الحل:

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$
$$F'(x) = 3x^2 + 5$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي:

$F(x) = x^3 + 5x + C$ حيث C ثابت

حاول أن تحل

1 أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$ ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

تذكر:
مشتقة الثابت C هي صفر.

مثال (2)

أثبت أن: $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

الحل:

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$
$$F'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

حاول أن تحل

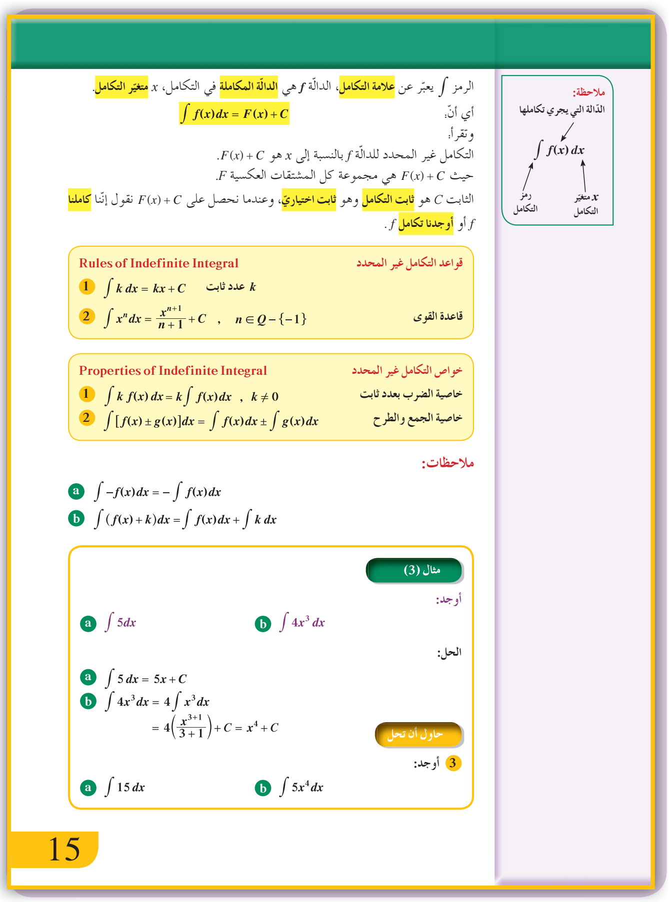
2 أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

تعريف: التكامل غير المحدد — Indefinite Integral

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)dx$$

14


الرمز $\int$ يعبّر عن **علامة التكامل**، الدالّة f هي **الدالّة المكاملة** في التكامل، x **متغيّر التكامل**.

أي أنّ: $\int f(x)dx = F(x) + C$

وتقرأ:

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو $F(x) + C$.

حيث $F(x) + C$ هي مجموعة كل المشتقات العكسية F.

الثابت C هو **ثابت التكامل** وهو **ثابت اختياريّ**، وعندما نحصل على $F(x) + C$ نقول إنّنا **كاملنا** f أو **أوجدنا تكامل** f.

قواعد التكامل غير المحدد — Rules of Indefinite Integral

1 $\int k\, dx = kx + C$ عدد ثابت k

2 قاعدة القوى $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

خواص التكامل غير المحدد — Properties of Indefinite Integral

1 خاصية الضرب بعدد ثابت $\int k\, f(x)\, dx = k\int f(x)dx \quad , \quad k \neq 0$

2 خاصية الجمع والطرح $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

ملاحظات:

a $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

b $\int (f(x) + k)dx = \int f(x)dx + \int k\, dx$

مثال (3)

أوجد:

a $\int 5dx$ b $\int 4x^3\, dx$

الحل:

a $\int 5\, dx = 5x + C$

b $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx$
$= 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + C = x^4 + C$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int 15\, dx$ b $\int 5x^4 dx$

15

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في إيجاد التكامل وخاصة مع $f(x) = x^n$. اكتب على السبورة أن: $f'(x) = nx^{n-1}$

ولكن: $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

أعط أمثلة متعددة واطلب إليهم ملاحظة الفرق في كل مرة.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من قدرتهم في التعامل مع الدالة العكسية، وقواعد التكامل غير المحدد وخواصه.

اختبار سريع

1 أثبت أن $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 4x^3 - 6x + 2$

ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

$F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

$F'(x) = 4x^3 - 6x + 2 = f(x)$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي:

$F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + C$

2 أوجد: $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$.

$$\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

3 أوجد: $\int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + 4\right)dx$.

$$= \int x^3\,dx + \int x^{-2}\,dx + 4\int dx$$

$$= \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4x + C$$

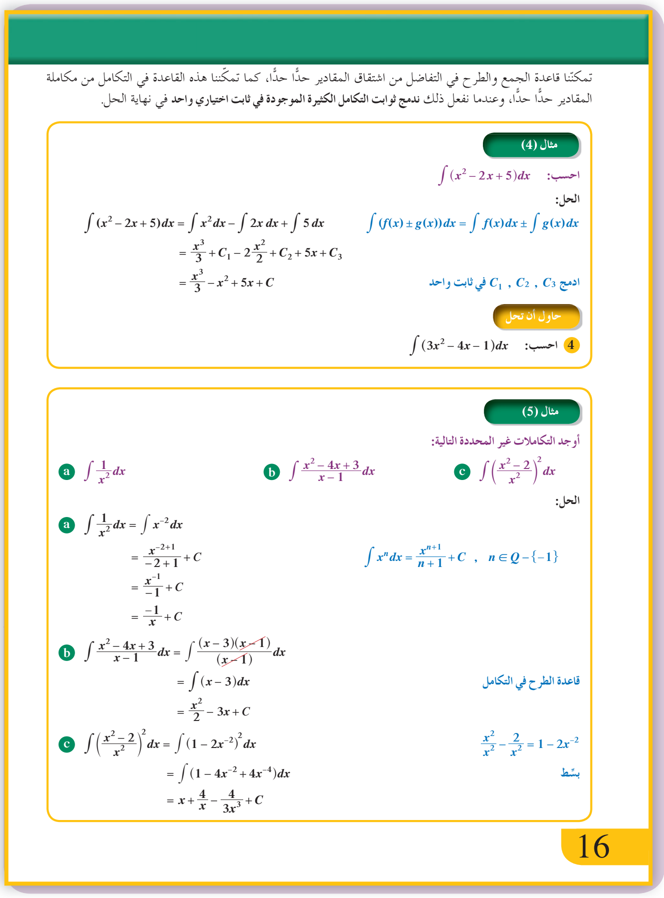
$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + 4x + C$$

4 أوجد: $\int \left(\frac{x^2+3}{x^3}\right)^2 dx$.

$$\int (x^{-1} + 3x^{-3})^2\,dx$$

$$= \int x^{-2}\,dx + 9\int x^{-6}\,dx + 6\int x^{-4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{9}{5x^5} - \frac{2}{x^3} + C$$



تمكّننا قاعدة الجمع والطرح في التفاضل من اشتقاق المقادير حدًّا حدًّا، كما تمكّننا هذه القاعدة في التكامل من مكاملة المقادير حدًّا حدًّا، وعندما نفعل ذلك **ندمج ثوابت التكامل الكثيرة الموجودة في ثابت اختياري واحد** في نهاية الحل.

مثال (4)

احسب: $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

الحل:

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + C_1 - 2\frac{x^2}{2} + C_2 + 5x + C_3$$
$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

ادمج C_3 , C_2 , C_1 في ثابت واحد

حاول أن تحل

4 احسب: $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

مثال (5)

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int \frac{1}{x^2}dx$ b $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx$ c $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

الحل:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;,\; n \in Q - \{-1\}$

a $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx$
$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{x} + C$$

b $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx = \int \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}dx$

قاعدة الطرح في التكامل

$$= \int (x-3)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

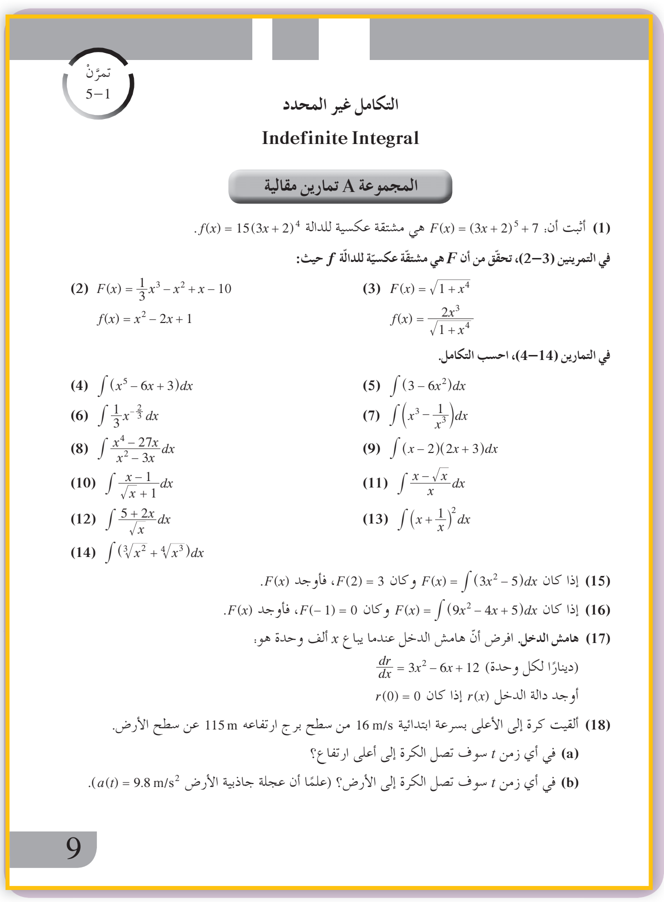
c $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx = \int (1 - 2x^{-2})^2 dx$

$\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 1 - 2x^{-2}$

بسّط

$$= \int (1 - 4x^{-2} + 4x^{-4})dx = x + \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3} + C$$

16



تمرَّنْ 5−1

التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن: $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$.

في التمرينين (3–2)، تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

(2) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 10$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$

(3) $F(x) = \sqrt{1+x^4}$, $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

في التمارين (14–4)، احسب التكامل.

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx$ **(5)** $\int (3 - 6x^2)dx$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$ **(7)** $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx$ **(9)** $\int (x-2)(2x+3)dx$

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ **(11)** $\int \frac{x - \sqrt{x}}{x}dx$

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx$ **(13)** $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

(14) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})dx$

(15) إذا كان $F(x) = \int (3x^2 - 5)dx$ وكان $F(2) = 3$، فأوجد $F(x)$.

(16) إذا كان $F(x) = \int (9x^2 - 4x + 5)dx$ وكان $F(-1) = 0$، فأوجد $F(x)$.

(17) **هامش الدخل.** افرض أنّ هامش الدخل عندما يباع x ألف وحدة هو:

$\frac{dr}{dx} = 3x^2 - 6x + 12$ (دينارًا لكل وحدة)

أوجد دالة الدخل $r(x)$ إذا كان $r(0) = 0$

(18) ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 16 m/s من سطح برج ارتفاعه 115 m عن سطح الأرض.

(a) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

(b) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا أن عجلة جاذبية الأرض $a(t) = 9.8\ \text{m/s}^2$).

9

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a)، (b)، (c) تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 $F'(x) = 0 - x^2 = -x^2 = f(x)$

$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + C$

2 $F'(x) = 1 - 2x^{-3} = 1 - \frac{2}{x^3} = f(x)$

3 (a) $\int 15dx = 15x + C$

(b) $\int 5x^4dx = x^5 + C$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ — (a) (b)

(2) $\int(-x^{-3} + x - 1)dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ — (a) (b)

(3) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C$ — (a) (b)

(4) إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + x$ ، $f(2) = 1$ ، فإن: $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ — (a) (b)

(5) إذا كانت: $F(0) = 400$ ، $F(x) = \int(3x^2 - 12x + 15)dx$ ، فإن: $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$ — (a) (b)

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$ (b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$ (d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

(7) $\int\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx =$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

(8) إذا كان: $x = -1$ ، $y = -5$ ، $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}$ (b) $3x^{\frac{1}{3}} + 2$

(c) $3x^{\frac{1}{3}} - 2$ (d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$ (b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + C$

10

---

(10) $\int \sqrt{x}(2 + x^2)dx =$

(a) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$ (b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(11) $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$ (b) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

(c) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$ (d) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + 2\right)^2 dx =$

(a) $x^2 + C$ (b) $2x + C$

(c) $\frac{x^2}{2} + 2x + C$ (d) $\frac{1}{3}x^3 + C$

11

حاول أن تحل

5 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int(2x - 3)(x + 4)dx$ b $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1}dx$ c $\int\left(\frac{3x^2 - x}{x}\right)^2 dx$

مثال (6)

أوجد:

a $\int \sqrt{x}\,dx$ b $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$ c $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

الحل:

a $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$ $\quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; , \; n \in Q - \{-1\}$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

b $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C$ $\quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; , \; n \in Q - \{-1\}$

$= \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C = \frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + C$

c $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)dx}{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}}$ $\quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= \int(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)dx$

$= \int(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1)dx$ $\quad$ قاعدة الجمع والطرح

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$

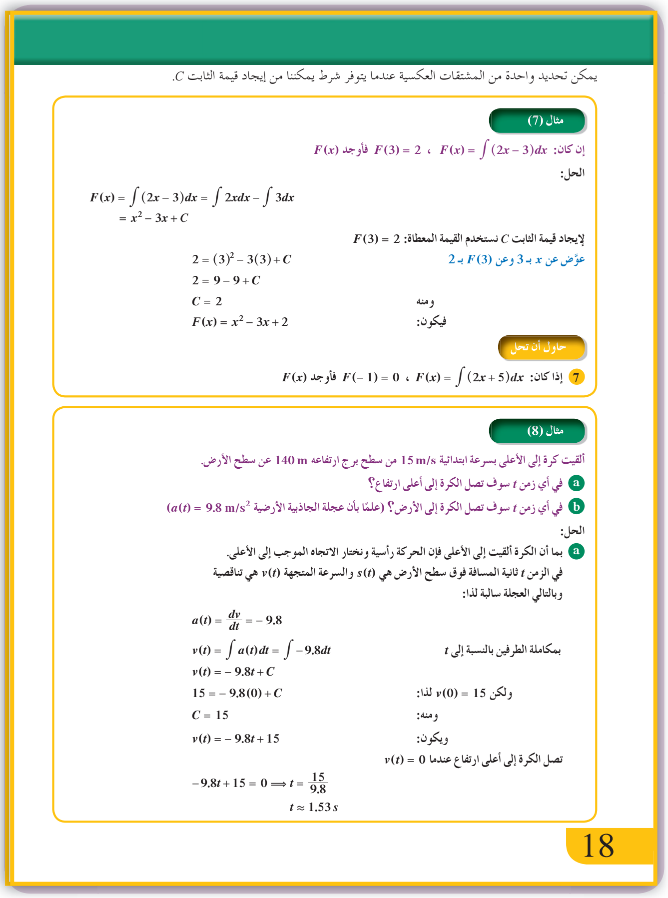
$= \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x + C$

حاول أن تحل

6 أوجد:

a $\int x\sqrt{x}\,dx$ b $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ c $\int \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

17



يمكن تحديد واحدة من المشتقات العكسية عندما يتوفر شرط يمكننا من إيجاد قيمة الثابت C.

مثال (7)

إن كان: $F(x) = \int (2x-3)dx$ ، $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

الحل:

$$F(x) = \int (2x-3)dx = \int 2xdx - \int 3dx$$
$$= x^2 - 3x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نستخدم القيمة المعطاة: $F(3) = 2$

عوّض عن x بـ 3 وعن $F(3)$ بـ 2 $\quad 2 = (3)^2 - 3(3) + C$

$2 = 9 - 9 + C$

ومنه $\quad C = 2$

فيكون: $\quad F(x) = x^2 - 3x + 2$

حاول أن تحل

7 إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

مثال (8)

ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 15 m/s من سطح برج ارتفاعه 140 m عن سطح الأرض.

a في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

b في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ m/s^2$)

الحل:

a بما أن الكرة ألقيت إلى الأعلى فإن الحركة رأسية ونختار الاتجاه الموجب إلى الأعلى.
في الزمن t ثانية المسافة فوق سطح الأرض هي $s(t)$ والسرعة المتجهة $v(t)$ هي تناقصية وبالتالي العجلة سالبة لذا:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9.8$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة إلى t $\quad v(t) = \int a(t)dt = \int -9.8dt$

$v(t) = -9.8t + C$

ولكن $v(0) = 15$ لذا: $\quad 15 = -9.8(0) + C$

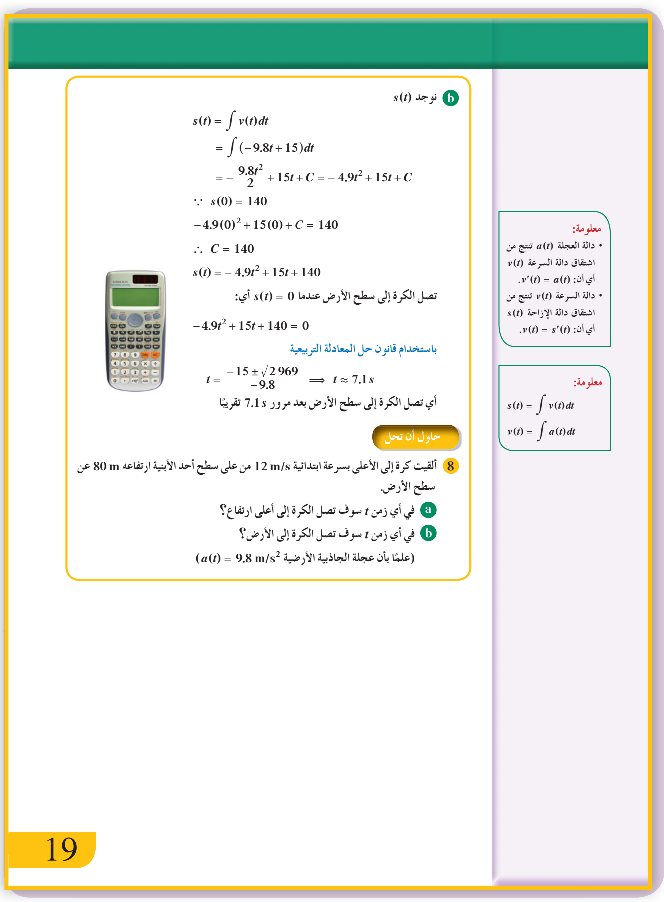
ومنه: $\quad C = 15$

ويكون: $\quad v(t) = -9.8t + 15$

تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع عندما $v(t) = 0$

$$-9.8t + 15 = 0 \Longrightarrow t = \frac{15}{9.8}$$
$$t \approx 1.53\ s$$

18



b نوجد $s(t)$

$$s(t) = \int v(t)dt$$
$$= \int (-9.8t + 15)dt$$
$$= -\frac{9.8t^2}{2} + 15t + C = -4.9t^2 + 15t + C$$
$$\because\ s(0) = 140$$
$$-4.9(0)^2 + 15(0) + C = 140$$
$$\therefore\ C = 140$$
$$s(t) = -4.9t^2 + 15t + 140$$

تصل الكرة إلى سطح الأرض عندما $s(t) = 0$ أي:

$$-4.9t^2 + 15t + 140 = 0$$

باستخدام قانون حل المعادلة التربيعية

$$t = \frac{-15 \pm \sqrt{2\,969}}{-9.8} \Longrightarrow t \approx 7.1\ s$$

أي تصل الكرة إلى سطح الأرض بعد مرور 7.1 s تقريبًا

حاول أن تحل

8 ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 12 m/s من على سطح أحد الأبنية ارتفاعه 80 m عن سطح الأرض.

a في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

b في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟

(علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ m/s^2$)

معلومة:

- دالة العجلة $a(t)$ تنتج من اشتقاق دالة السرعة $v(t)$ أي أن: $v'(t) = a(t)$.
- دالة السرعة $v(t)$ تنتج من اشتقاق دالة الإزاحة $s(t)$ أي أن: $v(t) = s'(t)$.

معلومة:

$s(t) = \int v(t)dt$

$v(t) = \int a(t)dt$

19

4 $$\int 3x^2dx - \int 4x\,dx - \int dx = x^3 - 2x^2 - x + C$$

5 (a) $$\int (2x^2 + 5x - 12)dx$$
$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 12x + C$$

(b) $$\int \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)}dx = \int (x+4)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

(c) $$\int (3x-1)^2dx = \int (9x^2 - 6x + 1)dx$$
$$= 3x^3 - 3x^2 + x + C$$

6 (a) $$\int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

(b) $$\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

(c) $$\int \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

7 $$F(x) = x^2 + 5x + C$$
$$0 = 1 - 5 + C \Longrightarrow C = 4$$
$$F(x) = x^2 + 5x + 4$$

8 (a) $$V(t) = \int -9.8dt = -9.8t + C$$
$$12 = -9.8(0) + C \Longrightarrow C = 12$$

فيكون: $\quad V(t) = -9.8t + 12$

تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع عند $V(t) = 0$

ومنه: $\quad t \approx 1.22\ s$

(b) $$s(t) = \int (-9.8t + 12)dt = -4.9t^2 + 12t + C$$

ولكن: $\quad s(0) = 80$

فيكون: $\quad 80 = -4.9(0)^2 + 12(0) + C$

$$C = 80$$
$$\therefore\ s(t) = -4.9t^2 + 12t + 80$$

تصل الكرة إلى الأرض عند $s(t) = 0$ أي:

$$-4.9t^2 + 12t + 80 = 0$$
$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{428}}{-4.9} \Longrightarrow t \approx 5.45\ s$$

2–5: التكامل بالتعويض

1 الأهداف

- يتعرف قاعدة التكامل بالتعويض ويستخدمها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

التكامل بالتعويض.

3 الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عمّا يلي:

(a) أثبت أن $F(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}}$ هي مشتقة عكسية للدالة:
$f(x) = 3\sqrt{2x+1}$

(b) هل يوجد علاقة بين $F(x) = \frac{1}{6}(x^3-2)^3$
و $f(x) = \frac{3}{2}x^2(x^3-2)^2$ ؟
حدّد نوع العلاقة إن وجدت.

(c) أثبت أن $F(x) = (x^2-5x+3)^2$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 2(2x-5)(x^2-5x+3)$، ثم أوجد:
$\int (4x-10)(x^2-5x+3)dx$ حيث $F(0) = 9$

5 التدريس

اعرض أمام الطلاب أمثلة متعددة على غرار فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» وذلك لتركيز فكرة الربط بين دالة ومشتقتها ثم اعرض قاعدة التكامل بالتعويض:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان: $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$

فإن: $\int f(u)du = F(u) + C$

ومن ثم الانتقال إلى التكامل غير المحدد والربط في القاعدة: $\int (g(x))^n g'(x)dx$، حيث نحصل على الإجابة التالية:

$$\int (g(x))^n g'(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

أخبرهم أن هذه القاعدة تسهل عليهم عملية التكامل في حالات كثيرة وخاصة أن ذلك يعتمد على الخبرة والمهارة.

5–2

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

سوف تتعلم
- التكامل بالتعويض.

المفردات والمصطلحات:
- التكامل بالتعويض
Integration by substitution

دعنا نفكر ونتناقش

a أثبت أن: $F(x) = \frac{1}{5}(x^2+1)^5$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x(x^2+1)^4$

b استفد من a في إيجاد $\int 2x(x^2+1)^4 dx$

c ما العلاقة بين $2x$, x^2+1؟

d ضع $g(x) = x^2+1$ ثم أوجد $g'(x)$.

e اكتب التكامل في b وناتجه باستخدام الرموز في d.

f ماذا تلاحظ؟

في بعض الأحيان لا تمكننا القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد من إيجاد تكامل دالة ما كما لاحظنا في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش».

ولإيجاد هذا التكامل نتعامل مع متغير جديد. نستبدل المتغير x بالمتغير u بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد.

فمثلًا لإيجاد: $\int 2x\sqrt{4+x^2}dx$

نرمز للمجذور بـ u أي $u = 4+x^2$ ثم نفاضل لنحصل على: $du = 2x\,dx$ وبالتالي نكتب:

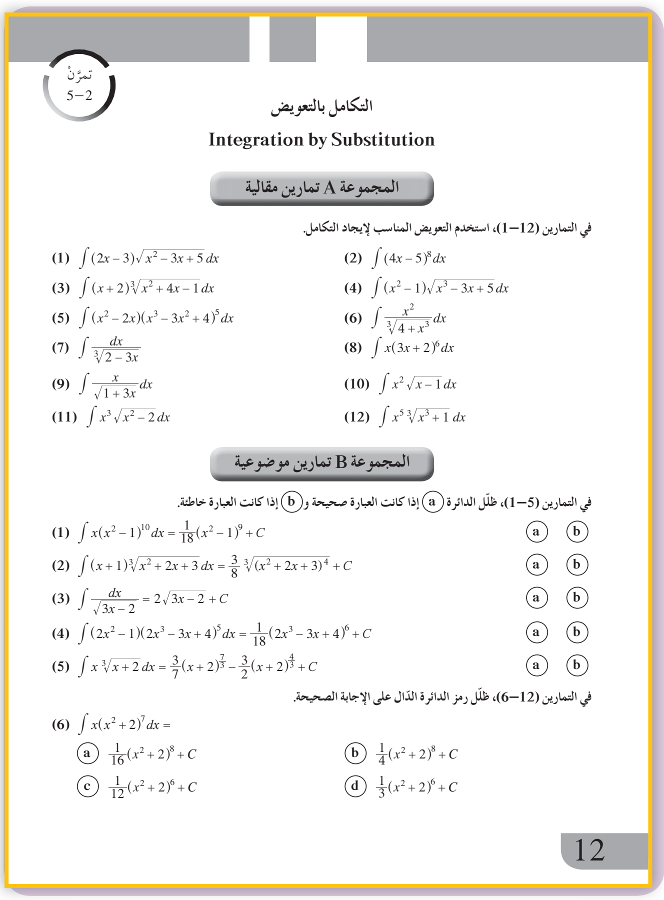
$$\int 2x\sqrt{4+x^2}dx = \int \sqrt{4+x^2}(2x\,dx) = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(4+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(4+x^2)\sqrt{4+x^2} + C$$

معلومة:
إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق بدلالة المتغير x فإن التفاضل هو:
$\frac{df}{dx} = f'(x)$
$df = f'(x)dx$

قاعدة التكامل بالتعويض — **Rule of Integration by Substitution**

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:
$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$
وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن:
$$\int f(u)du = F(u) + C$$

20



تمرَّنْ 5–2

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–12)، استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل.

(1) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx$
(2) $\int (4x-5)^8 dx$
(3) $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$
(4) $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$
(5) $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5 dx$
(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}dx$
(7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$
(8) $\int x(3x+2)^6 dx$
(9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$
(10) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$
(11) $\int x^3\sqrt{x^2-2}\,dx$
(12) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a) (b)
(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ (a) (b)
(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a) (b)
(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5 dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ (a) (b)
(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ (a) (b)

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7 dx =$
(a) $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$
(b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$
(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$
(d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

12

في الأمثلة $(1), (2), (3)$

تطبيق مباشر على قاعدة التعويض حيث نلاحظ قيمة $(g(x))^n$ ومشتقة $g(x)$ وهي $g'(x)$ كما يمكن الاستفادة من كتابة $u = g(x)$ واستخدام التفاضل لنحصل على: $du = g'(x)\,dx$ علمًا أن $g'(x)$ هي مشتقة $g(x)$ كما يجب تنبيه الطلاب إلى إشارات أو قيم ثابتة قد تظهر أثناء استخدام التفاضل مثل:

$$F(x) = \int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}}dx$$

نأخذ:

$$u = \sqrt{x}+2 \Longrightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

ولذا:

$$2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

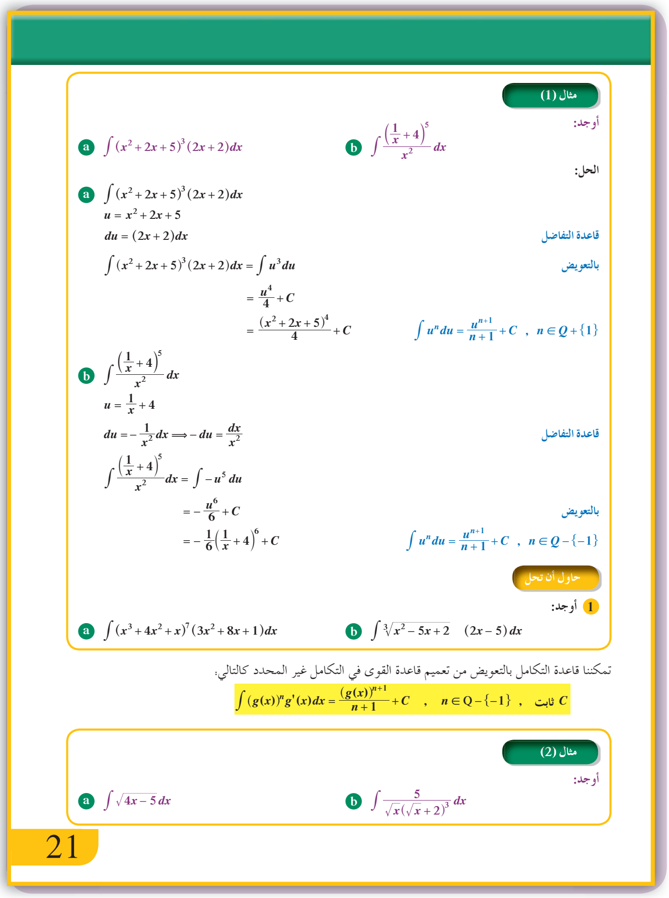
ويصبح:

$$F(x) = 2\int u^3 du = \frac{1}{2}(\sqrt{x}+2)^4 + C$$

ويمكن ملاحظة ذلك في معظم الأمثلة.

في المثال (4)

قد يجد الطلاب صعوبة في هذا المثال كون العلاقة بين دالة ومشتقتها غير ظاهرة مباشرة، ولكن أهميته تكمن في أنه يفتح أمام الطلاب أبوابًا واسعة للتعامل مع التكامل بالتعويض، إذ يوجد ربط بين x^2 و x^4 كما يوجد أيضًا ربط بين x^2 ومشتقتها $2x$.


مثال (1)

أوجد:

a $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx$ b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx$

الحل:

a $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx$

$u = x^2+2x+5$

قاعدة التفاضل $du = (2x+2)dx$

بالتعويض $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx = \int u^3 du$

$= \frac{u^4}{4}+C$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \;,\; n \in Q+\{1\}$ $= \frac{(x^2+2x+5)^4}{4}+C$

b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx$

$u = \frac{1}{x}+4$

قاعدة التفاضل $du = -\frac{1}{x^2}dx \Longrightarrow -du = \frac{dx}{x^2}$

$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx = \int -u^5\,du$

بالتعويض $= -\frac{u^6}{6}+C$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C \;,\; n \in Q-\{-1\}$ $= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6+C$

حاول أن تحل

1 أوجد:

a $\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)dx$ b $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\;(2x-5)\,dx$

تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

$$\int (g(x))^n g'(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}+C \quad,\quad n \in Q-\{-1\} \quad,\quad C \text{ ثابت}$$

مثال (2)

أوجد:

a $\int \sqrt{4x-5}\,dx$ b $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}dx$

21

6 الربط «إثرائي»

يتدفق الماء في خزان بمعدل $\sqrt{3t+4}\ \text{cm}^3/\text{min}$. إذا افترضنا أن الخزان كان فارغاً عند $t = 0$، فما كمية الماء المتدفقة في الخزان بعد مرور 7 دقائق؟

بما أن معدل حجم الماء المتدفق في الخزان متغير بدلالة الزمن t لذا $\frac{dv}{dt} = \sqrt{3t+4}$ ومنه:

$$V(t) = \int \sqrt{3t+4}\,dt$$

$$u = 3t + 4$$

$$du = 3dt \Longrightarrow dt = \frac{1}{3}du$$

$$V(t) = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9}(3t+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

ولكن بما أن الخزان كان فارغاً عند $t = 0$ فيكون

$$V(0) = 0$$

$$0 = \frac{2}{9}(0+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$C = -\frac{16}{9}$$

أي أن: $V(t) = \frac{2}{9}(3t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{9}$

كمية الماء المتدفقة في الخزان بعد مرور 7 دقائق هي:

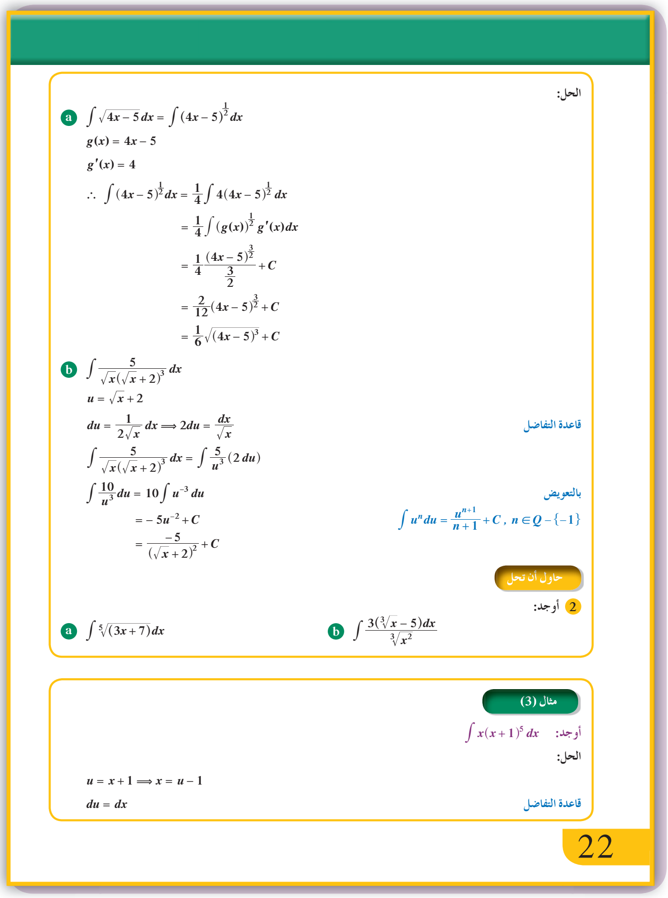
$$V(7) = \frac{2}{9}(21+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{9} = \frac{234}{9} = 26\ \text{cm}^3$$

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في اختيار المتغير عند التعويض، ساعدهم في الربط بين المتغير الجديد لإيجاد التفاضل والوصول إلى إحدى قواعد التكامل.

8 التقييم

تابع الطلاب في عملهم مع فقرات «حاول أن تحل» لتلاحظ إمكانياتهم في اختيار التعويض المناسب للمتغير وإيجاد التكامل.



الحل:

ⓐ $\int \sqrt{4x-5}\,dx = \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}dx$

$g(x) = 4x-5$

$g'(x) = 4$

$\therefore \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4}\int 4(4x-5)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{1}{4}\int (g(x))^{\frac{1}{2}} g'(x)dx$

$= \frac{1}{4}\frac{(4x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{12}(4x-5)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3} + C$

ⓑ $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}dx$

$u = \sqrt{x}+2$

قاعدة التفاضل $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Longrightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}dx = \int \frac{5}{u^3}(2\,du)$

بالتعويض $\int \frac{10}{u^3}du = 10\int u^{-3}du$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in Q - \{-1\}$

$= -5u^{-2} + C$

$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$

حاول أن تحل

2 أوجد:

ⓐ $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$ ⓑ $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

مثال (3)

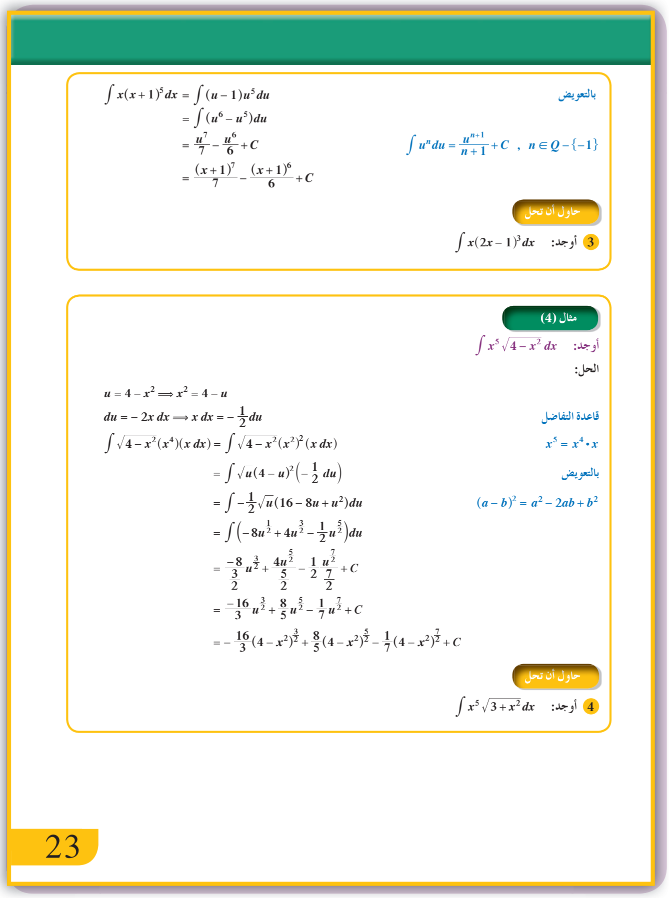
أوجد: $\int x(x+1)^5\,dx$

الحل:

$u = x+1 \Longrightarrow x = u-1$

قاعدة التفاضل $du = dx$

22



بالتعويض

$$\int x(x+1)^5 dx = \int (u-1)u^5 du$$
$$= \int (u^6 - u^5) du$$
$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + C$$
$$= \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + C$$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \ , \ n \in Q - \{-1\}$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int x(2x-1)^3 dx$

مثال (4)

أوجد: $\int x^5 \sqrt{4-x^2}\, dx$

الحل:

$$u = 4 - x^2 \Longrightarrow x^2 = 4 - u$$

قاعدة التفاضل

$$du = -2x\,dx \Longrightarrow x\,dx = -\frac{1}{2}du$$

$x^5 = x^4 \cdot x$

$$\int \sqrt{4-x^2}(x^4)(x\,dx) = \int \sqrt{4-x^2}(x^2)^2(x\,dx)$$

بالتعويض

$$= \int \sqrt{u}(4-u)^2\left(-\frac{1}{2}du\right)$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= \int -\frac{1}{2}\sqrt{u}(16 - 8u + u^2)du$$
$$= \int \left(-8u^{\frac{1}{2}} + 4u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}u^{\frac{5}{2}}\right)du$$
$$= \frac{-8}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C$$
$$= \frac{-16}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}u^{\frac{7}{2}} + C$$
$$= -\frac{16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}} + C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int x^5 \sqrt{3+x^2}\, dx$

23

اختبار سريع

❶ استخدم التعويض لإيجاد كلّ مما يلي:

(a) $\int \sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}}+4\right)^2 dx$

$$u = x^{\frac{3}{2}} + 4 \Longrightarrow du = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$$
$$\Longrightarrow \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}du$$
$$\int \sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}}+4\right)^2 dx = \frac{2}{3}\int u^2 du$$
$$= \frac{2}{9}\left(x^{\frac{3}{2}}+4\right)^3 + C$$

(b) $\int (6x-9)(x^2-3x-1)^{-4} dx$

$$u = x^2 - 3x - 1 \Longrightarrow du = (2x-3)dx$$
$$\Longrightarrow 3du = (6x-9)dx$$
$$\int (6x-9)(x^2-3x-1)^{-4} dx$$
$$= 3\int u^{-4} du = -(x^2-3x-1)^{-3} + C$$

(c) $\int x^2(x+1)^3 dx$

$$u = x + 1 \Longrightarrow x = u - 1$$
$$du = dx$$
$$\int x^2(x+1)^3 dx = \int (u-1)^2 u^3 dx$$
$$= \frac{1}{6}(x+1)^6 - \frac{2}{5}(x+1)^5 + \frac{1}{4}(x+1)^4 + C$$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $F'(x) = \frac{1}{5}(5)(2x)(x^2+1)^4$
$$= 2x(x^2+1)^4 = f(x)$$

(b) $\int 2x(x^2+1)^4 dx = \int F'(x)dx = F(x) + C$

(c) $(x^2+1)' = 2x$

(d) $g(x) = x^2 + 1 \Longrightarrow g'(x) = 2x$

(e) $\int 2x(x^2+1)^4 dx = \int (g(x))^4 g'(x)dx$
$$= \frac{1}{5}(x^2+1)^5 + C = F(x) + C$$

(f) إذا كانت الدالة المكاملة هي عبارة عن: دالتين مضروبتين ببعضهما بعضًا وكانت إحدى هاتين الدالتين هي مشتقة للثانية فيمكن الاستفادة من هذه العلاقة واستخدام متغير يربط بين الدالة ومشتقتها.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $u = x^3 + 4x^2 + x$

$du = (3x^2 + 8x + 1)dx$

$\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)dx$

$= \int u^7 du = \frac{1}{8}(x^3 + 4x^2 + x)^8 + C$

(b) $u = x^2 - 5x + 2 \Longrightarrow du = (2x - 5)dx$

$\int (x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{3}} (2x - 5)dx$

$= \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4}(x^2 - 5x + 2)^{\frac{4}{3}} + C$

2 **(a)** $u = 3x + 7 \Longrightarrow du = 3dx$

$\int (3x + 7)^{\frac{1}{5}} dx = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}} du$

$= \frac{5}{18}(3x + 7)^{\frac{6}{5}} + C$

(b) $u = x^{\frac{1}{3}} - 5 \Longrightarrow du = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} dx$

$\Longrightarrow 3du = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\int \frac{3(\sqrt[3]{x} - 5)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 9\int u\, du = \frac{9}{2}(\sqrt[3]{x} - 5)^2 + C$

3 $u = 2x - 1 \Longrightarrow du = 2dx$

$x = \frac{u + 1}{2}$

$\frac{1}{4}\int (u + 1)u^3 du = \frac{1}{4}\int (u^4 + u^3)du$

$= \frac{1}{20}(2x - 1)^5 + \frac{1}{16}(2x - 1)^4 + C$

4 $u = x^2 + 3 \Longrightarrow du = 2x\, dx$

$x^2 = u - 3$

$\int x^4 \bullet x\sqrt{x^2 + 3}\, dx = \frac{1}{2}\int (u - 3)^2 (u^{\frac{1}{2}})du$

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}} du - 3\int u^{\frac{3}{2}} du + \frac{9}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du$

$= \frac{1}{7}(x^2 + 3)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}(x^2 + 3)^{\frac{5}{2}} + 3(x^2 + 3)^{\frac{3}{2}} + C$

(7) $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} dx =$

ⓐ $\frac{1}{3}(x - 1)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓑ $\frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$

ⓒ $\frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓓ $\frac{3}{2}(x - 1)^{\frac{2}{3}} + C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x + 1}} =$

ⓐ $\frac{2}{9}(3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓑ $\frac{2}{3}(3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$

ⓒ $2(3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓓ $\frac{1}{2}(3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$

(9) $\int \frac{(2 + \sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}} dx =$

ⓐ $\frac{13}{2}(2 + \sqrt{x})^{13} + C$ ⓑ $\frac{2}{13}(2 + \sqrt{x})^{13} + C$

ⓒ $\frac{1}{26}(2 + \sqrt{x})^{13} + C$ ⓓ $\frac{1}{22}(2 + \sqrt{x})^{11} + C$

(10) $\int \frac{(x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}} dx =$

ⓐ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + C$ ⓑ $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + C$

ⓒ $3\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + C$ ⓓ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} + C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx =$

ⓐ $\frac{3}{2}\sqrt{(x + 1)^3} - 2\sqrt{x + 1} + C$ ⓑ $\frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x + 1} + C$

ⓒ $\frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} - 2\sqrt{x + 1} + C$ ⓓ $\frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} + 2\sqrt{x + 1} + C$

(12) إذا كانت: $F(x) = \int (x + 1)(2x^2 + 4x - 1)dx$ ، $F(-2) = \frac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{1}{8}(2x^2 + 4x - 1)^2 + \frac{5}{4}$ ⓑ $\frac{1}{8}(2x^2 + 4x - 1)^2 + 1$

ⓒ $\frac{1}{4}(2x^2 + 4x - 1)^2 + 1$ ⓓ $4(2x^2 + 4x - 1)^2 - 1$

13

3–5: تكامل الدوال المثلثية

1 الأهداف

- يتعرف قواعد المكاملة المثلثية ويستخدمها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قواعد المكاملة المثلثية.

3 الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

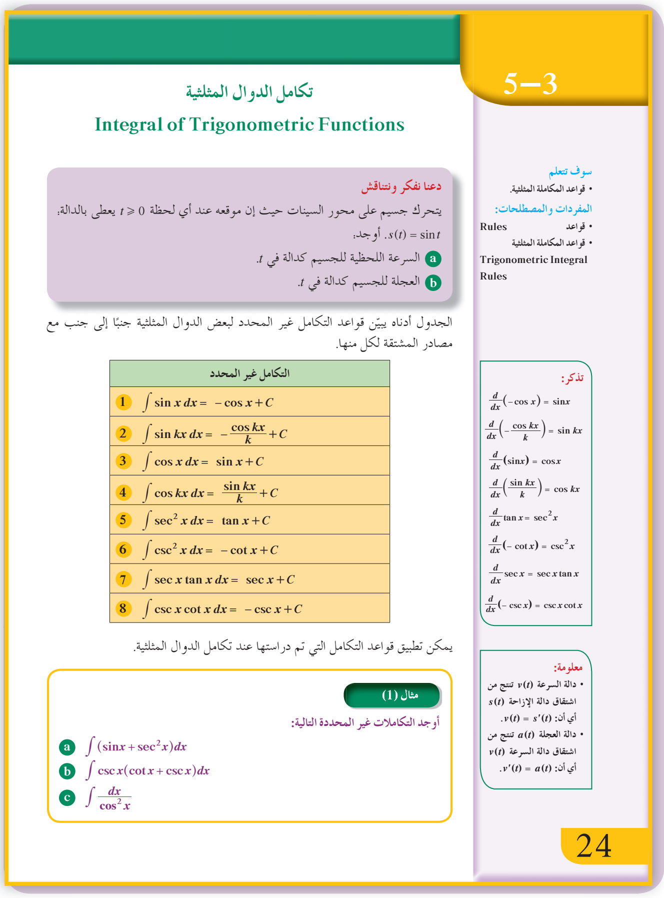
اطلب إلى الطلاب الإجابة عمّا يلي:

(1) أوجد مشتقة كل دالة ممّا يلي:

(a) $f(x) = \sin 5x$ **(b)** $g(x) = \cos(-3x)$

5 التدريس

لإيجاد التكامل غير المحدد يجب التأكد من أن الطلاب قد تمكنوا من الربط بين كل دالة مثلثية ومشتقتها، كونه لا يوجد قاعدة واحدة تربط الدوال المثلثية بعضها لذا من المهم تذكر الاشتقاق لهذه الدوال، ثم الانتقال إلى جدول التكامل غير المحدد الموجود في كتاب الطالب ص (24).



5–3

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- قواعد المكاملة المثلثية.

المفردات والمصطلحات:

- قواعد Rules
- قواعد المكاملة المثلثية Trigonometric Integral Rules

دعنا نفكر ونتناقش

يتحرك جسيم على محور السينات حيث إن موقعه عند أي لحظة $t \geqslant 0$ يعطى بالدالة: $s(t) = \sin t$. أوجد:

a السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t.

b العجلة للجسيم كدالة في t.

الجدول أدناه يبيّن قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية جنبًا إلى جنب مع مصادر المشتقة لكل منها.

التكامل غير المحدد
1 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
2 $\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
3 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
4 $\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5 $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
6 $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
7 $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
8 $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

تذكر:

$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

يمكن تطبيق قواعد التكامل التي تم دراستها عند تكامل الدوال المثلثية.

معلومة:

- دالة السرعة $v(t)$ تنتج من اشتقاق دالة الإزاحة $s(t)$ أي أن: $v(t) = s'(t)$.
- دالة العجلة $a(t)$ تنتج من اشتقاق دالة السرعة $v(t)$ أي أن: $v'(t) = a(t)$.

مثال (1)

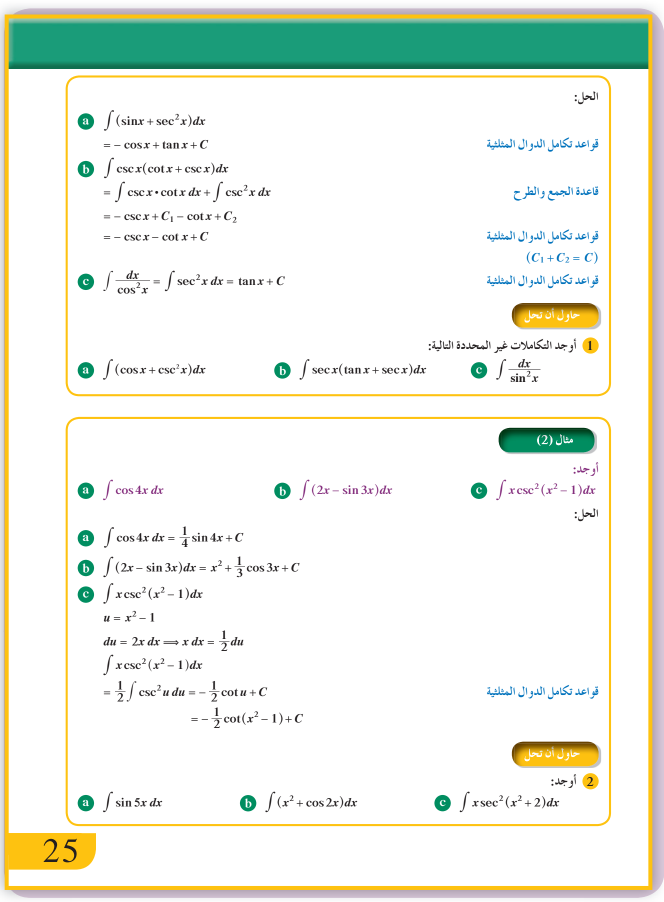
أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

c $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

24



الحل:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

$= -\cos x + \tan x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

$= \int \csc x \cdot \cot x\, dx + \int \csc^2 x\, dx$ قاعدة الجمع والطرح

$= -\csc x + C_1 - \cot x + C_2$

$= -\csc x - \cot x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية $(C_1 + C_2 = C)$

c $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

حاول أن تحل

1 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\cos x + \csc^2 x)dx$ b $\int \sec x(\tan x + \sec x)dx$ c $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

مثال (2)

أوجد:

a $\int \cos 4x\, dx$ b $\int (2x - \sin 3x)dx$ c $\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

الحل:

a $\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$

b $\int (2x - \sin 3x)dx = x^2 + \frac{1}{3}\cos 3x + C$

c $\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

$u = x^2 - 1$

$du = 2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = \frac{1}{2}du$

$\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

$= \frac{1}{2}\int \csc^2 u\, du = -\frac{1}{2}\cot u + C$ قواعد تكامل الدوال المثلثية

$= -\frac{1}{2}\cot(x^2 - 1) + C$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int \sin 5x\, dx$ b $\int (x^2 + \cos 2x)dx$ c $\int x\sec^2(x^2 + 2)dx$

25

في المثالين (1), (2)

الحلول في هذه الأمثلة تستند مباشرة على الجدول في ص (24) واستخدام قاعدة التعويض عند الحاجة.

في الأمثلة (3), (4), (5)

نستخدم فيها التكامل بالتعويض لنصل بعد ذلك إلى أحد التكاملات الموجودة في الجدول من كتاب الطالب ص (24). من المهم جدًّا تنبيه الطلاب إلى الربط بين الدوال المثلثية ومشتقاتها عند استخدام التكامل بالتعويض.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب بين اشتقاق الدوال المثلثية وتكاملها. ساعد الطلاب بعدة أمثلة في التغلب على مثل هذه الأخطاء. اعرض على سبيل الإيضاح ما يلي:

(a) $(\cos x)' = -\sin x$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

(b) $(\sin x)' = \cos x$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8 التقييم

تابع عمل الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتلاحظ كيفية تفاعلهم مع تكامل الدوال المثلثية وكيفية استخدام التكامل بالتعويض.

مثال (3)

أوجد:

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$ b $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

الحل:

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

$u = \cos t$

$du = -\sin t \, dt$

$\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt = \int -u^4 \, du$

$= -\frac{u^5}{5} + C$ والتعويض $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$= -\frac{1}{5}\cos^5 t + C$

b $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx$

$\int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx = \int u \, du$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}u^2 + C$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$ b $\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$

مثال (4)

أوجد:

a $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1) \, dx$

b $\int x^3 \cdot \cos(x^4+5) dx$

c $\int (1+\cos x)^6 \sin x \, dx$

الحل:

a $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1) dx$

$u = \sin(x+1)$

26

تمرَّنْ 5–3

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—14)، أوجد قيمة التكامل.

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x) dx$
(2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x) dx$
(3) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5\sin 3x\right) dx$
(4) $\int \sin^4 x \cos x \, dx$
(5) $\int \cos^5 x \sin x \, dx$
(6) $\int x^2 \sin(x^3+1) dx$
(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$
(8) $\int \sec^3 x \tan x \, dx$
(9) $\int \csc^3 x \cot x \, dx$
(10) $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x \, dx$
(11) $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$
(12) $\int \sqrt{1+\sin x} \cos x \, dx$
(13) $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$
(14) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$ (a) (b)
(2) $\int \csc^2 x \, dx = \cot x + C$ (a) (b)
(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x \ , \ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ (a) (b)
(4) $(F'(x) = \cos x + \sin x \ , \ F(\pi) = 1) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ (a) (b)
(5) $(F'(x) = \sec x \tan x \ , \ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ (a) (b)

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$ (b) $F(x) = 8x - \cot x + C$
(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$ (d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

14

اختبار سريع

1 أوجد:

(a) $\int \sin\left(\frac{5}{2}x\right)dx$

$= -\frac{2}{5}\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + C$

(b) $\int \cos(5-3x)dx$

$u = 5-3x \Longrightarrow du = -3dx$

$-\frac{1}{3}\int \cos u\, du = -\frac{1}{3}\sin(5-3x) + C$

(c) $\int x\sin(2-x^2)dx$

$u = 2-x^2 \Longrightarrow du = -2x\, dx$

$-\frac{1}{2}\int \sin u\, du = \frac{1}{2}\cos(2-x^2) + C$

(d) $\int \sin^5(3x)\cos(3x)dx$

$u = \sin(3x) \Longrightarrow du = 3\cos(3x)dx$

$\frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{18}\sin^6(3x) + C$

(e) $\int \csc^2(3x)dx$

$u = 3x \Longrightarrow du = 3\,dx$

$\frac{1}{3}\int \csc^2 u\, du = -\frac{1}{3}\cot(3x) + C$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $V(t) = s'(t) = (\sin t)' = \cos t$

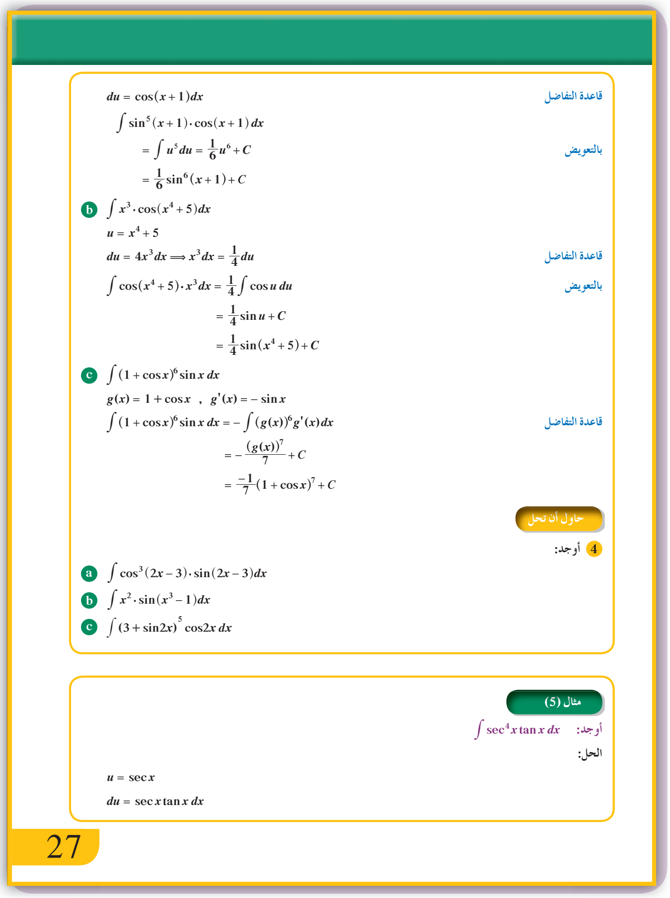
(b) $a(t) = V'(t) = (\cos t)' = -\sin t$

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $\sin x - \cot x + C$

(b) $\sec x + \tan x + C$

(c) $-\cot x + C$



قاعدة التفاضل $du = \cos(x+1)dx$

$\int \sin^5(x+1)\cdot\cos(x+1)\,dx$

بالتعويض $= \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C$

$= \frac{1}{6}\sin^6(x+1) + C$

b $\int x^3\cdot\cos(x^4+5)dx$

$u = x^4+5$

قاعدة التفاضل $du = 4x^3dx \Longrightarrow x^3dx = \frac{1}{4}du$

بالتعويض $\int \cos(x^4+5)\cdot x^3dx = \frac{1}{4}\int \cos u\, du$

$= \frac{1}{4}\sin u + C$

$= \frac{1}{4}\sin(x^4+5) + C$

c $\int (1+\cos x)^6 \sin x\, dx$

$g(x) = 1+\cos x \quad , \quad g'(x) = -\sin x$

قاعدة التفاضل $\int (1+\cos x)^6\sin x\, dx = -\int (g(x))^6 g'(x)dx$

$= -\frac{(g(x))^7}{7} + C$

$= \frac{-1}{7}(1+\cos x)^7 + C$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)dx$

b $\int x^2\cdot\sin(x^3-1)dx$

c $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx$

مثال (5)

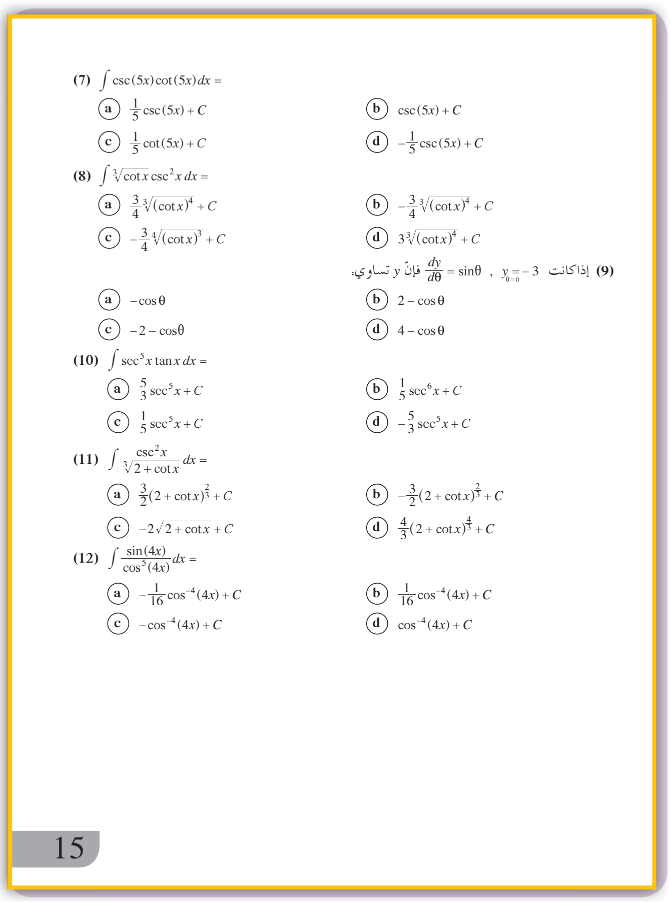
أوجد: $\int \sec^4 x \tan x\, dx$

الحل:

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\, dx$

27



(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)dx =$

a $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$ b $\csc(5x) + C$

c $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$ d $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\,\csc^2 x\, dx =$

a $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$ b $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

c $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$ d $3\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(9) إذا كانت $y_{\theta=0} = -3$ ، $\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ فإنّ y تساوي:

a $-\cos\theta$ b $2-\cos\theta$

c $-2-\cos\theta$ d $4-\cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x \tan x\, dx =$

a $\frac{5}{3}\sec^5 x + C$ b $\frac{1}{5}\sec^6 x + C$

c $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$ d $-\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}dx =$

a $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$ b $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

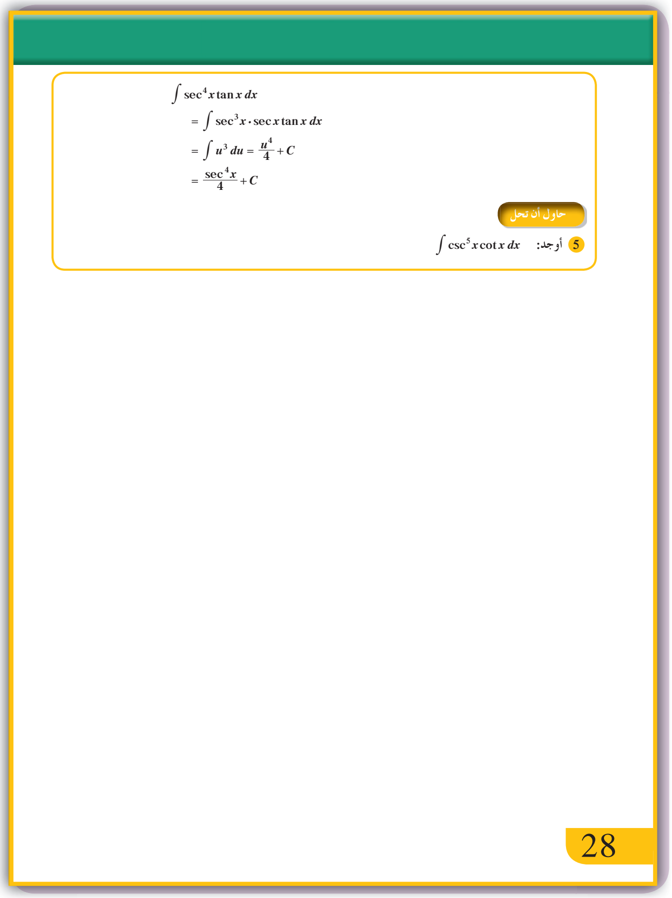
c $-2\sqrt{2+\cot x} + C$ d $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}dx =$

a $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$ b $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

c $-\cos^{-4}(4x) + C$ d $\cos^{-4}(4x) + C$

15



$$\int \sec^4 x \tan x \, dx$$
$$= \int \sec^3 x \cdot \sec x \tan x \, dx$$
$$= \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{\sec^4 x}{4} + C$$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

28

2 **(a)** $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$

(b) $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(c) $u = x^2 + 2 \Longrightarrow du = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{2}\tan(x^2+2) + C$$

3 **(a)** $u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x\,dx$

$$\int u^3\,du = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

(b) $u = \cot x \Longrightarrow du = -\csc^2 x\,dx$

$$-\int u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 x + C$$

4 **(a)** $u = \cos(2x-3) \Longrightarrow du = -2\sin(2x-3)dx$

$$-\frac{1}{2}\int u^3\,du = -\frac{1}{8}\cos^4(2x-3) + C$$

(b) $u = x^3 - 1 \Longrightarrow du = 3x^2\,dx$

$$\frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos(x^3-1) + C$$

(c) $u = 3 + \sin 2x \Longrightarrow du = 2\cos 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int u^5\,du = \frac{1}{12}(3+\sin 2x)^6 + C$$

5 **(a)** $u = \csc x \Longrightarrow du = -\csc x \cot x\,dx$

$$\int \csc^4 x(\csc x \cot x)dx = -\int u^4 du$$
$$= -\frac{1}{5}\csc^5 x + C$$

4–5: الدوال الأسية واللوغاريتمية

1 الأهداف

- يوجد مشتقة الدالة الأسية.
- يوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية.
- يوجد تكامل الدالة الأسية.
- يوجد تكامل الدالة اللوغاريتمية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دالة أسية – دالة لوغاريتمية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن السؤال التالي:

(1) أوجد مشتقة الدالة f باستخدام تعريف المشتقة حيث: $f(x) = x^2 - 1$.

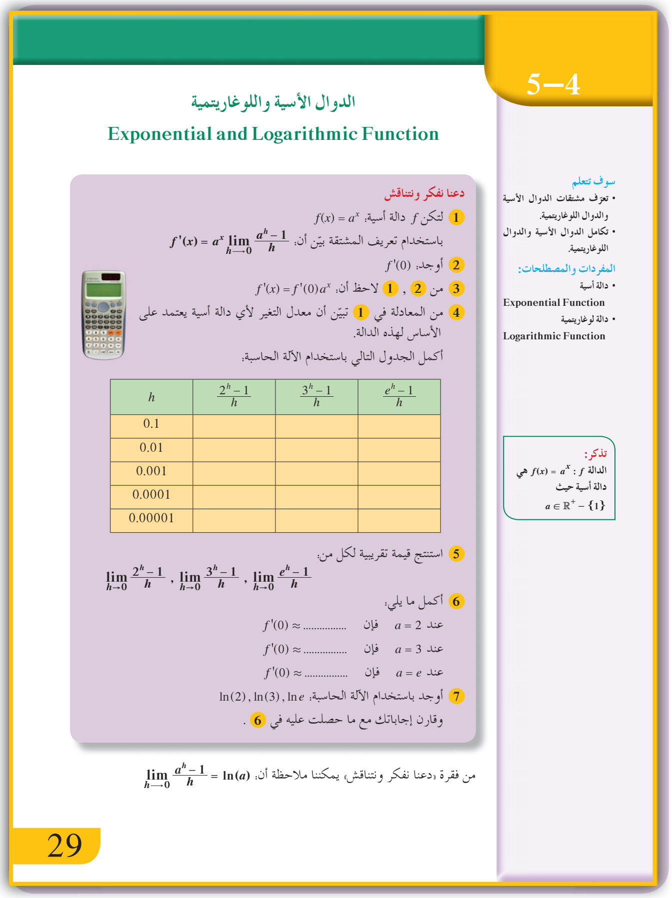
5 التدريس

ذكّر الطلاب بمشتقة الدالة: $f(x) = x^n$ مع التركيز على أن الأساس هو المتغير x والأس هو عدد ثابت حقيقي n، ثم اعرض أمامهم القاعدتين (1)، (2) ليجدوا الفرق بين مشتقة $f(x) = x^n$ ومشتقة $f(x) = a^x$ وأيضًا مشتقة $f(x) = e^x$ كما أنهم سوف يتفهموا الفرق بين مشتقة $f(x) = u^n$ ومشتقة $f(x) = a^u$ وأيضًا مشتقة $f(x) = e^u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق.

في المثالين (1) , (2)

يساعدان الطلاب في تطبيق القاعدتين (1)، (2) لجهة إيجاد مشتقات دوال أسية حيث الأساس عدد ثابت والأس دالة في x قابلة للاشتقاق.

الفت انتباه الطلاب إلى القاعدة (3) وذلك لفهم مشتقة دالة لوغاريتم طبيعي.


5–4

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Function

سوف تتعلم
- تعرّف مشتقات الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.
- تكامل الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

المفردات والمصطلحات:
- دالة أسية Exponential Function
- دالة لوغاريتمية Logarithmic Function

تذكر: الدالة f : $f(x) = a^x$ هي دالة أسية حيث $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

دعنا نفكر ونتناقش

1 لتكن f دالة أسية: $f(x) = a^x$ باستخدام تعريف المشتقة بيّن أن: $f'(x) = a^x \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

2 أوجد: $f'(0)$

3 من 1 , 2 لاحظ أن: $f'(x) = f'(0)a^x$

4 من المعادلة في 1 تبيّن أن معدل التغير لأي دالة أسية يعتمد على الأساس لهذه الدالة.

أكمل الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة:

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$	$\frac{e^h - 1}{h}$
0.1			
0.01			
0.001			
0.0001			
0.00001			

5 استنتج قيمة تقريبية لكل من:

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h}$, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$

6 أكمل ما يلي:

عند $a = 2$ فإن $f'(0) \approx$ ....

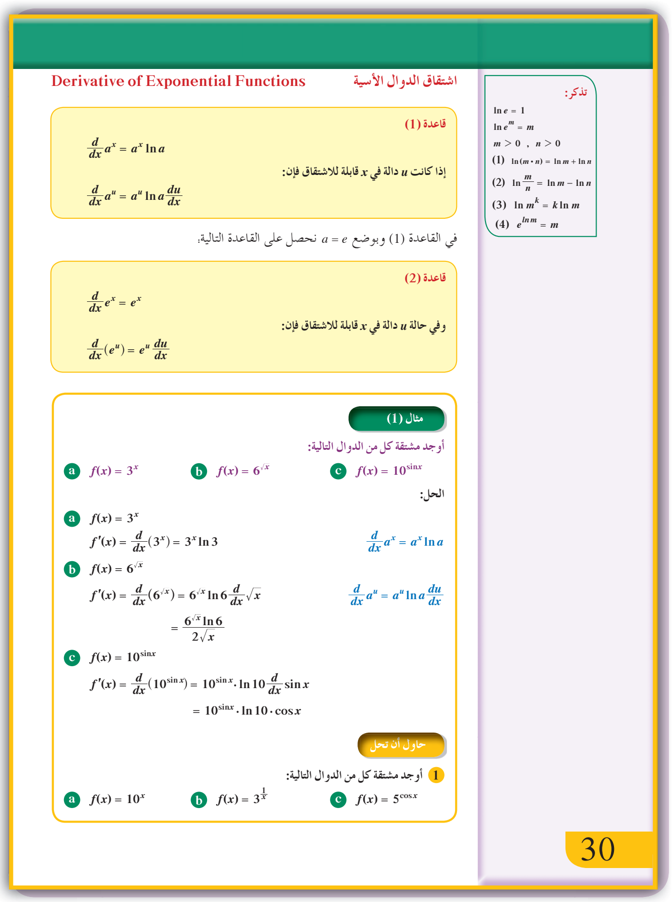
عند $a = 3$ فإن $f'(0) \approx$ ....

عند $a = e$ فإن $f'(0) \approx$ ....

7 أوجد باستخدام الآلة الحاسبة: $\ln(2), \ln(3), \ln e$ وقارن إجاباتك مع ما حصلت عليه في 6 .

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» يمكننا ملاحظة أن: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$

29


اشتقاق الدوال الأسية Derivative of Exponential Functions

تذكر:
$\ln e = 1$
$\ln e^m = m$
$m > 0$, $n > 0$
(1) $\ln(m \cdot n) = \ln m + \ln n$
(2) $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$
(3) $\ln m^k = k \ln m$
(4) $e^{\ln m} = m$

قاعدة (1)

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

في القاعدة (1) وبوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة (2)

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$

وفي حالة u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$

مثال (1)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 3^x$ b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$ c $f(x) = 10^{\sin x}$

الحل:

a $f(x) = 3^x$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(3^x) = 3^x \ln 3$ $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$

b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(6^{\sqrt{x}}) = 6^{\sqrt{x}} \ln 6 \frac{d}{dx}\sqrt{x}$ $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

$= \frac{6^{\sqrt{x}} \ln 6}{2\sqrt{x}}$

c $f(x) = 10^{\sin x}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(10^{\sin x}) = 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \frac{d}{dx} \sin x$

$= 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \cdot \cos x$

حاول أن تحل

1 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 10^x$ b $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ c $f(x) = 5^{\cos x}$

30

في المثال (3)

يعرض أمام الطلاب أنواعًا مختلفة لدوال لوغاريتمية طبيعية تتضمن متغيرات في x قابلة للاشتقاق وبالتالي يمكن تطبيق القاعدة (3).

في المثال التوضيحي

تكمن أهمية هذا المثال كونه يوفّر للطلاب فرصة في فهم كيفية إيجاد مشتقة: $f(x) = \ln|x|$ وهي: $f'(x) = \frac{1}{x}$ في الحالتين $x > 0$ أو $x < 0$ وبالتالي القاعدة (4) وما ينتج عنها لجهة التكامل غير المحدد. ساعد الطلاب على فهم جدول التكامل غير المحدد للدوال الأسية واللوغاريتمية في كتاب الطالب ص (33).

في المثالين (4), (5)

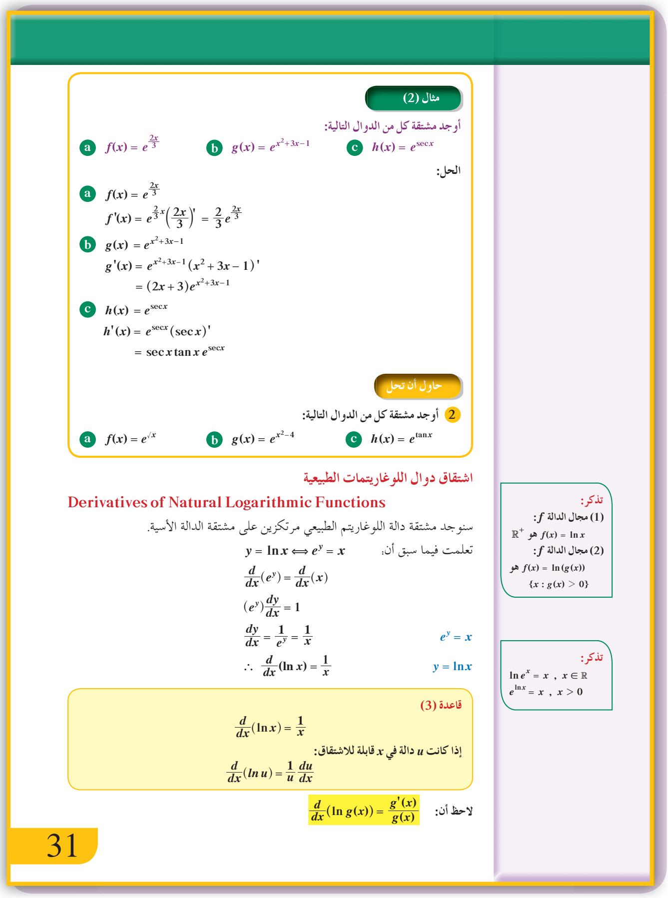
تطبيق مباشر على جدول التكامل غير المحدد للدوال الأسية واللوغاريتمية مع استخدام قاعدة التفاضل والتعويض عند الضرورة.

في المثال (6)

نستخدم التعويض في هذا المثال لإيجاد ربط بين البسط والمقام في الدالة $f(x) = \tan x$، ومن ثم استنتاج أن التكامل غير المحدد للدالة المثلثية $\tan x$ هو لوغاريتم طبيعي.

6 الربط

لا يوجد.



مثال (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$ b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$ c $h(x) = e^{\sec x}$

الحل:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

$f'(x) = e^{\frac{2}{3}x}\left(\frac{2x}{3}\right)' = \frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}$

b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$

$g'(x) = e^{x^2+3x-1}(x^2+3x-1)'$

$= (2x+3)e^{x^2+3x-1}$

c $h(x) = e^{\sec x}$

$h'(x) = e^{\sec x}(\sec x)'$

$= \sec x \tan x\, e^{\sec x}$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b $g(x) = e^{x^2-4}$ c $h(x) = e^{\tan x}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

Derivatives of Natural Logarithmic Functions

سنوجد مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي مرتكزين على مشتقة الدالة الأسية.

تعلمت فيما سبق أن: $y = \ln x \Longleftrightarrow e^y = x$

$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x)$

$(e^y)\frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ $\quad e^y = x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ $\quad y = \ln x$

قاعدة (3)

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق:

$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

تذكر:

(1) مجال الدالة f: $f(x) = \ln x$ هو $\mathbb{R}^+$

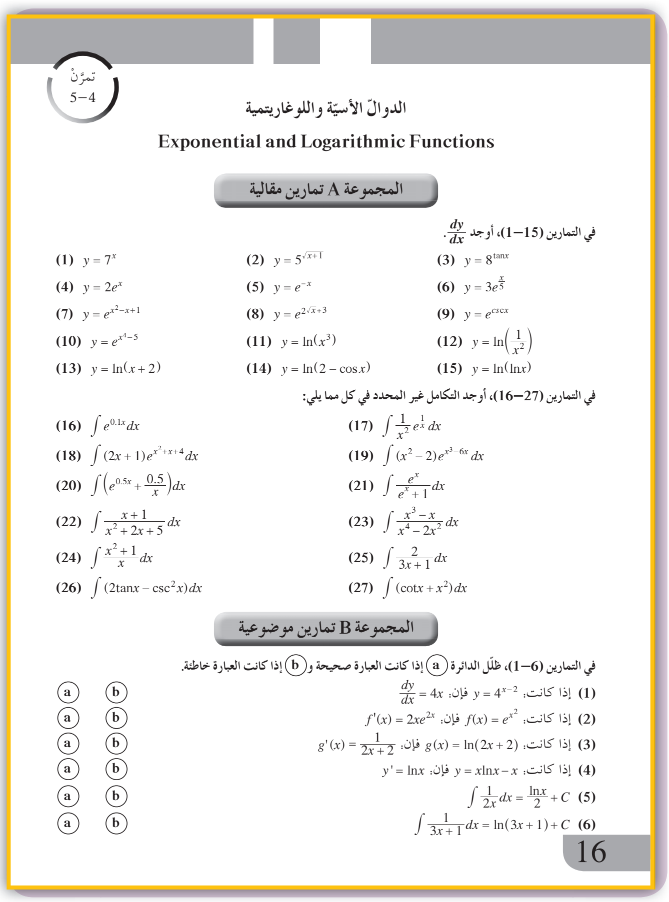
(2) مجال الدالة f: $f(x) = \ln(g(x))$ هو $\{x : g(x) > 0\}$

تذكر:

$\ln e^x = x \ , \ x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x \ , \ x > 0$

31



تمرَّنْ 5–4

الدوالّ الأسيّة واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–15)، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = 7^x$ (2) $y = 5^{\sqrt{x+1}}$ (3) $y = 8^{\tan x}$

(4) $y = 2e^x$ (5) $y = e^{-x}$ (6) $y = 3e^{\frac{x}{5}}$

(7) $y = e^{x^2-x+1}$ (8) $y = e^{2\sqrt{x+3}}$ (9) $y = e^{\csc x}$

(10) $y = e^{x^4-5}$ (11) $y = \ln(x^3)$ (12) $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(13) $y = \ln(x+2)$ (14) $y = \ln(2-\cos x)$ (15) $y = \ln(\ln x)$

في التمارين (16–27)، أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

(16) $\int e^{0.1x}dx$ (17) $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$

(18) $\int (2x+1)e^{x^2+x+4}dx$ (19) $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}dx$

(20) $\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x}\right)dx$ (21) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

(22) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$ (23) $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$

(24) $\int \frac{x^2+1}{x}dx$ (25) $\int \frac{2}{3x+1}dx$

(26) $\int (2\tan x - \csc^2 x)dx$ (27) $\int (\cot x + x^2)dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ (a) (b)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ (a) (b)

(5) $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$ (a) (b)

(6) $\int \frac{1}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + C$ (a) (b)

16

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطالب في إيجاد مشتقة الدالة $f(x) = \ln|x|$، فيكتب $f'(x) = \frac{1}{|x|}$، أو في إيجاد مشتقة الدالة $f(x) = \ln|u|$ فيكتب $f'(x) = \frac{u'}{|u|}$.

اشرح لهم أسباب كتابة $f'(x) = \frac{1}{x}$ أو $f'(x) = \frac{u'}{u}$

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من قدرتهم على التعامل مع مشتقات وتكامل الدوال اللوغاريتمية والأسية.

اختبار سريع

1 أوجد مشتقة كل دالّة:

(a) $f(x) = \ln(6x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \ln(kx)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$k \neq 0$ (ثابت)

(c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 - 2x}\right)$ $\quad f'(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x}$

$x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

(d) $f(x) = e^{2x^2}$

$f'(x) = 4xe^{2x^2}$

(e) $f(x) = 4e^{\sin(x^2+3x)}$

$f'(x) = 4(2x+3)\cos(x^2+3x)e^{\sin(x^2+3x)}$

2 أوجد التكامل غير المحدد:

(a) $F(x) = \int \frac{(2x-3)dx}{x^2 - 3x + 7}$

$F(x) = \ln|x^2 - 3x + 7| + C$

(b) $F(x) = \int \sin x \, e^{\cos x} \, dx$

$F(x) = -e^{\cos x} + C$

مثال (3)

أوجد مشتقات كل من الدوال التالية:

a $f(x) = \ln x^2$ b $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c $h(x) = \ln\sqrt{x}$ d $k(x) = \ln(\cos x)$

الحل:

a $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$

b $g'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x}$

c $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

d $k'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

حاول أن تحل

3 أوجد مشتقات كلّ من الدوال التالية:

a $f(x) = \ln(2x + x^3)$ b $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

c $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$ d $h(x) = \ln(\sin x)$

مثال توضيحي

إذا كان f دالة: $f(x) = \ln|x|$

فأوجد $f'(x)$

الحل:

$$f(x) = \ln|x| \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \ln x & : x > 0 \\ \ln(-x) & : x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = \ln x \quad : x > 0$

قاعدة $\quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad (1)$

$f(x) = \ln(-x) \quad : x < 0$

$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \quad f'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \quad (2)$

من (2) , (1) نجد أن:

$f'(x) = \frac{1}{x}$

32

قاعدة (4)

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية

Integrals of some Exponential and Logarithmic Functions

علمنا أن: $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ ومنها تكون المشتقة العكسية هي:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

والجدول التالي يبيّن تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث: $u = g(x)$

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx} = u'e^u$	$\int u'e^u \, dx = e^u + C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert + C$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

مثال (4)

أوجد:

a $\int 2e^x \, dx$ b $\int 2x \cdot e^{x^2+3} dx$

الحل:

a $\int 2e^x dx = 2\int e^x dx$

$= 2e^x + C$

b $\int 2x \cdot e^{x^2+3} dx$

$u = x^2 + 3$

$du = 2x \, dx$

$\int 2x \, e^{x^2+3} dx = \int e^u du$

$= e^u + C$

$\therefore \int 2x \, e^{x^2+3} dx = e^{x^2+3} + C$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\int e^{3x} dx$ b $\int (2x-1)e^{x^2-x+3} dx$

33

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - ax}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

2 $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

3 $f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0) \cdot a^x$

4 تحقق من عمل الطلاب في إكمال الجدول.

5 ، 6 ، 7 تابع عمل الطلاب وتأكد من النتائج.

«حاول أن تحل»

1 (a) $f'(x) = 10^x \ln 10$

(b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} 3^{\frac{1}{x}} \ln 3$

(c) $f'(x) = -\sin x \times 5^{\cos x} \cdot \ln 5$

2 (a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

(b) $g'(x) = 2xe^{x^2-4}$

(c) $h'(x) = \sec^2 x \cdot e^{\tan x}$

3 (a) $f'(x) = \frac{2 + 3x^2}{2x + x^3}$

(b) $g'(x) = \frac{-2}{2x + 1}$

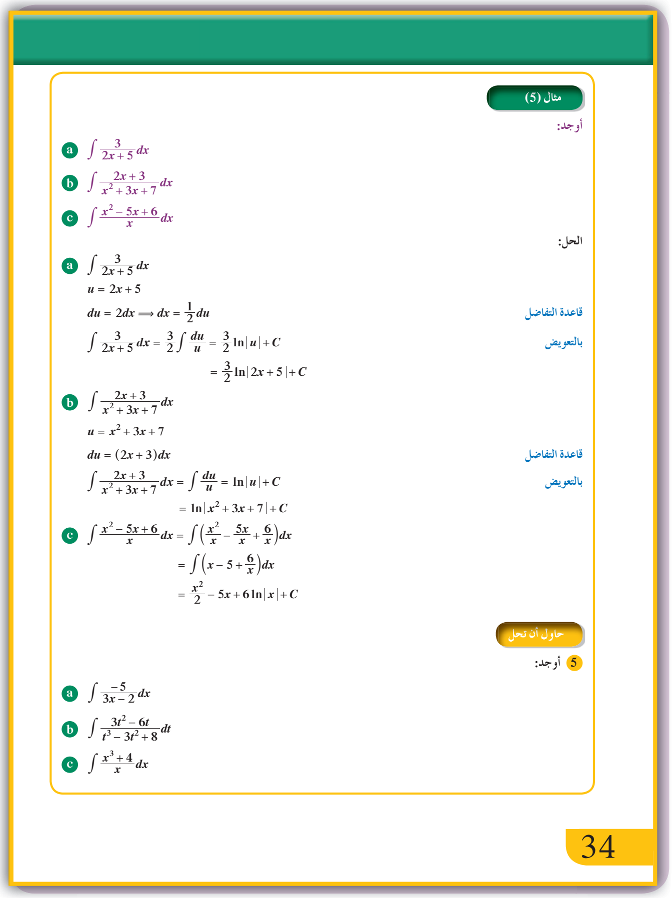
(c) $h'(x) = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,x}$

(d) $h'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

4 (a) $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$

(b) $\int (2x - 1) e^{x^2-x+3} dx$

$= e^{x^2-x+3} + C$



مثال (5)

أوجد:

a $\int \frac{3}{2x+5} dx$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x} dx$

الحل:

a $\int \frac{3}{2x+5} dx$

$u = 2x + 5$

قاعدة التفاضل $du = 2dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{2} du$

بالتعويض $\int \frac{3}{2x+5} dx = \frac{3}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{3}{2} \ln|u| + C$

$= \frac{3}{2} \ln|2x+5| + C$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx$

$u = x^2 + 3x + 7$

قاعدة التفاضل $du = (2x+3)dx$

بالتعويض $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

$= \ln|x^2+3x+7| + C$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{6}{x}\right) dx$

$= \int \left(x - 5 + \frac{6}{x}\right) dx$

$= \frac{x^2}{2} - 5x + 6\ln|x| + C$

حاول أن تحل

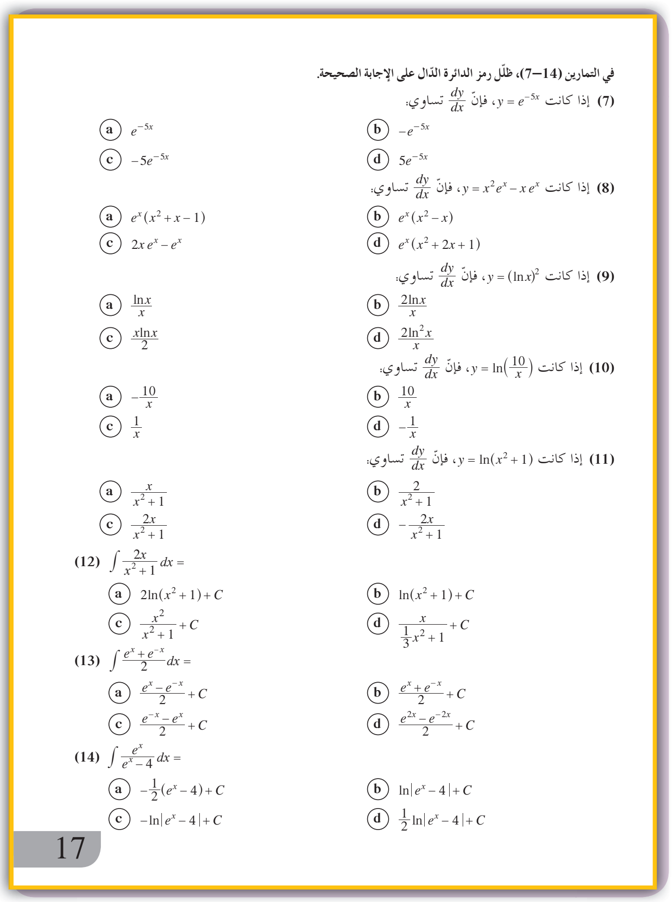
5 أوجد:

a $\int \frac{-5}{3x-2} dx$

b $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8} dt$

c $\int \frac{x^3+4}{x} dx$

34



في التمارين (7–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a e^{-5x} b $-e^{-5x}$

c $-5e^{-5x}$ d $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2 e^x - x e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a $e^x(x^2 + x - 1)$ b $e^x(x^2 - x)$

c $2x e^x - e^x$ d $e^x(x^2 + 2x + 1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a $\frac{\ln x}{x}$ b $\frac{2\ln x}{x}$

c $\frac{x\ln x}{2}$ d $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a $-\frac{10}{x}$ b $\frac{10}{x}$

c $\frac{1}{x}$ d $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2 + 1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a $\frac{x}{x^2+1}$ b $\frac{2}{x^2+1}$

c $\frac{2x}{x^2+1}$ d $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx =$

a $2\ln(x^2+1) + C$ b $\ln(x^2+1) + C$

c $\frac{x^2}{x^2+1} + C$ d $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1} + C$

(13) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx =$

a $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$ b $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$

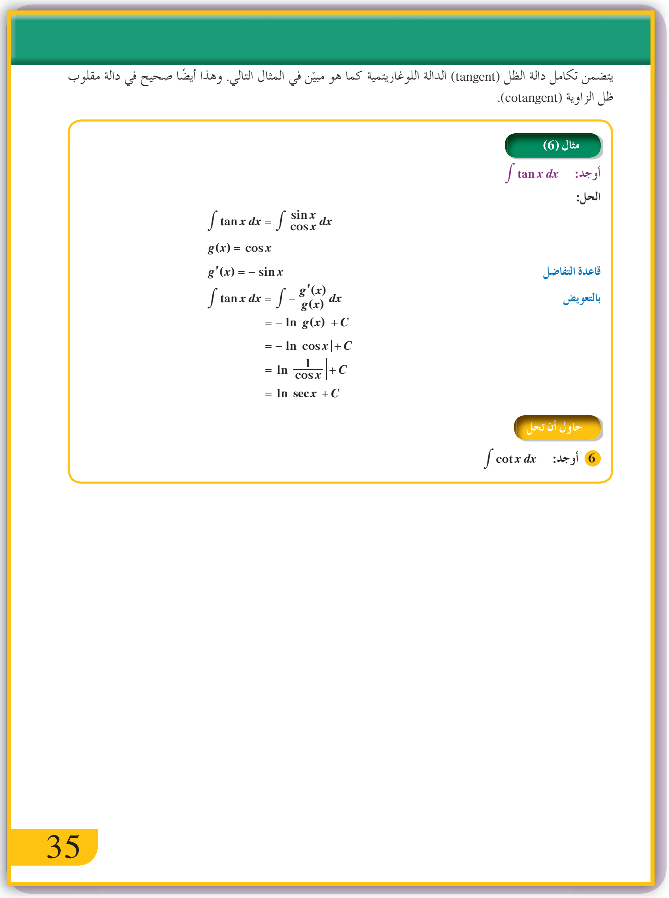
c $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$ d $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x - 4} dx =$

a $-\frac{1}{2}(e^x - 4) + C$ b $\ln|e^x - 4| + C$

c $-\ln|e^x - 4| + C$ d $\frac{1}{2}\ln|e^x - 4| + C$

17



يتضمن تكامل دالة الظل (tangent) الدالة اللوغاريتمية كما هو مبيّن في المثال التالي. وهذا أيضًا صحيح في دالة مقلوب ظل الزاوية (cotangent).

مثال (6)

أوجد: $\int \tan x\, dx$

الحل:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$g(x) = \cos x$$

قاعدة التفاضل $\quad g'(x) = -\sin x$

بالتعويض

$$\int \tan x\, dx = \int -\frac{g'(x)}{g(x)} dx$$
$$= -\ln|g(x)| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$
$$= \ln|\sec x| + C$$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int \cot x\, dx$

35

5 (a) $\int \frac{-5}{3x-2} dx = -\frac{5}{3} \ln|3x-2| + C$

(b) $\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt = \ln|t^3 - 3t^2 + 8| + C$

(c) $\int \left(x^2 + \frac{4}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3} + 4\ln|x| + C$

6 $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

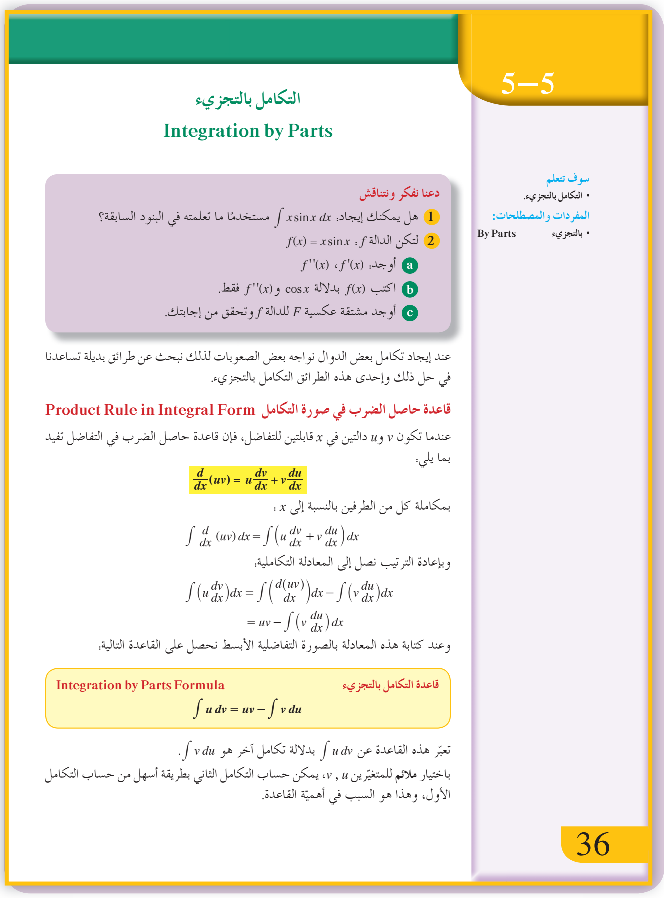
$u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x\, dx$

$\int \frac{du}{u} = \ln|\sin x| + C$

5–5: التكامل بالتجزيء

1 الأهداف

- يتعرف قاعدة التكامل بالتجزيء ويطبقها.



5–5

التكامل بالتجزيء

Integration by Parts

سوف تتعلم
- التكامل بالتجزيء.

المفردات والمصطلحات:
- بالتجزيء By Parts

دعنا نفكر ونتناقش

1 هل يمكنك إيجاد: $\int x\sin x\,dx$ مستخدمًا ما تعلمته في البنود السابقة؟

2 لتكن الدالة f: $f(x) = x\sin x$

a أوجد: $f'(x)$ ، $f''(x)$

b اكتب $f(x)$ بدلالة $\cos x$ و $f''(x)$ فقط.

c أوجد مشتقة عكسية F للدالة f وتحقق من إجابتك.

عند إيجاد تكامل بعض الدوال نواجه بعض الصعوبات لذلك نبحث عن طرائق بديلة تساعدنا في حل ذلك وإحدى هذه الطرائق التكامل بالتجزيء.

Product Rule in Integral Form قاعدة حاصل الضرب في صورة التكامل

عندما تكون v و u دالتين في x قابلتين للتفاضل، فإن قاعدة حاصل الضرب في التفاضل تفيد بما يلي:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

بمكاملة كل من الطرفين بالنسبة إلى x :

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx$$

وبإعادة الترتيب نصل إلى المعادلة التكاملية:

$$\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = \int\left(\frac{d(uv)}{dx}\right)dx - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$
$$= uv - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

وعند كتابة هذه المعادلة بالصورة التفاضلية الأبسط نحصل على القاعدة التالية:

Integration by Parts Formula قاعدة التكامل بالتجزيء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

تعبّر هذه القاعدة عن $\int u\,dv$ بدلالة تكامل آخر هو $\int v\,du$.

باختيار **ملائم** للمتغيّرين u , v، يمكن حساب التكامل الثاني بطريقة أسهل من حساب التكامل الأول، وهذا هو السبب في أهميّة القاعدة.

36

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

بالتجزيء.

3 الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد المشتقة لكل دالة:

(a) $f(x) = x\sqrt{x+2}$

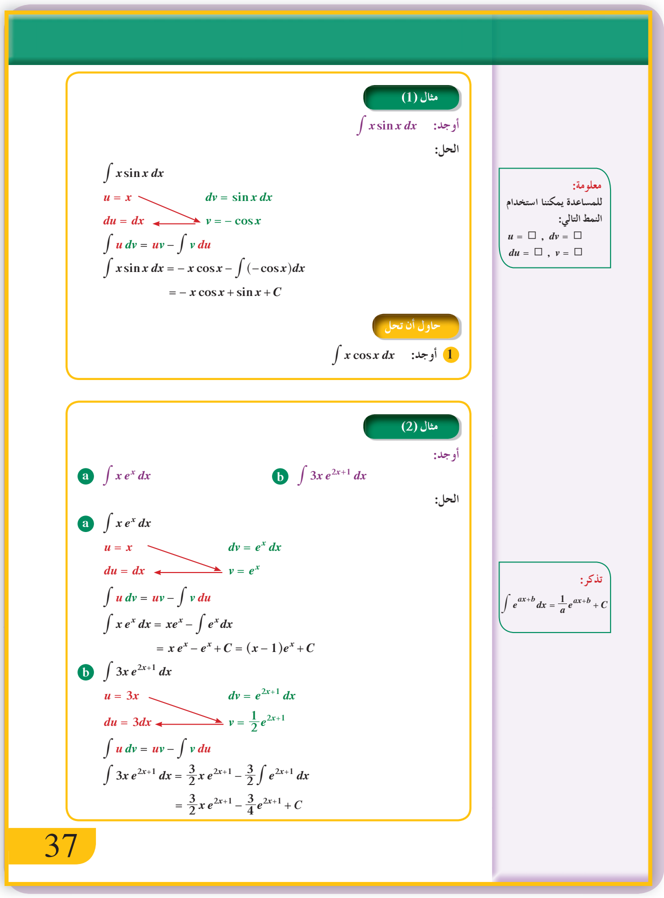
(b) $g(x) = xe^{2x}$

(c) $h(x) = x\cos x$

أوجد:

(a) $\int x^2 e^{x^3+2}\,dx$

(b) $\int x\sqrt[3]{(x-1)^2}\,dx$



مثال (1)

أوجد: $\int x\sin x\,dx$

الحل:

$\int x\sin x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int x\cos x\,dx$

معلومة:
للمساعدة يمكننا استخدام النمط التالي:
$u = \square$, $dv = \square$
$du = \square$, $v = \square$

مثال (2)

أوجد:

a $\int x e^x\,dx$ b $\int 3x e^{2x+1}\,dx$

الحل:

a $\int x e^x\,dx$

$u = x \qquad dv = e^x\,dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x dx$

$= x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

b $\int 3x e^{2x+1}\,dx$

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\,dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int 3x e^{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}x e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\,dx$

$= \frac{3}{2}x e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$

تذكر:
$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

37

5 التدريس

يعتبر التكامل بالتجزيء من إحدى الطرائق المهمة التي تساعد على تخطي بعض الصعوبات عند حساب التكامل. إن تطبيق القاعدة: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ يتوقف بالدرجة الأولى على حسن اختيار u و dv من الدالة التي المطلوب مكاملتها. من الممكن ألا يكون الاختيار في البدء ملائمًا، لأن الهدف الأساسي هو الحصول على $\int vdu$ قابلة للتكامل بسهولة، لذا شجع الطلاب على المحاولة أكثر من مرة في اختيار كل من u و dv.

في الأمثلة (1), (2), (3), (4)

تساعد هذه الأمثلة الطلاب وترشدهم إلى كيفية اختيار u، dv مقارنة مع كل دالة يتوجب تكاملها. ناقش معهم خيارات مختلفة في بعض الأمثلة لقيم u، dv والنتائج التي سيتم التوصل إليها.

على سبيل المثال، في المثال (1) إذا كان الاختيار هو:

$$u = \sin x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \cos x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

فالتكامل الذي نحصل عليه هو أصعب من التكامل الأساسي.

ويمكن اتباع هذه الطريقة بتجربة خيارات مختلفة عن الحلول الموجودة، فيلاحظ عندئذ الطلاب أن الخبرة والمهارة صفتان مهمتان في تطبيق قاعدة التجزيء.

في الأمثلة (5), (6), (7)

يلاحظ الطلاب أن في هذه الأمثلة استخدمنا تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء مرتين. أخبرهم أنه في بعض التكاملات قد نحتاج إلى استخدام قاعدة التجزيء ثلاث مرات وأكثر وذلك بحسب التكامل الذي نتعامل معه، مع ملاحظة اختلاف مثال (7) عن مثالي (5)، (6) وذلك لظهور التكامل المطلوب بعد تطبيق القاعدة للمرة الثانية.

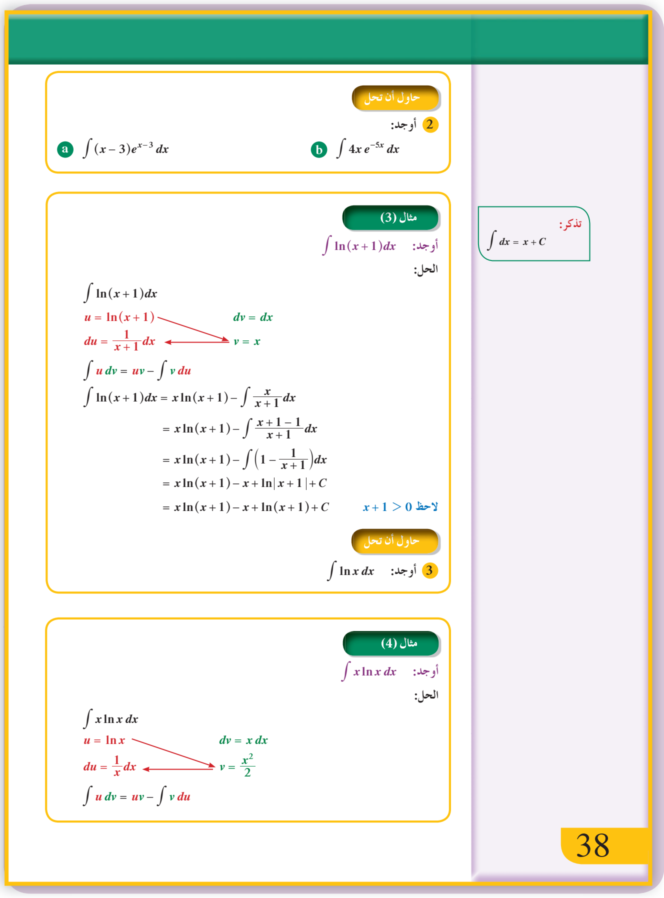
6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تطبيق قاعدة التجزيء عند سوء اختيار u، dv الذي لا تساعد في إيجاد التكامل.

اطلب منهم أخذ الوقت الكافي لاختيار مناسب لـ u و dv.



حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$

b $\int 4x\,e^{-5x}\,dx$

مثال (3)

أوجد: $\int \ln(x+1)dx$

الحل:

$\int \ln(x+1)dx$

$u = \ln(x+1) \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx \qquad v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx$$
$$= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$
$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$$

لاحظ $x+1 > 0$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \ln x\,dx$

مثال (4)

أوجد: $\int x\ln x\,dx$

الحل:

$\int x \ln x\,dx$

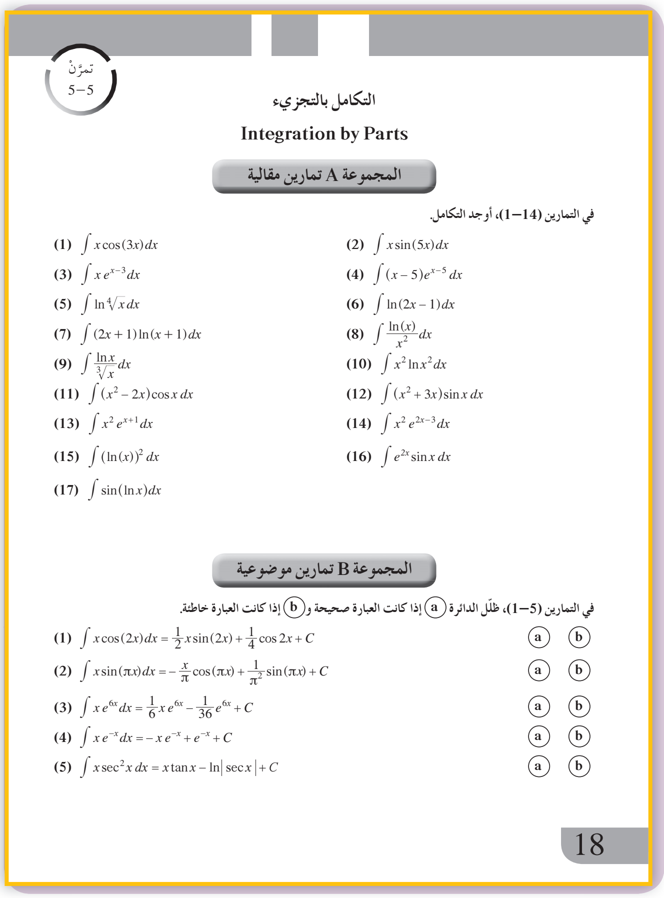
$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

تذكر: $\int dx = x + C$

38



تمرَّنْ 5−5

التكامل بالتجزيء

Integration by Parts

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—14)، أوجد التكامل.

(1) $\int x\cos(3x)dx$

(2) $\int x\sin(5x)dx$

(3) $\int x\,e^{x-3}dx$

(4) $\int (x-5)e^{x-5}\,dx$

(5) $\int \ln\sqrt[4]{x}\,dx$

(6) $\int \ln(2x-1)dx$

(7) $\int (2x+1)\ln(x+1)dx$

(8) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$

(10) $\int x^2\ln x^2\,dx$

(11) $\int (x^2-2x)\cos x\,dx$

(12) $\int (x^2+3x)\sin x\,dx$

(13) $\int x^2 e^{x+1}dx$

(14) $\int x^2 e^{2x-3}dx$

(15) $\int (\ln(x))^2\,dx$

(16) $\int e^{2x}\sin x\,dx$

(17) $\int \sin(\ln x)dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ (a) (b)

(3) $\int x\,e^{6x}dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ (a) (b)

(4) $\int x\,e^{-x}dx = -x\,e^{-x} + e^{-x} + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ (a) (b)

18

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن اختيارهم في تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء.

اختبار سريع

أوجد:

(a) $\int 2xe^{-3x}\,dx$

$$u = 2x \qquad dv = e^{-3x}\,dx$$
$$du = 2dx \qquad v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$\int 2xe^{-3x}\,dx = -\frac{2}{3}x\,e^{-3x} + \frac{2}{3}\int e^{-3x}\,dx$$
$$= -\frac{2}{3}xe^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + C$$

(b) $\int x\cos 3x\,dx$

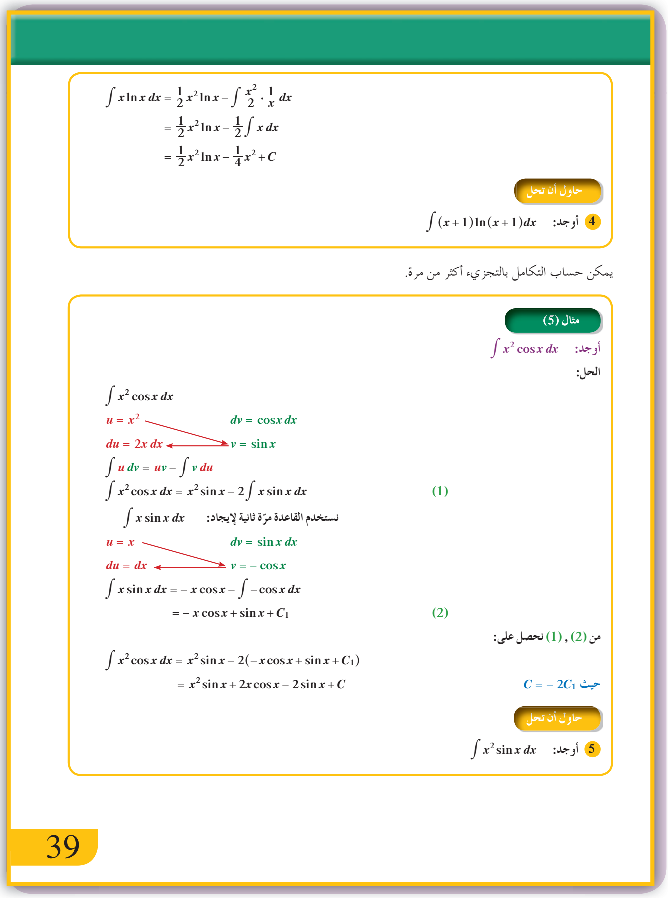
$$u = x \qquad dv = \cos 3x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$$

$$\int x\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

(c) $\int (2x+5)\ln(2x+5)dx$

$$u = \ln(2x+5) \qquad dv = (2x+5)dx$$
$$du = \frac{2}{2x+5}dx \qquad v = x^2 + 5x$$

$$\int (2x+5)\ln(2x+5)\,dx$$
$$= (x^2+5x)\ln(2x+5) - \int \frac{2x^2+10x}{2x+5}dx$$
$$= (x^2+5x)\ln(2x+5) - \int \left(x + \frac{5}{2} - \frac{\frac{25}{2}}{2x+5}\right)dx$$
$$= (x^2+5x)\ln(2x+5) - \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + \frac{25}{4}\ln|2x+5| + C$$



$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

يمكن حساب التكامل بالتجزيء أكثر من مرة.

مثال (5)

أوجد: $\int x^2\cos x\,dx$

الحل:

$$\int x^2\cos x\,dx$$
$$u = x^2 \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx \qquad (1)$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int x\sin x\,dx$

$$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = -\cos x$$
$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C_1 \qquad (2)$$

من (2) , (1) نحصل على:

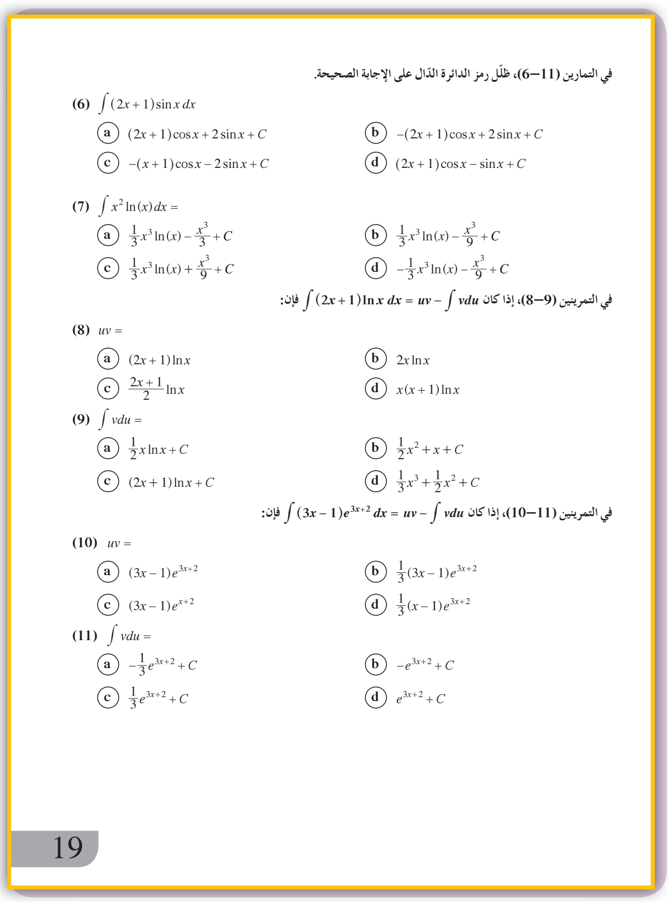
$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x + C_1)$$
$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

حيث $C = -2C_1$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int x^2\sin x\,dx$

39



في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\,dx$

ⓐ $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$ ⓑ $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

ⓒ $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$ ⓓ $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2\ln(x)dx =$

ⓐ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$ ⓑ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

ⓒ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$ ⓓ $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (9–8)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\,dx = uv - \int vdu$ فإن:

(8) $uv =$

ⓐ $(2x+1)\ln x$ ⓑ $2x\ln x$

ⓒ $\frac{2x+1}{2}\ln x$ ⓓ $x(x+1)\ln x$

(9) $\int vdu =$

ⓐ $\frac{1}{2}x\ln x + C$ ⓑ $\frac{1}{2}x^2 + x + C$

ⓒ $(2x+1)\ln x + C$ ⓓ $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (11–10)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int vdu$ فإن:

(10) $uv =$

ⓐ $(3x-1)e^{3x+2}$ ⓑ $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

ⓒ $(3x-1)e^{x+2}$ ⓓ $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int vdu =$

ⓐ $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$ ⓑ $-e^{3x+2} + C$

ⓒ $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$ ⓓ $e^{3x+2} + C$

19

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 من الصعب إيجاد تكامل يتضمن ضرب دالتين حيث $f(x) = x$، $g(x) = \sin x$ أي: $\int f(x) \cdot g(x)\, dx$، لأن قواعد التكامل تخبرنا بعدم فصل التكامل في حالة ضرب دالتين.

2 **(a)** $f'(x) = \sin x + x \cos x$

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x$$

$$= 2\cos x - x \sin x$$

(b) $f''(x) = 2\cos x - f(x) \Longrightarrow f(x) = 2\cos x - f''(x)$

$(f(x) = x \sin x)$

(c) $\int f(x)\, dx = 2\int \cos x\, dx - \int f''(x)\, dx$

$$F(x) = 2\sin x - f'(x) + C$$

$$F(x) = 2\sin x - \sin x - x\cos x + C$$

$$F(x) = \sin x - x\cos x + C$$

للتحقق نوجد مشتقة $F(x)$

$$F'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x = f(x)$$

«حاول أن تحل»

1 $u = x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

2 **(a)** $u = x - 3 \qquad dv = e^{x-3}\, dx$

$du = dx \qquad v = e^{x-3}$

$$\int (x-3)e^{x-3}\, dx = (x-3)e^{x-3} - \int e^{x-3} dx$$

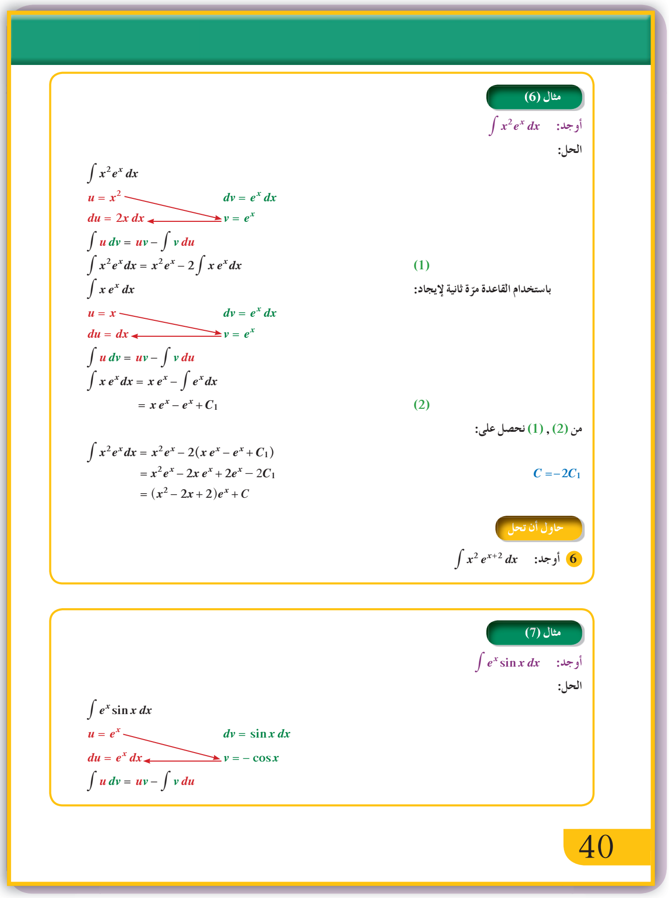
$$= (x-3)e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

(b) $u = 4x \qquad dv = e^{-5x}\, dx$

$du = 4dx \qquad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$

$$\int 4x\, e^{-5x} dx = -\frac{4}{5}x\, e^{-5x} + \frac{4}{5}\int e^{-5x} dx$$

$$= -\frac{4}{5}x\, e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$$



مثال (6)

أوجد: $\int x^2 e^x\, dx$

الحل:

$\int x^2 e^x\, dx$

$u = x^2 \qquad dv = e^x\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = e^x$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x\, e^x dx \qquad (1)$

باستخدام القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int x\, e^x\, dx$

$u = x \qquad dv = e^x\, dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx$

$= x\, e^x - e^x + C_1 \qquad (2)$

من (2) , (1) نحصل على:

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x\, e^x - e^x + C_1)$

$= x^2 e^x - 2x\, e^x + 2e^x - 2C_1$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

$C = -2C_1$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int x^2\, e^{x+2}\, dx$

مثال (7)

أوجد: $\int e^x \sin x\, dx$

الحل:

$\int e^x \sin x\, dx$

$u = e^x \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = e^x\, dx \qquad v = -\cos x$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

40

3
$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{x} \qquad v = x$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

4
$u = \ln(x+1) \qquad dv = (x+1)dx$

$du = \dfrac{1}{x+1}dx \qquad v = \dfrac{x^2}{2} + x$

$$\int (x+1)\ln(x+1)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2x}{x+1}dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

حل آخر:

$u = \ln(x+1) \qquad dv = (x+1)dx$

$du = \dfrac{1}{x+1}dx \qquad v = \dfrac{1}{2}(x+1)^2$

$$\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}(x+1)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + C$$

5
$u = x^2 \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء مرة ثانية:

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

6
$u = x^2 \qquad dv = e^{x+2}\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = e^{x+2}$

$$\int x^2 e^{x+2} dx = x^2 e^{x+2} - 2\int x\, e^{x+2}\, dx$$

تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء مرة ثانية:

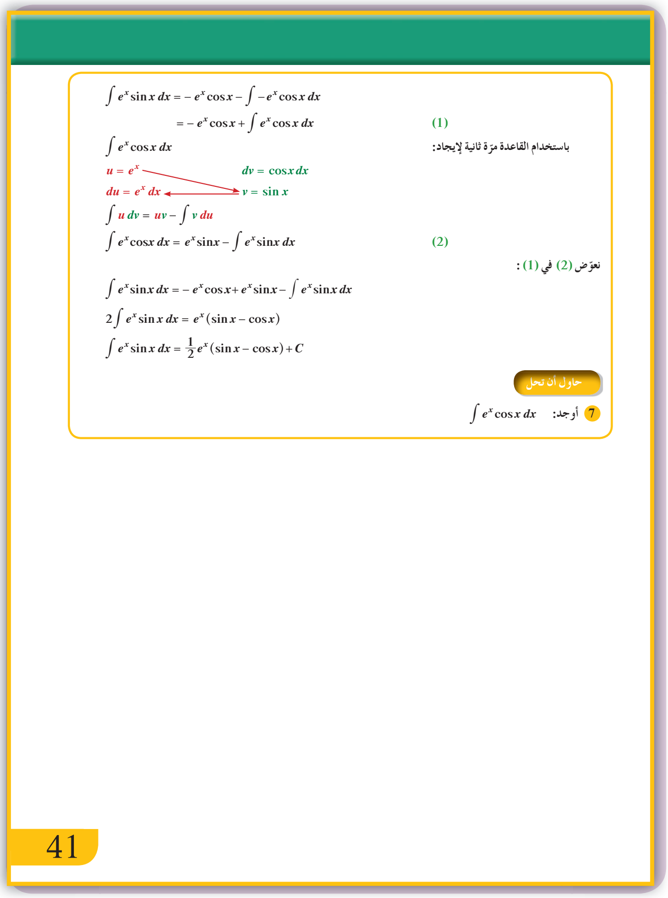
$$\int x^2 e^{x+2} dx = x^2 e^{x+2} - 2x\, e^{x+2} + 2\, e^{x+2} + C$$

$$= (x^2 - 2x + 2)\, e^{x+2} + C$$

7
$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = e^x\, dx \qquad v = \sin x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$



$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x\cos x - \int -e^x\cos x\, dx$$

$$= -e^x\cos x + \int e^x \cos x\, dx \qquad (1)$$

باستخدام القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int e^x \cos x\, dx$

$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = e^x\, dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \qquad (2)$$

نعوّض (2) في (1) :

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

حاول أن تحل

7 أوجد: $\int e^x \cos x\, dx$

41

تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء مرة ثانية:

$u = e^x \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = e^x\, dx \qquad v = -\cos x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(-e^x\cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$$

5–6: التكامل باستخدام الكسور الجزئية

1 الأهداف

- يكتب حدودية نسبية على صورة كسور جزئية.
- يستخدم الكسور الجزئية لإيجاد تكامل حدودية نسبية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

كسور جزئية – تفكيك – عامل خطي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) اكتب كل تعبير مما يلي على صورة كسر واحد:

(a) $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x+1}$

(b) $\dfrac{3x}{x^2-1} - \dfrac{4x+1}{x}$

(c) $\dfrac{2x}{(x-2)^2} + \dfrac{5x+2}{x^2+1}$

(2) احسب التكاملات التالية:

(a) $\displaystyle\int \frac{3dx}{x+2}$

(b) $\displaystyle\int \frac{2dx}{3x-5}$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4-5x)^2}$

5–6

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

سوف تتعلم

- مقدمة عن الكسور الجزئية.
- مقامات لها عوامل خطية.

المفردات والمصطلحات:

- كسور جزئية Partial Fractions
- تفكيك Expand
- عامل خطي Linear Factor

دعنا نفكر ونتناقش

a لتكن الدالة f: $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{2}{x+2}$

اكتب $f(x)$ على الصورة: $f(x) = \dfrac{r(x)}{h(x)}$

حيث $h(x)$ هو المقام المشترك.

b لتكن الدالة g: $g(x) = \dfrac{x^2+8x-4}{x(x^2-4)}$

نأخذ: $\dfrac{x^2+8x-4}{x(x-2)(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+2}$

1. اضرب طرفي المعادلة في x ثم بسّط وعوّض عن x بالصفر. استنتج قيمة A.
2. اضرب طرفي المعادلة في $x-2$ ثم بسّط وعوّض عن x بـ 2. استنتج قيمة B.
3. اضرب طرفي المعادلة في $x+2$ ثم بسّط وعوّض عن x بـ -2. استنتج قيمة C.

c ما العلاقة بين $f(x)$ و $g(x)$؟

درسنا في ما سبق أن أي كثيرة حدود عواملها حقيقية قد يمكننا تحليلها إلى عوامل خطية (من الدرجة الأولى) وعوامل من الدرجة الثانية (تربيعية) ليس لها أصفار حقيقية (ليس لها جذور حقيقية).

يمكننا استخدام ذلك في إيجاد تكامل لحدوديات نسبية وسوف تقتصر دراستنا على تكامل الحدوديات النسبية التي يمكن تحليل المقام فيها إلى عوامل خطيّة.

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

لتكن $f(x) = \dfrac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:

$$h(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_kx+b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي:

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

42

مثال (1)

لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-2x-15}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

الحل:

a حلّل المقام: $x^2-2x-15 = (x+3)(x-5)$

$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-5}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x+3)(x-5)$ وبسّط: $5x-1 = A_1(x-5) + A_2(x+3)$

عوّض عن x بـ 5: $5(5)-1 = A_1(5-5) + A_2(5+3)$

$\therefore\ A_2 = 3$

عوّض عن x بـ (-3): $5(-3)-1 = A_1(-3-5) + A_2(-3+3)$

$\therefore\ A_1 = 2$

عوّض عن A_2 و A_1 بقيمتيهما: $\dfrac{5x-1}{x^2-2x-15} = \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{3}{x-5}$

للتحقق يمكن جمع كسري الطرف الأيمن بإيجاد مقام مشترك وبالمقارنة مع الطرف الأيسر.

b

$$\int f(x)dx = \int \frac{5x-1}{x^2-2x-15}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-5}\right)dx$$

$$= \int \frac{2}{x+3}\,dx + \int \frac{3}{x-5}\,dx \qquad \int (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x+3}\,dx + 3\int \frac{1}{x-5}\,dx \qquad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$= 2\ln|x+3| + 3\ln|x-5| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

حاول أن تحل

1. لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

43

5 التدريس

رأينا سابقًا أنه ليس في جميع الأحوال يمكن إجراء التكامل عندما تكون دالة التكامل هي ضرب عدة دوال أو قسمة لدالتين.

وهنا تكمن أهمية هذا الدرس فهو يفتح أمام الطلاب أفقًا واسعة لإيجاد تكامل دوال تتضمن حدوديات نسبية وذلك بتجزئتها إلى كسور بسيطة كما في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، ثم إيجاد تكاملها استنادًا إلى ما سبق وتعلموه.

أكّد للطلاب على أن دراستنا سوف تقتصر على بعض الحالات كما توضح الأمثلة.

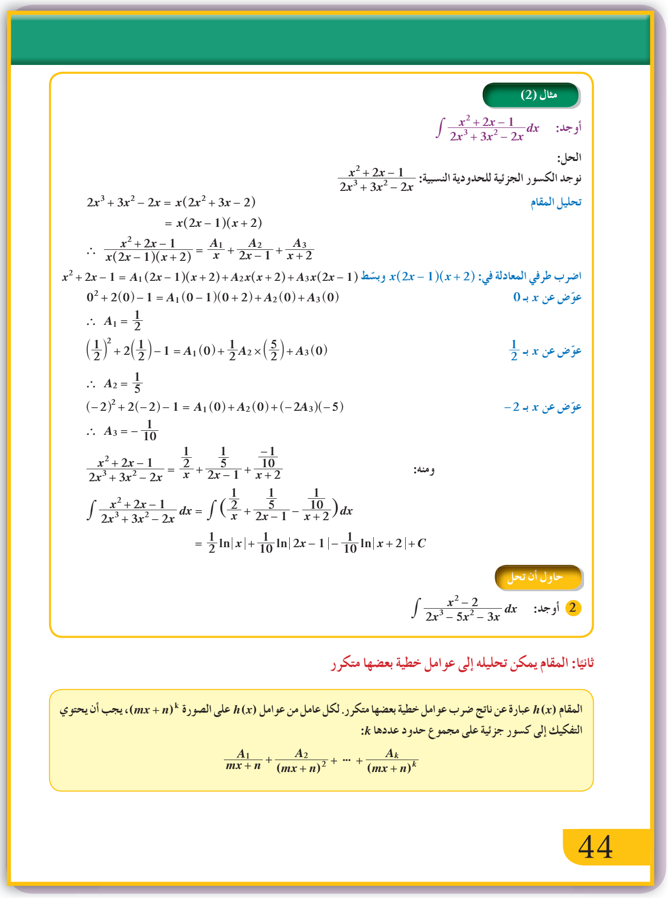
في المثالين (1), (2)

ركّز انتباه الطلاب أنه يجب أولًا تحليل المقام إلى عوامل خطية مختلفة، وبالتالي كل مقام هو عامل خطي. نأخذ كسرًا يتكون من هذا المقام على أن يكون بسطه قيمة ثابتة. ولإيجاد كل قيمة ثابتة في البسط نعوض x بأصفار العوامل الخطية، ثم نستخدم الكسور البسيطة التي حصلنا عليها لإيجاد تكامل الدالة وذلك باستخدام القاعدة:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

في المثالين (3), (4)

لاحظ إنه بالإمكان تعميم التجزئة على الكسور شرط أن تبقى درجة البسط أصغر من درجة المقام، ويمكن تحليل المقام إلى عوامل خطية، وبالتالي كل مقام من العوامل الخطية يكون مقام لكسر بسطه قيمة ثابتة. والفارق في هذين المثالين أن المقام يحتوي على عوامل خطية بعضها متكرر، لذا يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها K إذا كان العامل الخطي المتكرر له أس يساوي K، ثم نستخدم قواعد التكامل التي تعلمناها.



مثال (2)

أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للحدودية النسبية: $\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$

تحليل المقام

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(2x-1)(x+2)$$

$$\therefore \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{2x-1} + \frac{A_3}{x+2}$$

اضرب طرفي المعادلة في: $x(2x-1)(x+2)$ وبسّط

$$x^2+2x-1 = A_1(2x-1)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(2x-1)$$

عوّض عن x بـ 0

$$0^2+2(0)-1 = A_1(0-1)(0+2)+A_2(0)+A_3(0)$$

$$\therefore A_1 = \frac{1}{2}$$

عوّض عن x بـ $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)-1 = A_1(0)+\frac{1}{2}A_2\times\left(\frac{5}{2}\right)+A_3(0)$$

$$\therefore A_2 = \frac{1}{5}$$

عوّض عن x بـ -2

$$(-2)^2+2(-2)-1 = A_1(0)+A_2(0)+(-2A_3)(-5)$$

$$\therefore A_3 = -\frac{1}{10}$$

ومنه:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} + \frac{\frac{-1}{10}}{x+2}$$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} - \frac{\frac{1}{10}}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

حاول أن تحل

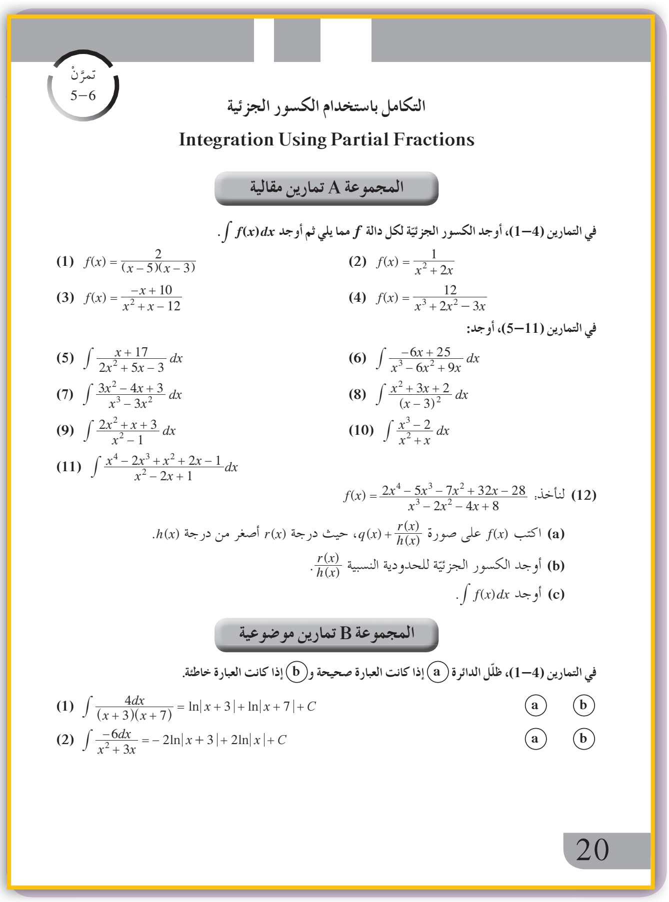
2 أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}dx$

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k:

$$\frac{A_1}{mx+n} + \frac{A_2}{(mx+n)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

44



تمرَّنْ 5-6

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—4)، أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)dx$.

(1) $f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$

(3) $f(x) = \frac{-x+10}{x^2+x-12}$

(4) $f(x) = \frac{12}{x^3+2x^2-3x}$

في التمارين (5—11)، أوجد:

(5) $\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}dx$

(6) $\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}dx$

(7) $\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}dx$

(8) $\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx$

(9) $\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx$

(10) $\int \frac{x^3-2}{x^2+x}dx$

(11) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}dx$

(12) لنأخذ: $f(x) = \frac{2x^4-5x^3-7x^2+32x-28}{x^3-2x^2-4x+8}$

(a) اكتب $f(x)$ على صورة $q(x)+\frac{r(x)}{h(x)}$، حيث درجة $r(x)$ أصغر من درجة $h(x)$.

(b) أوجد الكسور الجزئيّة للحدودية النسبية $\frac{r(x)}{h(x)}$.

(c) أوجد $\int f(x)dx$.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) (b)

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a) (b)

20

في الأمثلة (7) ,(6) ,(5)

أرشد الطلاب إلى حالة مهمة وهي عندما تكون درجة بسط الحدودية النسبية أكبر أو تساوي درجة مقامها، عند ذلك نبدأ أولًا بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة، فنحصل على الشكل التالي:

$$f(x) = q(x) + \frac{P(x)}{h(x)}$$

حيث $\deg p(x) < \deg h(x)$

وبالتالي تطبق الكسور الجزئية على $\frac{P(x)}{h(x)}$

مثال ذلك: $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{x^2 + 5x + 4}$

باستخدام القسمة المطولة نجد:

$$f(x) = x - 3 + \frac{11x + 7}{(x + 1)(x + 4)}$$

ونكتب:

$$f(x) = x - 3 + \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 4}$$

نوجد:

$$A = -\frac{4}{3} \ , \ B = \frac{37}{3}$$

فتصبح:

$$f(x) = x - 3 - \frac{4}{3(x + 1)} + \frac{37}{3(x + 4)}$$

أكد للطلاب على وجود طرق أخرى للقسمة في بعض الحالات.

6 الربط

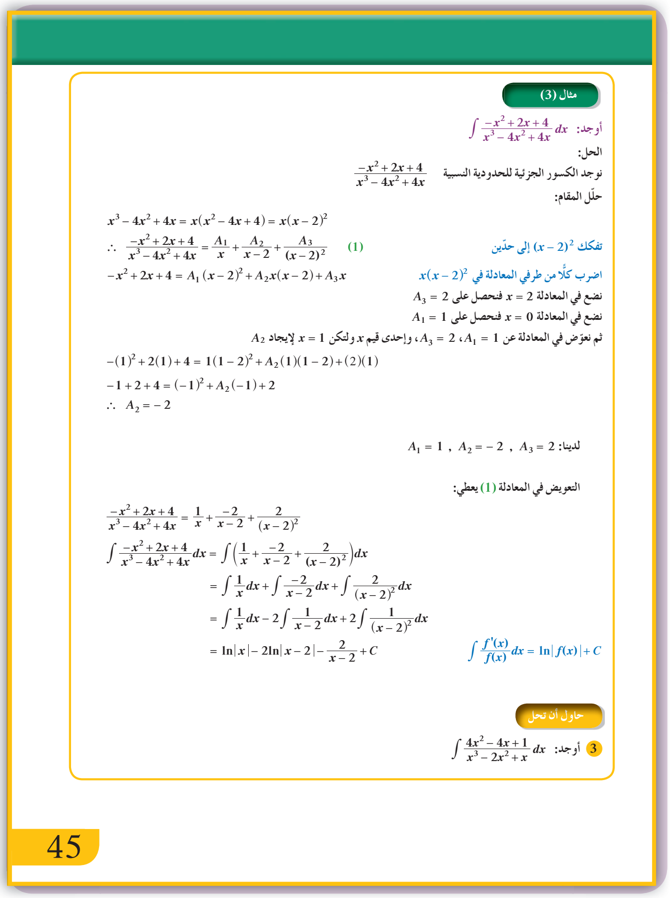
لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تجزئة الكسور، أكّد لهم أن درجة البسط يجب أن تكون دائمًا أصغر من درجة المقام وأن كل مقام هو عامل خطي يجب أن يكون بسطه قيمة ثابتة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من تمكنهم من تجزئة الكسور إلى كسور جزئية.



مثال (3)

أوجد: $\int \frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للحدودية النسبية $\frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

حلّل المقام:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$$

تفكك $(x-2)^2$ إلى حدّين

$$\therefore \ \frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{(x - 2)^2} \quad (1)$$

اضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $x(x-2)^2$

$$-x^2 + 2x + 4 = A_1(x - 2)^2 + A_2 x(x - 2) + A_3 x$$

نضع في المعادلة $x = 2$ فنحصل على $A_3 = 2$

نضع في المعادلة $x = 0$ فنحصل على $A_1 = 1$

ثم نعوّض في المعادلة عن $A_1 = 1$، $A_3 = 2$، وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد A_2

$$-(1)^2 + 2(1) + 4 = 1(1 - 2)^2 + A_2(1)(1 - 2) + (2)(1)$$

$$-1 + 2 + 4 = (-1)^2 + A_2(-1) + 2$$

$$\therefore \ A_2 = -2$$

لدينا: $A_1 = 1 \ , \ A_2 = -2 \ , \ A_3 = 2$

التعويض في المعادلة (1) يعطي:

$$\frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2}$$

$$\int \frac{-x^2 + 2x + 4}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-2}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-2}{x - 2} dx + \int \frac{2}{(x - 2)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx - 2\int \frac{1}{x - 2} dx + 2\int \frac{1}{(x - 2)^2} dx$$

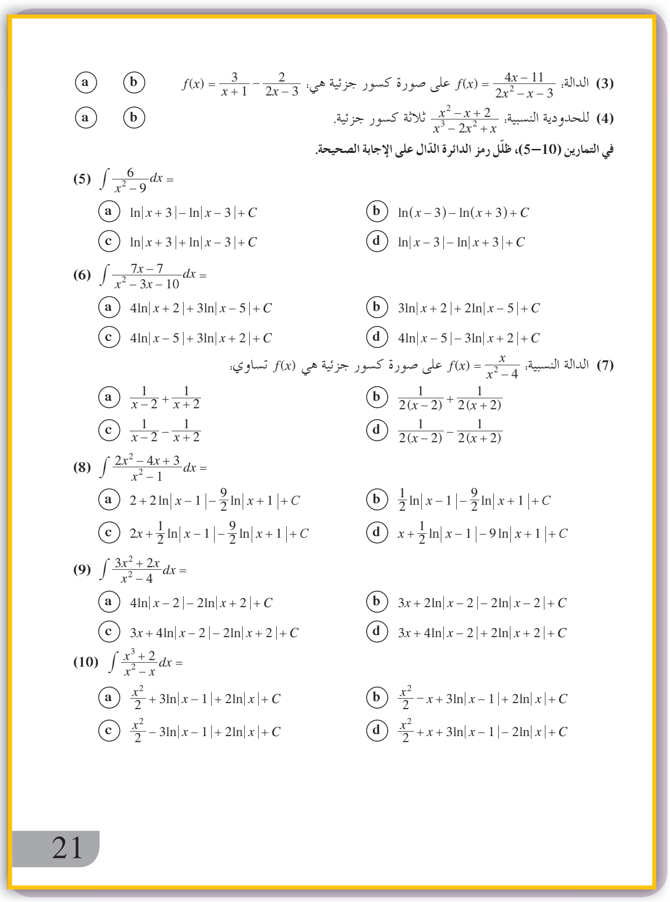
$$= \ln|x| - 2\ln|x - 2| - \frac{2}{x - 2} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

45



(3) الدالة: $f(x) = \frac{4x - 11}{2x^2 - x - 3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x) = \frac{3}{x + 1} - \frac{2}{2x - 3}$ (a) (b)

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$ ثلاثة كسور جزئية. (a) (b)

في التمارين (10—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2 - 9} dx =$

(a) $\ln|x + 3| - \ln|x - 3| + C$
(b) $\ln(x - 3) - \ln(x + 3) + C$
(c) $\ln|x + 3| + \ln|x - 3| + C$
(d) $\ln|x - 3| - \ln|x + 3| + C$

(6) $\int \frac{7x - 7}{x^2 - 3x - 10} dx =$

(a) $4\ln|x + 2| + 3\ln|x - 5| + C$
(b) $3\ln|x + 2| + 2\ln|x - 5| + C$
(c) $4\ln|x - 5| + 3\ln|x + 2| + C$
(d) $4\ln|x - 5| - 3\ln|x + 2| + C$

(7) الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}$
(b) $\frac{1}{2(x - 2)} + \frac{1}{2(x + 2)}$
(c) $\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}$
(d) $\frac{1}{2(x - 2)} - \frac{1}{2(x + 2)}$

(8) $\int \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} dx =$

(a) $2 + 2\ln|x - 1| - \frac{9}{2}\ln|x + 1| + C$
(b) $\frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{9}{2}\ln|x + 1| + C$
(c) $2x + \frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{9}{2}\ln|x + 1| + C$
(d) $x + \frac{1}{2}\ln|x - 1| - 9\ln|x + 1| + C$

(9) $\int \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 4} dx =$

(a) $4\ln|x - 2| - 2\ln|x + 2| + C$
(b) $3x + 2\ln|x - 2| - 2\ln|x - 2| + C$
(c) $3x + 4\ln|x - 2| - 2\ln|x + 2| + C$
(d) $3x + 4\ln|x - 2| + 2\ln|x + 2| + C$

(10) $\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx =$

(a) $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x - 1| + 2\ln|x| + C$
(b) $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x - 1| + 2\ln|x| + C$
(c) $\frac{x^2}{2} - 3\ln|x - 1| + 2\ln|x| + C$
(d) $\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x - 1| - 2\ln|x| + C$

21

اختبار سريع

اكتب الكسور التالية على صورة كسور جزئية، ثم أوجد التكامل غير المحدد:

(a) $\dfrac{2x-3}{x^2+5x+4}$

$$\frac{2x-3}{x^2+5x+4}=\frac{2x-3}{(x+1)(x+4)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+4}$$

$$=\frac{-\frac{5}{3}}{x+1}+\frac{\frac{11}{3}}{x+4}$$

$$\int\frac{2x-3}{x^2+5x+4}dx=-\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{11}{3}\int\frac{dx}{x+4}$$

$$=-\frac{5}{3}\ln|x+1|+\frac{11}{3}\ln|x+4|+C$$

(b) $\dfrac{x^2-5}{(x-1)(x+1)^2}$

$$\frac{x^2-5}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{x+1}$$

$$=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}$$

$$\int\frac{x^2-5}{(x-1)(x+1)^2}dx$$

$$=-\ln|x-1|-\frac{2}{x+1}+2\ln|x+1|+C$$

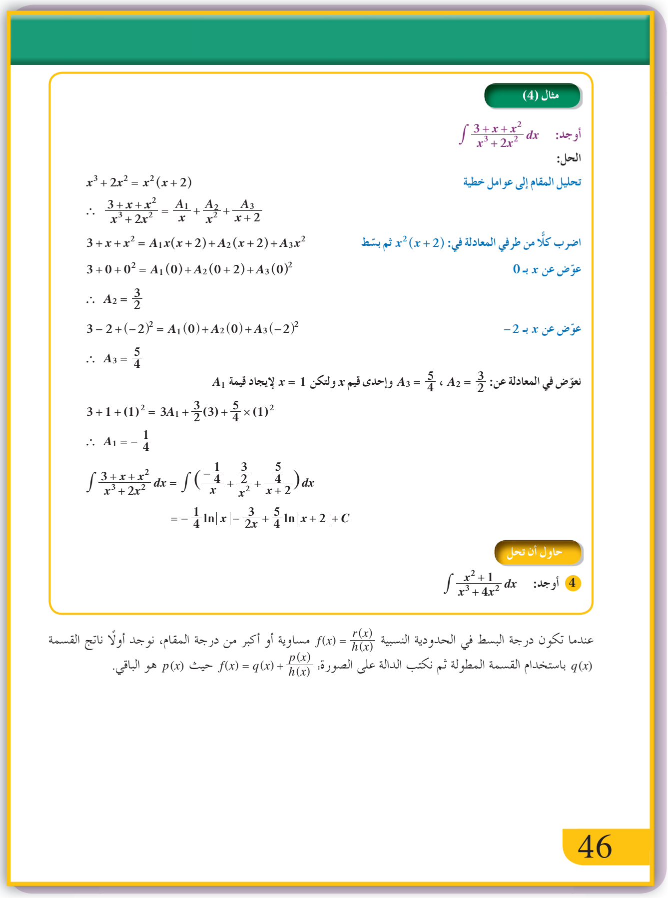
(c) $\displaystyle\int\frac{x^3-4x^2+6}{x^2-5x+4}dx$

$$\frac{x^3-4x^2+6}{x^2-5x+4}=x+1+\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-4}$$

$$\int\frac{x^3-4x^2+6}{x^2-5x+4}dx$$

$$=\int x\,dx+\int dx-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-4}$$

$$=\frac{x^2}{2}+x-\ln|x-1|+2\ln|x-4|+C$$



مثال (4)

أوجد: $\displaystyle\int\frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$

الحل:

تحليل المقام إلى عوامل خطية $\quad x^3+2x^2=x^2(x+2)$

$$\therefore\ \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x+2}$$

اضرب كلًّا من طرفي المعادلة في: $x^2(x+2)$ ثم بسّط $\quad 3+x+x^2=A_1x(x+2)+A_2(x+2)+A_3x^2$

عوّض عن x بـ 0 $\quad 3+0+0^2=A_1(0)+A_2(0+2)+A_3(0)^2$

$$\therefore\ A_2=\frac{3}{2}$$

عوّض عن x بـ -2 $\quad 3-2+(-2)^2=A_1(0)+A_2(0)+A_3(-2)^2$

$$\therefore\ A_3=\frac{5}{4}$$

نعوّض في المعادلة عن: $A_2=\frac{3}{2}$ ، $A_3=\frac{5}{4}$ وإحدى قيم x ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_1

$$3+1+(1)^2=3A_1+\frac{3}{2}(3)+\frac{5}{4}\times(1)^2$$

$$\therefore\ A_1=-\frac{1}{4}$$

$$\int\frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2}+\frac{\frac{5}{4}}{x+2}\right)dx$$

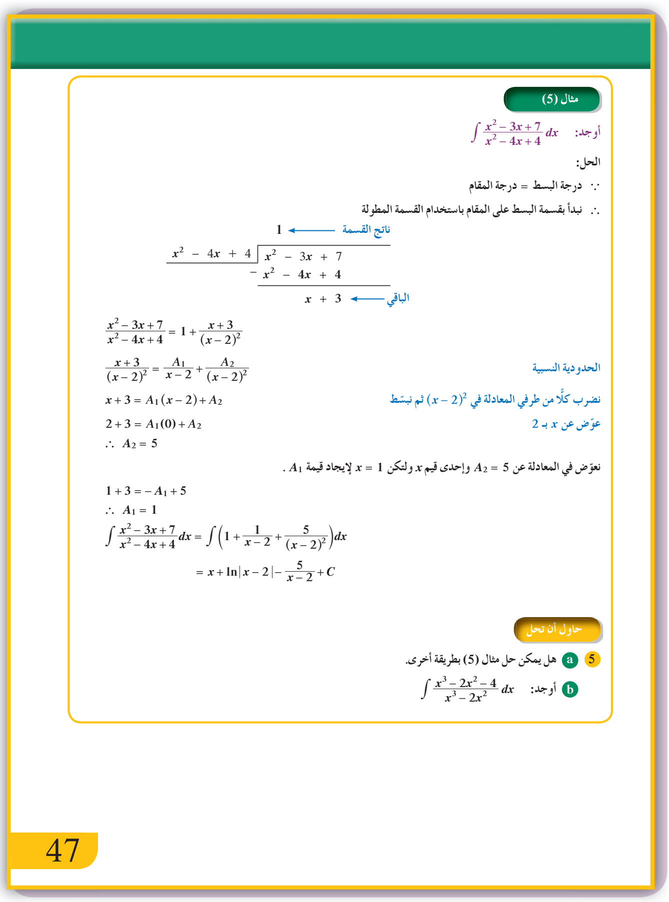
$$=-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{3}{2x}+\frac{5}{4}\ln|x+2|+C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^3+4x^2}dx$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x)=\frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x)=q(x)+\frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

46



مثال (5)

أوجد: $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx$

الحل:

∵ درجة البسط = درجة المقام

∴ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة: 1

$$\begin{array}{r|l} & x^2-3x+7 \\ x^2-4x+4 & -(x^2-4x+4) \\ \hline & x+3 \end{array}$$

الباقي: $x+3$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}=1+\frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية $\quad \dfrac{x+3}{(x-2)^2}=\dfrac{A_1}{x-2}+\dfrac{A_2}{(x-2)^2}$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط $\quad x+3=A_1(x-2)+A_2$

عوّض عن x بـ 2 $\quad 2+3=A_1(0)+A_2$

$$\therefore\ A_2=5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2=5$ وإحدى قيم x ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1+3=-A_1+5$$

$$\therefore\ A_1=1$$

$$\int\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx=\int\left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$=x+\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$$

حاول أن تحل

5 a هل يمكن حل مثال (5) بطريقة أخرى.

b أوجد: $\displaystyle\int\frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}dx$

47

إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) – (c) تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 (a) $$\frac{2x-1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{5}{2}}{x-3}$$

(b) $$\int\frac{2x-1}{x^2-4x+3}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$$

2 $$\int\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{2x+1}+\frac{A_3}{x-3}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x}-\frac{1}{2x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-3|+C$$

3 $$g(x)=\frac{4x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}$$

$$\int g(x)dx=\ln|x|-\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+C$$

4 $$\int\frac{x^2+1}{x^2(x+4)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x+4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x}+\frac{17}{16}\int\frac{dx}{x+4}$$

$$=-\frac{1}{4x}-\frac{1}{16}\ln|x|+\frac{17}{16}\ln|x+4|+C$$

5 (a) $$\int\frac{x^2-3x-x+x+4+3}{(x-2)^2}dx$$

$$=\int\frac{x^2-4x+4+x+3}{(x-2)^2}dx$$

$$=\int\frac{(x-2)^2+x+3}{(x-2)^2}dx=\int\left(1+\frac{x-2+5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$=\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{2(x-2)}{x^2-4x+4}dx+5\int\frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$=x+\frac{1}{2}\ln|(x-2)^2|-\frac{5}{x-2}+C$$

$$=x+\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$$

مثال (6)

أوجد: $\int\frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط 3 ودرجة المقام 2

$\therefore$ يجب استخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \quad \leftarrow \text{ناتج القسمة} \\ \hline x^2-6x+8 & 2x^3-9x^2+25 \\ & -(2x^3-12x^2+16x) \\ \hline & 3x^2-16x+25 \\ & -(3x^2-18x+24) \\ \hline & 2x+1 \quad \leftarrow \text{الباقي} \end{array}$$

ومنه نكتب: $$\frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}=2x+3+\frac{2x+1}{x^2-6x+8}$$

$$=2x+3+\frac{2x+1}{(x-2)(x-4)}$$

نأخذ الحدودية النسبية $\frac{2x+1}{(x-2)(x-4)}$

ونكتبها على الصورة: $\frac{2x+1}{(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}$

نضرب طرفي المعادلة في $(x-2)(x-4)$ ثم نعوّض على الترتيب $x=2$ و $x=4$

نحصل على $A=-\frac{5}{2}$ ، $B=\frac{9}{2}$

$$\frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}=2x+3+\frac{-\frac{5}{2}}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-4}$$

ومنه تكون:

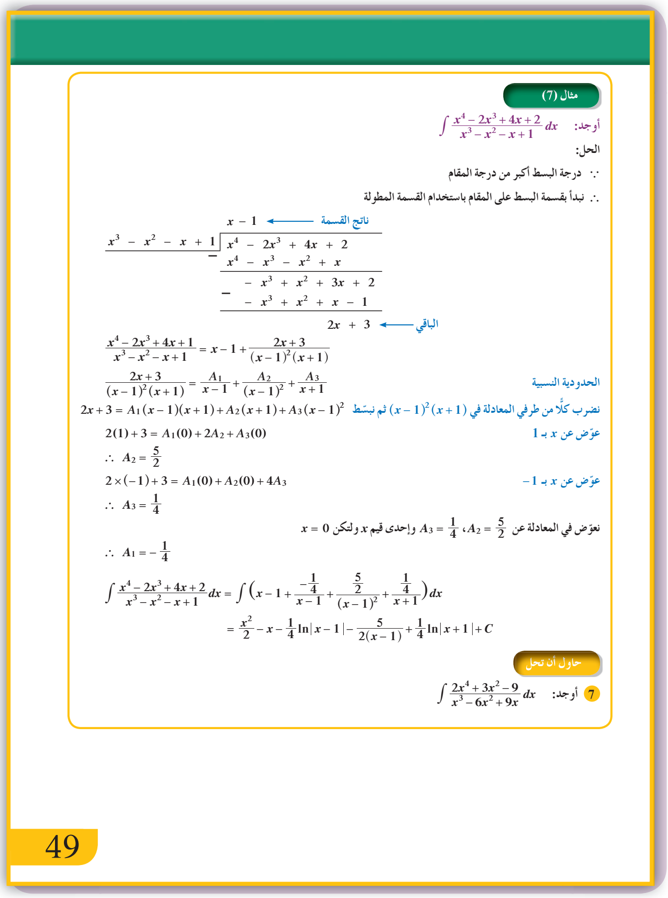
$$\therefore\int\frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}dx=2\int xdx+3\int dx-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-4}$$

$$=x^2+3x-\frac{5}{2}\ln|x-2|+\frac{9}{2}\ln|x-4|+C$$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int\frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}dx$

48



مثال (7)

أوجد: $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط أكبر من درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \quad \leftarrow \text{ناتج القسمة} \\ \hline x^3 - x^2 - x + 1 & x^4 - 2x^3 + 4x + 2 \\ - & x^4 - x^3 - x^2 + x \\ \hline & -x^3 + x^2 + 3x + 2 \\ - & -x^3 + x^2 + x - 1 \\ \hline & 2x + 3 \quad \leftarrow \text{الباقي} \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x - 1 + \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}$$

الحدودية النسبية $\quad \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1}$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x+1)(x-1)^2$ ثم نبسّط $\quad 2x + 3 = A_1(x-1)(x+1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2$

عوّض عن x بـ 1 $\quad 2(1) + 3 = A_1(0) + 2A_2 + A_3(0)$

$\therefore\ A_2 = \frac{5}{2}$

عوّض عن x بـ -1 $\quad 2 \times (-1) + 3 = A_1(0) + A_2(0) + 4A_3$

$\therefore\ A_3 = \frac{1}{4}$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = \frac{5}{2}$ ، $A_3 = \frac{1}{4}$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 0$

$\therefore\ A_1 = -\frac{1}{4}$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C$$

حاول أن تحل

7 أوجد: $\int \frac{2x^4 + 3x^2 - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,dx$

49

(b) $\int \left(1 - \frac{4}{x^2(x-2)}\right)dx$

$$= \int \left(1 - \left(\frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-2}\right)\right)dx$$

$$= \int \left(1 - \left(\frac{-2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\right)\right)dx$$

$$= x - \frac{2}{x} + \ln|x| - \ln|x-2| + C$$

6 $\int \left(x + 3 + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2}\right)dx$

$$= \int \left(x + 3 - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x-2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - 3\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

7 $\int \left(2x + 12 + \frac{57x^2 - 108x - 9}{x(x-3)^2}\right)dx$

$$= \int \left(2x + 12 + \frac{-1}{x} + \frac{60}{(x-3)^2} + \frac{58}{x-3}\right)dx$$

$$= x^2 + 12x - \ln|x| - \frac{60}{(x-3)} + 58\ln|x-3| + C$$

5–7: التكامل المحدد

1 الأهداف

- يربط بين التكامل المحدد والمساحة.
- يتعرف خواص التكامل المحدد ويطبقها.
- يستخدم طرائق التكامل غير المحدد في التكامل المحدد.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

تكامل محدد.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد مساحة:

(a) مثلث قاعدته 6 cm ، وارتفاعه 9 cm.

(b) مستطيل طوله 12 cm ، وعرضه 7 cm.

(c) دائرة طول قطرها 14 cm.

(2) أوجد التكامل:

(a) $\int (x^3 - 2x^2 + 5)dx$

(b) $\int \cos 5x \, dx$

(c) $\int \dfrac{(x-1)\,dx}{x^2 - 2x + 4}$

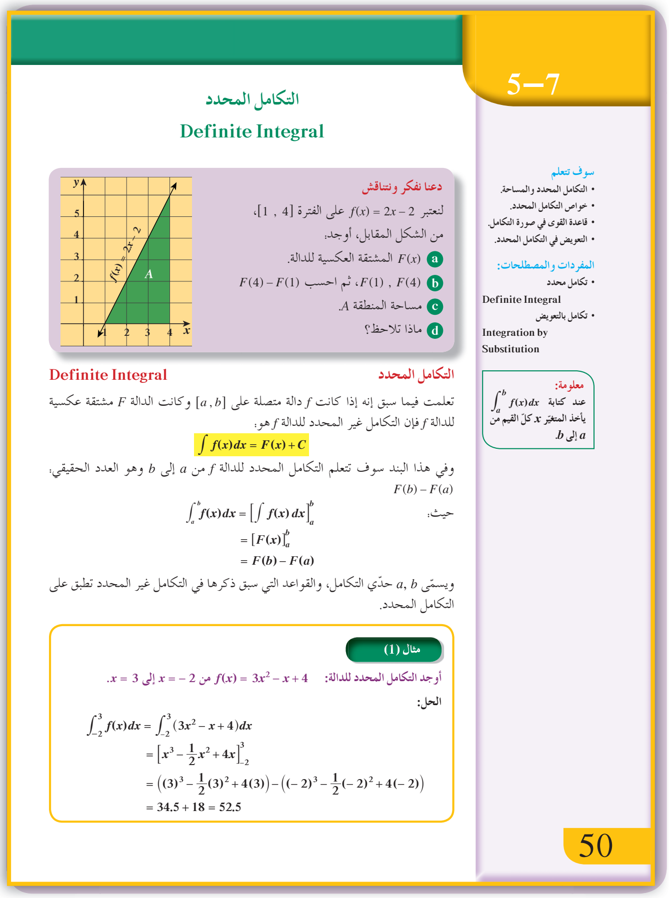
(d) $\int (x+2)e^{x^2+4x+7}\, dx$

(3) حدد الفترات التي تكون فيها $f(x) \geq 0$ ؛ والفترات التي تكون فيها $f(x) \leq 0$ في كلّ ممّا يلي:

(a) $f(x) = x^2 - x - 20$

(b) $f(x) = x^2 + 4$

(c) $f(x) = 25 - x^2$



5–7

التكامل المحدد

Definite Integral

سوف تتعلم
- التكامل المحدد والمساحة.
- خواص التكامل المحدد.
- قاعدة القوى في صورة التكامل.
- التعويض في التكامل المحدد.

المفردات والمصطلحات:
- تكامل محدد Definite Integral
- تكامل بالتعويض Integration by Substitution

معلومة: عند كتابة $\int_a^b f(x)dx$ يأخذ المتغيّر x كلّ القيم من a إلى b.

دعنا نفكر ونتناقش

لنعتبر $f(x) = 2x - 2$ على الفترة $[1 , 4]$، من الشكل المقابل، أوجد:

a $F(x)$ المشتقة العكسية للدالة.

b $F(1)$, $F(4)$، ثم احسب $F(4) - F(1)$

c مساحة المنطقة A.

d ماذا تلاحظ؟

التكامل المحدد Definite Integral

تعلمت فيما سبق إنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a , b]$ وكانت الدالة F مشتقة عكسية للدالة f فإن التكامل غير المحدد للدالة f هو:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة f من a إلى b وهو العدد الحقيقي: $F(b) - F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ويسمّى a, b حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

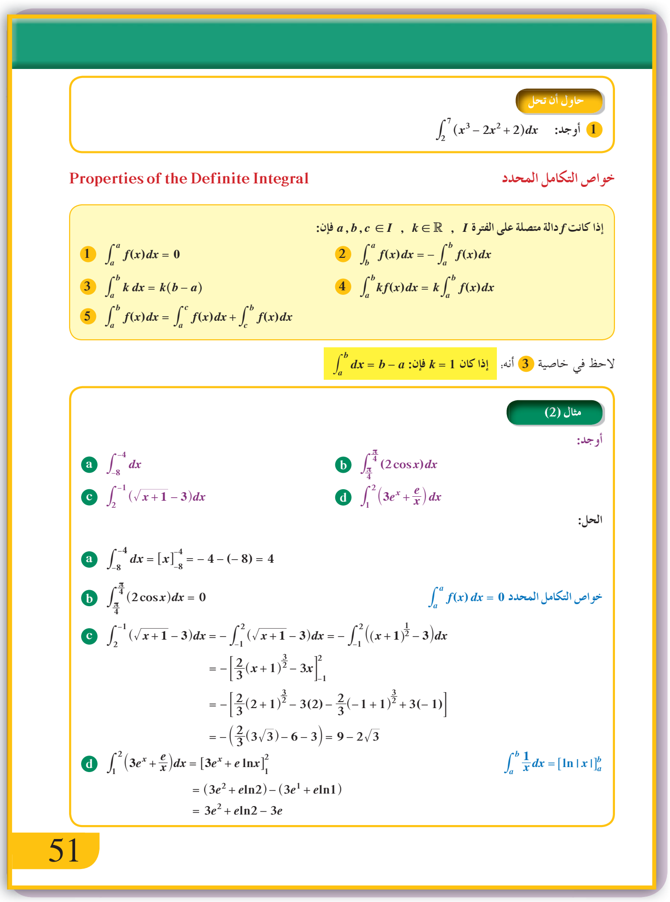
مثال (1)

أوجد التكامل المحدد للدالة: $f(x) = 3x^2 - x + 4$ من $x = -2$ إلى $x = 3$.

الحل:

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{3}(3x^2 - x + 4)dx$$
$$= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left((3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 4(3)\right) - \left((-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 4(-2)\right)$$
$$= 34.5 + 18 = 52.5$$

50



حاول أن تحل

1 أوجد: $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)dx$

خواص التكامل المحدد Properties of the Definite Integral

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a , b , c \in I$ فإن:

1 $\int_a^a f(x)dx = 0$

2 $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3 $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

4 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

مثال (2)

أوجد:

a $\int_{-8}^{-4} dx$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx$

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx$

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx$

الحل:

a $\int_{-8}^{-4} dx = [x]_{-8}^{-4} = -4 - (-8) = 4$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx = 0$ خواص التكامل المحدد $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx = -\int_{-1}^{2} (\sqrt{x+1} - 3)dx = -\int_{-1}^{2} \left((x+1)^{\frac{1}{2}} - 3\right)dx$
$$= -\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 3x\right]_{-1}^{2}$$
$$= -\left[\frac{2}{3}(2+1)^{\frac{3}{2}} - 3(2) - \frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}} + 3(-1)\right]$$
$$= -\left(\frac{2}{3}(3\sqrt{3}) - 6 - 3\right) = 9 - 2\sqrt{3}$$

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx = [3e^x + e\ln x]_1^2$ $\int_a^b \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_a^b$
$$= (3e^2 + e\ln 2) - (3e^1 + e\ln 1)$$
$$= 3e^2 + e\ln 2 - 3e$$

51

5 التدريس

ركّز انتباه الطلاب على العلاقة التي تعطي القيمة العددية للتكامل المحدد كما وردت في كتاب الطالب ص 50، $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ وهي تمثل المشتقة العكسية عند $x = b$ ناقص المشتقة العكسية عند $x = a$.

في المثال (1)

تطبيق مباشر لإيجاد التكامل المحدد باستخدام القاعدة

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

نبّه الطلاب إلى عدم وجود القيمة الثابتة عندما نحسب التكامل المحدد في فترة محددة $[a , b]$.

ناقش مع الطلاب خواص التكامل المحدد في ص (51) من كتاب الطالب. ركّز انتباههم على الخاصية (5) حيث إنها تساعد الطلاب في تجزئة التكامل المحدد ضمن شروط معينة على فترة محددة.

في المثال (2)

يساعد الطلاب على فهم كيفية استخدام بعض خواص التكامل المحدد الموجودة في الجدول.

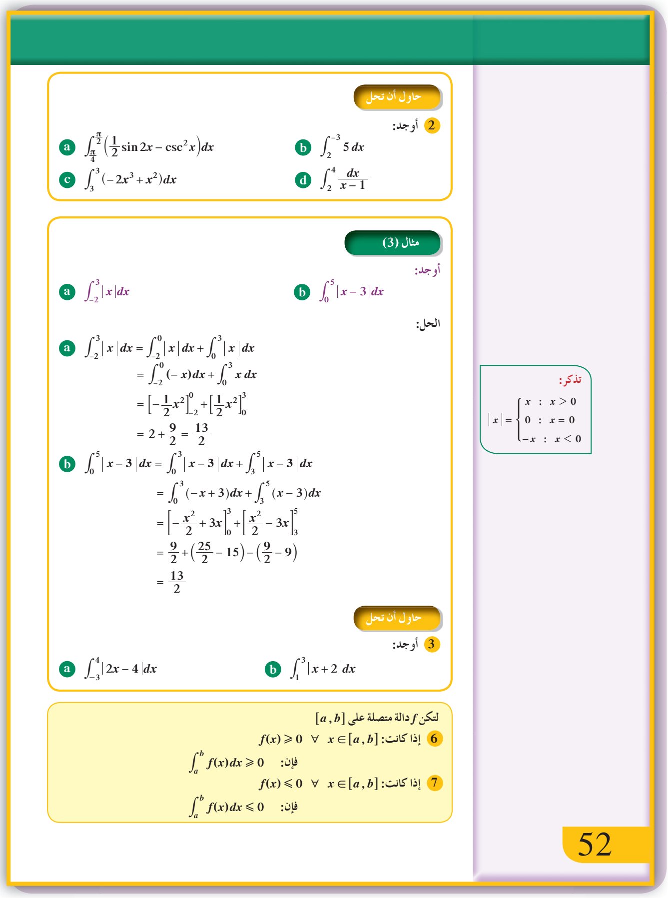
في المثال (3)

يبيّن كيفية استخدام الخاصية (5) من الجدول السابق على القيمة المطلقة للمتغير بحيث يتم تجزئة الفترة المحددة، ومن ثم إيجاد التكامل المحدد. ركّز انتباه الطلاب على إشارة $(x - 3)$، وبالتالي كيفية تجزئة الفترة $[0 , 5]$.

في المثالين (4), (5)

في هذين المثالين تطبيق مباشر لخواص التكامل المحدد.

في المثال (4)، لاحظ أن $f(x) \ge 0$ في الفترة $[3,5]$ إذًا $\int_3^5 f(x)\,dx \ge 0$. في المثال (5)، لاحظ أنه في الفترة $[1,3]$، $f(x) - g(x) \le 0$ أي أن $f(x) \le g(x)$ ومنه $\int_1^3 f(x)\,dx \le \int_1^3 g(x)\,dx$.



حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$ b $\int_2^{-3} 5\,dx$

c $\int_3^3 (-2x^3 + x^2)\,dx$ d $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$

مثال (3)

أوجد:

a $\int_{-2}^{3} |x|\,dx$ b $\int_0^5 |x-3|\,dx$

الحل:

a
$$\int_{-2}^{3}|x|\,dx = \int_{-2}^{0}|x|\,dx + \int_0^3 |x|\,dx = \int_{-2}^{0}(-x)\,dx + \int_0^3 x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

b
$$\int_0^5 |x-3|\,dx = \int_0^3 |x-3|\,dx + \int_3^5 |x-3|\,dx = \int_0^3 (-x+3)\,dx + \int_3^5 (x-3)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5 = \frac{9}{2} + \left(\frac{25}{2} - 15\right) - \left(\frac{9}{2} - 9\right) = \frac{13}{2}$$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$ b $\int_1^3 |x+2|\,dx$

تذكر:

$$|x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

لتكن f دالة متصلة على $[a , b]$

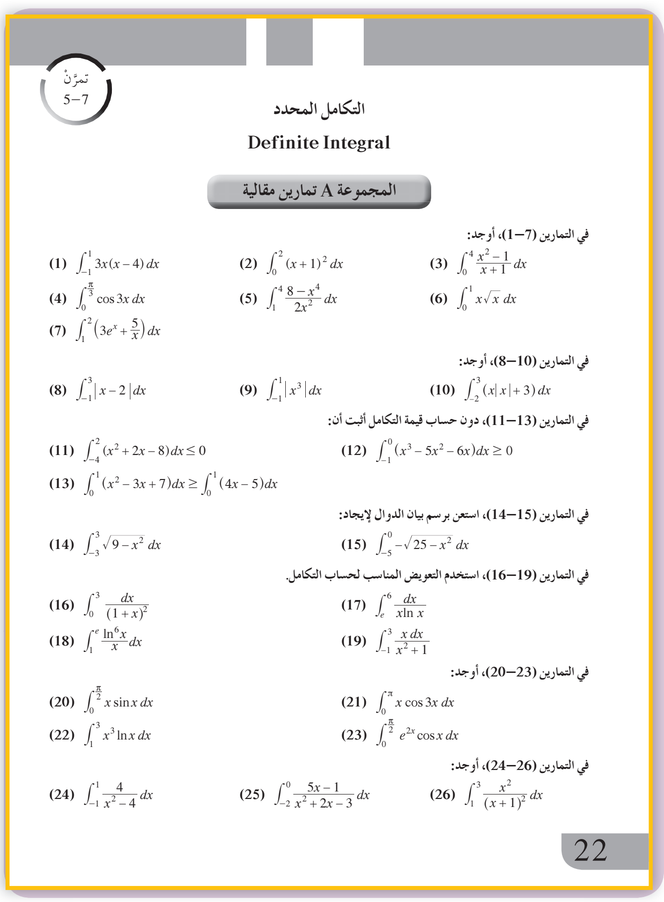
6 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a , b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a , b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$

52



تمرَّنْ 5-7

التكامل المحدد

Definite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–7)، أوجد:

(1) $\int_{-1}^{1} 3x(x-4)\,dx$ (2) $\int_0^2 (x+1)^2\,dx$ (3) $\int_0^4 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx$ (5) $\int_1^4 \frac{8-x^4}{2x^2}\,dx$ (6) $\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx$

(7) $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{5}{x}\right)dx$

في التمارين (8–10)، أوجد:

(8) $\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$ (9) $\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx$ (10) $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx$

في التمارين (11–13)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(11) $\int_{-4}^{2} (x^2+2x-8)\,dx \le 0$ (12) $\int_{-1}^{0} (x^3-5x^2-6x)\,dx \ge 0$

(13) $\int_0^1 (x^2-3x+7)\,dx \ge \int_0^1 (4x-5)\,dx$

في التمارين (14–15)، استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

(14) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$ (15) $\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\,dx$

في التمارين (16–19)، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل.

(16) $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}$ (17) $\int_e^6 \frac{dx}{x\ln x}$

(18) $\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$ (19) $\int_{-1}^{3} \frac{x\,dx}{x^2+1}$

في التمارين (20–23)، أوجد:

(20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ (21) $\int_0^{\pi} x\cos 3x\,dx$

(22) $\int_1^3 x^3 \ln x\,dx$ (23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

في التمارين (24–26)، أوجد:

(24) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx$ (25) $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx$ (26) $\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx$

22

في المثالين (7), (6)

يوضّح هذا المثالان علاقة التكامل المحدد بمساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = b$ ،$x = a$.

في المثالين (9), (8)

بيّن للطلاب في هذين المثالين أن طريقة التكامل بالتعويض ترتكز بالدرجة الأولى على مهاراتهم وخبراتهم ومكتسباتهم السابقة، ولا يوجد قاعدة أو قانون عند استخدامها، إذ يتوجب عليهم محاولة إيجاد الربط بين الدالة ومشتقتها باستخدام قواعد الاشتقاق.

نبّه الطلاب إلى أنه عند استخدام التكامل بالتعويض فإن حدود التكامل المحدد سوف تتغير أيضًا حيث إن a تصبح $g(a)$، b تصبح $g(b)$.

في المثالين (11), (10)

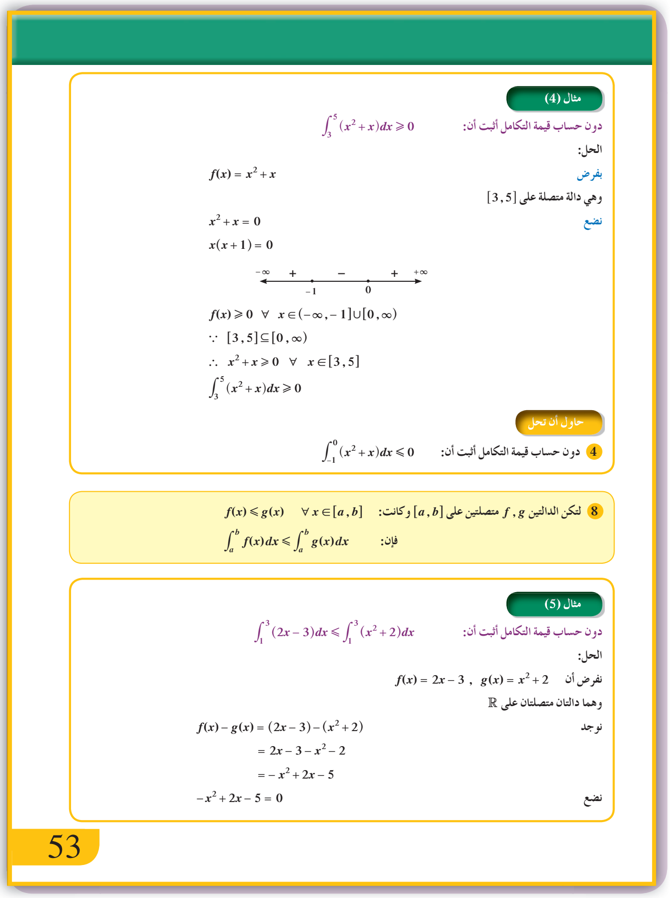
نستخدم التكامل بالتجزيء والتكامل باستخدام الكسور الجزئية، ثم نطبّق التكامل المحدد.

6 الربط

لا يوجد

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في التعويض بحدود التكامل حيث يقومون بالتعويض في الحد الأدنى أولًا ثم الحد الأعلى، وقد يخطئ الطلاب أيضًا باستخدام طريقة التكامل بالتعويض عند إيجاد قيمة التكامل المحدد فلا يقوموا بإجراء التعويض على قيم الحدود a، b. ساعدهم بأمثلة متعددة على استخدام هذه الطريقة مع التنبيه إلى تبديل قيم a، b إلى $g(a)$، $g(b)$ على الترتيب.



مثال (4)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

الحل:

بفرض $f(x) = x^2 + x$

وهي دالة متصلة على $[3,5]$

نضع $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

$\because \quad [3,5] \subseteq [0,\infty)$

$\therefore \quad x^2 + x \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [3,5]$

$\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

حاول أن تحل

4 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^0 (x^2+x)dx \leqslant 0$

8 لتكن الدالتين f, g متصلتين على $[a,b]$ وكانت: $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

مثال (5)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_1^3 (2x-3)dx \leqslant \int_1^3 (x^2+2)dx$

الحل:

نفرض أن $f(x) = 2x-3 \;,\; g(x) = x^2+2$

وهما دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$

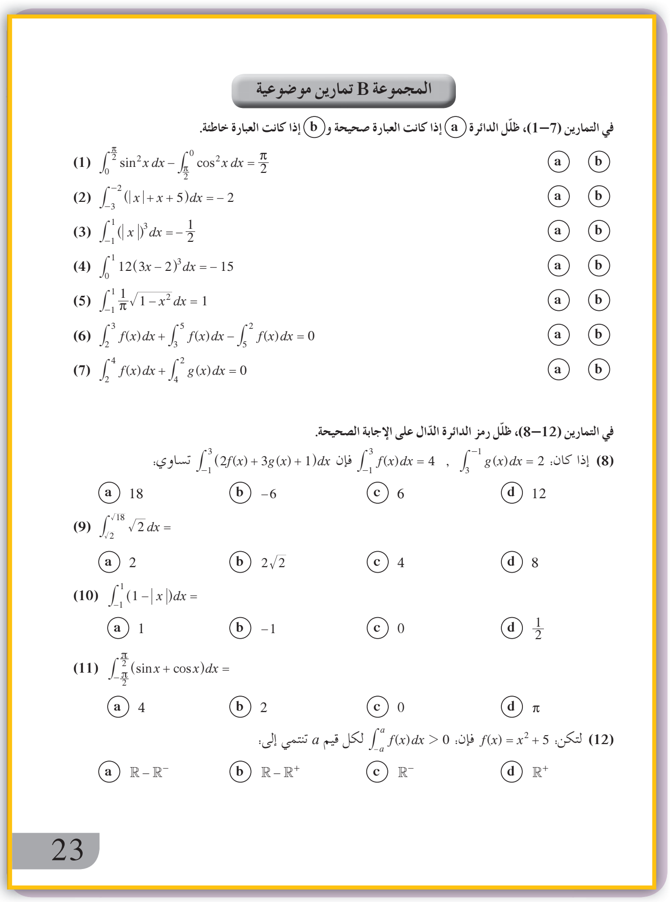
نوجد $f(x) - g(x) = (2x-3) - (x^2+2)$

$= 2x - 3 - x^2 - 2$

$= -x^2 + 2x - 5$

نضع $-x^2 + 2x - 5 = 0$

53



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$ (a) (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)dx = -2$ (a) (b)

(3) $\int_{-1}^1 (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) $\int_0^1 12(3x-2)^3 dx = -15$ (a) (b)

(5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\, dx = 1$ (a) (b)

(6) $\int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx = 0$ (a) (b)

(7) $\int_2^4 f(x)dx + \int_4^2 g(x)dx = 0$ (a) (b)

في التمارين (12—8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)dx = 2 \;,\; \int_{-1}^3 f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^3 (2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي:

(a) 18 (b) -6 (c) 6 (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\, dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

(10) $\int_{-1}^1 (1 - |x|)dx =$

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) π

(12) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}^+$

23

8 التقييم

تابع بدقة عمل الطلاب في إجراء التكامل مع فقرات «حاول أن تحل» لملاحظة الأخطاء ومساعدتهم على تجنبها.

اختبار سريع

1 أوجد: $\int_{-1}^{1}(2x+3)^2dx$

$u = 2x+3 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$x = -1 \Longrightarrow u = 1$

$x = 1 \quad \Longrightarrow u = 5$

$\int_{1}^{5}\frac{1}{2}u^2du = \frac{1}{6}[u^3]_1^5 = \frac{62}{3}$

2 احسب: $I = \int_{-1}^{3}\sqrt{-2x+7}\,dx$

$I = \int_{-1}^{3}(-2x+7)^{\frac{1}{2}}dx$

نأخذ:

$u = -2x+7 \Rightarrow du = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$

عند $x = -1$ نحصل على $u = 9$

عند $x = 3$ نحصل على $u = 1$

$\therefore \ I = \int_{9}^{1}-\frac{1}{2}(u)^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_{1}^{9}u^{\frac{1}{2}}du$

$I = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)[u^{\frac{3}{2}}]_1^9 = \frac{1}{3}[u\sqrt{u}]_1^9$

$I = \frac{26}{3}$

3 احسب: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$

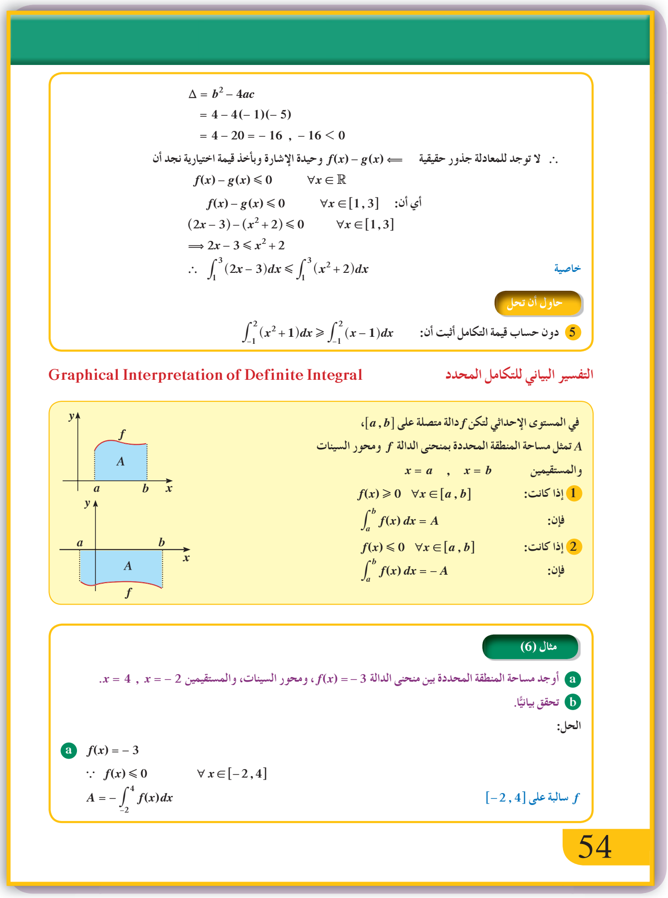
نأخذ:

$u = x \qquad dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$

$du = dx \qquad v = -\cot x$

$I = [-x\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + [\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$



$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 4 - 4(-1)(-5)$
$= 4 - 20 = -16 \ , \ -16 < 0$

$\therefore$ لا توجد للمعادلة جذور حقيقية $\Longleftarrow$ $f(x)-g(x)$ وحيدة الإشارة وبأخذ قيمة اختيارية نجد أن

$f(x)-g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

أي أن: $f(x)-g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [1,3]$

$(2x-3)-(x^2+2) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [1,3]$

$\Longrightarrow 2x-3 \leqslant x^2+2$

خاصية $\therefore \ \int_1^3(2x-3)dx \leqslant \int_1^3(x^2+2)dx$

حاول أن تحل

5 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)dx$

التفسير البياني للتكامل المحدد Graphical Interpretation of Definite Integral

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$،
A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$

1 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

2 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$

مثال (6)

a أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$، ومحور السينات، والمستقيمين $x = -2 \ , \ x = 4$.

b تحقق بيانيًا.

الحل:

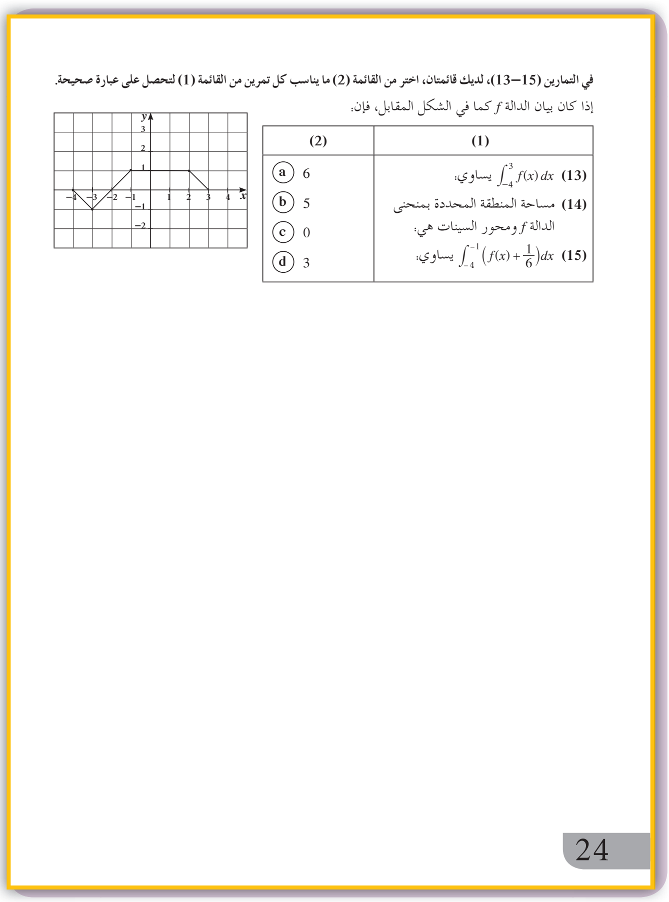
a $f(x) = -3$

$\because \ f(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-2,4]$

f سالبة على $[-2,4]$

$A = -\int_{-2}^{4}f(x)dx$

54



في التمارين (13–15)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:

(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3}f(x)\,dx$ يساوي:	a 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي:	b 5
	c 0
(15) $\int_{-4}^{-1}\left(f(x)+\frac{1}{6}\right)dx$ يساوي:	d 3

24

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $F(x) = x^2 - 2x + C$

(b) $F(1) = -1 + C\ ,\ F(4) = 8 + C\ ;\ F(4) - F(1) = 9$

(c) $A = \dfrac{6 \times 3}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$ units square

(d) $F(4) - F(1) = A = 9$

«حاول أن تحل»

1 $\left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x\right]_2^7 = \dfrac{4\,595}{12}$

2 **(a)** $\left[-\dfrac{1}{4}\cos 2x + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{3}{4}$

(b) $-5[x]_{-3}^{2} = -25$

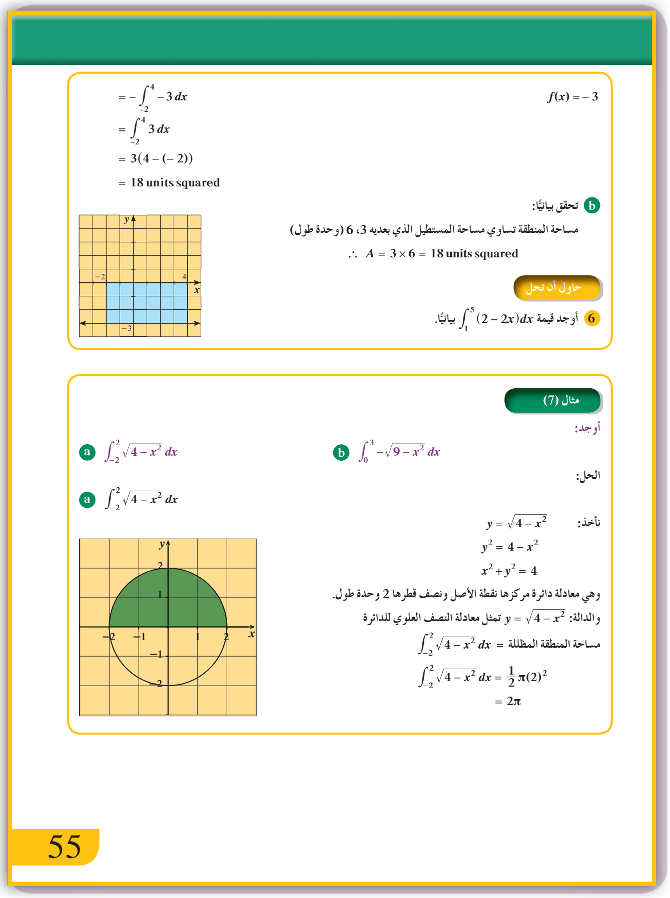
(c) $\left[-\dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right]_3^3 = 0$

(d) $[\ln|x-1|]_2^4 = \ln 3$

3 **(a)** $\displaystyle\int_{-3}^{2}(-2x+4)dx + \int_{2}^{4}(2x-4)dx$

$= [-x^2 + 4x]_{-3}^{2} + [x^2 - 4x]_2^4 = 29$

(b) $\displaystyle\int_1^3 |x+2|dx = \int_1^3 (x+2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = 8$



$f(x) = -3$

$= -\int_{-2}^{4} -3\,dx$

$= \int_{-2}^{4} 3\,dx$

$= 3(4 - (-2))$

$= 18$ units squared

b تحقق بيانيًا:

مساحة المنطقة تساوي مساحة المستطيل الذي بعديه 3، 6 (وحدة طول)

$\therefore\ A = 3 \times 6 = 18$ units squared

حاول أن تحل

6 أوجد قيمة $\int_1^5 (2-2x)dx$ بيانيًا.

مثال (7)

أوجد:

a $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ b $\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$

الحل:

a $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

نأخذ: $y = \sqrt{4-x^2}$

$y^2 = 4 - x^2$

$x^2 + y^2 = 4$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 وحدة طول.

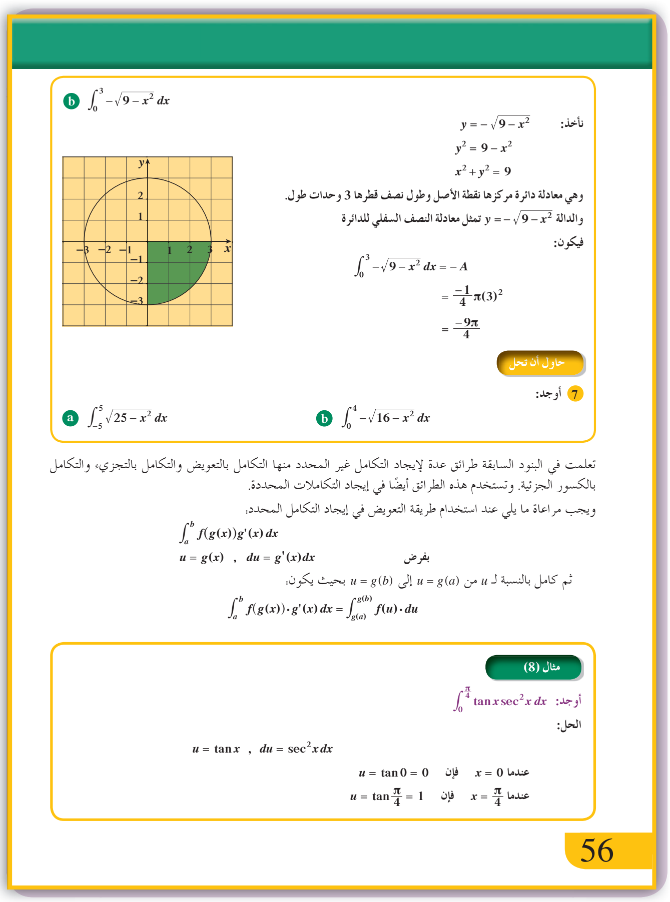
والدالة: $y = \sqrt{4-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة

مساحة المنطقة المظللة $= \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(2)^2$

$= 2\pi$

55



b $\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$

نأخذ: $y = -\sqrt{9-x^2}$

$y^2 = 9 - x^2$

$x^2 + y^2 = 9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 3 وحدات طول.

والدالة $y = -\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة

فيكون:

$\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx = -A$

$= \frac{-1}{4}\pi(3)^2$

$= \frac{-9\pi}{4}$

حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$ b $\int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx$

تعلمت في البنود السابقة طرائق عدة لإيجاد التكامل غير المحدد منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزيء والتكامل بالكسور الجزئية. وتستخدم هذه الطرائق أيضًا في إيجاد التكاملات المحددة.

ويجب مراعاة ما يلي عند استخدام طريقة التعويض في إيجاد التكامل المحدد:

$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$

بفرض $u = g(x)\ ,\ du = g'(x)dx$

ثم كامل بالنسبة لـ u من $u = g(a)$ إلى $u = g(b)$ بحيث يكون:

$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\cdot du$

مثال (8)

أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx$

الحل:

$u = \tan x\ ,\ du = \sec^2 x\,dx$

عندما $x = 0$ فإن $u = \tan 0 = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4}$ فإن $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

56

4 في الفترة $[-1,0]$ نلاحظ أن $f(x) = x^2 + x \le 0$

وبالتالي دون احتساب التكامل نحصل على:

$$\int_{-1}^{0} (x^2 + x)dx \le 0$$

5 نأخذ: $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x - 1$

نوجد:

$$f(x) - g(x) = x^2 + 1 - x + 1$$

$$f(x) - g(x) = x^2 - x + 2$$

نحسب: $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

فتكون إشارة $x^2 - x + 2$ هي إشارة معامل x^2 أي

$$x^2 - x + 2 \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ومنه: $x^2 + 1 \ge x - 1 \Longrightarrow f(x) - g(x) \ge 0$

أي: $f(x) \ge g(x)$

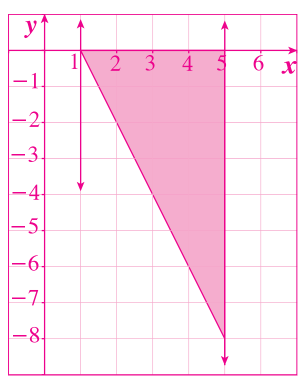
$$\therefore \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx \ge \int_{-1}^{2} (x - 1)dx$$

6 نرسم المستقيم $y = -2x + 2$ على الفترة $[1,5]$

التكامل المحدد = سالب مساحة

المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 2 - 2x$، محور السينات والمستقيمان $x = 1$، $x = 5$ أي سالب مساحة المنطقة المظللة وهو مثلث:

$$\therefore \int_{1}^{5} (2 - 2x)dx = \frac{-1}{2}(4)(8) = -16$$



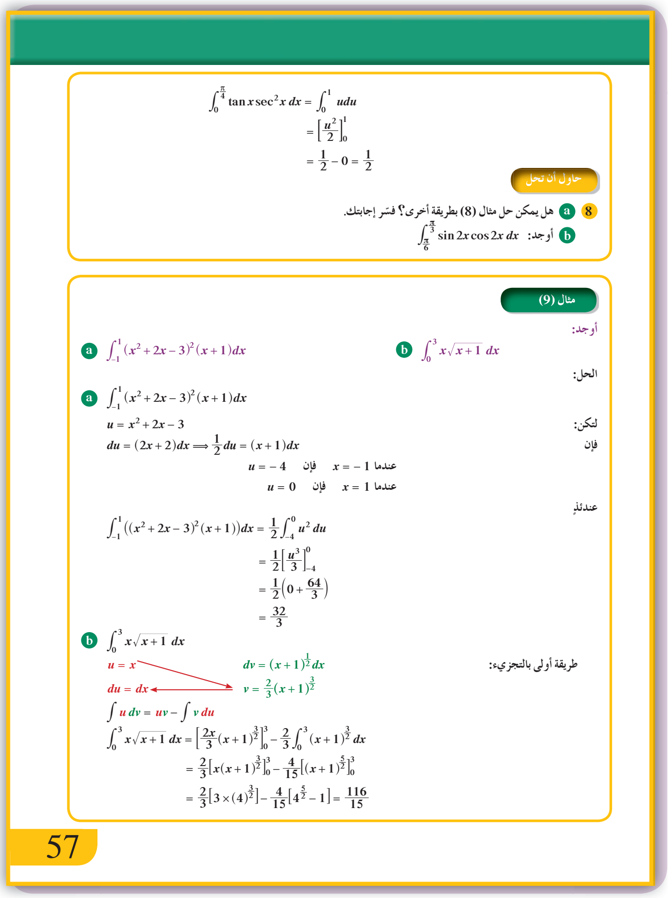
7 (a) $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

نأخذ: $y = \sqrt{25 - x^2}$

$$y^2 = 25 - x^2$$

$x^2 + y^2 = 25$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات $\therefore$ $\sqrt{25 - x^2}$ تمثل نصف الدائرة في الفترة $[-5,5]$ فوق محور السينات

$$\therefore \int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi(5)^2 = \frac{25}{2}\pi$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\, dx = \int_0^1 u du$$
$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

حاول أن تحل

8 a هل يمكن حل مثال (8) بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x\, dx$

مثال (9)

أوجد:

b $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx$

a $\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1)dx$

الحل:

a $\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1)dx$

لتكن: $u = x^2 + 2x - 3$

فإن $du = (2x+2)dx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = (x+1)dx$

عندما $x = -1$ فإن $u = -4$

عندما $x = 1$ فإن $u = 0$

عندئذٍ

$$\int_{-1}^1 \left((x^2 + 2x - 3)^2 (x+1)\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^0 u^2 du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^0$$
$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{64}{3}\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

b $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx$

طريقة أولى بالتجزيء:

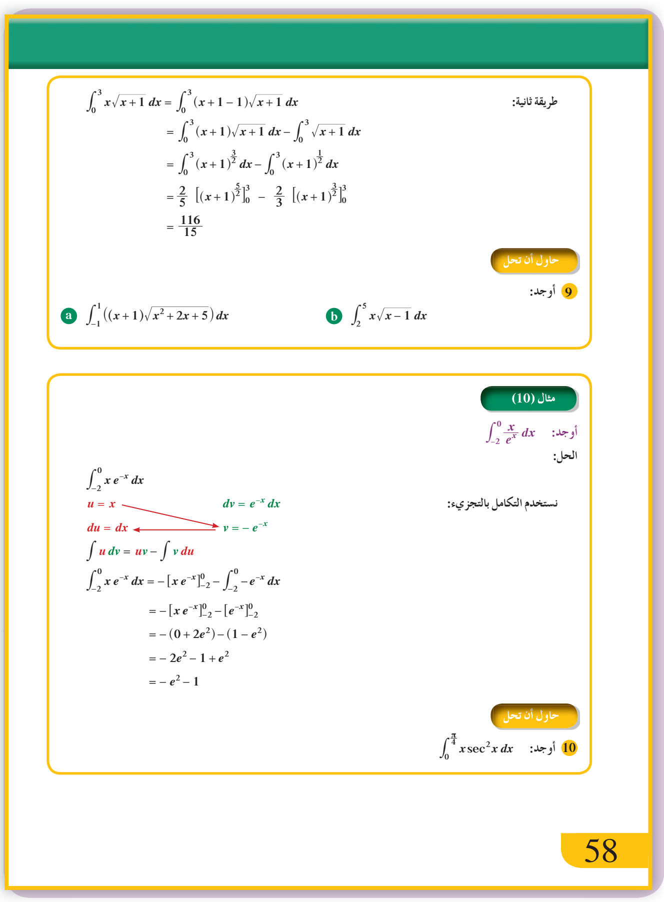
$u = x$ $\quad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$du = dx$ $\quad v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx = \left[\frac{2x}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{3}\left[x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{4}{15}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3$$
$$= \frac{2}{3}\left[3 \times (4)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{4}{15}\left[4^{\frac{5}{2}} - 1\right] = \frac{116}{15}$$

57



طريقة ثانية:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx = \int_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\, dx$$
$$= \int_0^3 (x+1)\sqrt{x+1}\, dx - \int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx$$
$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx - \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$= \frac{116}{15}$$

حاول أن تحل

9 أوجد:

b $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\, dx$

a $\int_{-1}^1 \left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right) dx$

مثال (10)

أوجد: $\int_{-2}^0 \frac{x}{e^x}\, dx$

الحل:

$$\int_{-2}^0 x e^{-x}\, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزيء:

$u = x$ $\quad dv = e^{-x} dx$

$du = dx$ $\quad v = -e^{-x}$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int_{-2}^0 x e^{-x}\, dx = -[x e^{-x}]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 -e^{-x}\, dx$$
$$= -[x e^{-x}]_{-2}^0 - [e^{-x}]_{-2}^0$$
$$= -(0 + 2e^2) - (1 - e^2)$$
$$= -2e^2 - 1 + e^2$$
$$= -e^2 - 1$$

حاول أن تحل

10 أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x\, dx$

58

(b) $\int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx$

نأخذ: $y = -\sqrt{16-x^2}$

$y^2 = 16 - x^2$

$x^2 + y^2 = 16$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها 4 وحدات $\therefore$ $-\sqrt{16-x^2}$ تمثل ربع

دائرة في الفترة $[0,4]$ تحت محور السينات

$$\therefore \int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx = \frac{-1}{4}\pi(4)^2 = -4\pi$$

8 **(a)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

نستخدم التكامل بالتعويض:

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$x = 0 \Longrightarrow u = 1\ ,\ x = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{u^3} = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^{-3}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u^2}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

وهناك حلول أخرى أيضًا.

(b) $u = \sin 2x \Longrightarrow du = 2\cos 2x\,dx$

$x = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ x = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u\,du = 0 \qquad \left(\int_a^a f(x)dx = 0\right)$

9 **(a)** $u = x^2 + 2x + 5 \Rightarrow du = 2(x+1)\,dx$

$(x+1)dx = \frac{du}{2}$

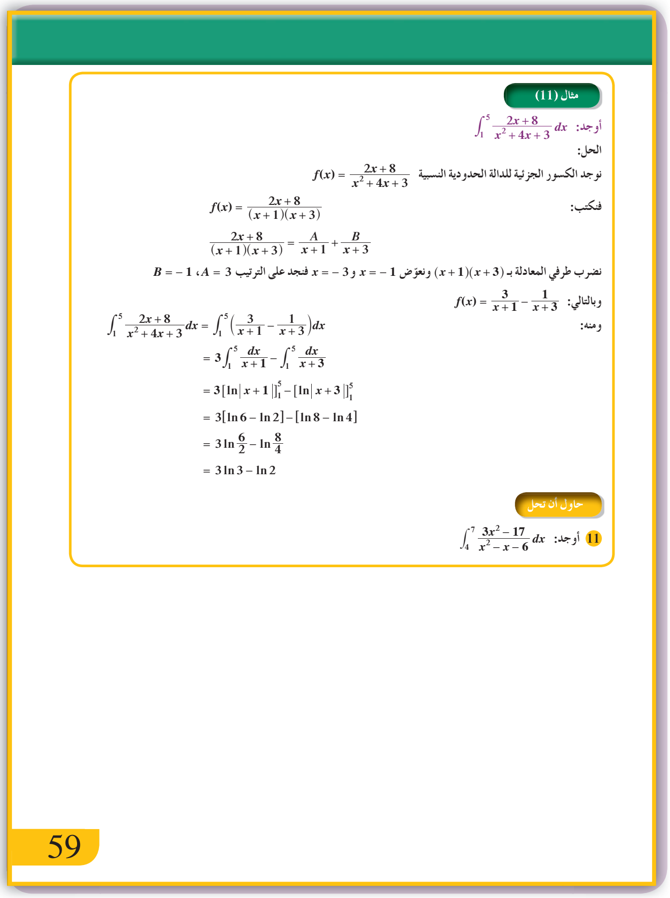
$x = -1 \Rightarrow u = 4$

$x = 1 \Rightarrow u = 8$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_4^8 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3}\left(8^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$



مثال (11)

أوجد: $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للدالة الحدودية النسبية $f(x) = \frac{2x+8}{x^2+4x+3}$

فنكتب: $f(x) = \frac{2x+8}{(x+1)(x+3)}$

$\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(x+1)(x+3)$ ونعوّض $x = -1$ و $x = -3$ فنجد على الترتيب $A = 3$، $B = -1$

وبالتالي: $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+3}$

ومنه:

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}dx = \int_1^5 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= 3\int_1^5 \frac{dx}{x+1} - \int_1^5 \frac{dx}{x+3}$$

$$= 3[\ln|x+1|]_1^5 - [\ln|x+3|]_1^5$$

$$= 3[\ln 6 - \ln 2] - [\ln 8 - \ln 4]$$

$$= 3\ln\frac{6}{2} - \ln\frac{8}{4}$$

$$= 3\ln 3 - \ln 2$$

حاول أن تحل

11 أوجد: $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$

59

(b) $u = x - 1 \Longrightarrow du = dx$

$x = u + 1$

$x = 2 \Longrightarrow u = 1$

$x = 5 \Longrightarrow u = 4$

$$\int_1^4 (u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du = \int_1^4 u^{\frac{3}{2}}\,du + \int_1^4 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{2}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 + \frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{5}[31] + \frac{2}{3}[7]$$

$$= \frac{256}{15}$$

10 $u = x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = dx \qquad v = \tan x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx = [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

$$= [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

11 $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx = \int_4^7 \left(3 + \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2}\right)dx$

$= 3[x]_4^7 + 2[\ln|x-3|]_4^7 + [\ln|x+2|]_4^7$

$= 9 + 4\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 9 + 3\ln 2 + \ln 3$

المرشد لحل المسائل

حل «مسألة إضافية»

(a) بإيجاد الدالة العكسية:

$$\int C(x)\,dx = \int (10x + 50)\,dx = 5x^2 + 50x + k$$

$$C(x) = 5x^2 + 50x + k$$

$$C(10) = 2\,000$$

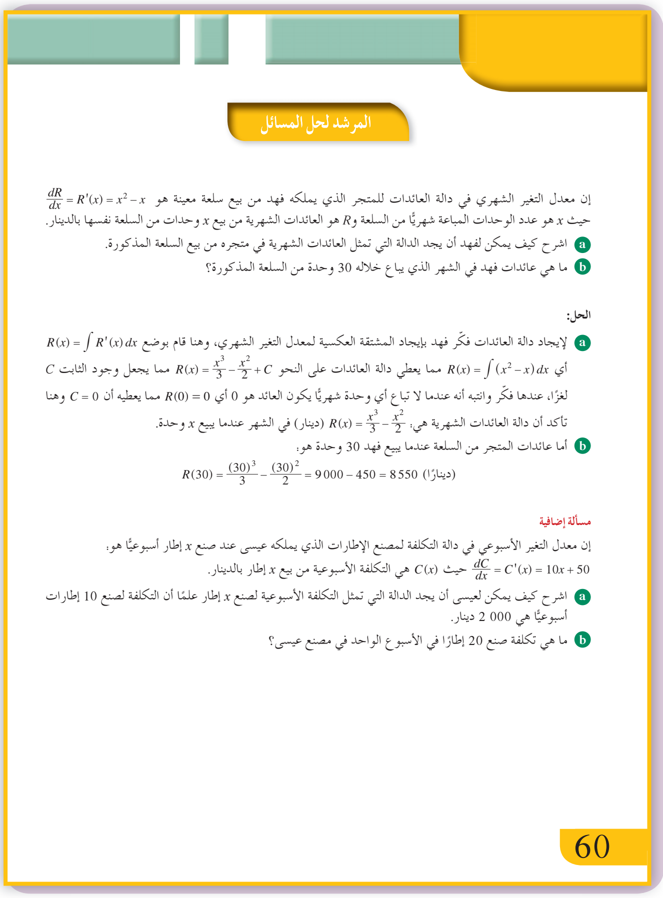
ولكن:

$$2\,000 = 500 + 500 + k \Rightarrow k = 1000$$

لذا: $C(x) = 5x^2 + 50x + 1000$

(b) $C(20) = 5(20)^2 + 50(20) + 1000 = 4\,000$

التكلفة $= 4\,000$ دينار


المرشد لحل المسائل

إن معدل التغير الشهري في دالة العائدات للمتجر الذي يملكه فهد من بيع سلعة معينة هو $\frac{dR}{dx} = R'(x) = x^2 - x$ حيث x هو عدد الوحدات المباعة شهريًا من السلعة وR هو العائدات الشهرية من بيع x وحدات من السلعة نفسها بالدينار.

a اشرح كيف يمكن لفهد أن يجد الدالة التي تمثل العائدات الشهرية في متجره من بيع السلعة المذكورة.

b ما هي عائدات فهد في الشهر الذي يباع خلاله 30 وحدة من السلعة المذكورة؟

الحل:

a لإيجاد دالة العائدات فكّر فهد بإيجاد المشتقة العكسية لمعدل التغير الشهري، وهنا قام بوضع $R(x) = \int R'(x)\,dx$ أي $R(x) = \int (x^2 - x)\,dx$ مما يعطي دالة العائدات على النحو $R(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$ مما يجعل وجود الثابت C لغزًا، عندها فكّر وانتبه أنه عندما لا تباع أي وحدة شهريًا يكون العائد هو 0 أي $R(0) = 0$ مما يعطيه أن $C = 0$ وهنا تأكد أن دالة العائدات الشهرية هي: $R(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ (دينار) في الشهر عندما يبيع x وحدة.

b أما عائدات المتجر من السلعة عندما يبيع فهد 30 وحدة هو:

$$R(30) = \frac{(30)^3}{3} - \frac{(30)^2}{2} = 9\,000 - 450 = 8\,550 \text{ (دينارًا)}$$

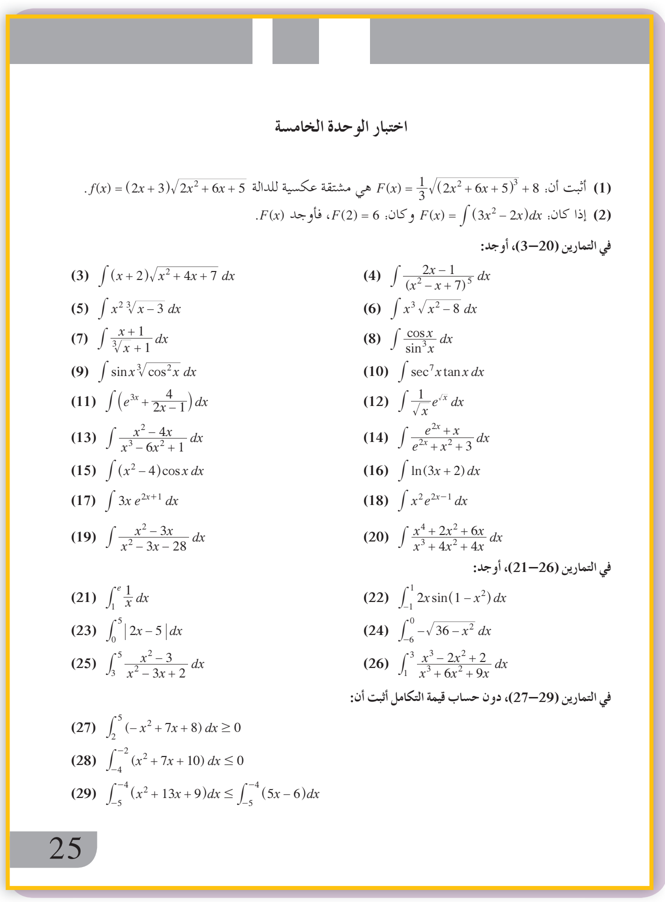
مسألة إضافية

إن معدل التغير الأسبوعي في دالة التكلفة لمصنع الإطارات الذي يملكه عيسى عند صنع x إطار أسبوعيًّا هو: $\frac{dC}{dx} = C'(x) = 10x + 50$ حيث $C(x)$ هي التكلفة الأسبوعية من بيع x إطار بالدينار.

a اشرح كيف يمكن لعيسى أن يجد الدالة التي تمثل التكلفة الأسبوعية لصنع x إطار علمًا أن التكلفة لصنع 10 إطارات أسبوعيًّا هي 2 000 دينار.

b ما هي تكلفة صنع 20 إطارًا في الأسبوع الواحد في مصنع عيسى؟

60


اختبار الوحدة الخامسة

(1) أثبت أن: $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(2x^2+6x+5)^3} + 8$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = (2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5}$.

(2) إذا كان: $F(x) = \int (3x^2 - 2x)dx$ وكان: $F(2) = 6$، فأوجد $F(x)$.

في التمارين (3–20)، أوجد:

(3) $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x+7}\,dx$

(4) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+7)^5}\,dx$

(5) $\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx$

(6) $\int x^3\sqrt{x^2-8}\,dx$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

(8) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

(9) $\int \sin x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$

(10) $\int \sec^7 x \tan x\,dx$

(11) $\int \left(e^{3x} + \frac{4}{2x-1}\right)dx$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

(13) $\int \frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+1}\,dx$

(14) $\int \frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2+3}\,dx$

(15) $\int (x^2-4)\cos x\,dx$

(16) $\int \ln(3x+2)\,dx$

(17) $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

(18) $\int x^2 e^{2x-1}\,dx$

(19) $\int \frac{x^2-3x}{x^2-3x-28}\,dx$

(20) $\int \frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

في التمارين (21–26)، أوجد:

(21) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

(22) $\int_{-1}^{1} 2x\sin(1-x^2)\,dx$

(23) $\int_0^5 |2x-5|\,dx$

(24) $\int_{-6}^{0} -\sqrt{36-x^2}\,dx$

(25) $\int_3^5 \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}\,dx$

(26) $\int_1^3 \frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}\,dx$

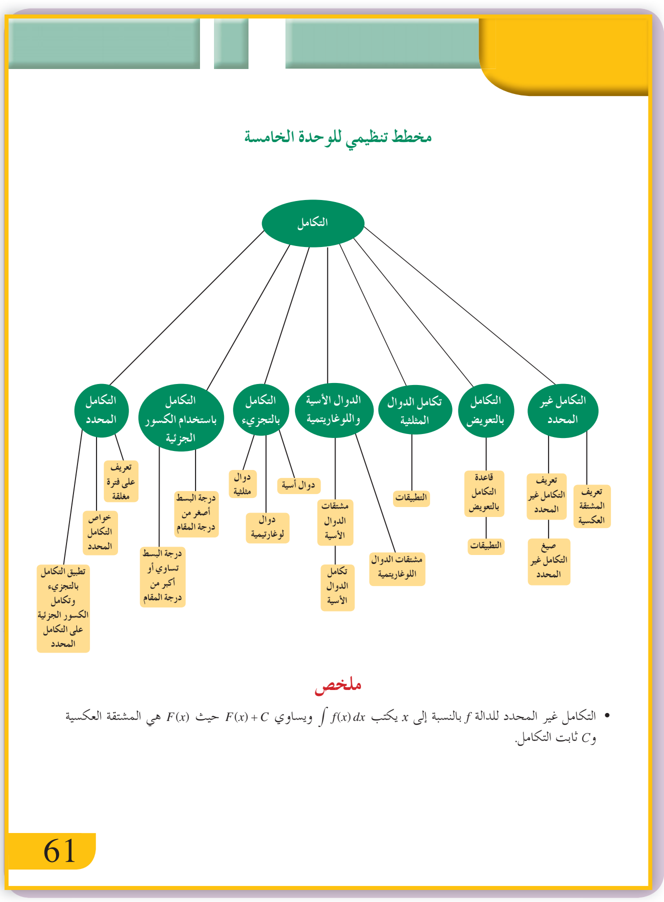
في التمارين (27–29)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(27) $\int_2^5 (-x^2+7x+8)\,dx \geq 0$

(28) $\int_{-4}^{-2} (x^2+7x+10)\,dx \leq 0$

(29) $\int_{-5}^{-4} (x^2+13x+9)dx \leq \int_{-5}^{-4} (5x-6)dx$

25


مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة

ملخص

- التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x يكتب $\int f(x)\,dx$ ويساوي $F(x) + C$ حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية وC ثابت التكامل.

61

- جدول صيغ التكامل:

قاعدة المشتقّة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \ , \ n\neq -1$	1 $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \ , \ n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=\sin kx$	2 $\int \sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=\cos kx$	3 $\int \cos kx\,dx=\frac{\sin kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	4 $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\csc^2 x$	5 $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$	6 $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x)=\csc x\cot x$	7 $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

قاعدة التكامل بالتعويض $\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C$

- خواص التكامل غير المحدد

a $\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

b $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$

c $\int -f(x)\,dx=-\int f(x)\,dx$

d $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

e $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx=e^{f(x)}+C$

جدول تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

قاعدة المشتقّة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\int e^x\,dx=e^x+C$
$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}=u'e^u$	$\int u'e^u\,dx=e^u+C$
$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$
$\frac{d}{dx}\ln|u|=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}dx=\ln|u|+C$

62

تمارين إثرائية

في التمرينين (2—1)، ارسم بيانيًّا الدالة على الفترة المعطاة، ثمّ أوجد:

(a) تكامل الدالّة على الفترة.

(b) المساحة للمنطقة بين المنحنى ومحور السينات.

(1) $y=-x^2+5x-4 \ , \ [0,2]$

(2) $y=x^2-4x \ , \ [0,5]$

في التمرينين (4—3)، أوجد قيمة y.

(3) $\frac{dy}{dx}=x^2\ln x$

(4) $\frac{dy}{d\theta}=\csc\theta\cot\theta$

(5) أوجد المشتقة العكسية لِـ y باستخدام القيمة الابتدائية: $\frac{d^2y}{dx^2}=2-6x \ , \ y(0)=1 \ , \ y'(0)=4$

(6) **تكلفة الطباعة.** يتكلّف طبع 25 نسخة من إحدى الأوراق 50 دينارًا، ولطبع x نسخة تعطى التكلفة الحديّة بالعلاقة $\frac{dc}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x}}$ دينارًا كويتيًّا لكلّ نسخة.
أوجد التكلفة الكلّيّة لطبع 2 500 نسخة.

في التمرينين (8—7)، أوجد التكامل:

(7) $\int x^3e^x\,dx$

(8) $\int x^3\ln x\,dx$

(9) استخدم الكسور الجزئية لتوجد التكاملات التالية:

(a) $\int \frac{x-2}{2x^2-5x+3}\,dx$

(b) $\int \frac{x^2-9}{(2x+1)(x^2+10x+25)}\,dx$

(c) $\int \frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)}\,dx$

في التمرينين (11—10) استعن برسم بيان الدوال لايجاد:

(10) $\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$

(11) $\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{\pi}-x\right)\sqrt{16-x^2}\,dx$

في التمارين (14—12)، أوجد التكامل المحدد.

(12) $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+5x+4}\,dx$

(13) $\int_1^2 \frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

(14) $\int_3^5 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx$

في التمرينين (16—15)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(15) $\int_0^2(-x^2+9x-18)\,dx\le 0$

(16) $\int_{-1}^{2}(x^2+13x+15)\,dx\ge\int_{-1}^{2}(3x-6)\,dx$

26

- التكامل بالتجزيء: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ حيث u , v دالتين في x قابلتين للتفاضل.
- الكسور الجزئية

تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية.
لكل عامل من $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\dots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

لاحظ أنه في حالة $k=1$، فإنه يوجد حد واحد فقط في المجموع.

- تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية

حلّل المقام وحدّد العوامل الخطية لِـ $h(x)$.

- التكامل المحدد

- $\int_a^b f(x)\,dx=\left[\int f(x)\,dx\right]_a^b=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$
- $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du(u=g(x) \ ; \ du=g'(x)\,dx)$

1 إذا f دالة متصلة وموجبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a$, $x=b$.

2 إذا f دالة متصلة وسالبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $-\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a$, $x=b$.

- خواص التكامل المحدد

f دالة متصلة على $[a,b]$

1 $\int_a^a f(x)\,dx=0$

2 $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

3 $\int_a^b k\,dx=k(b-a)$

4 $\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

5 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \ ; \ c\in[a,b]$

6 $f(x)\geqslant 0 \ \forall \ x\in[a,b]\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$

7 $f(x)\leqslant 0 \ \forall \ x\in[a,b]\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0$

8 f، g دالتان متصلتان على $[a,b]$ وإذا كان: $f(x)\leqslant g(x)\forall \ x\in[a,b]\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$

63

الوحدة السادسة: تطبيقات التكامل Integration Applications

قُسّمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

6–1: المساحات في المستوي.

جزء 1: مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة ومحور السينات في فترة معينة $[a,b]$.

جزء 2: المساحة بين منحنيين غير متقاطعين في فترة $[a,b]$.

جزء 3: المساحة بين منحنيين متقاطعين في فترة $[a,b]$.

جزء 4: القيم المحددة لدوال متغيرة في فترة $[a,b]$.

6–2: حجوم الأجسام الدورانية.

جزء 1: حجم مجسم ناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنطقة مستوية محددة بمنحنى دالة ومحور السينات في فترة $[a,b]$.

جزء 2: حجم مجسم ناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنطقة مستوية محددة بمنحنى دالتين في فترة $[a,b]$.

6–3: طول قوس ومعادلة منحنى دالة.

جزء 1: طول قوس من منحنى دالة.

جزء 2: معادلة منحنى بمعلومية ميل مماس عند نقطة عليه باستخدام التكامل.

6–4: المعادلات التفاضلية.

جزء 1: حل معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

جزء 2: حل معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

مقدمة الوحدة


الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل

Integration Applications

مشروع الوحدة: احتساب سعر البيع

1. مقدمة المشروع: يعتبر النفط منذ فترة طويلة وحتى عصرنا الحاضر من أهم الموارد التي يحتاج إليها الإنسان، إن لجهة استخداماته أو لجهة مردوده المادي على الدول المنتجة.
2. الهدف: سوف تستكشف من خلال العمل في هذا المشروع كيف يحتسب سعر البيع لإنتاج بئر من النفط الخام خلال فترة زمنية معينة.
3. اللوازم: آلة حاسبة — حاسوب.
4. أسئلة حول التطبيق:

تبيّن لإحدى الشركات أن إحدى الآبار يمكن أن يعطي 300 برميل من النفط الخام يوميًّا على أن يتوقف إنتاجه خلال 3 سنوات، وقدرت أنه في عدد t من الأيام ابتداءً من الآن سوف يكون سعر النفط الخام معطى بالعلاقة: $P(t) = 30 + 0.3\sqrt{t}$ (Dollars) للبرميل الواحد (السعر العالمي لبيع النفط الخام بالدولار الأميركي).

إذا كانت الشركة تبيع النفط عند استخراجه من البئر مباشرة، فما القيمة الإجمالية لبيع النفط مستقبلاً؟

a. معدل التغير لثمن البيع الإجمالي $\frac{dR}{dt}$ هو:

$\frac{dR}{dt} =$ [سعر بيع البرميل الواحد بالدولار] × [عدد البراميل المباعة في اليوم الواحد]

أوجد $\frac{dR}{dt}$ (لاحظ أن: $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dB} \times \frac{dB}{dt}$ حيث إن B هو عدد البراميل المستخرجة).

b. أوجد $R(t) = \int \frac{dR}{dt}\, dt$ علمًا أن: $R(0) = 0$

c. أوجد قيمة $R(t)$ خلال 3 سنوات.

دروس الوحدة

المساحات في المستوي	حجوم الأجسام الدورانية	طول قوس ومعادلة منحنى دالة	المعادلات التفاضلية
6–1	6–2	6–3	6–4

64

من المتعارف عليه في الرياضيات أن التعبير «مكاملة دالة» يعني نوع من التصميم لكميات قابلة للتجزئة مثل المساحة، والحجم، والكتلة أو أي مجموع لعناصر متناهية إلى الصفر.

النقطة الأساسية في التكامل باستخدام دالة متصلة على فترة مغلقة تأتي من المبرهنة الأساسية لهذا التكامل، والتي تنص على ما يلي: إن مشتق دالة المساحة تحت منحنى هو الدالة نفسها. أي إذا عرفنا الدالة التي تربط المتغير x بقيمة مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة f ، ومحور السينات، والمستقيمان العموديان على محور السينات ومحور الصادات y والمستقيم $x = t$ مثلًا.

فبالتالي تدعى f دالة المساحة ومشتقتها هي الدالة f نفسها، لذا يرتكز حساب التكامل على إيجاد الدالة الأصلية للدالة التي تريد القيام بمكاملتها.

ولا بد من الإشارة إلى تكامل ريمان (Reimann)، حيث أخذ مجموعات جزئية على فترة مغلقة لدالة معرفة ومتصلة، ومجموع هذه المجموعات الجزئية تحدد سلسلة متناهية، وكل حد من المجموع هو مساحة لمضلع لديه ارتفاع هو قيمة $f(x)$ عند النقطة المرفقة بالجزء المعطى وله عرض يساوي طول الفترة الجزئية.

من المهم جدًّا الإشارة إلى استخدامات التكامل المحدد في مجالات متنوعة:

- أطوال المنحنيات، والمساحات، والحجوم.
- حساب مركز الثقل، كمية التحرك، الإزاحة، السرعة، العجلة، الشكل، الطاقة.
- انتشار الجراثيم في وسط معين تحت ظروف بيئية معينة.
- حل معادلات تفاضلية وتطبيقاتها على البندول، ودوائر الرنين الكهربائية، وأنظمة التحكم الكهروميكانيكية.
- حساب الثوابت الرياضية إلى درجة عالية من الدقة مثل قيمة ثابت الدائرة π وقيمة الثابت الطبيعي e.

مشروع الوحدة

عرف الأقدمون النفط وبعض مشتقاته من تسربه خلال الشقوق التي توجد في سطح الأرض. أمّا اليوم فطرق البحث عن البترول معقّدة وتتطلّب مبالغ طائلة.

إنّ النفط ضروري للعديد من الصناعات ويساهم بنسبة كبيرة في استهلاك الطاقة العالمي، وهو من أهمّ الموارد لجهة مردوده المادّي للدول المنتجة.

في هذا المشروع، محاولة بسيطة للإضاءة على كيفيّة احتساب ثمن المبيع لإنتاج بئر من النفط الخام خلال ثلاث سنوات.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) $R(t)$ **هي القيمة الإجمالية لثمن المبيع بدلالة الزمن** t **يوم.**

$\frac{dR}{dt}$ **هو معدل التغير للمبيع،** $P(t) = 30 + 0.3\sqrt{t}$ **هو سعر البرميل بعد مرور** t **يوم من لحظة استخراج النفط و300 هو عدد البراميل المباعة يوميًّا.**

$$\therefore \; \frac{dR}{dt} = P(t) \times 300$$
$$= (30 + 0.3\sqrt{t})(300)$$
$$= 9\,000 + 90\sqrt{t}$$

(b) $$\mathrm{R(t)} = \int \frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} = \int (9\,000 + 90\sqrt{\mathrm{t}})\mathrm{dt}$$
$$= 9\,000t + 60t^{\frac{3}{2}} + C$$

وبما أنّ $R(0) = 0$، إذًا $C = 0$،

$$R(t) = 9\,000t + 60t^{\frac{3}{2}}$$

(c) **بما أنّ البئر سوف يجفّ بعد 3 سنوات أي ما يعادل 1 095 يومًا، إذًا القيمة الإجمالية المحتسبة خلال ثلاث سنوات هي:**

$$R(1\,095) = 9\,000(1\,095) + 60(1\,095)^{\frac{3}{2}}$$
$$\approx 12\,094\,064.52$$

أي 12 مليون دولار أميركي تقريبًا.

التقرير

يجب أن يتضمّن التقرير حسابات مفصّلة. اِعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف.

ناقش معهم الاقتراحات التي وضعها في التقرير، أعد النظر ببعضها إذا رأيت ضرورة لذلك.

الوحدة السادسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت النهايات المنتهية وغير المنتهية عند نقطة أو على فترة.
- تعرفت الاتصال على فترة والانفصال عند نقطة أو على فترة.
- تعرفت مشتقة دالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت قابلية الاشتقاق وقواعد الاشتقاق.
- تعرفت التطبيق على الاشتقاق لإيجاد التفاضل.
- تعرفت الدوال التزايدية والدوال التناقصية ورسومها البيانية.
- تعرفت المشتقة العكسية والتكامل المحدد.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد المساحة بين المنحنيات.
- إيجاد المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة.
- إيجاد القيم المحدودة لدوال متغيرة.
- التعرف على الحجم كتكامل.
- إيجاد الحجم بطريقة المقاطع العرضية الدائرية.
- معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس وإحداثيات نقطة.
- طول قوس على منحنى دالة.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية.

المصطلحات الأساسية

المساحة — المساحة المحددة بين منحنيين — الحجم — المقاطع العرضية الدائرية — معادلة دالة بمعلومية ميل المماس وإحداثيات نقطة — طول قوس على منحنى دالة — المعادلة التفاضلية — المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى — المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية.

أضف إلى معلوماتك

يستخدم التكامل المحدد في مجالات علمية متعددة ومنها المجال الفيزيائي حيث يمكن إيجاد كتلة إحداثيات نقطة ثقل جسم معين فمثلًا:

لنأخذ f , g دالتين متصلتين على الفترة $[a, b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ ونأخذ صفيحة رقيقة لها كثافة نوعية p وتغطي هذه الصفيحة المنطقة R بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ فنحصل على التالي:

كتلة $(R) = m = p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

وإحداثيات نقطة الثقل $(\overline{x}, \overline{y})$ هي:

$$\overline{x} = \frac{p\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx} = \frac{p\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{m}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}p\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx} = \frac{\frac{1}{2}p\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{m}$$

65

سلّم التقييم

4	الحسابات دقيقة ومفصلة – النتائج والاقتراحات ممتازة – التقرير منظم وواضح.
3	معظم الحسابات دقيقة ومفصلة – النتائج والاقتراحات جيدة – التقرير منظم ولكن ينقصه بعض الوضوح.
2	بعض الحسابات دقيقة – النتائج والاقتراحات مقبولة – التقرير بمعظمه غير منظم وغير مفصل.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

1–6: المساحات في المستوي

1 الأهداف

- يوجد مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة ومحور السينات.
- يوجد مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين غير متقاطعتين.
- يوجد مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين متقاطعتين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مساحة منطقة محدّدة بمنحنين – مساحة منطقة محدّدة بمنحنين متقاطعين – وحدة مربعة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد حلّ المعادلة $f(x) = g(x)$ في كلّ من الحالات التالية:

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$g(x) = 0$

(b) $f(x) = 2x - 5$

$g(x) = \dfrac{3}{2}x - 4$

(c) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

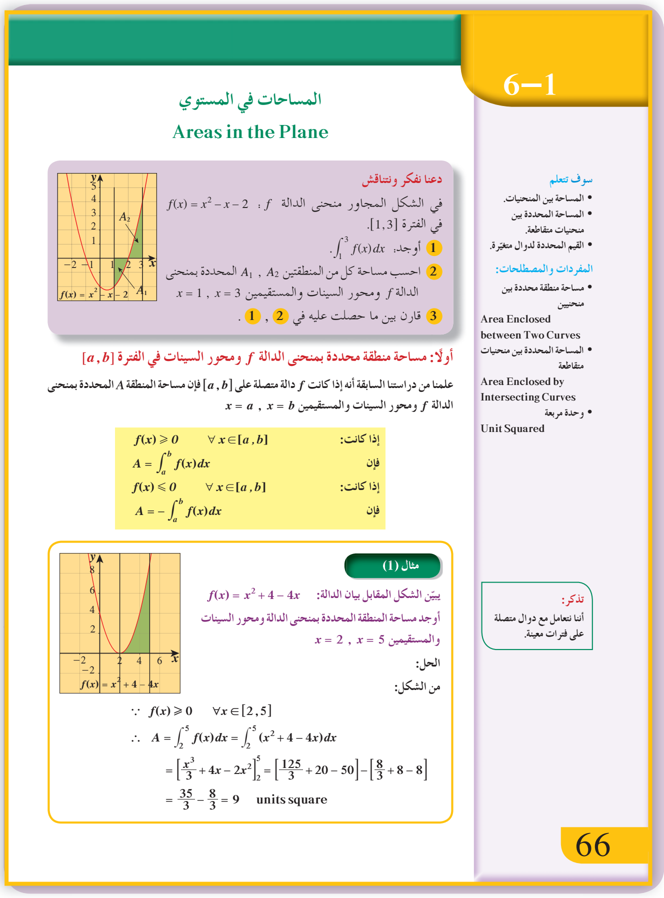
$g(x) = 2x^2 - 2x + 5$

(d) $f(x) = x^2 + 3x - 4$

$g(x) = -x + 1$

5 التدريس

تعرّف الطالب سابقًا العلاقة بين التكامل المحدد ومساحة المنطقة المحدّدة بمنحنى الدالة المكاملة، ومحور السينات، والمستقيمان $x = a$, $x = b$، وفي هذا الدرس سوف يطبق هذه المعلومات ويتوسع بها وذلك لإيجاد مساحات لمناطق محدّدة بمنحنيات لدوال مختلفة.



لذا يتوجب عليه إيجاد إحداثيات نقاط التقاطع بين هذه المنحنيات، وتحديد المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها، وكذلك إيجاد حدود التكامل.

والأهم هو استخدام التكامل مع دالة واحدة بالشروط المعروفة لإيجاد مساحة أي منطقة، لذا من المفيد جدًّا تنبيه الطلاب إلى ضرورة تحديد كل منطقة حدودها الأربعة هي: محور السينات، منحنى الدالة، المستقيمان $x = a \ , \ x = b$

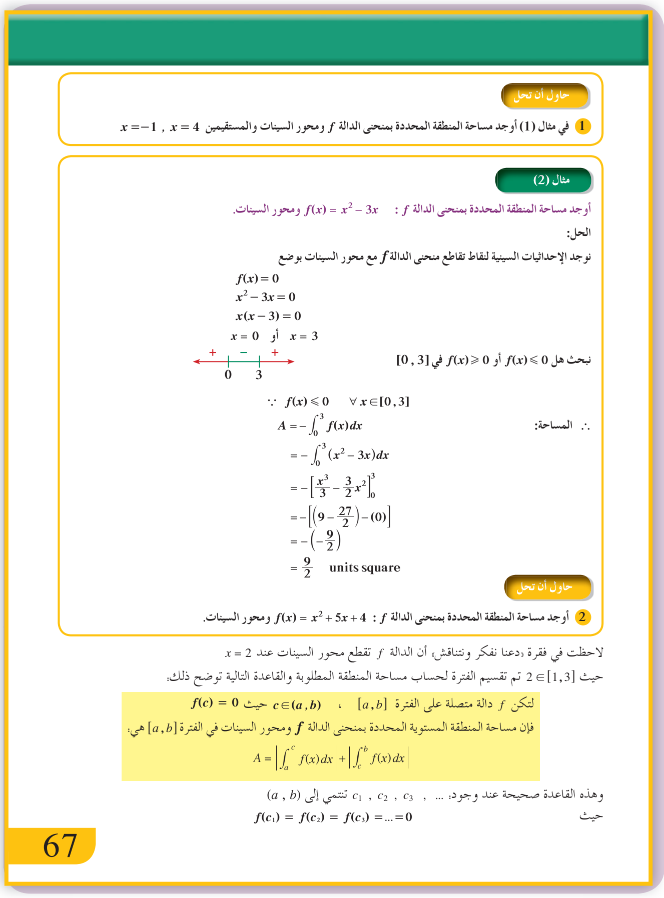
أخبر الطلاب أنه من الممكن أن تكون المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها هي ناتج جمع عدة مساحات. ألفت انتباههم إلى أن المنطقة الموجودة تحت محور السينات لها تكامل محدد قيمته دائمًا عددًا سالبًا، لذا عند إيجاد المساحة نأخذ القيمة المطلقة أو المعكوس الجمعي.

في المثال (1)

لاحظ أن المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها محدّدة بمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 4 - 4x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 5$, $x = 2$، وهي موجودة فوق محور السينات. لذا لإيجاد المساحة، علينا حساب تكامل الدّالة $f(x)$ بالشروط المعروفة.

في المثال (2)

لاحظ أن المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها موجودة تحت محور السينات ولها تكامل محدد قيمته عددًا سالبًا. لذا عند إيجاد المساحة، نأخذ المعكوس الجمعي أو القيمة المطلقة.



حاول أن تحل

1 في مثال (1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 4 \ , \ x = -1$

مثال (2)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \text{ أو } x = 3$$

نبحث هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[0, 3]$

$$\because \ f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [0,3]$$

$\therefore$ المساحة:

$$A = -\int_0^3 f(x)dx$$
$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$= -\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]$$
$$= -\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{units square}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

لاحظت في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن الدالة f تقطع محور السينات عند $x = 2$ حيث $2 \in [1,3]$ تم تقسيم الفترة لحساب مساحة المنطقة المطلوبة والقاعدة التالية توضح ذلك:

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ ، $c \in (a,b)$ حيث $f(c) = 0$
فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$ هي:

$$A = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

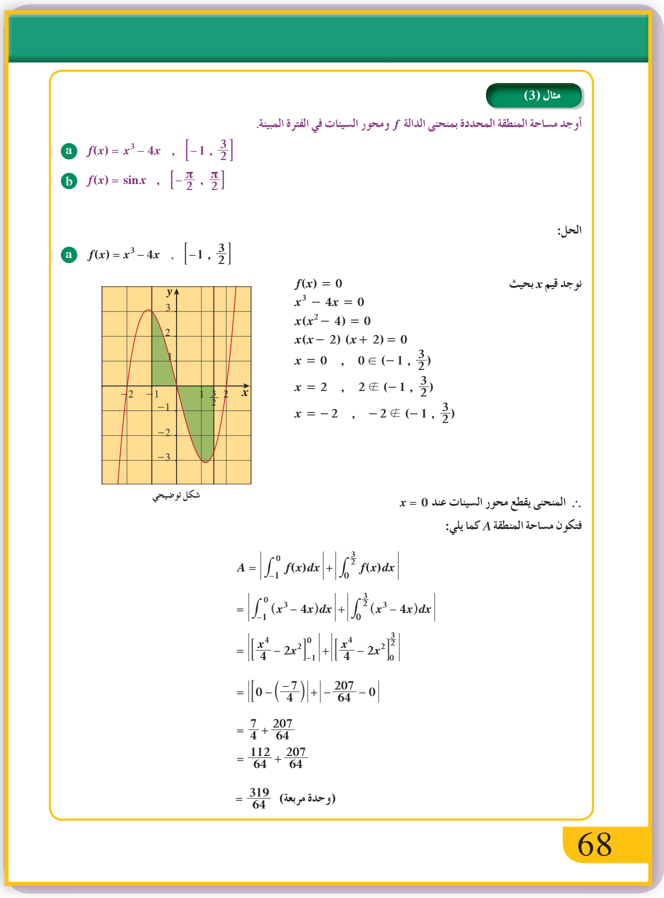
وهذه القاعدة صحيحة عند وجود: ... , $c_1 \ , \ c_2 \ , \ c_3$ تنتمي إلى (a , b)
حيث $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = \ldots = 0$

67

في المثال (3)

إنّ المنطقة المحدّدة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات في (a) و(b) منقسمة إلى منطقتين. لذا فالمساحة المطلوب إيجادها هي ناتج جمع مساحتي هاتين المنطقتين.

لاحظ أنّ إحدى المنطقتين موجودة تحت محور السينات ولها تكامل محدد قيمته عدد سالب، لذا علينا أن نأخذ المعكوس الجمعي أو القيمة المطلقة عند حساب مساحة هذه المنطقة.



مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 , \frac{3}{2}\right]$

b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

الحل:

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 , \frac{3}{2}\right]$

نوجد قيم x بحيث

$$f(x) = 0$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad 0 \in \left(-1 , \frac{3}{2}\right)$$
$$x = 2 \quad , \quad 2 \notin \left(-1 , \frac{3}{2}\right)$$
$$x = -2 \quad , \quad -2 \notin \left(-1 , \frac{3}{2}\right)$$

شكل توضيحي

$\therefore$ المنحنى يقطع محور السينات عند $x = 0$

فتكون مساحة المنطقة A كما يلي:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} f(x)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} (x^3 - 4x)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right|$$
$$= \left|\left[0 - \left(\frac{-7}{4}\right)\right]\right| + \left|-\frac{207}{64} - 0\right|$$
$$= \frac{7}{4} + \frac{207}{64}$$
$$= \frac{112}{64} + \frac{207}{64}$$
$$= \frac{319}{64} \text{ (وحدة مربعة)}$$

68

في المثالين (4), (5)

لاحظ أنّ المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها محددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى $g(x)$ علمًا أنه في كل مثال لا تتقاطع المنحنيات مع بعضها وكخطوة أولى يمكن رسم بيان كل دالة للتعرف على موقع المنطقة بالنسبة إلى منحنيي الدالتين أو استخدام قيمة اختيارية في الفترة المحددة.

ركّز اهتمام الطلاب على إيجاد تكامل الدالة التي لها المنحنى الأعلى مطروحًا منه تكامل الدالة التي لها المنحنى الأدنى ويمكن الاستغناء عن ذلك باستخدام القيمة المطلقة للتكامل المحدد.

في المثالين (6), (7)

لإيجاد حدود التكامل أولًا حل المعادلة $y_1 = y_2$ في المثال (6) و $f(x) = g(x)$ في المثال (7).

في المثالين (8), (9)

من الممكن أن يحتاج الطالب إلى خطوات متعددة مع استخدام خاصية التجزئة في التكامل المحدد وذلك على فترات متعددة من محور السينات أي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

6 الربط

لا يوجد.

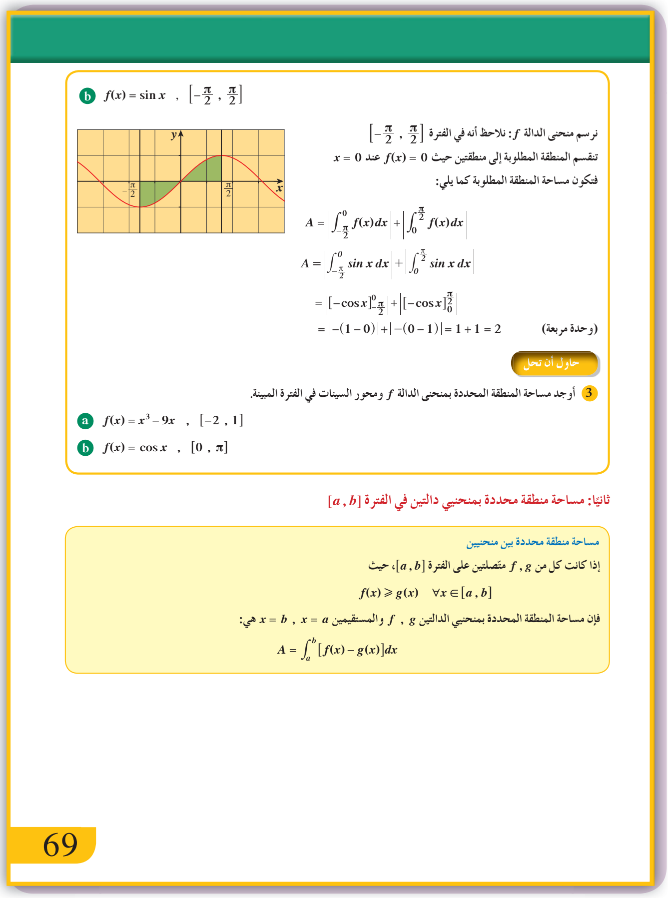
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب فيستخدمون تكاملًا محددًا لدالة واحدة أو قد لا يلاحظوا أن المنطقة جزء منها فوق محور السينات والجزء الآخر تحت محور السينات.

ساعدهم على العمل بخطوات متعددة مع تكامل لأكثر من دالة والانتباه إلى المناطق تحت محور السينات حيث نأخذ القيمة المطلقة للتكامل المحدد.

8 التقييم

راقب عمل الطلاب ولاحظ بدقة كيفية تعاملهم مع فقرات «دعنا نفكر ونتناقش» و«حاول أن تحل»، تأكد من أنهم يرسمون بيان كل دالة وأنهم قادرين على تحديد المنطقة المطلوبة وعلى إيجاد حدود التكامل.



b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

نرسم منحنى الدالة f: نلاحظ أنه في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = 0$

فتكون مساحة المنطقة المطلوبة كما يلي:

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\, dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right|$$

$$= \left|[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= |-(1-0)| + |-(0-1)| = 1 + 1 = 2$$ (وحدة مربعة)

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2 , 1]$

b $f(x) = \cos x \quad , \quad [0 , \pi]$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من g , f متّصلتين على الفترة $[a , b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x = a , x = b$ هي:

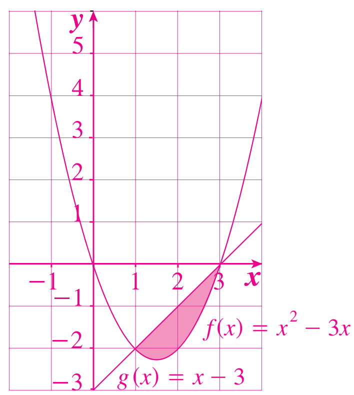
$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

69

اختبار سريع

1 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: $f(x) = x^2 - 3x$ والمستقيم $g(x) = x - 3$.

نرسم أولًا:



ثم نوجد إحداثيات نقاط التقاطع، لذا نحل النظام:

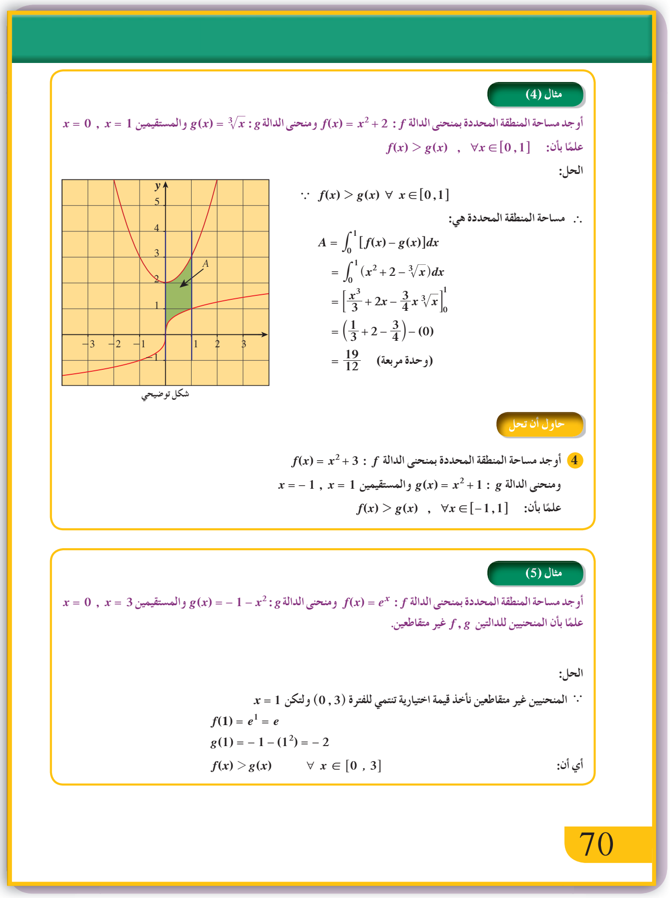
$$f(x) = g(x)$$

نحصل على: $x = 1$ ، $x = 3$

نأخذ: $$A = \int_{1}^{3} [g(x) - f(x)]dx$$

$$A = \int_{1}^{3} [(x-3) - (x^2 - 3x)]dx$$

$$A = \frac{4}{3} \text{ units square}$$



مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [0, 1]$

الحل:

$\because \; f(x) > g(x) \; \forall \; x \in [0, 1]$

$\therefore$ مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$$
$$= \int_0^1 (x^2 + 2 - \sqrt[3]{x})dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{4}\right) - (0)$$
$$= \frac{19}{12} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

شكل توضيحي

حاول أن تحل

4 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 3$
ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$
علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [-1, 1]$

مثال (5)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

الحل:

$\because$ المنحنيين غير متقاطعين نأخذ قيمة اختيارية تنتمي للفترة $(0, 3)$ ولتكن $x = 1$

$f(1) = e^1 = e$

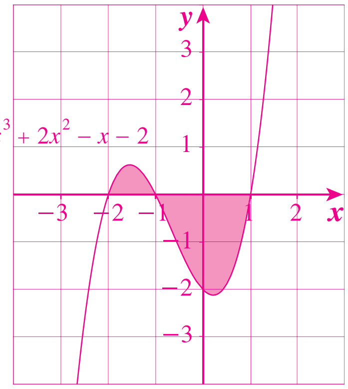
$g(1) = -1 - (1^2) = -2$

أي أن: $f(x) > g(x) \qquad \forall \; x \in [0, 3]$

70

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بين محور السينات ومنحنى الدالة $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

نرسم أولًا:



ثم نوجد نقاط التقاطع لمنحنى الدالة مع محور السينات، أي نأخذ:

$f(x) = 0 \quad \therefore \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$\therefore \quad (x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$

$\therefore \quad x = -2 \; , \; x = 1 \; , \; x = -1$

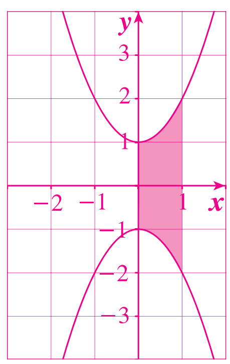
نلاحظ أن من -2 إلى -1 جزء من المنطقة موجود فوق محور السينات، ثم من -1 إلى 1 جزء من المنطقة موجود تحت محور السينات، لذا يجب استخدام خاصية التجزئة في التكامل المحدد مع المعكوس الجمعي لنجد المساحة الكلية.

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)dx - \int_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)dx$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \text{ units square}$$

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين f : $f(x) = x^2 + 1$، g : $g(x) = -x^2 - 1$ في الفترة $[0 , 1]$.

نرسم أولًا:



لا يوجد تقاطع بين المنحنيين لذا تكون المساحة:

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (x^2 + 1 + x^2 + 1)dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_0^1 = \frac{8}{3} \text{ units square}$$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

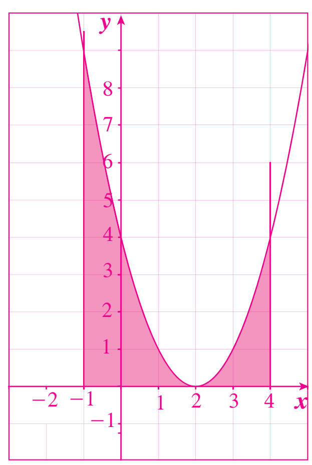
1 $$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2-x-2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^3$$
$$= \left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-2\right) = \frac{2}{3}$$

2 $$A_1 = -\int_1^2 f(x)\,dx = -\int_1^2 (x^2-x-2)\,dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2$$
$$= -\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-2\right)\right]$$
$$= -\left(-\frac{10}{3}+\frac{13}{6}\right) = \frac{7}{6} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$
$$A_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 (x^2-x-2)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3$$
$$= \left[\left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)\right]$$
$$= -\frac{3}{2}+\frac{10}{3} = \frac{11}{6} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

3 نلاحظ أن مساحة المنطقة المحدّدة هي:
$$A_1 + A_2 = \frac{7}{6}+\frac{11}{6} = 3 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$
بينما تكامل الدّالة $f(x)$ في الفترة $[1, 3]$ فهو
$$\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{2}{3}.$$
إذًا الإجابتين غير متساويتين.

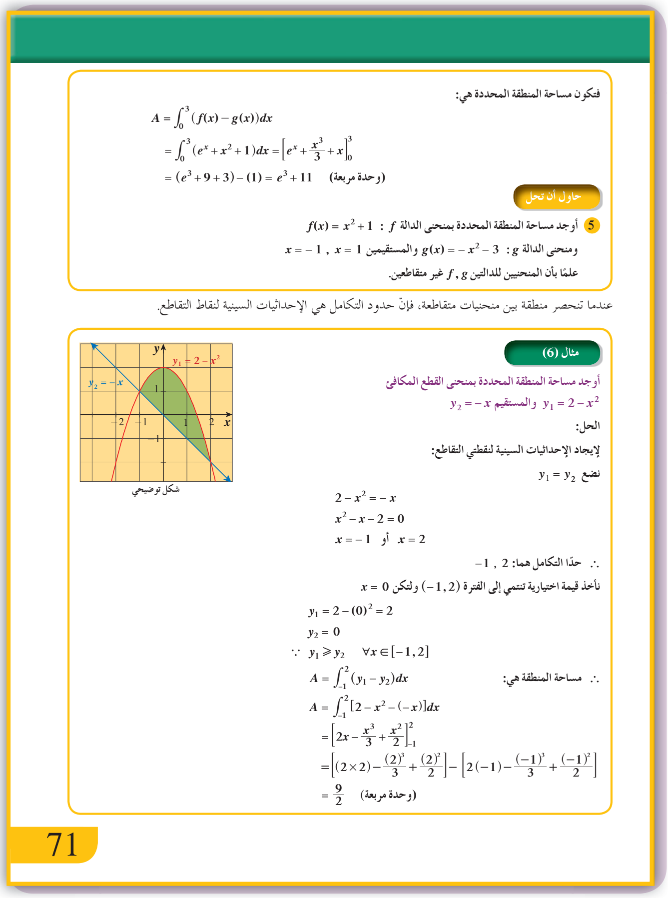
«حاول أن تحل»

1



$$f(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [-1, 4]$$

∴ المساحة:
$$A = \int_{-1}^4 f(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^4 (x^2+4-4x)\,dx = \frac{35}{3} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$



فتكون مساحة المنطقة المحددة هي:
$$A = \int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$
$$= \int_0^3 (e^x+x^2+1)\,dx = \left[e^x+\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3$$
$$= (e^3+9+3)-(1) = e^3+11 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2+1$
ومنحنى الدالة g : $g(x) = -x^2-3$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$
علمًا بأن المنحنيين للدالتين f , g غير متقاطعين.

عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإنّ حدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع.

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ
$y_1 = 2-x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع:

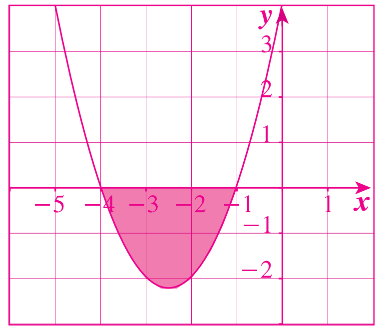
نضع $y_1 = y_2$
$$2-x^2 = -x$$
$$x^2-x-2 = 0$$
$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = 2$$
∴ حدّا التكامل هما: 2 , -1

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(-1, 2)$ ولتكن $x = 0$
$$y_1 = 2-(0)^2 = 2$$
$$y_2 = 0$$
$$\because \quad y_1 \geqslant y_2 \quad \forall x \in [-1, 2]$$
∴ مساحة المنطقة هي:
$$A = \int_{-1}^2 (y_1-y_2)\,dx$$
$$A = \int_{-1}^2 [2-x^2-(-x)]\,dx$$
$$= \left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2$$
$$= \left[(2\times 2)-\frac{(2)^3}{3}+\frac{(2)^2}{2}\right]-\left[2(-1)-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}\right]$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

شكل توضيحي

71

2



نوجد نقاط التقاطع لمنحنى الدالة f مع محور السينات أي نأخذ: $f(x) = 0$

فنجد $x = -4 \ , \ x = -1$

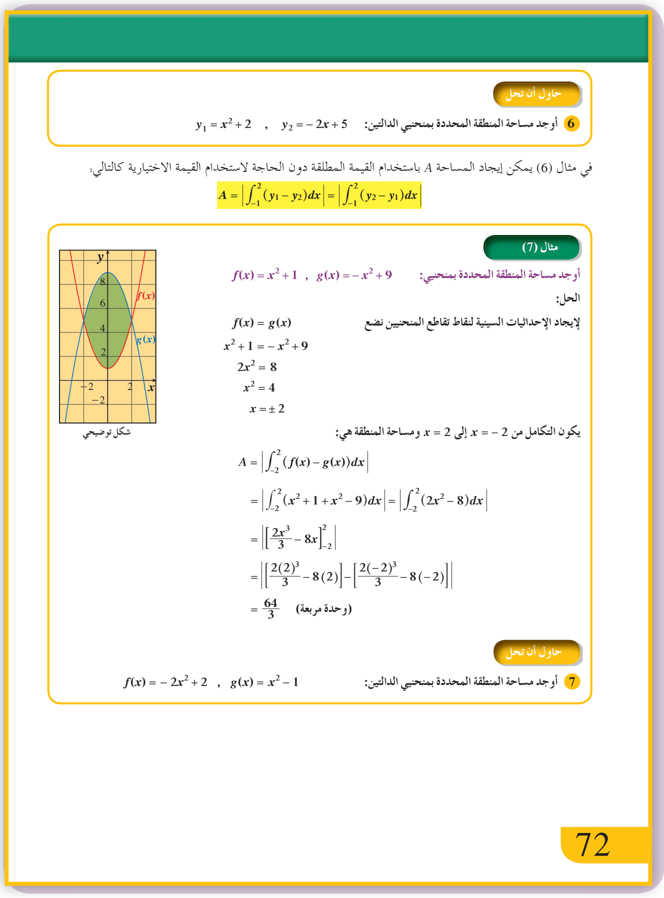
نبحث، هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[-4 , -1]$؟

$$\therefore \quad f(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-4 , -1]$$

$$A = -\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)\,dx$$

$$= \frac{9}{2} \text{ units square}$$


حاول أن تحل

6 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5 \quad , \quad y_1 = x^2 + 2$

في مثال (6) يمكن إيجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي:

$$A = \left|\int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)\,dx\right|$$

مثال (7)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $g(x) = -x^2 + 9 \quad , \quad f(x) = x^2 + 1$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$
$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

يكون التكامل من $x = -2$ إلى $x = 2$ ومساحة المنطقة هي:

$$A = \left|\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-2}^{2} (x^2 + 1 + x^2 - 9)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^{2}\right|$$
$$= \left|\left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2)\right] - \left[\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2)\right]\right|$$
$$= \frac{64}{3} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

شكل توضيحي

حاول أن تحل

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $g(x) = x^2 - 1 \quad , \quad f(x) = -2x^2 + 2$

72

3 (a) لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع لمنحنى الدالة مع محور السينات، نحل المسألة: $f(x) = 0$

فنجد: $x = 3 \ , \ x = 0 \ , \ x = -3$ لذا:

$$A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right|$$

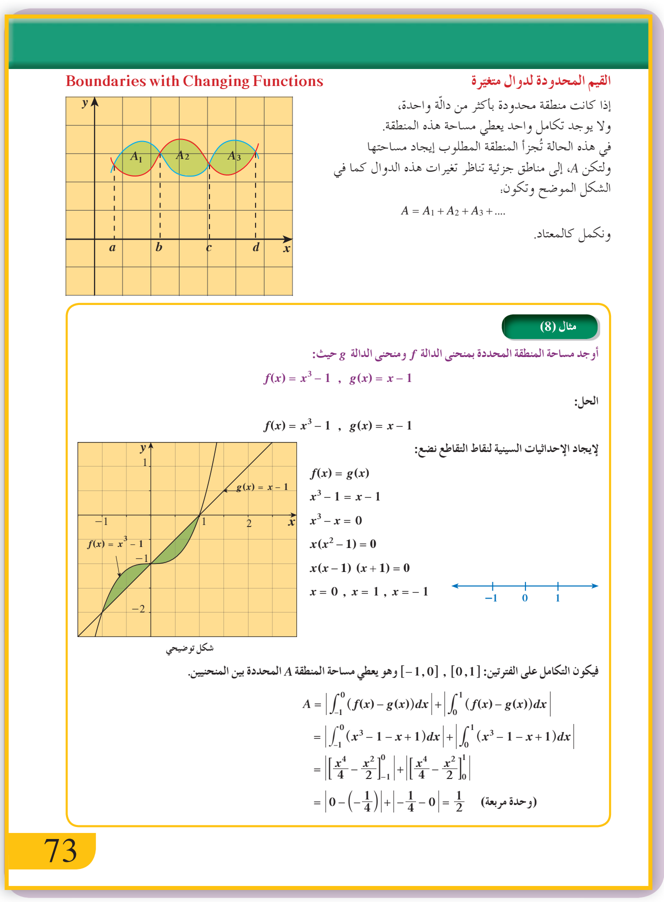
$$= 14 + \frac{17}{4} = \frac{73}{4} \text{ units square}$$

(b) لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع لمنحنى الدالة مع محور السينات، نحل المسألة: $f(x) = 0$ في الفترة $[0 \ ; \ \pi]$

فنجد: $x = \frac{\pi}{2}$ لذا:

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx\right|$$

$$= 1 + 1 = 2 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$


القيم المحدودة لدوال متغيّرة

Boundaries with Changing Functions

إذا كانت منطقة محدودة بأكثر من دالّة واحدة، ولا يوجد تكامل واحد يعطي مساحة هذه المنطقة. في هذه الحالة تُجزأ المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها ولتكن A، إلى مناطق جزئية تناظر تغيرات هذه الدوال كما في الشكل الموضح وتكون:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots.$$

ونكمل كالمعتاد.

مثال (8)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g حيث:

$$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$$

الحل:

$$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع نضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - 1 = x - 1$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x - 1)\ (x + 1) = 0$$
$$x = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = -1$$

شكل توضيحي

فيكون التكامل على الفترتين: $[-1 , 0]$, $[0 , 1]$ وهو يعطي مساحة المنطقة A المحددة بين المنحنيين.

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (f(x) - g(x))\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 1 - x + 1)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 1 - x + 1)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$
$$= \left|0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|-\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{2} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

73

4 لنأخذ $x = 0$ على الفترة $[-1 , 1]$

نحسب: $f(0) = 0^2 + 3 = 3$

$g(0) = 0^2 + 1 = 1$

ومنه $f(0) > g(0)$

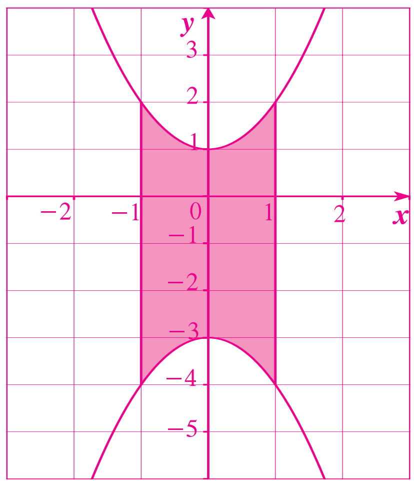
وبالتالي: $\forall x \in [-1 , 1] \qquad f(x) \geqslant g(x)$

$$A = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + 3 - x^2 - 1)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2)dx = [2x]_{-1}^{1}$$

$$= 2 + 2 = 4 \text{ units square}$$

5 رسم توضيحي

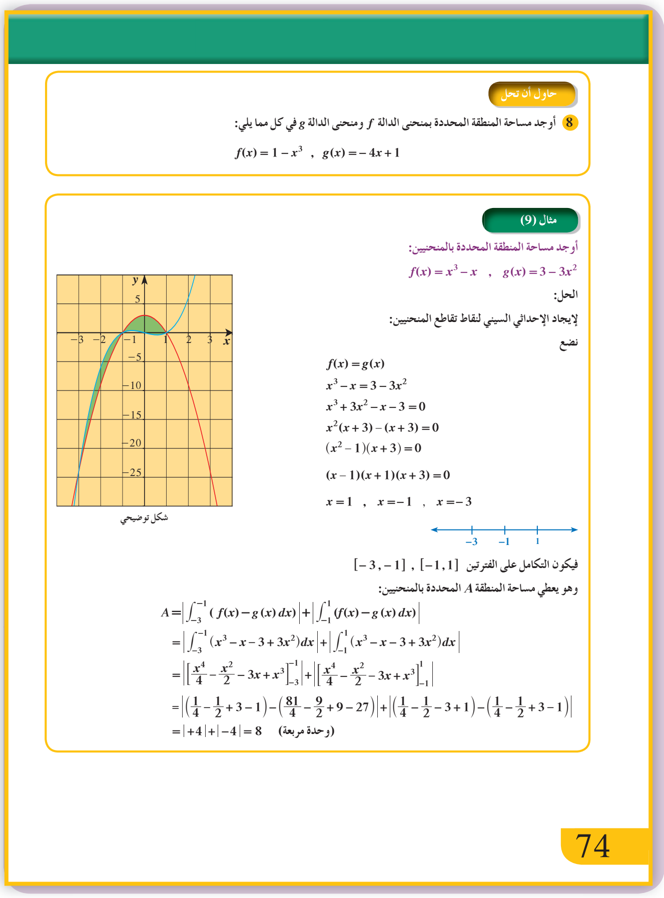


لا يوجد تقاطع بين المنحنيين:

$$A = \left| \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} (x^2 + 1 + x^2 + 3)dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} (2x^2 + 4)dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^{1} \right|$$

$$= \frac{28}{3} \text{ units square}$$



حاول أن تحل

8 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g في كل مما يلي:

$f(x) = 1 - x^3 \quad , \quad g(x) = -4x + 1$

مثال (9)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = 3 - 3x^2$

الحل:

لإيجاد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين:

نضع

$f(x) = g(x)$

$x^3 - x = 3 - 3x^2$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$

$(x^2 - 1)(x + 3) = 0$

$(x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0$

$x = 1 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = -3$

$-3 \quad -1 \quad 1$

شكل توضيحي

فيكون التكامل على الفترتين $[-1 , 1]$, $[-3 , -1]$

وهو يعطي مساحة المنطقة A المحددة بالمنحنيين:

$$A = \left| \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)\, dx) \right| + \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)\, dx) \right|$$

$$= \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx \right| + \left| \int_{-1}^{1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3 \right]_{-3}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3 \right]_{-1}^{1} \right|$$

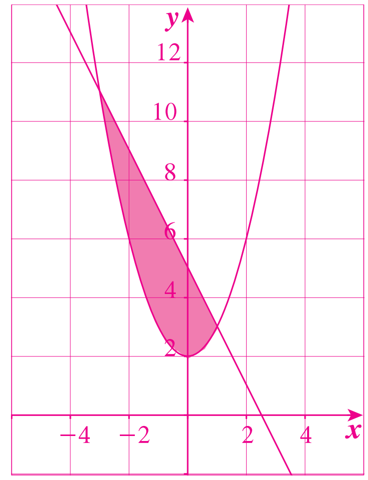
$$= \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1 \right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{9}{2} + 9 - 27 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 + 1 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1 \right) \right|$$

$= |+4| + |-4| = 8$ (وحدة مربعة)

74

6

رسم توضيحي



نوجد إحداثيات التقاطع بحل المسألة: $y_1 = y_2$

فنجد: $x = -3 \ , \ x = 1$

مساحة المنطقة المظللة المطلوبة:

$$\therefore \quad y_2 \geqslant y_1 \quad \forall x \in [-3\,,1]$$

$$A = \int_{-3}^{1} (y_2 - y_1)dx$$

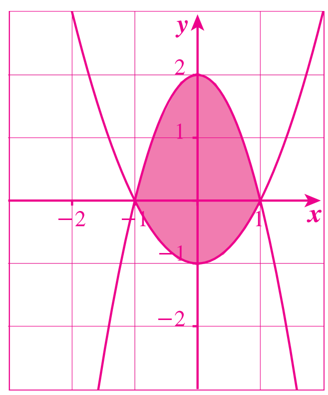
$$= \int_{-3}^{1} (-2x + 5 - x^2 - 2)dx$$

$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_{1}^{-1}$$

$$= \frac{32}{3}$$ (وحدة مربعة)

7

رسم توضيحي



نوجد إحداثيات التقاطع بحل المسألة: $f(x) = g(x)$

فنجد: $x = -1 \ , \ x = 1$

مساحة المنطقة المظللة المطلوبة:

$$A = \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2 - x^2 + 1)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)dx\right| = \left|[-x^3 + 3x]_{-1}^{1}\right|$$

$$= 4$$ (وحدة مربعة)

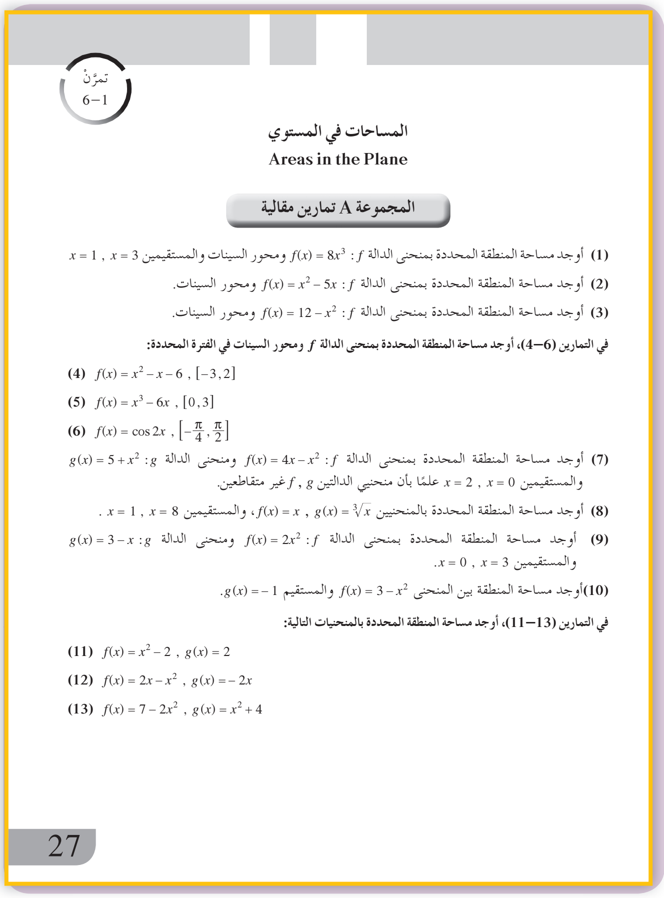
حاول أن تحل

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2}$

والمستقيمين $x = 9 \ , \ x = 0$

75



تمرّن 6-1

المساحات في المستوي
Areas in the Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 8x^3$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = 1$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 5x$ ومحور السينات.

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات.

في التمارين (6–4)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المحددة:

(4) $f(x) = x^2 - x - 6$, $[-3, 2]$

(5) $f(x) = x^3 - 6x$, $[0, 3]$

(6) $f(x) = \cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

(7) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 5 + x^2$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ علمًا بأن منحنيي الدالتين g , f غير متقاطعين.

(8) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x$، والمستقيمين $x = 8$, $x = 1$.

(9) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 3 - x$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$.

(10) أوجد مساحة المنطقة بين المنحنى $f(x) = 3 - x^2$ والمستقيم $g(x) = -1$.

في التمارين (13–11)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية:

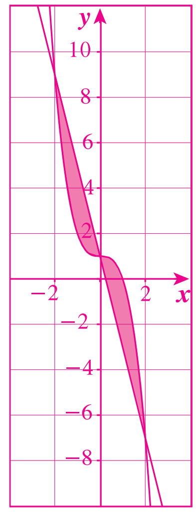
(11) $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 2$

(12) $f(x) = 2x - x^2$, $g(x) = -2x$

(13) $f(x) = 7 - 2x^2$, $g(x) = x^2 + 4$

27

8 رسم توضيحي



نوجد إحداثيات التقاطع بحل المسألة: $f(x) = g(x)$

فنجد: $x = 2$, $x = -2$

$$\therefore \quad g(x) \geqslant f(x) \qquad \forall x \in [-2, 0]$$

$$f(x) \geqslant g(x) \qquad \forall x \in [0, 2]$$

إذًا:

$$A = \int_{-2}^{0} [g(x) - f(x)]dx + \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]dx$$

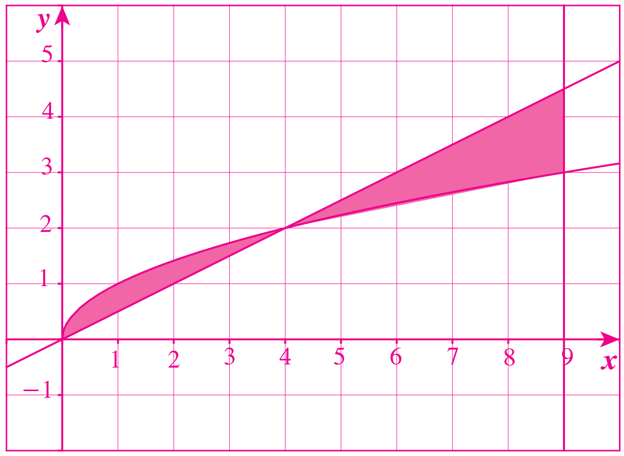
$$= \int_{-2}^{0} (-4x + 1 - 1 + x^3)dx + \int_{0}^{2} (1 - x^3 + 4x - 1)dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (-x^3 + 4x)dx$$

$= 4 + 4 = 8$ (وحدة مربعة)

9

رسم توضيحي



نوجد إحداثيات التقاطع بحل المسألة: $f(x) = g(x)$

فنجد: $x = 0 \ , \ x = 4$

$$\therefore \ f(x) \geqslant g(x) \qquad \forall x \in [0\,,4]$$

$$g(x) \geqslant f(x) \qquad \forall x \in [4\,,9]$$

$$A = \int_0^4 [f(x) - g(x)]dx + \int_4^9 [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_0^4 \left[\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right]dx + \int_4^9 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{43}{12} = \frac{59}{12} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

وهناك حلول أخرى أيضا مثل:

$$A = \left|\int_0^4 (f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_4^9 (f(x) - g(x))dx\right|$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ هي: $\int_a^b f(x)dx$ (a) (b)

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)dx$ (a) (b)

(3) إذا كانت: $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)dx$ (a) (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$، $x = 3$.
فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^3 f(x)dx$ (a) (b)

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = |x|$ ومحور السينات.
في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) 9π units^2 (b) 6π units^2
(c) 3π units^2 (d) $\frac{9}{2}\pi$ units^2

(7) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة g : $g(x) = (x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)dx$ (b) $-2\int_0^2 g(x)dx$
(c) $\int_0^4 g(x)dx$ (d) $-2\int_2^4 g(x)dx$

(8) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 4$ هي:

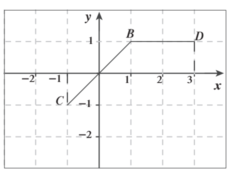
(a) 20 units^2 (b) $\frac{8}{3}$ units^2
(c) $\frac{40}{3}$ units^2 (d) 8 units^2

(9) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = x + 2$ في $[-2,2]$ هي:

(a) $\pi - 2$ units^2 (b) π units^2
(c) $\pi + 2$ units^2 (d) 2 units^2

28

(10) إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB} \cup \overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 3 \ , \ x = -1$ هي:



(a) 3 units^2 (b) 4 units^2 (c) 2 units^2 (d) 5 units^2

29

6–2: حجوم الأجسام الدورانية

1 الأهداف

- يربط الحجم بالتكامل.
- يوجد الحجم باستخدام التكامل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

حجم مجسم – الأجسام الدورانية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – مجسمات – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد حجم كل مجسم ممّا يلي:

(a) أسطوانة نصف قطر قاعدتها 8 cm وارتفاعها 20 cm

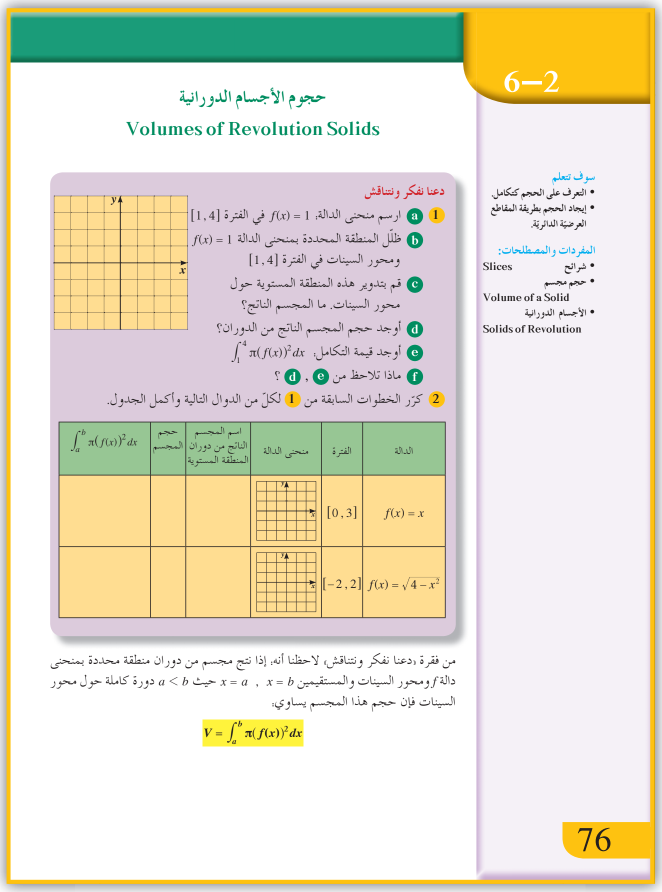
(b) مخروط نصف قطر قاعدته 14 cm وارتفاعه 18 cm

(c) كرة نصف قطرها 24 cm

(2) احسب التكاملات التالية:

(a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$

(b) $\int_{-1}^{2} \pi (x-1)^2 \, dx$



6–2

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

سوف تتعلم

- التعرف على الحجم كتكامل.
- إيجاد الحجم بطريقة المقاطع العرضيّة الدائريّة.

المفردات والمصطلحات:

- شرائح Slices
- حجم مجسم Volume of a Solid
- الأجسام الدورانية Solids of Revolution

دعنا نفكر ونتناقش

1 (a) ارسم منحنى الدالة: $f(x) = 1$ في الفترة $[1, 4]$

(b) ظلّل المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 1$ ومحور السينات في الفترة $[1, 4]$

(c) قم بتدوير هذه المنطقة المستوية حول محور السينات. ما المجسم الناتج؟

(d) أوجد حجم المجسم الناتج من الدوران؟

(e) أوجد قيمة التكامل: $\int_{1}^{4} \pi (f(x))^2 dx$

(f) ماذا تلاحظ من (e) , (d) ؟

2 كرّر الخطوات السابقة من 1 لكلّ من الدوال التالية وأكمل الجدول.

الدالة	الفترة	منحنى الدالة	اسم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية	حجم المجسم	$\int_{a}^{b} \pi (f(x))^2 dx$
$f(x) = x$	$[0, 3]$				
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	$[-2, 2]$				

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه: إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$, $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_{a}^{b} \pi (f(x))^2 dx$$

76

5 التدريس

ركّز انتباه الطلاب على حساب حجوم الأجسام الناتجة من الدوران دورة كاملة حول محور السينات لمنطقة مستوية محددة على فترة $[a , b]$، محور السينات ومنحنى دالة متصلة.

المثال (1)

يبيّن كيفية استخدام القاعدة: $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$ لإيجاد حجم مجسم ناتج من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحى دالة ومحور السينات وذلك على فترة محددة ومن ثم تطبيق التكامل المحدد.

المثال (2)

يعطي هذا المثال فكرة واضحة عن دوران نصف دائرة حول محور السينات نصف قطرها r في فترة محددة $[-r , r]$ وباستخدام قاعدة إيجاد الحجم نحصل على حجم كرة بدلالة نصف قطرها.

في المثالين (3), (4)

أخبر الطلاب أنه في حال تدوير منطقة محددة بمنحنيين لدالتين مختلفتين يجب الانتباه إلى المجسم الناجم عن هذا الدوران حول محور السينات، وبالتالي يصبح حجم المجسم ناتج طرح وذلك بحسب مواقع المنحنيات،

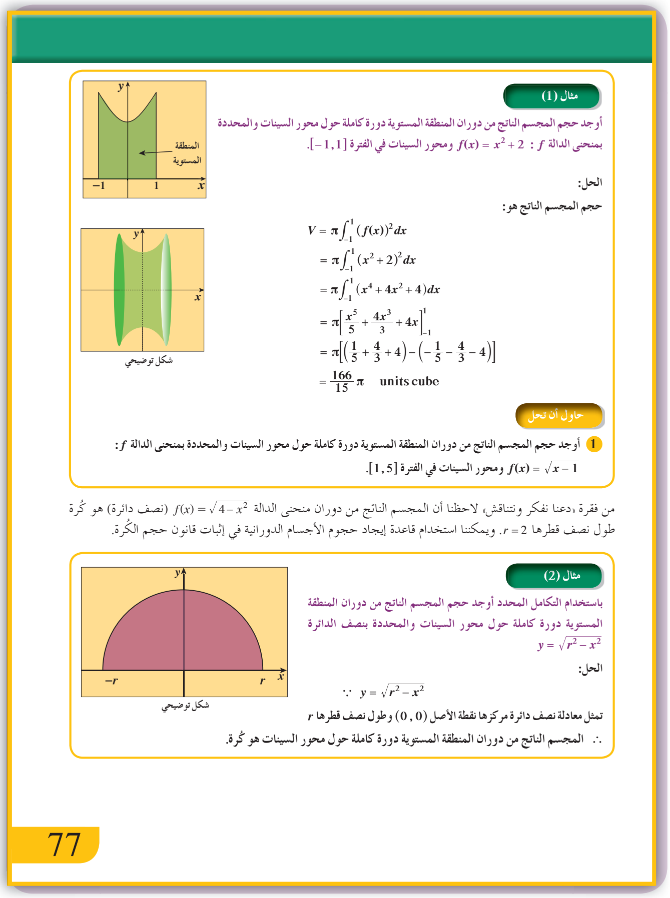
لذا يكون حجم المجسّم يساوي:

$$V = \pi\int_a^b [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$$

أو

$$V = \pi\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

نبّه الطلاب أن المنحنيين يقعان إما أسفل محور السينات معًا أو فوق محور السينات معًا.



مثال (1)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$.

الحل:

حجم المجسم الناتج هو:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{1} (f(x))^2 dx \\ &= \pi\int_{-1}^{1} (x^2+2)^2 dx \\ &= \pi\int_{-1}^{1} (x^4+4x^2+4)dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{1} \\ &= \pi\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{4}{3}-4\right)\right] \\ &= \frac{166}{15}\pi \quad \text{units cube} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1 , 5]$.

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن المجسم الناتج من دوران منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (نصف دائرة) هو كُرة طول نصف قطرها $r = 2$. ويمكننا استخدام قاعدة إيجاد حجوم الأجسام الدورانية في إثبات قانون حجم الكُرة.

مثال (2)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

الحل:

$\because \; y = \sqrt{r^2 - x^2}$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها نقطة الأصل $(0 , 0)$ وطول نصف قطرها r

$\therefore$ المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كُرة.

77

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة و معالجتها

قد يخطئ الطلاب في:

(a) إيجاد طرح الدالتين قبل التربيع.

(b) استخدام إحدى الدالتين فقط.

(c) إهمال π عند كتابة قانون الحجم.

(d) تحديد وضع المنحنيين.

8 التقييم

تابع الطلاب بدقة وهم يتعاملون مع فقرات «دعنا نفكر ونتناقش» و«حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قادرين على ملاحظة دوران المنطقة وتطبيق القاعدة لإيجاد الحجم.

اختبار سريع

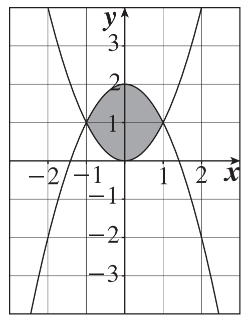
❶ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المستوية المحددة بين: $x=-1$ ، $x=3$ ، محور السينات ومنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$

$V=\int_{-1}^{3}\pi\, f(x)^2\,dx$

$V=\pi\int_{-1}^{3}(x+1)dx = 8\pi$ units cube

❷ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المستوية المحددة بمنحنيي الدالتين:

$$f(x)=x^2 \;,\; g(x)=-x^2+2$$



المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين.

نوجد التقاطع:

$f(x)=g(x)$

$x^2=-x^2+2$

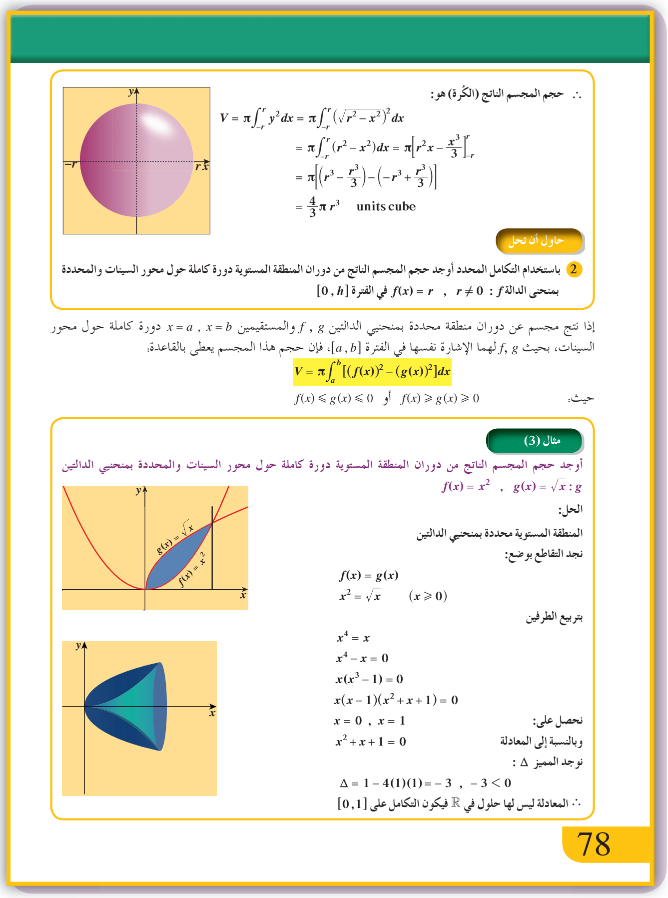
$x=\pm1 \quad 2x^2=2 \;;\; x^2=1$

فيكون التكامل على الفترة $[-1,1]$

والحجم: $V=\pi\int_{-1}^{1}[(g(x))^2-(f(x))^2]dx$

$V=\pi\int_{-1}^{1}[(-x^2+2)^2-(x^2)^2]dx$

$=\pi\int_{-1}^{1}(-4x^2+4)dx=\frac{16}{3}\pi$ units cube



$\therefore$ حجم المجسم الناتج (الكُرة) هو:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$
$$=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$
$$=\pi\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right]$$
$$=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{units cube}$$

حاول أن تحل

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r\neq 0$, $f(x)=r$ في الفترة $[0,h]$

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x=b$, $x=a$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a,b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$$V=\pi\int_{a}^{b}[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$$

حيث: $f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0$ أو $f(x)\leqslant g(x)\leqslant 0$

مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين g : $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x^2$

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$f(x)=g(x)$

$x^2=\sqrt{x} \qquad (x\geqslant 0)$

بتربيع الطرفين

$x^4=x$

$x^4-x=0$

$x(x^3-1)=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

نحصل على: $x=0$, $x=1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2+x+1=0$

نوجد المميز Δ :

$\Delta=1-4(1)(1)=-3$, $-3<0$

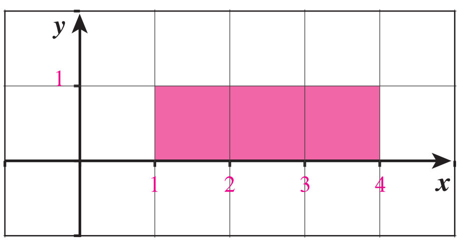
$\therefore$ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0,1]$

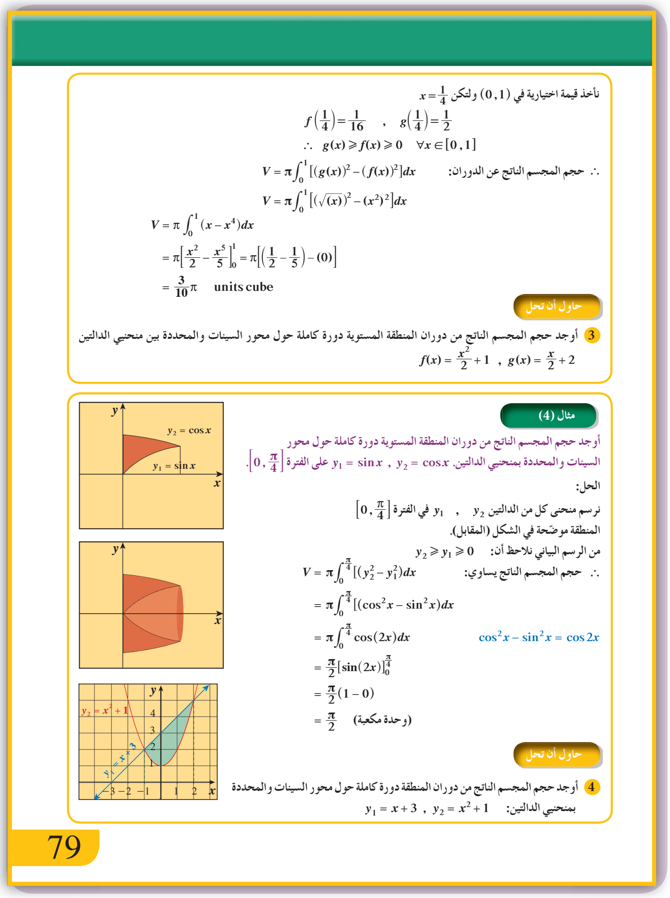
78

9 إجابات وحلول

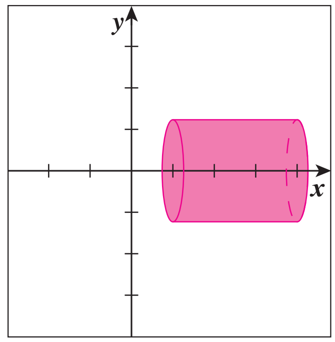
«دعنا نفكر ونتناقش»

❶ (b)، (a)





(c)



المجسم الناتج هو «أسطوانة».

(d) حجم المجسم الناتج من الدوران هو:

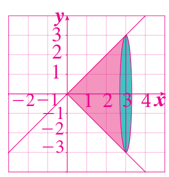
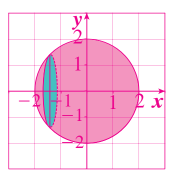
$$V=\pi r^2 \times h$$

$$=\pi(1)^2 \times 3=3\pi \quad \text{(وحدة مكعبة)}$$

(e) $\int_1^4 \pi(1)^2 dx=\pi[x]_1^4=3\pi$

(f) نلاحظ من **(e)**، **(d)** أنّ حجم المجسّم الناتج من الدوران يساوي: $V=\int_1^4 \pi(f(x))^2 dx$

2

الدالة	الفترة	منحنى الدالة	اسم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية	حجم المجسّم	$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$
$f(x)=x$	$[0,3]$		مخروط	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ $V=\frac{1}{3}\pi \times 9 \times 3$ $V=9\pi$ units cube	$\int_0^3 \pi x^2 dx$ $=\frac{\pi}{3}[x^3]_0^3=9\pi$
$f(x)=\sqrt{4-x^2}$	$[-2,2]$		كرة	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $V=\frac{32}{3}\pi$ units cube	$\pi\int_{-2}^2(4-x^2)dx$ $=\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2=\frac{32}{3}\pi$

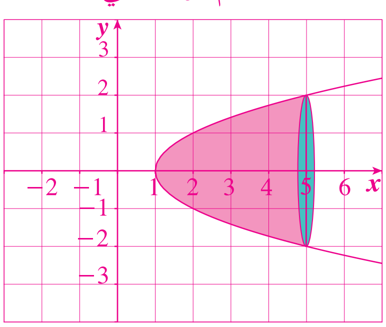
«حاول أن تحل»

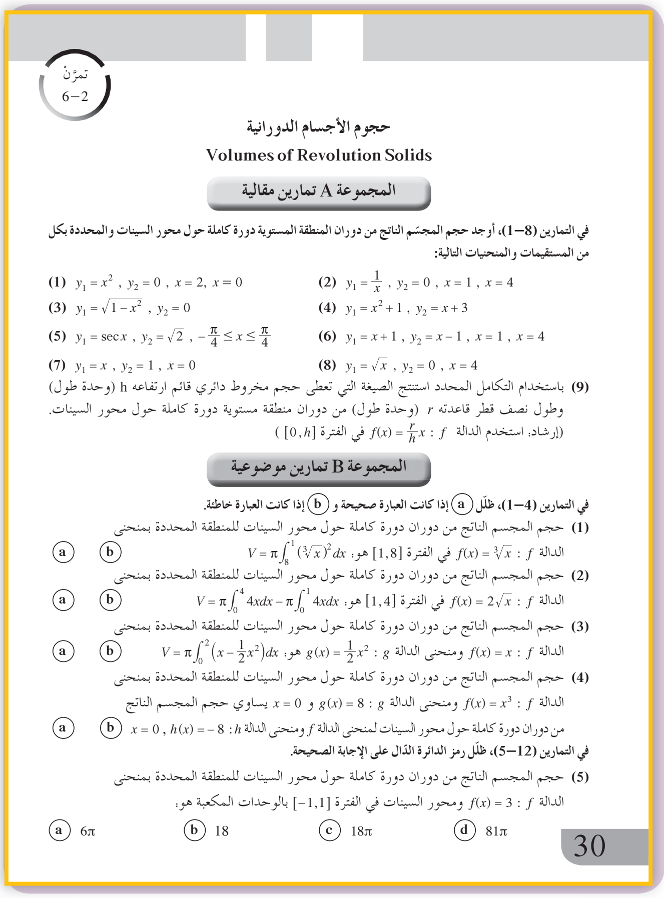
1 حجم المجسم يساوي:

$$V=\int_1^5 \pi(f(x))^2 dx$$

$$=\pi\int_1^5(\sqrt{x-1})^2 dx=8\pi \quad \text{(وحدة مكعّبة)}$$

رسم توضيحي





تمرَّنْ 6−2

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8−1)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

(1) $y_1 = x^2\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 2,\ x = 0$

(2) $y_1 = \frac{1}{x}\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 1\ ,\ x = 4$

(3) $y_1 = \sqrt{1-x^2}\ ,\ y_2 = 0$

(4) $y_1 = x^2+1\ ,\ y_2 = x+3$

(5) $y_1 = \sec x\ ,\ y_2 = \sqrt{2}\ ,\ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

(6) $y_1 = x+1\ ,\ y_2 = x-1\ ,\ x = 1\ ,\ x = 4$

(7) $y_1 = x\ ,\ y_2 = 1\ ,\ x = 0$

(8) $y_1 = \sqrt{x}\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 4$

(9) باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطى حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه h (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته r (وحدة طول) من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات.
(إرشاد: استخدم الدالة f : $f(x) = \frac{r}{h}x$ في الفترة $[0,h]$)

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V = \pi\int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx$ (a) (b)

(2) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V = \pi\int_0^4 4x dx - \pi\int_0^1 4x dx$ (a) (b)

(3) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ هو: $V = \pi\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)dx$ (a) (b)

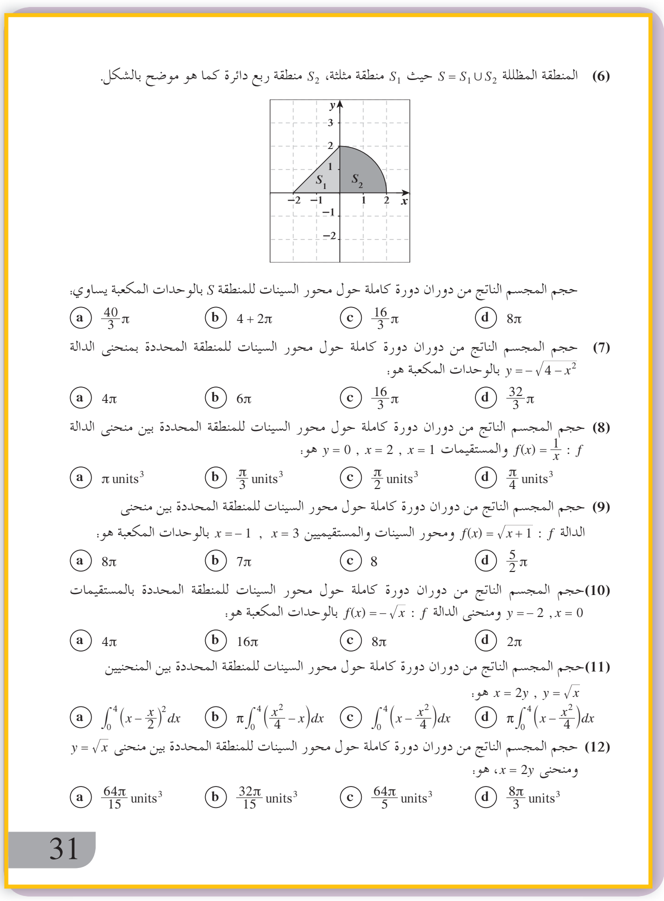
(4) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 8$ و $x = 0$ يساوي حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة h: $h(x) = -8$, $x = 0$ (a) (b)

في التمارين (12−5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 6π (b) 18 (c) 18π (d) 81π

30



(6) المنطقة المظللة $S = S_1 \cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.

حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4+2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) 8π

(7) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = -\sqrt{4-x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 6π (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $\frac{32}{3}\pi$

(8) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ والمستقيمات $x = 1\ ,\ x = 2\ ,\ y = 0$ هو:

(a) π units^3 (b) $\frac{\pi}{3}$ units^3 (c) $\frac{\pi}{2}$ units^3 (d) $\frac{\pi}{4}$ units^3

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3\ ,\ x = -1$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 8π (b) 7π (c) 8 (d) $\frac{5}{2}\pi$

(10) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات $x = 0\ ,\ y = -2$ ومنحنى الدالة f : $f(x) = -\sqrt{x}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 16π (c) 8π (d) 2π

(11) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}\ ,\ x = 2y$ هو:

(a) $\int_0^4 \left(x - \frac{x}{2}\right)^2 dx$ (b) $\pi\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right)dx$ (c) $\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx$ (d) $\pi\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx$

(12) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى $y = \sqrt{x}$ ومنحنى $x = 2y$، هو:

(a) $\frac{64\pi}{15}$ units^3 (b) $\frac{32\pi}{15}$ units^3 (c) $\frac{64\pi}{5}$ units^3 (d) $\frac{8\pi}{3}$ units^3

31

2 $A = \int_0^h \pi(f(x))^2 dx = \int_0^h \pi r^2 dx$

$= [\pi r^2 x]_0^h = \pi r^2 \times h$ (وحدة مكعّبة)

3 نوجد نقاط التقاطع بوضع $f(x) = g(x)$

$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2 \qquad x = -1\ ,\ x = 2$

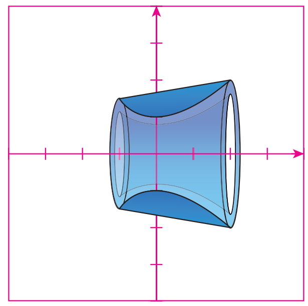
$(g(x)) \ge (f(x)) \qquad \forall x \in [-1,2]$

$V = \pi\int_{-1}^2 [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$

$= \pi\int_{-1}^2 \left[\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2\right]dx;$

$= \frac{81\pi}{10}$ (وحدة مكعّبة)

رسم توضيحي



4 نوجد نقاط التقاطع بوضع $y_1 = y_2$

$x + 3 = x^2 + 1 \qquad x = -1\ ,\ x = 2$

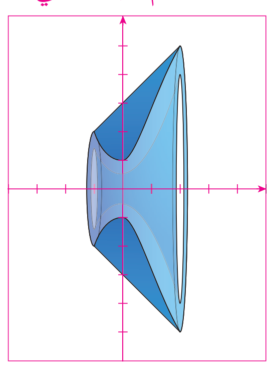
$\because\ y_1 \geqslant y_2 \quad \forall x \in [-1,2]$

$\therefore\ V = \pi\int_{-1}^2 [y_1^2 - y_2^2]dx$

$= \pi\int_{-1}^2 [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]dx$

$= \frac{117\pi}{5}$ (وحدة مكعّبة)

رسم توضيحي



3–6: طول قوس ومعادلة منحنى دالة

1 الأهداف

- يوجد طول قوس من منحنى الدالة.
- يوجد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس ونقطة تنتمي إلى بيان الدالة.
- يوجد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل العمودي ونقطة تنتمي للمنحنى.
- يوجد معادلة منحنى دالة بمعلومية المشتقة الثانية للدالة ونقطة تنتمي للمنحنى.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

طول قوس – معادلة منحنى دالة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد المشتقة الأولى $f'(x)$ والمشتقة الثانية $f''(x)$ للدالة f في كلّ من الحالات التالية:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 7$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

(2) أوجد: $\int_1^3 \sqrt{7+5x}\,dx$

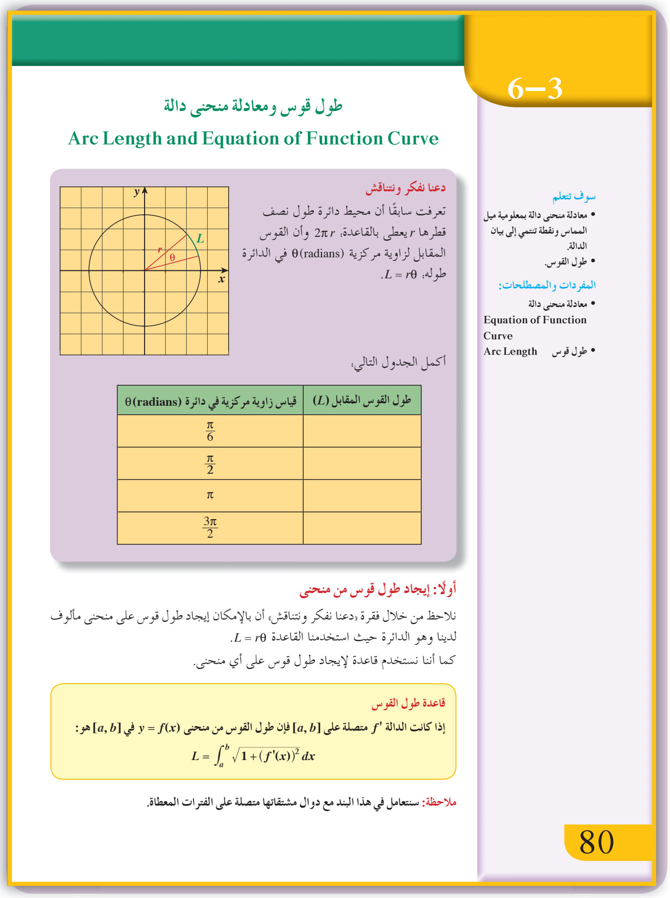
(3) أوجد: $f(x)$ حيث $f''(x) = 2x$

عند $f'(1) = 2$ ، $f(1) = \frac{7}{3}$

5 التدريس

يستخدم الطلاب في هذا الدرس المشتقات والتكامل المحدد لإيجاد طول قوس من منحنى دالة $f(x)$ في فترة محددة. ويوجد الطلاب معادلة منحنى دالة بمعلومية الميل عند أي نقطة $P(x, y)$، ثم يوجد هذه المعادلة بمعلومية نقطة محددة تنتمي إليه.

ناقش مع الطلاب كيفية الحصول على معادلة منحنى بمعلومية المشتقة الثانية ونقطة حرجة.



6–3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة

Arc Length and Equation of Function Curve

سوف تتعلم

- معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس ونقطة تنتمي إلى بيان الدالة.
- طول القوس.

المفردات والمصطلحات:

- معادلة منحنى دالة Equation of Function Curve
- طول قوس Arc Length

دعنا نفكر ونتناقش

تعرفت سابقًا أن محيط دائرة طول نصف قطرها r يعطى بالقاعدة: $2\pi r$ وأن القوس المقابل لزاوية مركزية θ(radians) في الدائرة طوله: $L = r\theta$.

أكمل الجدول التالي:

طول القوس المقابل (L)	قياس زاوية مركزية في دائرة θ(radians)
	$\frac{\pi}{6}$
	$\frac{\pi}{2}$
	π
	$\frac{3\pi}{2}$

أولًا: إيجاد طول قوس من منحنى

نلاحظ من خلال فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن بالإمكان إيجاد طول قوس على منحنى مألوف لدينا وهو الدائرة حيث استخدمنا القاعدة $L = r\theta$.

كما أننا نستخدم قاعدة لإيجاد طول قوس على أي منحنى.

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

ملاحظة: سنتعامل في هذا البند مع دوال مشتقاتها متصلة على الفترات المعطاة.

80

في المثالين (2), (1)

قبل البدء بالمثالين (2) ,(1)، تأكّد من أنّ الطلاب يعرفون قاعدة طول القوس.

لتطبيق هذه القاعدة، علينا أولًا إيجاد $f'(x)$ ومن ثم

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

في المثالين (4), (3)

ذكّر الطلاب أنّ ميل منحنى الدالة f عند $x = x_0$ هو $f'(x_0)$. إذًا فإنّ ميل منحنى الدالة f عند أي نقطة $(x, f(x))$ هو $f'(x)$ ولإيجاد معادلة منحنى الدالة f علينا إيجاد $\int f'(x)\,dx$.

لاحظ أن معادلة الدالة f تتضمّن ثابتًا C لمعرفته يجب التعويض بإحداثيات نقطة معلومة يمرّ بها منحنى الدالة f.

في المثال (5)

إنّ ميل العمودي على منحنى دالة f هو $\frac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$ في هذا المثال يجب أن نوجد $f'(x)$ من خلال ميل العمودي ثمّ $f(x) = \int f'(x)\,dx$.

يمكننا إيجاد الثابت C الناتج من إيجاد تكامل $f'(x)$ بالتعويض بإحداثيات النقطة المعطاة.

في المثال (6)

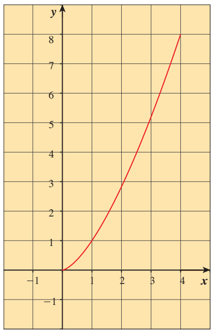
علينا أوّلًا إيجاد $f'(x)$ وذلك بإيجاد تكامل $f''(x)$.

لاحظ أنّ معادلة المشتقة الأولى f' تتضمّن ثابتًا C، لمعرفته يجب الاستعانة بالنقطة الحرجة $(-1, 15)$ $\therefore$ $f'(-1) = 0$. ثمّ علينا إيجاد $f(x)$ وذلك بإيجاد تكامل $f'(x)$.

لاحظ أنّ معادلة الدالة f تتضمّن ثابتًا C، لمعرفته يجب التعويض بإحداثيات النقطة الحرجة.

مثال (1)

في الشكل، أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 4]$



الحل:

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad (x^n)' = nx^{n-1}$

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx$$

لإيجاد التكامل نستخدم قاعدة التعويض

$g(x) = 1 + \frac{9}{4}x$

$g'(x) = \frac{9}{4}$

$$L = \frac{4}{9}\int_0^4 \frac{9}{4}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$L = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}(4)\right)^3} - \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}(0)\right)^3}\right]$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

$L \approx 9.07$ units

حاول أن تحل

1 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

81

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقّعة ومعالجتها

عند إيجاد طول القوس، قد يخطئ الطلاب في إيجاد التكامل $\int_a^b u'\sqrt{u}\,dx$.

أخبرهم أنّ: $\int_a^b u' u^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_a^b$

8 التقييم

تابع الطلّاب وهم يعملون على فقرات «دعنا نفكر ونتناقش» و«حاول أن تحل» لتتحقّق من قدرتهم على إيجاد الحلول وتطبيق القواعد بشكل صحيح.

اختبار سريع

❶ أوجد طول قوس من منحنى الدالة f:

$f(x)=\sqrt{(2x+1)^3}$ في الفترة $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

$$f(x)=(2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}\times 2=3(2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\left[3(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+9(2x+1)}\,dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+18x+9}\,dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\sqrt{10+18x}\,dx$$

لإيجاد التكامل نستخدم قاعدة التعويض:

$$u=10+18x$$

$$du=18dx$$

$$dx=\frac{1}{18}du$$

$$L=\frac{1}{18}\times\frac{2}{3}\left[\sqrt{(10+18x)^3}\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$L=\frac{56}{27}\text{ units}$$

❷ أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $(x, f(x))$ يساوي $4x^2+3x-2$ ويمرّ بالنقطة $A(2,1)$.

$$f'(x)=4x^2+3x-2$$

$$f(x)=\int(4x^2+3x-2)dx$$

$$f(x)=\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x+C$$

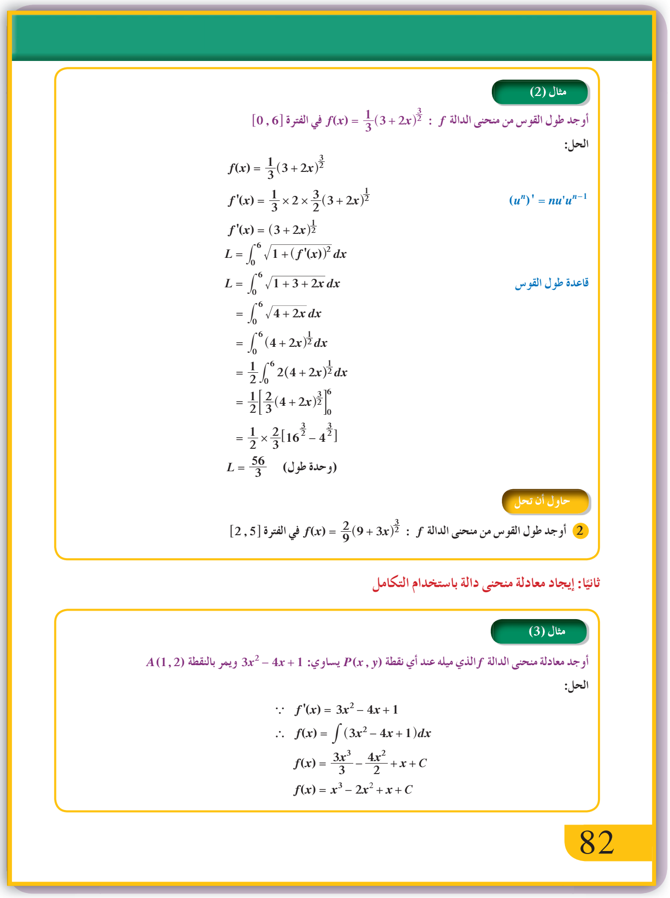
لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $A(2,1)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$1=\frac{4}{3}(2)^3+\frac{3}{2}(2)^2-2(2)+C$$

$$C=\frac{-35}{3}$$

معادلة المنحنى للدالة f المطلوبة هي:

$$f(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x-\frac{35}{3}$$



مثال (2)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 6]$

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{3}{2}(3+2x)^{\frac{1}{2}}$$ $(u^n)'=nu'u^{n-1}$

$$f'(x)=(3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_0^6\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$L=\int_0^6\sqrt{1+3+2x}\,dx$$ قاعدة طول القوس

$$=\int_0^6\sqrt{4+2x}\,dx$$

$$=\int_0^6(4+2x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^6 2(4+2x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[16^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right]$$

$L=\frac{56}{3}$ (وحدة طول)

حاول أن تحل

2 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2, 5]$

ثانيًا: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

مثال (3)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي: $3x^2-4x+1$ ويمر بالنقطة $A(1,2)$

الحل:

$$\because\ f'(x)=3x^2-4x+1$$

$$\therefore\ f(x)=\int(3x^2-4x+1)dx$$

$$f(x)=\frac{3x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+x+C$$

$$f(x)=x^3-2x^2+x+C$$

82

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

طول القوس المقابل (L)	قياس زاوية مركزية في دائرة $\theta(\text{radians})$
$\frac{\pi}{6} \times r = \frac{\pi}{2} r$ (وحدة طول)	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{2} r$ (وحدة طول)	$\frac{\pi}{2}$
πr (وحدة طول)	π
$\frac{3\pi}{2} r$ (وحدة طول)	$\frac{3\pi}{2}$

«حاول أن تحل»

1 $f(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 1$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_3^8 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_3^8 \sqrt{1 + x}\, dx$$

لإيجاد التكامل نستخدم قاعدة التعويض:

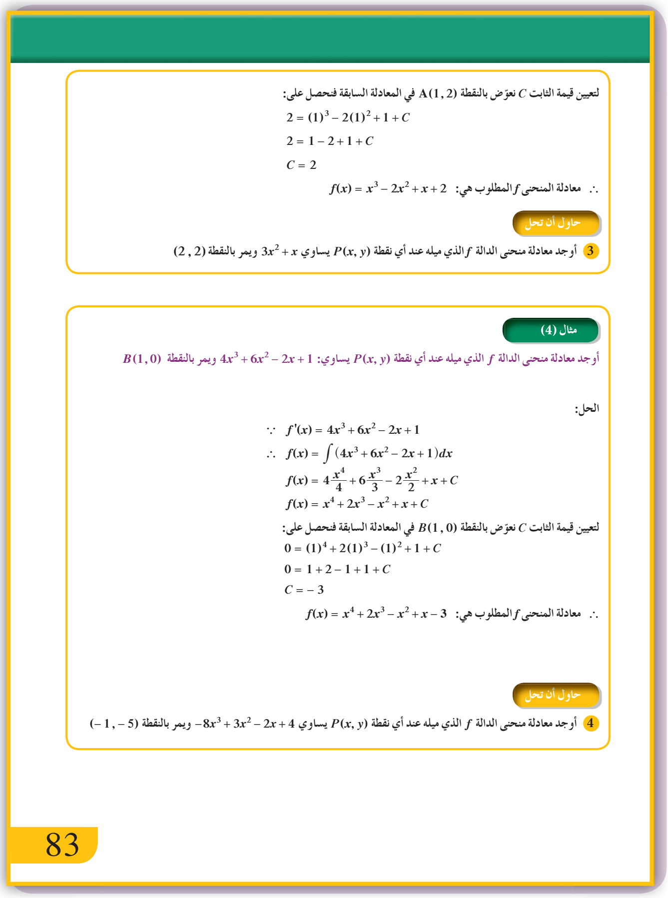
$$u = 1 + x$$

$$du = dx$$

$$dx = du$$

$$L = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(1+x)^3}\right]_3^8 = \frac{2}{3}\left[(1+x)\sqrt{1+x}\right]_3^8$$

$$= \frac{38}{3} \quad \text{(وحدة طول)}$$



لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $A(1, 2)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$2 = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + C$$

$$2 = 1 - 2 + 1 + C$$

$$C = 2$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$

مثال (4)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي: $4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $B(1, 0)$

الحل:

$$\because\ f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore\ f(x) = \int (4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)\, dx$$

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + C$$

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $B(1, 0)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$0 = (1)^4 + 2(1)^3 - (1)^2 + 1 + C$$

$$0 = 1 + 2 - 1 + 1 + C$$

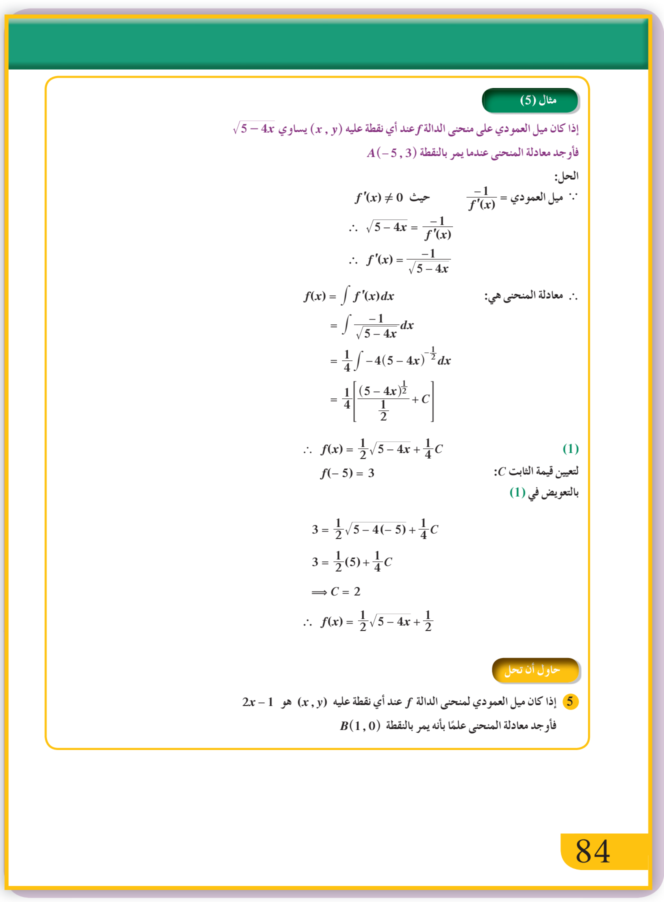
$$C = -3$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي: $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 3$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

83



مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) يساوي $\sqrt{5 - 4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5, 3)$

الحل:

$\because$ ميل العمودي $= \frac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$\therefore\ \sqrt{5 - 4x} = \frac{-1}{f'(x)}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5 - 4x}}$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي: $f(x) = \int f'(x)\, dx$

$$= \int \frac{-1}{\sqrt{5 - 4x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int -4(5 - 4x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{(5 - 4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C\right]$$

(1) $\therefore\ f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4x} + \frac{1}{4} C$

لتعيين قيمة الثابت C: $f(-5) = 3$

بالتعويض في (1)

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4(-5)} + \frac{1}{4} C$$

$$3 = \frac{1}{2}(5) + \frac{1}{4} C$$

$$\Longrightarrow C = 2$$

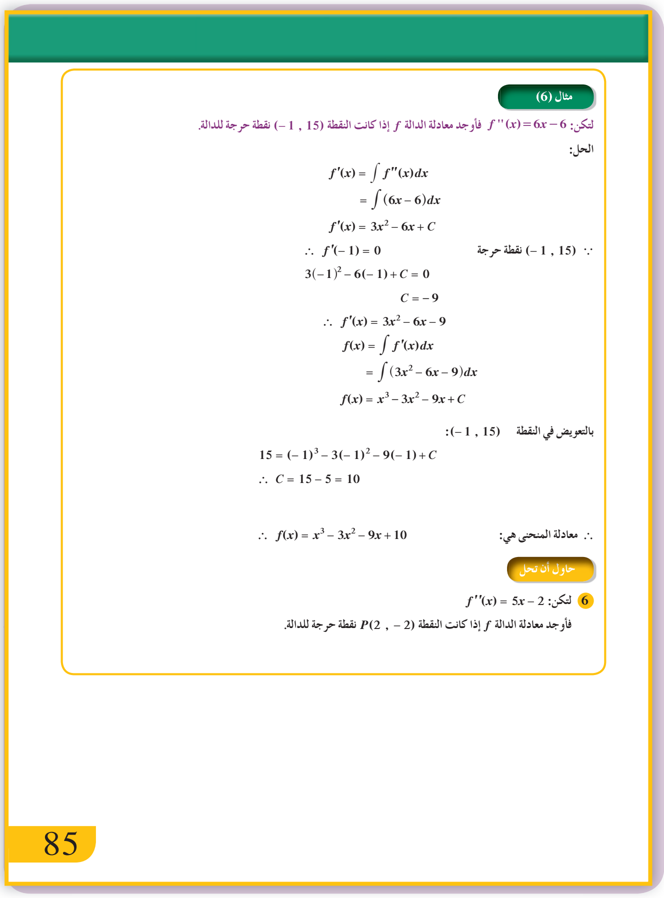
$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 4x} + \frac{1}{2}$$

حاول أن تحل

5 إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x - 1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1, 0)$

84


مثال (6)

لتكن: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $(-1 , 15)$ نقطة حرجة للدالة.

الحل:

$$f'(x) = \int f''(x)dx$$
$$= \int (6x - 6)dx$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + C$$

$\because$ $(-1 , 15)$ نقطة حرجة $\quad \therefore \; f'(-1) = 0$

$$3(-1)^2 - 6(-1) + C = 0$$
$$C = -9$$
$$\therefore \; f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$f(x) = \int f'(x)dx$$
$$= \int (3x^2 - 6x - 9)dx$$
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

بالتعويض في النقطة $(-1 , 15)$:

$$15 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + C$$
$$\therefore \; C = 15 - 5 = 10$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي: $\quad \therefore \; f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

حاول أن تحل

6 لتكن: $f''(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2 , -2)$ نقطة حرجة للدالة.

85

2 $$f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{9} \times 3 \times \frac{3}{2}(9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = (9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_2^5 \sqrt{1+9+3x}\,dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{10+3x}\,dx$$

$$= \int_2^5 (10+3x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(10+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\left[25^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{122}{9} \quad \text{(وحدة طول)}$$

3 $$f'(x) = 3x^2 + x$$

$$f(x) = \int (3x^2 + x)dx$$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $(2 , 2)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$2 = 2^3 + \frac{2^2}{2} + C$$

$$2 = 8 + 2 + C$$

$$C = -8$$

معادلة المنحنى للدالة f هي:

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

4

$$f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$$f(x) = \int (-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4)dx$$

$$f(x) = -\frac{8x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x + C$$

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $(-1,-5)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$-5 = -2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + C$$

$$-5 = -2 - 1 - 1 - 4 + C$$

$$C = 3$$

معادلة المنحنى f المطلوب هي:

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 3$$

5 $\therefore$ ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$\therefore \quad 2x - 1 = \frac{-1}{f'(x)}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{-1}{2x-1}$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{2x-1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx$$

$$\therefore \quad f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C \qquad \textbf{(1)}$$

لتعيين قيمة C بالتعويض في **(1)**

$$f(1) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\ln|2-1| + C = 0$$

$$-\frac{1}{2}\ln 1 + C = 0$$

$$C = 0$$

ومعادلة منحنى الدالة f هي:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x-1|$$

تمرَّنْ
6−3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة
Arc Length and Equation of Function Curve

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, \frac{1}{3}]$.

(2) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(7+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[1, \frac{5}{4}]$.

(3) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ في الفترة $[1, 2]$.

(4) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-x^2 + 2x - 4$ ويمر بالنقطة $A(3,7)$

(5) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-4x^3 + 2x + 5$ ويمر بالنقطة $A(1,3)$

(6) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{5}{2}\right)$

(7) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{2\pi}{9}, \frac{7}{6}\right)$

(8) إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x + 5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2,3)$

(9) لتكن: $f''(x) = 12x^2 - 24x - 1$
أوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة عظمى محلية عند $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{16}\right)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

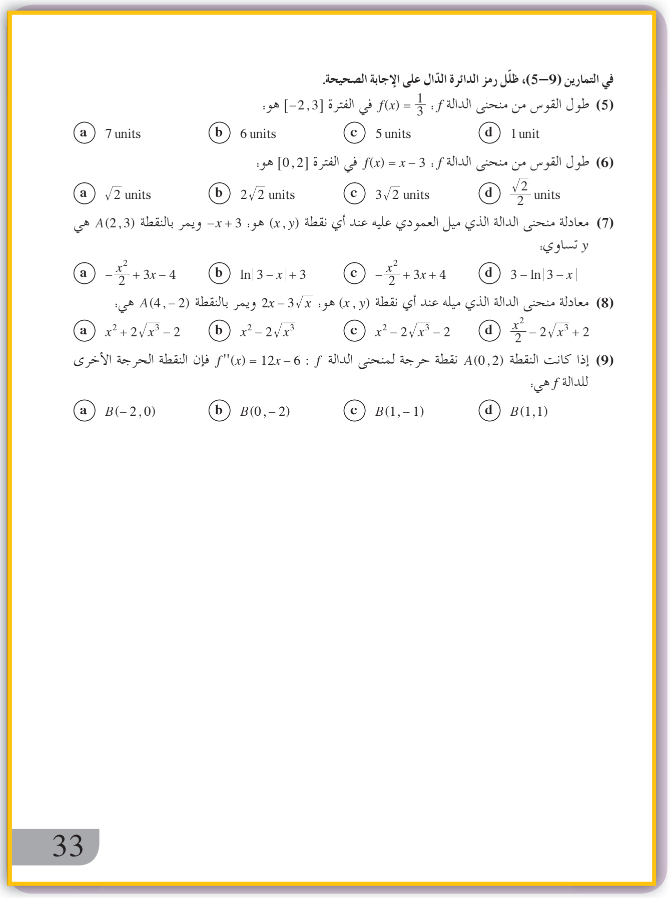
(1) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 1]$ هو $L = \frac{2}{3}$ وحدة طول. (a) (b)

(2) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $x^3 + 2$ ويمر بالنقطة $A(2,6)$ معادلته: $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 2$ (a) (b)

(3) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-\sqrt{x} + x$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلته: $f(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{3}$ (a) (b)

(4) لتكن $A(1,3)$ نقطة على منحنى الدالة f : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ فإن معادلة الدالة f هي $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (a) (b)

32



في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو:

a) 7 units b) 6 units c) 5 units d) 1 unit

(6) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=x-3$ في الفترة $[0,2]$ هو:

a) $\sqrt{2}$ units b) $2\sqrt{2}$ units c) $3\sqrt{2}$ units d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

(7) معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي:

a) $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ b) $\ln|3-x|+3$ c) $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ d) $3-\ln|3-x|$

(8) معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

a) $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ b) $x^2-2\sqrt{x^3}$ c) $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ d) $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

(9) إذا كانت النقطة $A(0,2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f : $f''(x)=12x-6$ فإن النقطة الحرجة الأخرى للدالة f هي:

a) $B(-2,0)$ b) $B(0,-2)$ c) $B(1,-1)$ d) $B(1,1)$

33

6
$$f'(x)=\int f''(x)\,dx$$
$$=\int (5x-2)\,dx$$
$$f'(x)=\frac{5x^2}{2}-2x+C_1$$

$\because$ $P(2,-2)$ نقطة حرجة

$$f'(2)=0$$
$$\therefore\ \frac{5}{2}(2)^2-2(2)+C_1=0$$
$$C_1=-6$$
$$\therefore\ f'(x)=\frac{5}{2}x^2-2x-6$$
$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int\left(\frac{5}{2}x^2-2x-6\right)dx$$
$$f(x)=\frac{5}{6}x^3-x^2-6x+C_2$$

بالتعويض في النقطة $P(2,-2)$

$$-2=\frac{5}{6}(2)^3-(2)^2-6(2)+C_2$$
$$\therefore\ C_2=\frac{22}{3}$$

معادلة المنحنى هي:

$$f(x)=\frac{5}{6}x^3-x^2-6x+\frac{22}{3}$$

6–4: المعادلات التفاضلية

6–4

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

سوف تتعلم
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية.

المفردات والمصطلحات:
- معادلة تفاضلية

Differential Equation

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y = f(x) = 5e^{2x} + 4$

(a) أوجد المشتقة من الرتبة الأولى y' للدالة $y = f(x)$

(b) أثبت أن y' , y تحققان المعادلة: $y' - 2y + 8 = 0$

(c) لنأخذ الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y = g(x) = x^2 + 4$،
أوجد علاقة بين y' , y مستقلة عن المتغير x.

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.
نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

فمثلًا:

$y' = xy$ ، $y' = -8$ ، $y' - 2y = x - 1$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

$y'' = -8$ ، $y'' + 2xy' - y = 0$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

ولكن $y - 2x = 5$ هي ليست بمعادلة تفاضلية.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

فمثلًا:

$y'' + (y')^2 + y = 1$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

$(y')^2 = \frac{4x}{y}$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

$(y'')^3 + x^4y' + e^xy = 0$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة.

86

1 الأهداف

- يوجد حل لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.
- يوجد حل لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة تفاضلية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد مجموعة الحل لكل معادلة ممّا يلي:

(a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

(b) $x^2 + 14x + 49 = 0$

(c) $x^2 - 6x + 25 = 0$

(2) أوجد علاقة بين y، y' مستقلة عن x وعن k في المعادلة: $y = ke^{2x} + 5$.

5 التدريس

يتعرف الطالب في هذا البند على مبادئ أولية للمعادلات التفاضلية ورتبتها ودرجتها والتمييز بينهما، ثم أخبرهم أن هذه المعادلات تختلف في حلولها عن تلك التي تعلمها سابقًا. إذ أنه كان يبحث عن قيمة المتغير x التي تحقق معادلة من الدرجة الأولى، أو الدرجة الثانية، ... وقيم المتغير التي تحقق معادلة من درجات أكبر، ولكن في المعادلة التفاضلية سوف يبحث الطالب عن قيمة أو قيم المتغير التابع y التي تحقق المعادلة.


تدريب:

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' = 5y$		
$y'^2 = \frac{4x}{y}$		
$y'' = 5y' + xy$		
$(y'')^2 = 1 + (y')^3$		
$y''' = (y')^2 + x^3$		

حل المعادلات التفاضلية هو إيجاد دوال تحقق مع مشتقاتها هذه المعادلات.
وسنقتصر في دراستنا على حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

مثال (1)

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

الحل:

أوجد المشتقة من الدرجة الأولى: $y = e^{x^2}$

$(e^u)' = u'e^u$ $y' = 2x\,e^{x^2}$

عوّض y , y' بقيمتيهما في المعادلة التفاضلية $2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 0$

الدالة $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

حاول أن تحل

1 أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

هناك بعض القواعد التي تساعد في حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

I المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)dx$

87

في المثال (1)

المطلوب هو التأكد من أن قيمة معينة للمتغير التابع y هي حلّ للمعادلة التفاضلية. أكّد للطلاب أننا سنتطرق فقط لحل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

في المثالين (2), (3)

المعادلة التفاضلية $y' = 3x^2 - 1$ هي على الصورة $y' = f(x)$. لإيجاد حل عام لها يجب أن يستخدم القاعدة الأولى وهي إيجاد تكامل الدالة f أي $y = \int f(x)\,dx$، ومن ثم يمكننا إيجاد حلّ خاص إذا أضيف إلى المعطيات قيمة ابتدائية للمتغير المستقل والمتغير التابع وذلك لإيجاد قيمة واحدة للثابت الناتج عن حل المعادلة.

في المثال (4)

المعادلة في (a) هي على الصورة $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$.
لإيجاد حلولها، علينا فصل المتغيرات بالصورة التالية:
$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)\,dx$ وهي القاعدة الثانية ومن ثم نكامل الطرفين $\left(\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)\,dx\right)$ وصولاً إلى حل المعادلة وهو إيجاد y.

اشرح للطلاب كيفية الوصول إلى الحل وأخبرهم أنه من (b) يمكن استخدام القاعدة مباشرة. وهي تمهد للقاعدة الثالثة كما في مثال (5).

في المثال (5)

يمكننا إيجاد حل خاص للمعادلة $y' = 4y$ باستخدام القاعدة الثالثة وذلك بإضافة المعطيات $y = 2$, $x = 0$ إذ نعوّض في الحل $y = ke^{4x}$ عن x , y بالقيمة المعطاة لإيجاد الثابت k.

في المثال (6)

المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ التي يمكن كتابتها $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$، هي على الصورة $y' = ay + b$ وهي القاعدة الرابعة.

حلولها هي $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k ثابت يمكن إيجاده بتعويض y , x بقيمتيهما المعطاة.

في المثال (7)

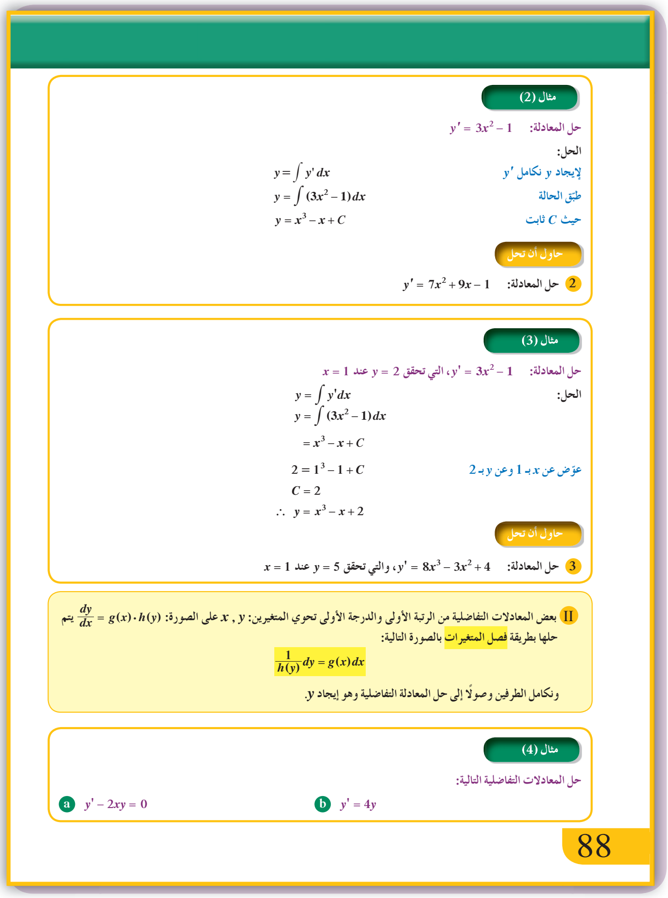
المعادلة التفاضلية $y'' = 3x^2 - 2x$ هي من الرتبة الثانية، وهي على الصورة $y'' = f(x)$ وهي القاعدة الخامسة.

يتمّ حلّ هذه المعادلة بإيجاد $y' = \int f(x)dx$ أولًا، ثم بإيجاد $y = \int y'dx$.

في الأمثلة (8), (9), (10)

المعادلة التفاضلية التي على الصورة $ay'' + by' + cy = 0$ هي من الرتبة الثانية ومهم جدًّا ترتيبها وذلك لكتابة المعادلة المميزة على الصورة: $ar^2 + br + c = 0$

ركّز انتباههم على الحلول العامة.



مثال (2)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$

الحل:

لإيجاد y نكامل y' $\quad y = \int y'\,dx$

طبّق الحالة $\quad y = \int (3x^2 - 1)\,dx$

حيث C ثابت $\quad y = x^3 - x + C$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

مثال (3)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

الحل:

$y = \int y'dx$

$y = \int (3x^2 - 1)\,dx$

$= x^3 - x + C$

عوّض عن x بـ 1 وعن y بـ 2 $\quad 2 = 1^3 - 1 + C$

$C = 2$

$\therefore \; y = x^3 - x + 2$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

II بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: y , x على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)\,dx$$

ونكامل الطرفين وصولًا إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد y.

مثال (4)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

a $y' - 2xy = 0$ b $y' = 4y$

88

6 الربط

تطبيق حياتي يوفر الربط بين المعادلات التفاضلية ومجال علوم الأحياء.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام القاعدة لحل معادلة من الرتبة الأولى على الصورة $y' = ay + b$. أخبرهم أنه كي يستخدم القاعدة: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ يجب ترتيب المعادلة على الصورة $y' = ay + b$. فمثلًا، لا يمكن تطبيق القاعدة على المعادلة: $2y' - 5y + 7 = 0$ ولكن يمكن كتابتها على الصورة: $y' = \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}$ وهكذا يمكن معرفة قيمة كلّ من a, b في القاعدة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من قدرتهم على إيجاد الحلول للمعادلات التفاضلية وتطبيق القواعد بشكل صحيح على كل حالة.

اختبار سريع

1. أوجد حلّ المعادلة: $3y' - 5y + 2 = 0$ بحيث إن $y = 2$ عند $x = 0$.

نكتب: $y' = \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}$

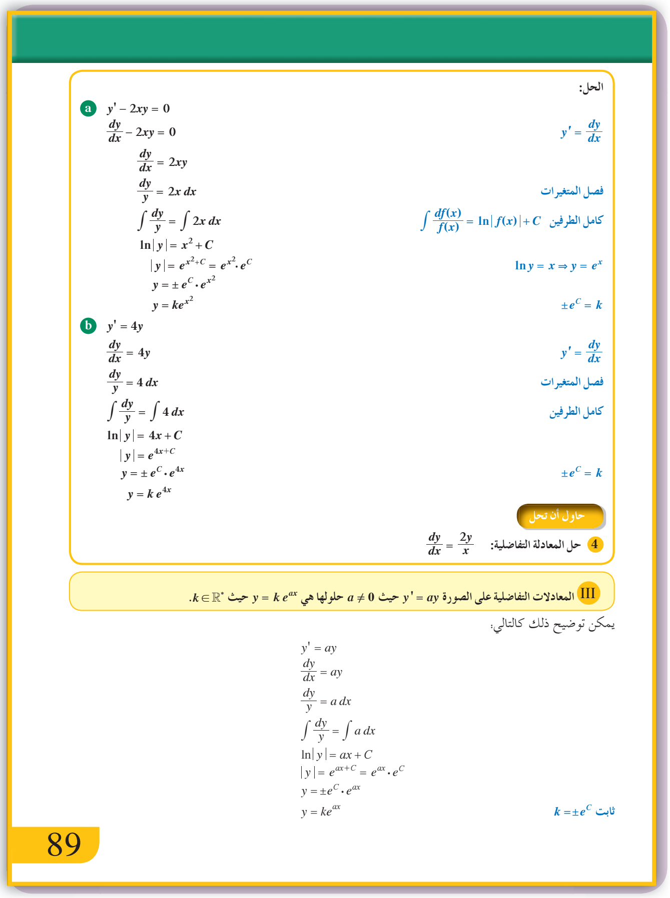
الحل العام:

$$y = ke^{\frac{5}{3}x} - \left(\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\right) \quad \text{أي} \quad y = ke^{\frac{5}{3}x} + \frac{2}{5}$$

ومنه $2 = k + \frac{2}{5}$ نحصل على $k = \frac{8}{5}$

الحل الخاص:

$$y = \frac{8}{5}e^{\frac{5}{3}x} + \frac{2}{5}$$



الحل:

a
$y' - 2xy = 0$
$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ — $y' = \frac{dy}{dx}$
$\frac{dy}{dx} = 2xy$
$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$ — فصل المتغيرات
$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$ — كامل الطرفين $\int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$
$\ln|y| = x^2 + C$
$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C$ — $\ln y = x \Rightarrow y = e^x$
$y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$
$y = ke^{x^2}$ — $\pm e^C = k$

b
$y' = 4y$
$\frac{dy}{dx} = 4y$ — $y' = \frac{dy}{dx}$
$\frac{dy}{y} = 4\,dx$ — فصل المتغيرات
$\int \frac{dy}{y} = \int 4\,dx$ — كامل الطرفين
$\ln|y| = 4x + C$
$|y| = e^{4x+C}$
$y = \pm e^C \cdot e^{4x}$ — $\pm e^C = k$
$y = k\,e^{4x}$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

III المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $y = k\,e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

يمكن توضيح ذلك كالتالي:

$y' = ay$
$\frac{dy}{dx} = ay$
$\frac{dy}{y} = a\,dx$
$\int \frac{dy}{y} = \int a\,dx$
$\ln|y| = ax + C$
$|y| = e^{ax+C} = e^{ax} \cdot e^C$
$y = \pm e^C \cdot e^{ax}$
$y = ke^{ax}$ — ثابت $k = \pm e^C$

89

2 أوجد حلّ المعادلة: $y'' - 5y' + 4y = 0$

المعادلة المميزة:

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$

$$r_1 = 1 \ , \ r_2 = 4$$

وبالتالي:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$$

3 أوجد حلّ المعادلة: $y'' - 2y' + 5y = 0$

المعادلة المميزة:

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = 16i^2$$

$$r_1 = 1 - 2i \ , \ r_2 = 1 + 2i$$

وبالتالي:

$$y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $y' = f'(x) = 10e^{2x}$

(b) $y' - 2y + 8 = 10e^{2x} - 2(5e^{2x} + 4) + 8$

$$= 10e^{2x} - 10e^{2x} - 8 + 8 = 0$$

إذًا y , y' تحقّقان المعادلة $y' - 2y + 8 = 0$

(c) $y = g(x) = x^2 + 4 \Longleftrightarrow x^2 = y - 4$

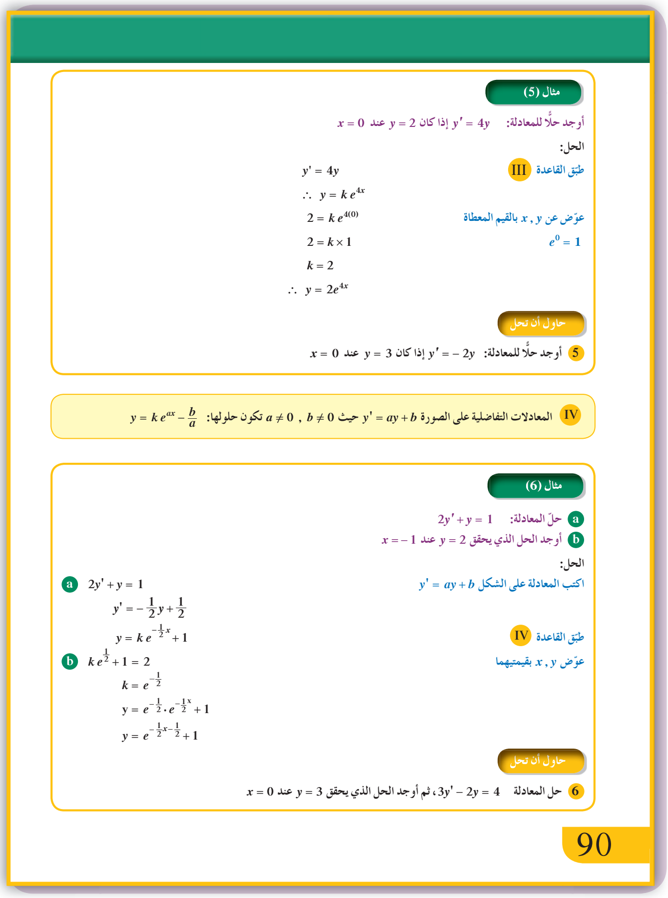
$$y' = g'(x) = 2x \Longleftrightarrow x = \frac{y'}{2}$$

$$x^2 = \frac{y'^2}{4}$$

إذًا

$$y - 4 = \frac{y'^2}{4}$$

$$y'^2 - 4y + 16 = 0$$



مثال (5)

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

الحل:

طبّق القاعدة III

$y' = 4y$

$\therefore \ y = k e^{4x}$

عوّض عن y , x بالقيم المعطاة

$2 = k e^{4(0)}$

$e^0 = 1$

$2 = k \times 1$

$k = 2$

$\therefore \ y = 2e^{4x}$

حاول أن تحل

5 أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

IV المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال (6)

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحل:

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

a $2y' + y = 1$

$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

طبّق القاعدة IV

$y = k e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

عوّض x , y بقيمتيهما

b $k e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$

$k = e^{-\frac{1}{2}}$

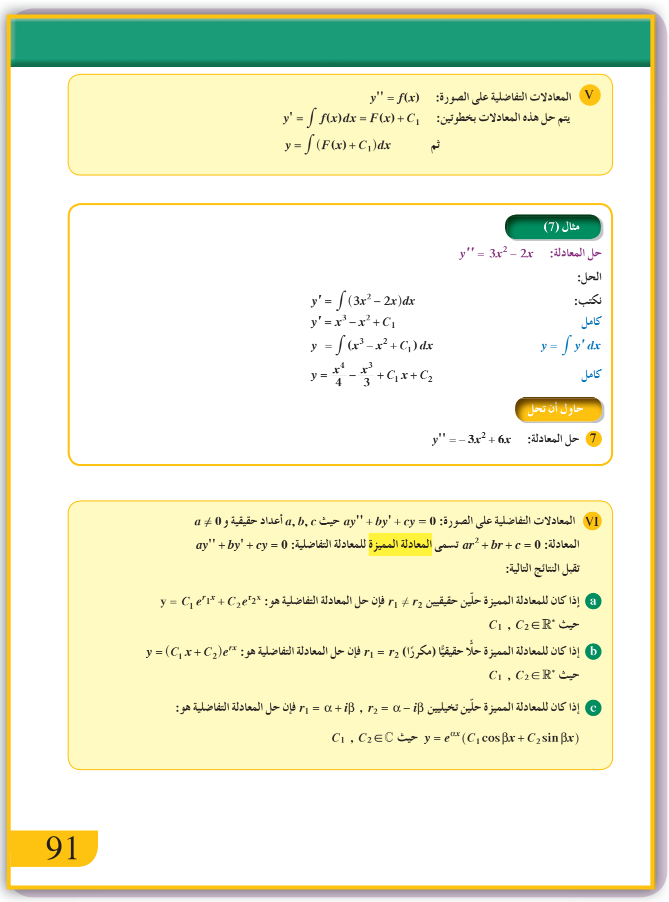
$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

90



V المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1)dx$

مثال (7)

حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

الحل:

نكتب: $y' = \int (3x^2 - 2x)dx$

كامل $y' = x^3 - x^2 + C_1$

$y = \int y' \, dx$ $\quad y = \int (x^3 - x^2 + C_1)\, dx$

كامل $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$

حاول أن تحل

7 حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

VI المعادلات التفاضلية على الصورة: $ay'' + by' + cy = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

المعادلة: $ar^2 + br + c = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية: $ay'' + by' + cy = 0$

تقبل النتائج التالية:

a إذا كان للمعادلة المميزة حلّين حقيقيين $r_1 \neq r_2$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

حيث $C_1 \ , \ C_2 \in \mathbb{R}^*$

b إذا كان للمعادلة المميزة حلًّا حقيقيًّا (مكررًا) $r_1 = r_2$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو: $y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$

حيث $C_1 \ , \ C_2 \in \mathbb{R}^*$

c إذا كان للمعادلة المميزة حلّين تخيليين $r_1 = \alpha + i\beta \ , \ r_2 = \alpha - i\beta$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو:

$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ حيث $C_1 \ , \ C_2 \in \mathbb{C}$

91

«تدريب»

الدرجة	الرتبة	المعادلة التفاضلية
الأولى	الأولى	$y' = 5y$
الثانية	الأولى	$y'^2 = \frac{4x}{y}$
الأولى	الثانية	$y'' = 5y' + xy$
الثانية	الثانية	$(y'')^2 = 1 + (y')^3$
الأولى	الثالثة	$y''' = (y')^2 + x^3$

«حاول أن تحل»

1 $y = 2e^{3x} + 1\ ,\ y' = 6e^{3x}$

ومنه:

$$y' + 3 = 6e^{3x} + 3$$
$$= 3(2e^{3x} + 1)$$
$$= 3y$$

2 $y = \int (7x^2 + 9x - 1)dx$

$$= \frac{7x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - x + C$$

3 الحل العام:

$$y = \int (8x^3 - 3x^2 + 4)dx$$
$$= 2x^4 - x^3 + 4x + C$$

الحل الخاص:

$$5 = 2 - 1 + 4 + C \Rightarrow C = 0$$

ومنه:

$$y = 2x^4 - x^3 + 4x$$


مثال (8)

حل المعادلة: $y'' - 4y' + 3y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة $r^2 - 4r + 3 = 0$

$(r-3)(r-1) = 0$

$r = 3$ أو $r = 1$

أوجد الحلول

طبّق a – VI $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$

حاول أن تحل

8 حل المعادلة: $2y'' - 5y' + 3y = 0$

مثال (9)

حل المعادلة: $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة $r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0$

$r - 2 = 0$

أوجد الحلول $r = 2$

$r_1 = r_2 = 2$

$y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$

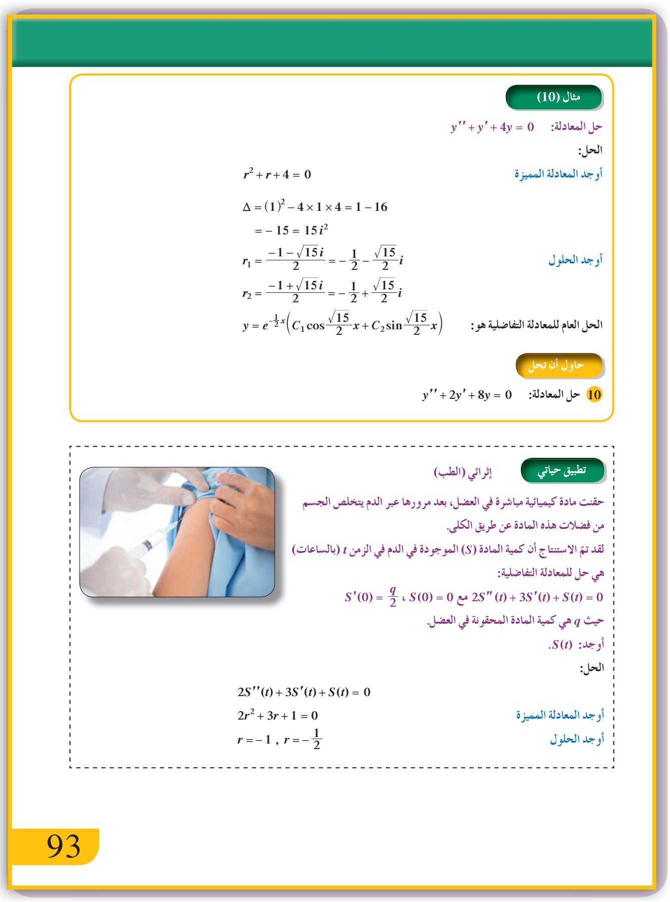
الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = (C_1 x + C_2)e^{2x}$

حاول أن تحل

9 حل المعادلة: $4y'' - 12y' + 9y = 0$

ملاحظة: يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد جذري المعادلة التربيعية.

92


مثال (10)

حل المعادلة: $y'' + y' + 4y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة $r^2 + r + 4 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 1 - 16$

$= -15 = 15i^2$

أوجد الحلول $r_1 = \frac{-1 - \sqrt{15}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$

$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{15}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{15}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$

حاول أن تحل

10 حل المعادلة: $y'' + 2y' + 8y = 0$

تطبيق حياتي إثرائي (الطب)

حقنت مادة كيميائية مباشرة في العضل، بعد مرورها عبر الدم يتخلص الجسم من فضلات هذه المادة عن طريق الكلى.

لقد تمّ الاستنتاج أن كمية المادة (S) الموجودة في الدم في الزمن t (بالساعات) هي حل للمعادلة التفاضلية:

$2S''(t) + 3S'(t) + S(t) = 0$ مع $S(0) = 0$ ، $S'(0) = \frac{q}{2}$

حيث q هي كمية المادة المحقونة في العضل.

أوجد: $S(t)$.

الحل:

$2S''(t) + 3S'(t) + S(t) = 0$

أوجد المعادلة المميزة $2r^2 + 3r + 1 = 0$

أوجد الحلول $r = -1\ ,\ r = -\frac{1}{2}$

93

4 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = 2\ln|x| + C$

$y = \pm e^{2\ln|x|+C}$

$y = ke^{2\ln|x|} \quad , \quad k = \pm e^{C}$

$\therefore \quad y = kx^2$

5 الحل العام:

$y = ke^{-2x}$

الحل الخاص:

$3 = ke^{0}$

$k = 3$

ومنه:

$y = 3e^{-2x}$

6 كتابة المعادلة على الصورة: $y' = ay + b$

أي:

$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

الحل العام:

$y = ke^{\frac{2}{3}x} - 2$

الحل الخاص:

$3 = k - 2 \Rightarrow k = 5$

ومنه:

$y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$

7 $y' = -x^3 + 3x^2 + C_1$

$y = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + C_1x + C_2$

8 المعادلة المميزة:

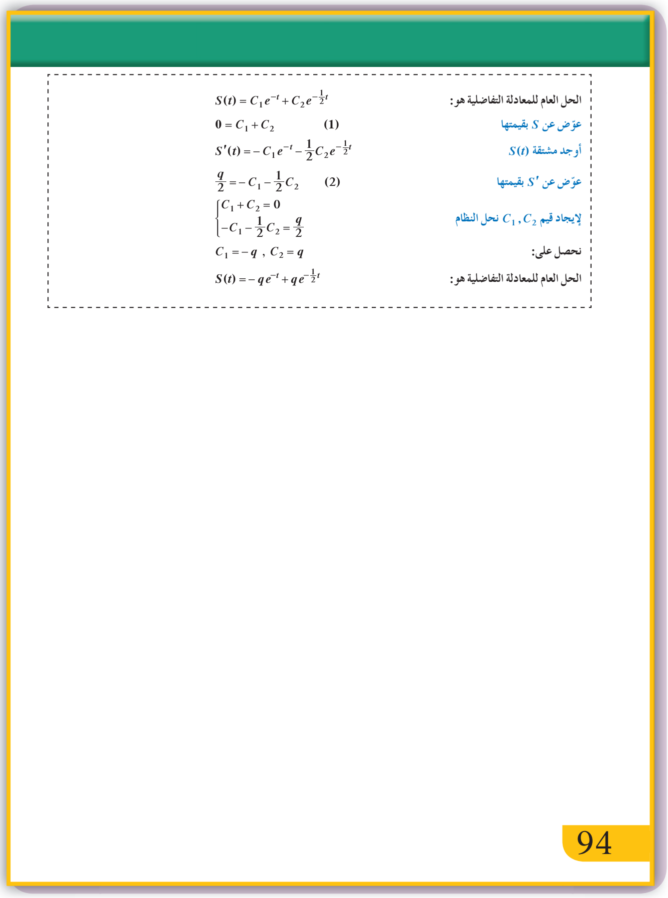
$2r^2 - 5r + 3 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$r_1 = 1 \ , \ r_2 = \frac{3}{2}$

الحل العام:

$y = C_1e^{x} + C_2e^{\frac{3}{2}x}$



الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $S(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-\frac{1}{2}t}$

عوّض عن S بقيمتها $0 = C_1 + C_2 \quad (1)$

أوجد مشتقة $S(t)$ $S'(t) = -C_1e^{-t} - \frac{1}{2}C_2e^{-\frac{1}{2}t}$

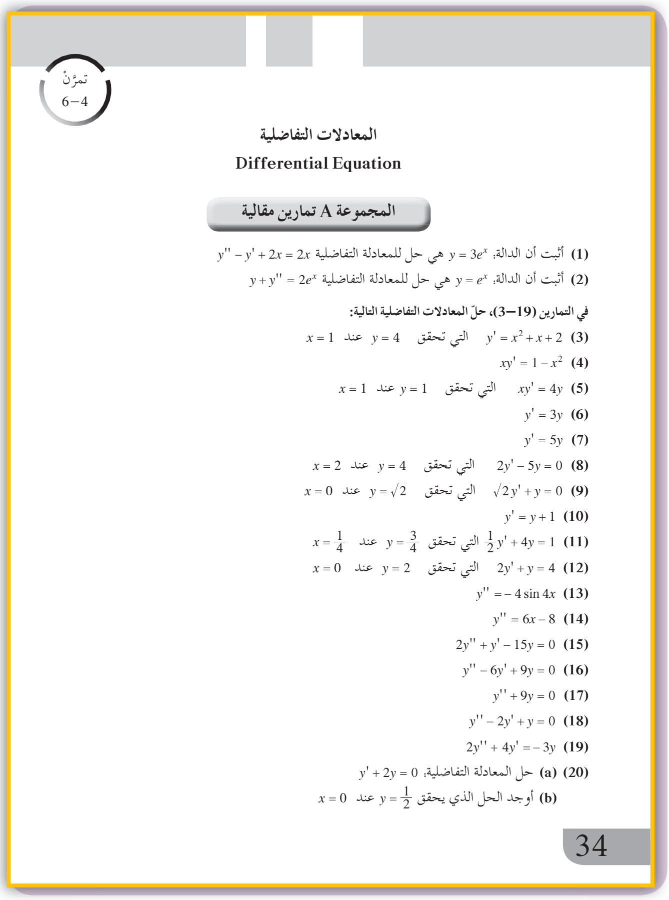
عوّض عن S' بقيمتها $\frac{q}{2} = -C_1 - \frac{1}{2}C_2 \quad (2)$

لإيجاد قيم C_1, C_2 نحل النظام $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 - \frac{1}{2}C_2 = \frac{q}{2} \end{cases}$

نحصل على: $C_1 = -q \ , \ C_2 = q$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $S(t) = -qe^{-t} + qe^{-\frac{1}{2}t}$

94



تمرّن 6−4

المعادلات التفاضلية

Differential Equation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن الدالة: $y = 3e^{x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

(2) أثبت أن الدالة: $y = e^{x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^{x}$

في التمارين (3—19)، حلّ المعادلات التفاضلية التالية:

(3) $y' = x^2 + x + 2$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 1$

(4) $xy' = 1 - x^2$

(5) $xy' = 4y$ التي تحقق $y = 1$ عند $x = 1$

(6) $y' = 3y$

(7) $y' = 5y$

(8) $2y' - 5y = 0$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 2$

(9) $\sqrt{2}y' + y = 0$ التي تحقق $y = \sqrt{2}$ عند $x = 0$

(10) $y' = y + 1$

(11) $\frac{1}{2}y' + 4y = 1$ التي تحقق $y = \frac{3}{4}$ عند $x = \frac{1}{4}$

(12) $2y' + y = 4$ التي تحقق $y = 2$ عند $x = 0$

(13) $y'' = -4\sin 4x$

(14) $y'' = 6x - 8$

(15) $2y'' + y' - 15y = 0$

(16) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(17) $y'' + 9y = 0$

(18) $y'' - 2y' + y = 0$

(19) $2y'' + 4y' = -3y$

(20) **(a)** حل المعادلة التفاضلية: $y' + 2y = 0$

(b) أوجد الحل الذي يحقق $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$

34

9 المعادلة المميزة:

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

$$\Delta = 144 - 144 = 0$$

$$r = \frac{3}{2}$$

الحل العام:

$$y = (C_1 x + C_2)e^{\frac{3}{2}x}$$

10 المعادلة المميزة:

$$r^2 + 2r + 8 = 0$$

$$4 - 32 = -28 = 28i^2$$

$$r_1 = -1 - i\sqrt{7} \quad , \quad r_2 = -1 + i\sqrt{7}$$

الحل العام:

$$y = e^{-x}(C_1 cos\sqrt{7} + C_2 sin\sqrt{7}\,x)$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (a) (b)

(2) المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a) (b)

(3) إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ و $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a) (b)

(4) إذا كان $y = 1$ عند $x = 0$ و $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a) (b)

(5) إذا كان $y'' + 2y' + 2y = 0$ فإن $y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)e^{-x}$ (a) (b)

(6) إذا كان $y'' + y = 0$ فإن $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (a) (b)

(7) إذا كان $y'' - y = 0$ فإن $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ (a) (b)

في التمارين (14—8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التفاضلية التالية: $3 = \frac{(2y'' + x)^2}{xy}$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.
(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.
(c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية.
(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

(9) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

(a) $y = x^2 + 3$
(b) $y = x^2 - 3$
(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$
(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

(10) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$
(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$
(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x + c_2$
(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x$

(11) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$
(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$
(c) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$
(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$

(12) إذا كان $y'' - 3y' + 2y = 0$ فإنّ:

(a) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$
(b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
(c) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$
(d) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

35

(13) إذا كان $y'' + 2y' + y = 0$ فإنّ:

(a) $y = (c_1 x + c_2)e^{-x}$
(b) $y = (c_1 x + c_2)e^{x}$
(c) $y = (c_1 x + c_2)e^{2x}$
(d) $y = (c_1 x + c_2)e^{-2x}$

(14) إذا كان $y'' - 4y' + 13y = 0$ فإنّ:

(a) $y = e^{x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$
(b) $y = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
(c) $y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$
(d) $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

36

المرشد لحل المسائل

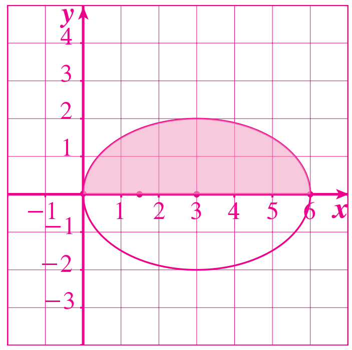
حل «مسألة إضافية»

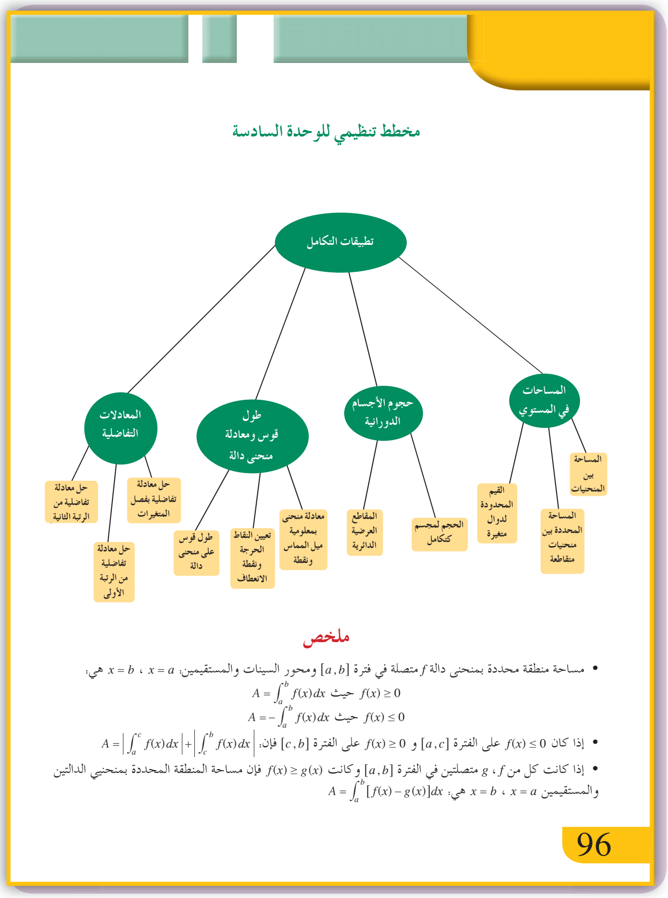
$$V = \int_0^6 \pi[f(x)]^2 dx$$

$$V = \int_0^6 \frac{\pi}{9}(-4x^2 + 24x)dx$$

$$= \frac{\pi}{9}\left[-\frac{4x^3}{3} + 12x^2\right]_0^6$$

$= 16\pi$ units cube



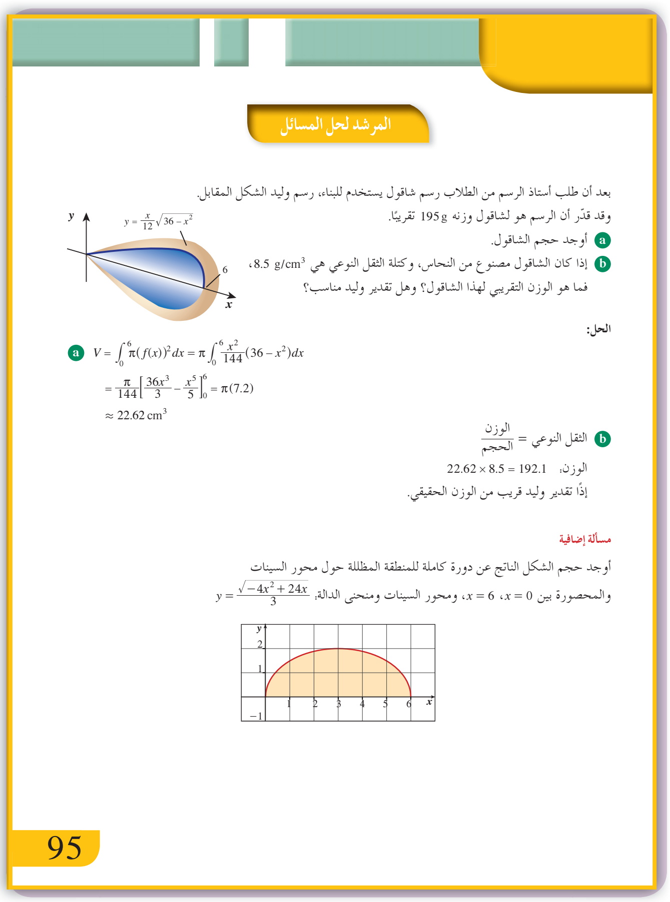


مخطط تنظيمي للوحدة السادسة

ملخص

- مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة f متصلة في فترة $[a,b]$ ومحور السينات والمستقيمين: $x = a$ ، $x = b$ هي:
$A = \int_a^b f(x)dx$ حيث $f(x) \ge 0$
$A = -\int_a^b f(x)dx$ حيث $f(x) \le 0$
- إذا كان $f(x) \le 0$ على الفترة $[a,c]$ و $f(x) \ge 0$ على الفترة $[c,b]$ فإن: $A = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$
- إذا كانت كل من f ، g متصلتين في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x) \ge g(x)$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

96



المرشد لحل المسائل

بعد أن طلب أستاذ الرسم من الطلاب رسم شاقول يستخدم للبناء، رسم وليد الشكل المقابل.
وقد قدّر أن الرسم هو لشاقول وزنه 195 g تقريبًا.

ⓐ أوجد حجم الشاقول.

ⓑ إذا كان الشاقول مصنوع من النحاس، وكتلة الثقل النوعي هي $8.5\ g/cm^3$،
فما هو الوزن التقريبي لهذا الشاقول؟ وهل تقدير وليد مناسب؟

$y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}$

الحل:

ⓐ $V = \int_0^6 \pi(f(x))^2 dx = \pi\int_0^6 \frac{x^2}{144}(36 - x^2)dx$
$= \frac{\pi}{144}\left[\frac{36x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^6 = \pi(7.2)$
$\approx 22.62\ cm^3$

ⓑ الثقل النوعي = $\frac{\text{الوزن}}{\text{الحجم}}$
الوزن: $22.62 \times 8.5 = 192.1$
إذًا تقدير وليد قريب من الوزن الحقيقي.

مسألة إضافية

أوجد حجم الشكل الناتج عن دورة كاملة للمنطقة المظللة حول محور السينات
والمحصورة بين $x = 0$ ، $x = 6$، ومحور السينات ومنحنى الدالة: $y = \frac{\sqrt{-4x^2 + 24x}}{3}$

95

- إذا تحددت منطقة بين منحنيات متقاطعة فإن نقاط التقاطع هي حدود التكامل.
- إذا تحددت منطقة بأكثر من دالة ولا يوجد تكامل مفرد يعطي المساحة فيمكن تجزيء هذه المنطقة إلى مناطق تناظر تغيرات كل دالة ونتابع العمل.
- إذا نتج مجسم عن دوران منطقة مستوية محددة بمنحنيي الدالتين f , g دورة كاملة حول محور السينات بحيث f , g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a,b]$ فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x) = \pi\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$ وذلك في الحالتين: $f(x) \ge g(x) \ge 0$ أو $f(x) \le g(x) \le 0$.
- إذا نتج مجسم عن دورة منطقة مستوية محددة بمنحنى دالة واحدة f دورة كاملة حول محور السينات في الفترة $[a,b]$ فإن حجم المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x) = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$.
- كل نقطة على منحنى دالة ينتج عنها مقطع دائري في دورة كاملة حول محور السينات.
- يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس على المنحنى ومعلومية نقطة محددة يمر بها هذا المنحنى.
- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لدراسة القيم القصوى والقيم العظمى لمنحنى الدالة.
- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لإيجاد نقطة انعطاف منحنى الدالة.
- تساعدنا القاعدة: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ على إيجاد طول قوس على منحنى دالة في الفترة $[a,b]$.
- رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.
- درجة المعادلة التفاضلية هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.
- يمكن حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات: $\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$ ثم نكامل.
- حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay$ هو $y = ke^{ax}$.
- حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هو $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

لحل المعادلات التفاضلية على الصورة: $ay'' + by' + cy = 0$
نوجد المعادلة المميزة: $ar^2 + br + c = 0$ ومنها لدينا 3 حالات:

ⓐ إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ فإن الحل: $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
ⓑ إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ فإن الحل: $y = (C_1x + C_2)e^{rx}$
ⓒ إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ فإن الحل: $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
حيث: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

97

اختبار الوحدة السادسة

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 4x + 3$، محور السينات في الفترة $[0,1]$.

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 6x + 5$، محور السينات في الفترة $[1,5]$.

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 - 4x$، محور السينات في الفترة $[-2,2]$.

(4) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = \sqrt{x}$ في الفترة $[1,2]$.

(5) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + 1$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = x + 1$.

(6) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ والمستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2,2]$.

(7) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x + 2$ والدالة g: $g(x) = -x + 3$ في الفترة $[-1,2]$.

(8) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = -x^2 + 4$ والدالة g: $g(x) = x + 2$ في الفترة $[-2,1]$.

(9) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 2 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,12]$.

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 2 - \sqrt{3}x$ في الفترة $[-3,1]$.

(11) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(-1 + 2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2,8]$.

(12) أوجد معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x, y) هو: $3x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $A(-1, -5)$.

(13) أوجد معادلة منحنى الدالة إذا كان ميل العمودي عند أي نقطة (x, y) على هذا المنحنى هو: $3x - 2$ ويمر بالنقطة $(1, -1)$.

(14) لتكن: $f''(x) = 12x^2 - 4$، أوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة صغرى محلية عند $A(-1, 3)$

في التمارين (20—15)، حلّ المعادلات التفاضلية التالية:

(15) $3y' + 5y = 2$

(16) $3xy' = 5y$

(17) $y'' - 7y' + 12y = 0$

(18) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(19) $y'' + 4y' + 20y = 0$

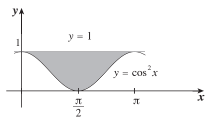
(20) $y'' + 16y = 0$

37

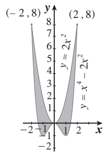
تمارين إثرائية

في التمارين (3—1)، أوجد مساحة المنطقة المظلّلة تحليليًا (جبريًا):

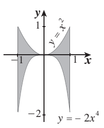
(1)



(2)



(3)



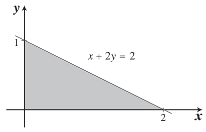
(4) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة: $y = 2x^2 + 8$ ومنحنى الدالة: $y = x^4$.

(5) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة: $y = 2x - 15$ ومنحنى الدالة: $y = -x^2 + 4x$.

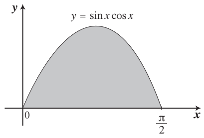
(6) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$، والمستقيم $x = 2$ ومحور السينات.

في التمرينين (8—7)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دورة كاملة للمنطقة المظلّلة حول محور السينات.

(7)



(8)



(9) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة x هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$ في الفترة $[0,27]$

38

في التمارين (13—11)، حل المعادلات التفاضلية التالية:

(11) $2y' + 3y = 4$

(12) $y'' + y = 0$

(13) $y'' - y = 0$

(14) نتيجة لحادث نووي، تبيّن أن الجزئيات المشعة $y(t)$ في الزمن t (بالساعات) بواسطة عداد جيجر (Geiger) تعطى بالمعادلة التفاضلية: $(E): y' = a(y - 2)$، حيث a ثابت موجب.

(a) أوجد الحل العام للمعادلة (E).

(b) أوجد حل (E) الذي يحقق $y(0) = 170$.

(c) إذا علمنا أن $y(6) = 9$ فما قيمة الثابت a؟

(15) إذا كانت النقطة $A(3, -2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f.

39

الوحدة السابعة: القطوع المخروطية

Conic Sections

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

7–1: القطوع المخروطية – القطع المكافئ

جزء 1: القطوع المكافئة.

جزء 2: تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة.

7–2: القطع الناقص.

جزء 1: القطع الناقص.

جزء 2: تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة.

7–3: القطع الزائد.

جزء 1: القطع الزائد.

جزء 2: تطبيقات باستخدام القطوع الزائدة.

7–4: الاختلاف المركزي.

جزء 1: أشكال القطوع المخروطية بدلالة الاختلاف المركزي.

مقدمة الوحدة

القطوع المخروطية هي منحنيات تنتج عن تقاطع سطح مخروط دائري ومستوٍ. إذا لم يمر المستوي برأس المخروط فإن المنحنى الناتج يكون دائرة أو قطعًا مكافئًا أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا وذلك وفق وضع المستوي.

وضع أبولونيوس Apollonios (حوالي 190–262 ق.م.) مؤلّفًا ضخمًا من ثمانية أجزاء دعاه القطوع المخروطية، ضمّ القطوع الثلاثة وخصائصها. ينسب إلى أبوقراط Hippocrates استخدام تقاطع المخاريط لحل بعض المسائل الهندسية عند اليونان. كذلك أوجد أرخميدس Archimedes (القرن الثالث ق.م.) المساحة المحصورة بين قسم من قطع مكافئ ومستقيم.

تكمن أهمية القطوع المخروطية في مجال تطبيقاتها الواسع. فمسارات الكواكب، والأقمار الاصطناعية، والإلكترونيات، والقذائف هي منحنيات مخروطية.

الهوائيات المخروطية (قطع مكافئ) هي أداة ضرورية لالتقاط الإشارات التي تبعث بها الأقمار الاصطناعية المتخصصة في مجال الاتصالات. المرايا على شكل قطع مكافئ مفيدة جدًّا نظرًا لخاصيتها في انعكاس الأشعة الموازية للدليل بحيث تمر في البؤرة.

تتحرك الكواكب في المجموعة الشمسية وفق مدارات على شكل قطوع ناقصة، تكون الشمس في موقع إحدى بؤرتيها (قانون كيبلر الأول). وكذلك فإن كل جسم خاضع لحركة جذب نيوتني (نسبة إلى نيوتن) له مدار مخروطي.

مدار المذنب هالي هو قطع ناقص (النسبة بين طولي محوريه كبيرة جدًّا).

ويذكر أن مرور هالي عام 1759 قرب الأرض جعل العلماء يخشون المخاطر التي قد يتسببها اقتراب المذنبات من الأرض. وكان العالم الفلكي هالي قد رأى المذنب عام 1682 وتوقع عودته إلى الظهور بعد 76 سنة (فترة هذا المذنب = 76). صدق توقعه إذ عاد هالي فعلًا عام 1759 (لذلك سمي المذنب باسمه).

الوحدة السابعة

القطوع المخروطية

Conic Sections

مشروع الوحدة: لماذا القطوع المخروطية؟

1 مقدمة المشروع: اهتم علماء الفلك منذ القدم بالشمس والنجوم وحركة الكواكب وتأثيرها على حياتهم وذلك منذ مئات السنين أي قبل الميلاد وحتى عصرنا الحاضر. فتوصلوا إلى تحديد دوران الكواكب حول الشمس فكانت قطوعًا مخروطية على شكل قطع ناقص.

2 الهدف: استكشاف القطوع المخروطية وتعرف أنواعها وعناصرها الأساسية واستخداماتها في الحياة اليومية.

3 اللوازم: ورق رسم بياني – مسطرة – فرجار – آلة حاسبة (اختياري).

4 أسئلة حول التطبيق:

افترض أنك قمت برحلة مع زملائك إلى الطبيعة لبضعة أيام وأردتم نصب خيمة إلى جانب النهر ومضخة للمياه على أن يكون موقع الخيمة على المسافة نفسها من حافة النهر والمضخة.

استخدم اللوازم لصنع نموذج يحدد كل المواقع الممكنة للخيمة.

a ارسم مستقيمًا أفقيًّا (L) قريبًا من أسفل ورقة الرسم البياني والتي تمثل حافة النهر، ثم رقّم المستقيمات الأفقية فوق المستقيم L (انظر الرسم).

b سجّل موقع المضخة بالنقطة (P) على المستقيم الثالث فوق المستقيم (L) الذي يمثل حافة النهر.

c ارسم مستقيمًا عموديًّا على (L) يمر بالنقطة P، ثم حدّد عليه النقطة S في منتصف المسافة بين (P) والمستقيم (L).

d أوجد البعد d_1 من المستقيم (2) إلى المستقيم (L). ثم ركّز سن الفرجار عند P وبفتحة تساوي d_1 وعيّن نقطتين على المستقيم (2) على أن تكون كل نقطة في جهة مختلفة عن الأخرى من الخط العمودي على L.

e هل توجد نقاط أخرى على المستقيم (2) تبعد نفس البعد عن P والمستقيم L؟

f أوجد البعد d_2 من المستقيم (3) إلى المستقيم (L). عيّن نقطتين على المستقيم (3) لهما البعد d_2 إلى المضخة P.

g تابع العمل بتعيين نقاط مشابهة لما ورد سابقًا في الفقرتين (f), (d) وذلك على مستقيمات أفقية أعلى النقطة S.

h صل النقاط بمنحنى. ما نوع المنحنى الذي حصلت عليه؟ وماذا تمثل هذه النقاط؟

i كيف سيتغير المنحنى إذا كان موقع المضخة قريبًا من حافة النهر أو بعيدًا عن حافة النهر؟

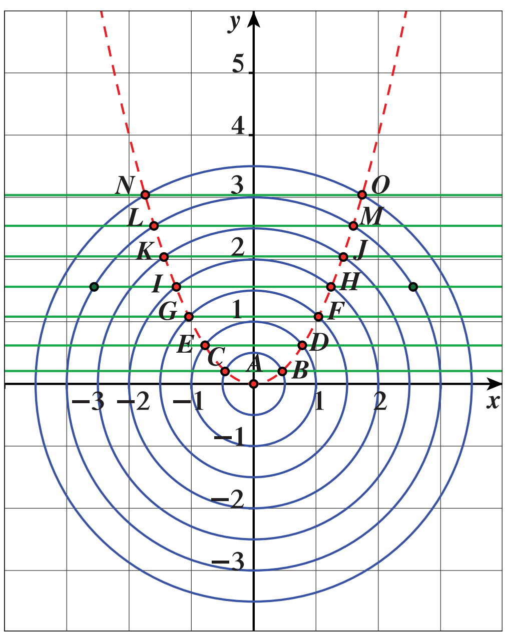
j ما أقرب نقطة إلى المضخة وإلى حافة النهر؟ ما اسم هذه النقطة؟

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يعكس عملك في هذا المشروع ويبيّن حساباتك والمنحنى الذي حصلت عليه. اذكر إذا كان بالإمكان تسميته بناء على مكتسبات سابقة تعرفت عليها.

دروس الوحدة

القطوع المخروطية – القطع المكافئ	القطع الناقص	القطع الزائد	الاختلاف المركزي
7 – 1	7 – 2	7 – 3	7 – 4

98



يوضّح الرسم البياني أعلاه إنشاء قطع مكافئ باستخدام الدوائر والمستقيمات.

مشروع الوحدة

يهدف هذا المشروع إلى وضع رسم هندسي لقطع مكافئ باستخدام التعريف حول تساوي البعدين عن نقطة ثابتة ومستقيم ثابت، وهو يساعد على تركيز مفهوم القطع المكافئ مما يسمح للطالب بالتعامل بمرونة مع حل المسائل المرتبطة؛ خاصة وأن التقنيات الحديثة مع آلة حاسبة وحاسوب تسمح بسهولة برسم بيان قطع مكافئ، مما يحول دون استيعاب الطالب لفكرة تساوي البعدين وبعدها لثبوت مجموع (أو القيمة المطلقة لفرق) البعدين.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) – (g) تحقق من عمل الطلاب.

(h) قطع مخروطي، قطع مكافئ.

(i) ينكمش المنحنى كلما كان موقع المضخة قريبًا من النهر ويتمدد المنحنى كلما كان موقع المضخة بعيدًا عن النهر.

(j) أقرب نقطة إلى المضخة وحافة النهر هي S، رأس القطع المكافئ.

التقرير

اكتب تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه عملك والحسابات التي قمت بها. دعّم تقريرك بعرض مصدر باستخدام الحاسوب أو جهاز الإسقاط (Data Show). حيث تبيّن بوضوح إجابتك عن الفقرة (i).

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت نهايات الدوال (كثيرات الحدود والدوال الجذرية).
- تعرفت ميل المماس على منحنى الدالة عند نقطة على هذا المنحنى.
- أوجدت معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى دالة.
- استكشفت الخطوط المقاربة العمودية والأفقية وكتبت معادلاتها.
- رسمت منحنى الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$.
- أوجدت معكوس الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$
- حدّدت خط التناظر لمنحنى الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وخط التناظر لمنحنى معكوسها.

ماذا سوف تتعلم؟

- كتابة معادلات للقطوع المكافئة.
- تمثيل القطوع المكافئة يدويًّا وإيجاد البؤرة والدليل.
- خواص القطع الناقص.
- كتابة معادلات القطوع الناقصة.
- إيجاد البؤرتين وأطراف المحورين الأكبر والأصغر في القطع الناقص ورسم بيانه.
- كتابة معادلات القطوع الزائدة.
- إيجاد المحور القاطع (الأساسي) والمحور المرافق والخطوط المقاربة والبؤرتين في القطع الزائد ورسم بيانه.
- الاختلاف المركزي للقطوع المخروطية.
- ربط قيمة الاختلاف المركزي بشكل القطع المخروطي.
- إيجاد الاختلاف المركزي.

المصطلحات الأساسية

القطوع المخروطية – قطع مكافئ – قطع ناقص – قطع زائد – بؤرة – دليل – المحور الأصغر والمحور الأكبر – نقطة المركز – رأسي القطع الناقص – رأسي القطع الزائد – خطوط مقاربة مائلة للقطع الزائد – المحور الأساسي (القاطع) للقطع الزائد – المحور المرافق للقطع الزائد – الاختلاف المركزي e

أضف إلى معلوماتك

في سنة 1609 أثبت العالم الفلكي «جوهانس كيبلر» أن النظام الذي أثبته «كوبرنيكس» والذي يتحدث عن مركزية الشمس يعكس هذه الحقيقة بدقة وبذلك وضع «كيبلر» القوانين الثلاثة. وما يهمنا هو القانون الأول، ومفاده ما يلي:

تدور الكواكب حول الشمس بحركة على شكل قطع ناقص حيث إن الشمس هي إحدى بؤرتيه.

جوهانس كيبلر Johannes Kepler

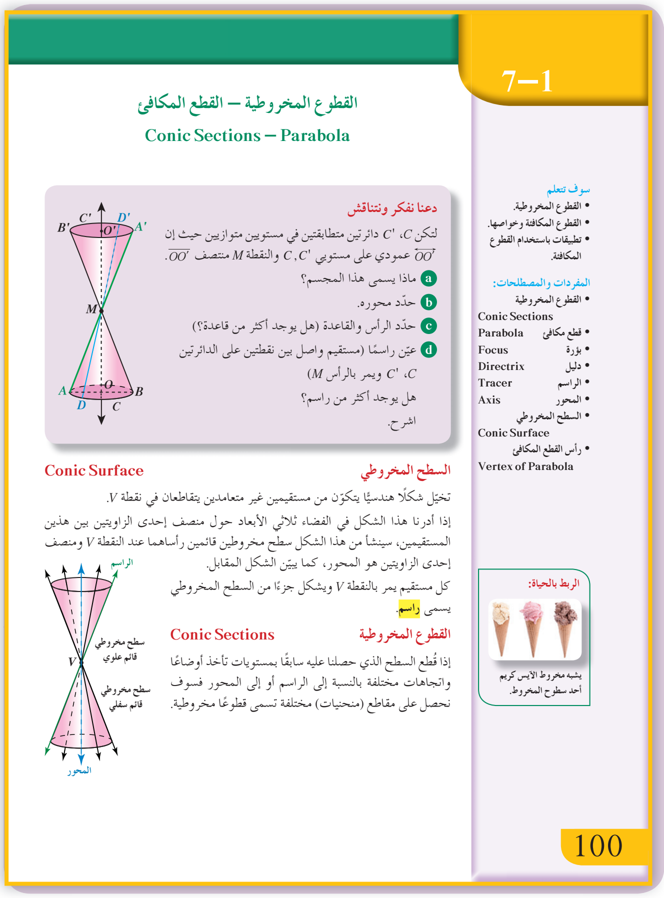
(1571 – 1630)

99

سلّم التقييم

4	الحسابات كلها صحيحة – الإنشاءات دقيقة – الشروحات واضحة وكاملة – الأفكار في التقرير واضحة ومتسلسلة.
3	الحسابات في معظمها صحيحة – أخطاء بسيطة في الإنشاءات – الشروحات واضحة – الأفكار في التقرير واضحة ومتسلسلة.
2	أخطاء متعددة في الحسابات – أخطاء متكررة في الإنشاءات – الشروحات غير واضحة – الأفكار في التقرير غير متسلسلة.
1	معظم عناصر هذا المشروع ناقصة أو غير موجودة.

1–7: القطوع المخروطية –القطع المكافئ



1 الأهداف

- يتعرف القطوع المخروطية.
- يتعرف القطوع المكافئة وخواصها.
- يستخدم القطوع المكافئة في حلّ المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

القطوع المخروطية – قطع مكافئ – بؤرة – دليل – الراسم – المحور – السطح المخروطي – رأس القطع المكافئ.

3 الأدوات والوسائل

أوراق رسم بياني – مسطرة – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) اكتب معادلة منحنى على الصورة: $y = ax^2$ في كل حالة:

(a) يمر المنحنى بالنقطة $A(2, 8)$.

(b) يمر المنحنى بالنقطة $B(2, -2)$.

(2) اكتب معادلة منحنى على الصورة: $x = ay^2$ في كل حالة:

(a) يمر المنحنى بالنقطة $C(2, 1)$.

(b) يمر المنحنى بالنقطة $D(-1, 2)$.

5 التدريس

يشدّد المعلم على تعريف القطع المكافئ، ويدعم التعريف برسوم بيانية (الأشكال الأربعة للقطع المكافئ) كما ويبيّن على أحدها تساوي البعدين. يطلب إلى أحد الطلاب تحديد موقع البؤرة على القطع واستنتاج الدليل، ثم رأس القطع المكافئ. يمكن استخدام الحاسوب أو جهاز الإسقاط لتحديد بؤرة ودليل القطع المكافئ في كل حالاته (الصورة $y^2 = 4px$ والصورة $x^2 = 4py$).

في المثال التوضيحي

استخدام قانون المسافة بين نقطتين والبعد بين نقطة ومستقيم لإيجاد معادلة القطوع المكافئة التي رأسها نقطة الأصل $(0, 0)$.

في المثال (1)

يساعد هذا المثال في تطبيق معادلة القطع المكافئ $x^2 = 4py$ أو $y^2 = 4px$ لإيجاد معادلات قطوع مكافئة ضمن معطيات محددة.

في المثال (2)

يساعد هذا المثال في إيجاد بؤرة قطع مكافئ ودليله بمعلومية معادلته ثم وضع رسم تقريبي لهذا القطع.

في المثال (3)

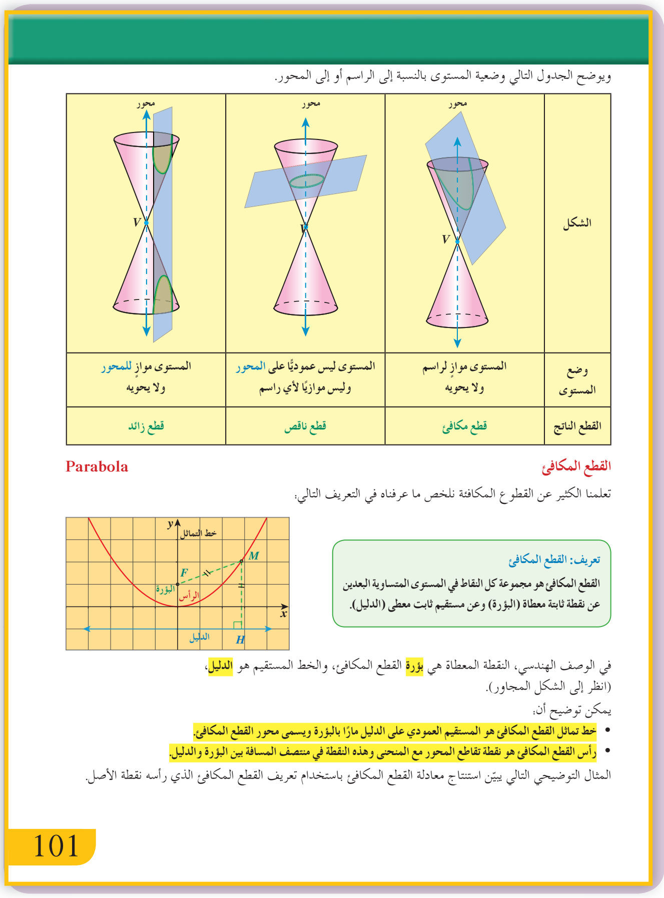
استخدام $x - axis$ كخط تماثل لقطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر بنقطة محددة لإيجاد معادلته.

في المثال (4)

إيجاد معادلة قطع مكافئ باستخدام نقطتان يمر بهما وذلك لتحديد صورة المعادلة، ثم يوجدها.

في المثال (5)

إيجاد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل بمعلومية دليله. يهدف هذا المثال لتركيز مفهوم القطع المكافئ وخصائصه، كما يوضح العلاقة التي تربط بين معادلة الدليل وإحداثيات البؤرة.



ويوضح الجدول التالي وضعية المستوى بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور.

الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ لراسم ولا يحويه	المستوى ليس عموديًّا على المحور وليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ للمحور ولا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

القطع المكافئ **Parabola**

تعلمنا الكثير عن القطوع المكافئة نلخص ما عرفناه في التعريف التالي:

تعريف: القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).

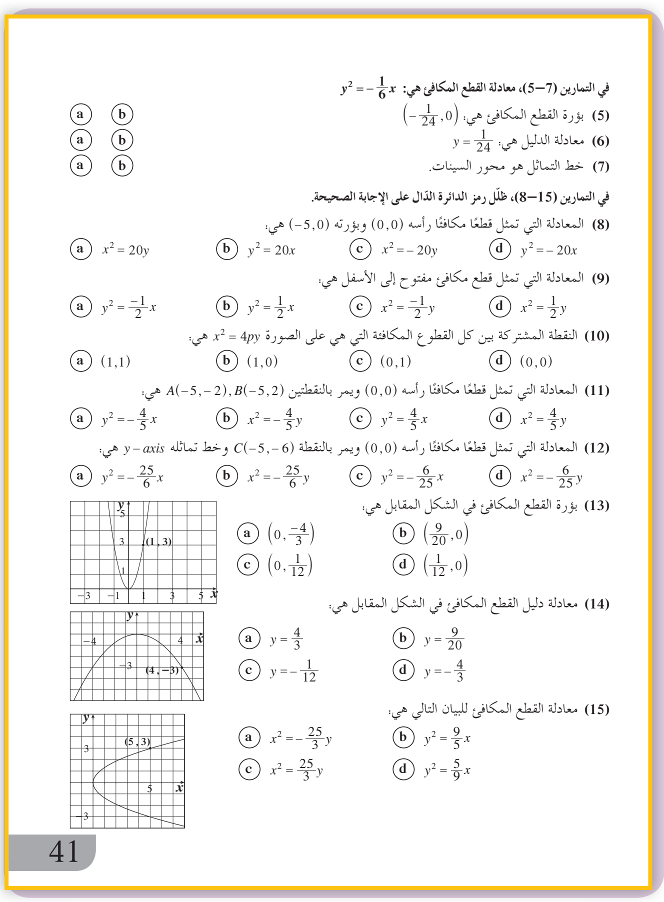
في الوصف الهندسي، النقطة المعطاة هي **بؤرة** القطع المكافئ، والخط المستقيم هو **الدليل**، (انظر إلى الشكل المجاور).

يمكن توضيح أن:

- **خط تماثل القطع المكافئ هو المستقيم العمودي على الدليل مارًا بالبؤرة ويسمى محور القطع المكافئ.**
- **رأس القطع المكافئ هو نقطة تقاطع المحور مع المنحنى وهذه النقطة في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل.**

المثال التوضيحي التالي يبيّن استنتاج معادلة القطع المكافئ باستخدام تعريف القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل.

101



في التمارين (5–7)، معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = -\frac{1}{6}x$

(5) بؤرة القطع المكافئ هي: $\left(-\frac{1}{24}, 0\right)$ — ⓐ ⓑ

(6) معادلة الدليل هي: $y = \frac{1}{24}$ — ⓐ ⓑ

(7) خط التماثل هو محور السينات. — ⓐ ⓑ

في التمارين (8–15)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(-5,0)$ هي:

ⓐ $x^2 = 20y$ ⓑ $y^2 = 20x$ ⓒ $x^2 = -20y$ ⓓ $y^2 = -20x$

(9) المعادلة التي تمثل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل هي:

ⓐ $y^2 = \frac{-1}{2}x$ ⓑ $y^2 = \frac{1}{2}x$ ⓒ $x^2 = \frac{-1}{2}y$ ⓓ $x^2 = \frac{1}{2}y$

(10) النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2 = 4py$ هي:

ⓐ $(1,1)$ ⓑ $(1,0)$ ⓒ $(0,1)$ ⓓ $(0,0)$

(11) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2), B(-5,2)$ هي:

ⓐ $y^2 = -\frac{4}{5}x$ ⓑ $x^2 = -\frac{4}{5}y$ ⓒ $y^2 = \frac{4}{5}x$ ⓓ $x^2 = \frac{4}{5}y$

(12) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطة $C(-5,-6)$ وخط تماثله $y - axis$ هي:

ⓐ $y^2 = -\frac{25}{6}x$ ⓑ $x^2 = -\frac{25}{6}y$ ⓒ $y^2 = -\frac{6}{25}x$ ⓓ $x^2 = -\frac{6}{25}y$

(13) بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:

ⓐ $\left(0, \frac{-4}{3}\right)$ ⓑ $\left(\frac{9}{20}, 0\right)$ ⓒ $\left(0, \frac{1}{12}\right)$ ⓓ $\left(\frac{1}{12}, 0\right)$

(14) معادلة دليل القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:

ⓐ $y = \frac{4}{3}$ ⓑ $y = \frac{9}{20}$ ⓒ $y = -\frac{1}{12}$ ⓓ $y = -\frac{4}{3}$

(15) معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:

ⓐ $x^2 = -\frac{25}{3}y$ ⓑ $y^2 = \frac{9}{5}x$ ⓒ $x^2 = \frac{25}{3}y$ ⓓ $y^2 = \frac{5}{9}x$

41

في المثالين (7) ,(6)

تطبيقات حياتية تبيّن كيفية استخدام القطوع المكافئة في الميكروفونات ومصابيح السيارات حيث التركيز على بؤرة القطع المكافئ.

في المثال (8)

حل تطبيقات حياتية (مثل الجسور) باستخدام معادلة وخصائص القطع المكافئ. أخبر الطلاب أن الأسلكة المعدنية بين الأعمدة على الجسور أو بين الأعمدة الكهربائية... غالبًا ما تكون على شكل قطوع مكافئة.

6 الربط

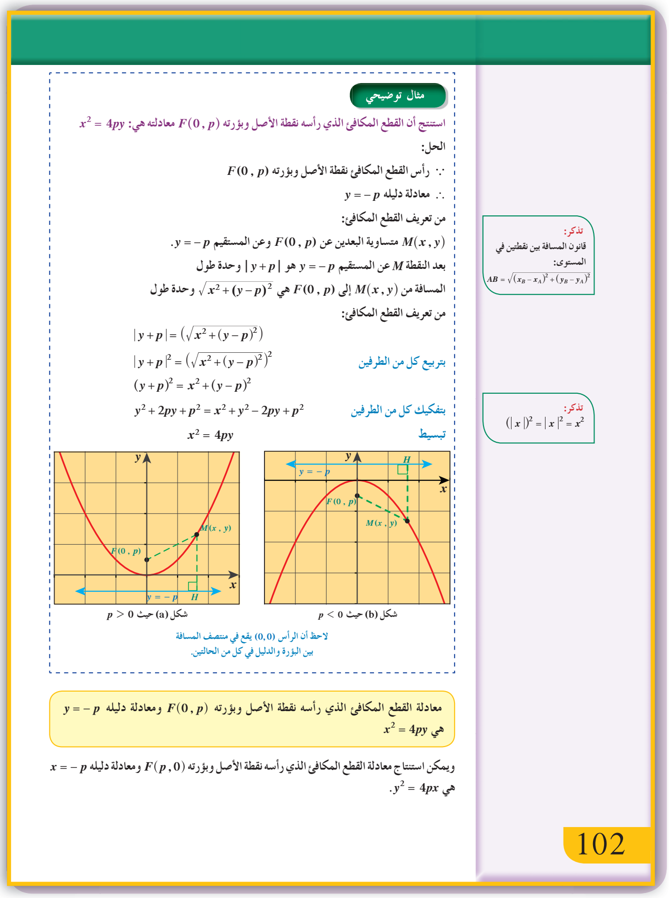
تعتبر الأمثلة (8) ,(7) ,(6) أفضل دليل في ربط القطع المكافئ بالحياة اليومية. فاستخدام الميكروفونات رائج جدًّا لالتقاط الأصوات. إضافة إلى المصابيح الأمامية في السيارات والأسلاك المعدنية بين الأعمدة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في معرفة إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل في معادلة القطع المكافئ وكيفية الربط بينهما.

اكتب على السبّورة الجدول الذي يبيّن خواص القطع المكافئ واطلب إلى بعض الطلاب إيجاد البؤرة والدليل.

ساعد الطلاب على إيجاد الفرق بين أشكال القطوع المكافئة عندما تكون المعادلة على الصورة $y^2 = 4px$ أو على الصورة $x^2 = 4py$ وبالتالي كيفية كتابة معادلة الدليل وإيجاد إحداثيات البؤرة.



مثال توضيحي

استنتج أن القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$ معادلته هي: $x^2 = 4py$

الحل:

$\because$ رأس القطع المكافئ نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$

$\therefore$ معادلة دليله $y = -p$

من تعريف القطع المكافئ:

$M(x\,,y)$ متساوية البعدين عن $F(0\,,p)$ وعن المستقيم $y = -p$.

بعد النقطة M عن المستقيم $y = -p$ هو $|y+p|$ وحدة طول

المسافة من $M(x\,,y)$ إلى $F(0\,,p)$ هي $\sqrt{x^2+(y-p)^2}$ وحدة طول

من تعريف القطع المكافئ:

$|y+p| = \left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)$

بتربيع كل من الطرفين $|y+p|^2 = \left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)^2$

$(y+p)^2 = x^2+(y-p)^2$

بتفكيك كل من الطرفين $y^2+2py+p^2 = x^2+y^2-2py+p^2$

تبسيط $x^2 = 4py$

شكل (a) حيث $p > 0$

شكل (b) حيث $p < 0$

لاحظ أن الرأس $(0,0)$ يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل في كل من الحالتين.

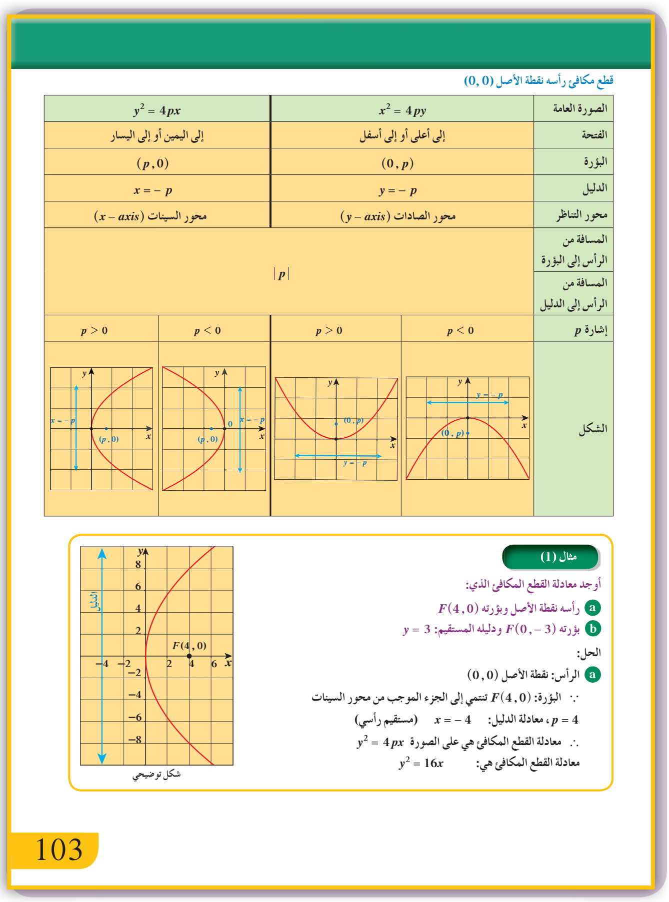
تذكر: قانون المسافة بين نقطتين في المستوى: $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

تذكر: $(|x|)^2 = |x|^2 = x^2$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0\,,p)$ ومعادلة دليله $y = -p$ هي $x^2 = 4py$

ويمكن استنتاج معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(p\,,0)$ ومعادلة دليله $x = -p$ هي $y^2 = 4px$.

102



قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0,0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0\,,p)$		$(p\,,0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y-axis)$		محور السينات $(x-axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\|p\|$			
المسافة من الرأس إلى الدليل				
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

مثال (1)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

a رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(4\,,0)$

b بؤرته $F(0\,,-3)$ ودليله المستقيم: $y = 3$

الحل:

a الرأس: نقطة الأصل $(0\,,0)$

$\because$ البؤرة: $F(4\,,0)$ تنتمي إلى الجزء الموجب من محور السينات

$p = 4$، معادلة الدليل: $x = -4$ (مستقيم رأسي)

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = 16x$

شكل توضيحي

103

8 التقييم

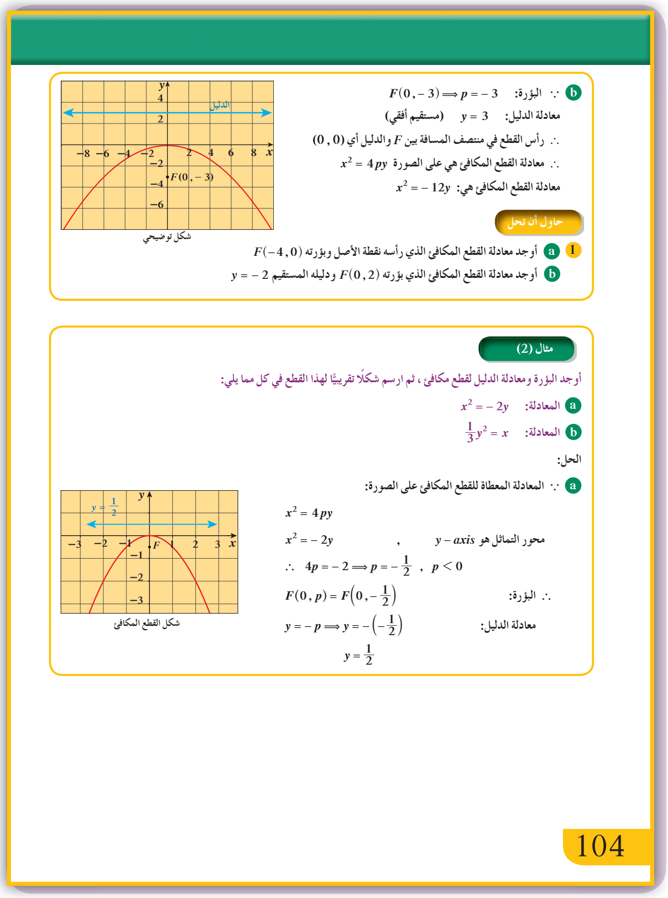
راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من فهمهم للقطع المكافئ ومن صحة حساباتهم في معرفة إحداثيات البؤرة والرأس ومعادلة الدليل.

اختبار سريع

1. أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ معادلته:
$y = \frac{1}{8}x^2$
نضع المعادلة على الصورة: $x^2 = 4py$ أي $x^2 = 8y$
$F(0,2)$ $y = -2$

2. أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(3, 0)$.
محور السينات هو محور تماثل لذا تكون المعادلة على الصورة: $y^2 = 4px$ حيث $p = 3$
وتكون المعادلة $y^2 = 12x$

3. أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(2,-4)$ وخط تماثله $y-axis$
معادلة القطع المكافئ على الصورة: $x^2 = 4py$
ويمر بالنقطة $A(2,-4)$
فتكون $p = -\frac{1}{4}$ والمعادلة $x^2 = -y$ أو $y = -x^2$



b ∵ البؤرة: $F(0,-3) \Longrightarrow p = -3$
معادلة الدليل: $y = 3$ (مستقيم أفقي)
∴ رأس القطع في منتصف المسافة بين F والدليل أي $(0,0)$
∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$
معادلة القطع المكافئ هي: $x^2 = -12y$

شكل توضيحي

حاول أن تحل

1. a أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4,0)$
b أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,2)$ ودليله المستقيم $y = -2$

مثال (2)

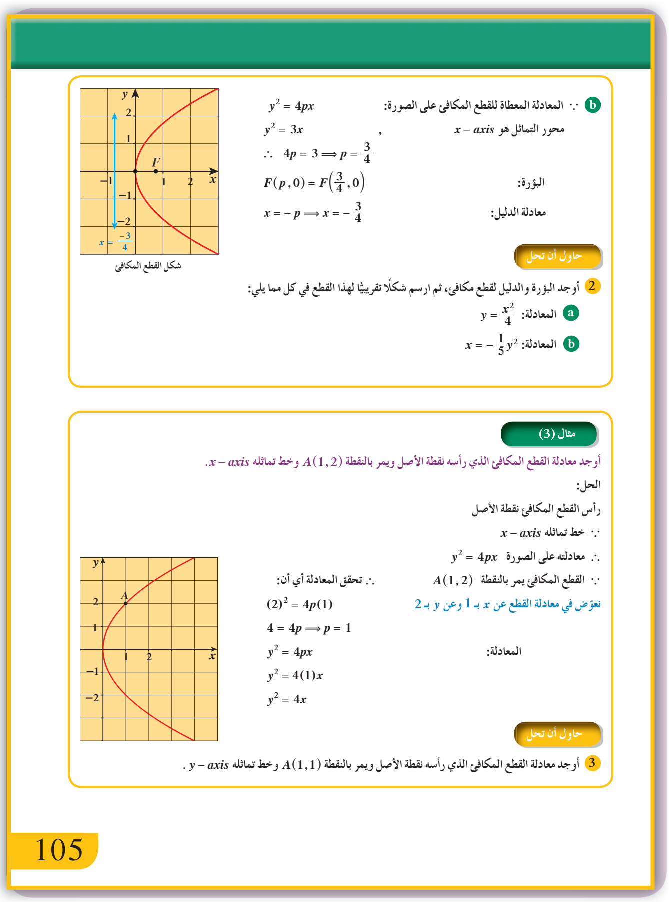
أوجد البؤرة ومعادلة الدليل لقطع مكافئ ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي:
a المعادلة: $x^2 = -2y$
b المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$

الحل:

a ∵ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة:
$x^2 = 4py$
محور التماثل هو $y-axis$ ، $x^2 = -2y$
$\therefore\ 4p = -2 \Longrightarrow p = -\frac{1}{2}\ ,\ p < 0$
∴ البؤرة: $F(0,p) = F\left(0,-\frac{1}{2}\right)$
معادلة الدليل: $y = -p \Longrightarrow y = -\left(-\frac{1}{2}\right)$
$y = \frac{1}{2}$

شكل القطع المكافئ

104



b ∵ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة: $y^2 = 4px$
محور التماثل هو $x-axis$ ، $y^2 = 3x$
$\therefore\ 4p = 3 \Longrightarrow p = \frac{3}{4}$
البؤرة: $F(p,0) = F\left(\frac{3}{4},0\right)$
معادلة الدليل: $x = -p \Longrightarrow x = -\frac{3}{4}$

شكل القطع المكافئ

حاول أن تحل

2. أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي:
a المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$
b المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

مثال (3)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1,2)$ وخط تماثله $x-axis$.

الحل:

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل
∵ خط تماثله $x-axis$
∴ معادلته على الصورة $y^2 = 4px$
∵ القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1,2)$ ∴ تحقق المعادلة أي أن:
نعوّض في معادلة القطع عن x بـ 1 وعن y بـ 2
$(2)^2 = 4p(1)$
$4 = 4p \Longrightarrow p = 1$
المعادلة: $y^2 = 4px$
$y^2 = 4(1)x$
$y^2 = 4x$

حاول أن تحل

3. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1,1)$ وخط تماثله $y-axis$.

105

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) مخروطي الشكل.

(b) $\overleftrightarrow{OO'}$

(c) الرأس M، قاعدة (c)، قاعدة (c')

(d) $\overleftrightarrow{DD'}$

نعم $\overleftrightarrow{AA'}$، $\overleftrightarrow{BB'}$ كل مستقيم يمر بالنقطة M ويقطع الدائرتين هو راسم.

«حاول أن تحل»

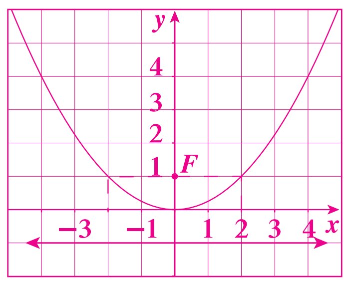
1 **(a)** $y^2 = -16x$

(b) $x^2 = 8y$

2 **(a)** $x^2 = 4y \quad \therefore \quad p = 1$

البؤرة: $(0, 1)$

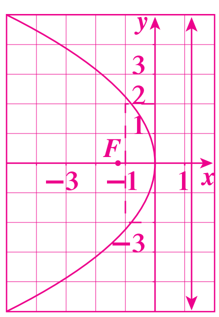
معادلة الدليل: $y = -1$



(b) $y^2 = -5x \quad \therefore \quad p = -\dfrac{5}{4}$

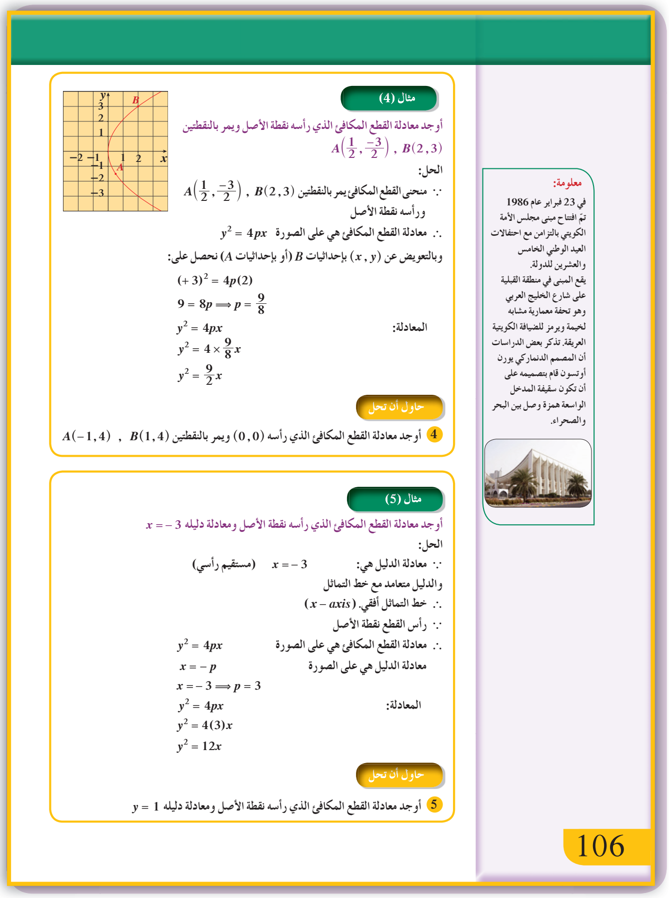
البؤرة: $\left(-\dfrac{5}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $y = \dfrac{5}{4}$



3 $x^2 = 4py \quad \therefore \quad (1)^2 = 4p(1) \Longrightarrow p = \dfrac{1}{4}$

المعادلة: $x^2 = y$



مثال (4)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2,3)$

الحل:

$\because$ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2,3)$ ورأسه نقطة الأصل

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

وبالتعويض عن (x, y) بإحداثيات B (أو بإحداثيات A) نحصل على:

$(+3)^2 = 4p(2)$

$9 = 8p \Longrightarrow p = \frac{9}{8}$

المعادلة: $y^2 = 4px$

$y^2 = 4 \times \frac{9}{8}x$

$y^2 = \frac{9}{2}x$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $B(1,4)$, $A(-1,4)$

مثال (5)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -3$

الحل:

$\because$ معادلة الدليل هي: $x = -3$ (مستقيم رأسي)

والدليل متعامد مع خط التماثل

$\therefore$ خط التماثل أفقي. $(x - axis)$

$\because$ رأس القطع نقطة الأصل

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة الدليل هي على الصورة $x = -p$

$x = -3 \Longrightarrow p = 3$

المعادلة: $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

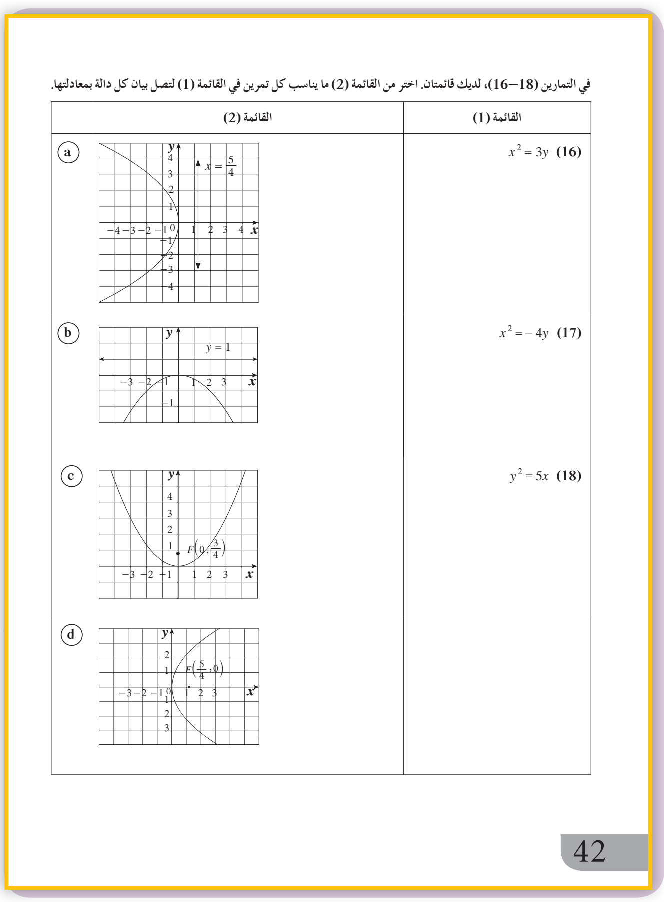
حاول أن تحل

5 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$

معلومة:

في 23 فبراير عام 1986 تمّ افتتاح مبنى مجلس الأمة الكويتي بالتزامن مع احتفالات العيد الوطني الخامس والعشرين للدولة. يقع المبنى في منطقة القبلية على شارع الخليج العربي وهو تحفة معمارية مشابه لخيمة ويرمز للضيافة الكويتية العريقة. تذكر بعض الدراسات أن المصمم الدنماركي يورن أوتسون قام بتصميمه على أن تكون سقيفة المدخل الواسعة همزة وصل بين البحر والصحراء.

106



في التمارين (18–16)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل دالة بمعادلتها.

القائمة (1)	القائمة (2)
(16) $x^2 = 3y$	a
(17) $x^2 = -4y$	b
(18) $y^2 = 5x$	c
	d

42

4 $x^2 = 4py \quad \therefore \quad (-1)^2 = 4p(4) \Longrightarrow p = \frac{1}{16}$

المعادلة: $x^2 = \frac{1}{4}y$

5 $-p = 1 \Longrightarrow p = -1$

المعادلة: $x^2 = -4y$

6 $4p = 12 \Longrightarrow p = 3 \;\; ; \;\; F(0,3)$

يوضع المصباح في البؤرة F على بعد 3 وحدات من رأس القطع المكافئ.

7 $p = 4 \;\; ; \;\; 4p = 16 \;\; ; \;\; y^2 = 16x$

8 $x_B = \frac{220}{2} = 110 \;\; ; \;\; y_B = 36 - 3 = 33$

$x^2 = 4py \quad \therefore \quad (110)^2 = 4p(33) \Longrightarrow p = 91.\overline{6}$

معادلة القطع المكافئ: $x^2 = 366.\overline{6}y$

$x = 110 - 10 = 100$

$\therefore \;\; y \approx 27.3$

الإحداثي السيني للدعامة.

طول الدعامة: $27.3 + 3 = 30.3$ m


تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة Applications Using Parabolas

إذا دورنا قطعًا مكافئًا في الفراغ الثلاثي الأبعاد باستخدام خط التماثل كمحور للدوران، فإن القطع المكافئ ينتج **سطحًا مكافئًا Paraboloid**.

إذا وضعنا مصدرًا ضوئيًا في بؤرة سطح مكافئ عاكس، فإن الضوء ينعكس من هذا السطح في خطوط مستقيمة موازية لمحور التماثل، كما هو موضح في الشكل المقابل.

مقطع عرضي لمجسم مكافئ

هذا يبيّن كيف تعمل الأنوار (الكشافات) الرئيسية للسيارة.

ينطبق المبدأ نفسه على الإشارات التي تنطلق في الاتجاه العكسي، مثل بعض مكبرات الصوت والعكس صحيح.

عندما تنطلق الموجات الضوئية أو الصوتية نحو السطح المكافئ موازية لخط تماثله فإنها تنعكس من هذا السطح وتتجمع في البؤرة.

الهدف هو تركيز الضوء أو الصوت عند البؤرة حيث يوضع المستقبل الإلكتروني (الريسيفر).

على سبيل المثال الميكروفونات المكافئة التي تستخدم أثناء مباريات كرة القدم.

مثال (6)

تُستخدم ميكروفونات مكافئة على جانبي ملعب لالتقاط الأصوات من داخل الملعب.

إذا كان قد تولد ميكروفون مكافئ من تدوير قطع مكافئ معادلته: $y^2 = 15x$،

فحدّد موضع البؤرة (جهاز الاستقبال الإلكتروني) لهذا القطع المكافئ.

الحل:

إذا نظرنا إلى السطح المكافئ باعتبار أن رأسه $(0,0)$ وخط تماثله هو محور السينات،

$\because \;\; y^2 = 4px$

$y^2 = 15x$

$\therefore \; 4p = 15$

$p = \frac{15}{4}$

البؤرة هي عند: $F(p,0) = F\left(\frac{15}{4},0\right)$

فيلزم أن يوضع المستقبل (جهاز الاستقبال الإلكتروني) عند النقطة $F\left(\frac{15}{4},0\right)$

حاول أن تحل

6 تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.

إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$، فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي؟

107


مثال (7)

تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$، فأين يجب وضع لمبة المصباح؟

الحل:

إذا نظرنا إلى السطح المكافئ باعتبار أن رأسه $(0,0)$ ومحور تماثله $x - axis$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

$\because \;\; y^2 = 12x$

$4p = 12 \Longrightarrow p = 3$

البؤرة: $F(p,0) = F(3,0)$

توضع اللمبة على بعد 3 (وحدات قياس) من رأس القطع المكافئ.

حاول أن تحل

7 في مثال (7)، ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 (وحدات قياس) عن رأس القطع المكافئ؟

مثال (8)

يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 180 m ويبلغ ارتفاع كل منهما 33 m، يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 3 m، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

الحل: باعتبار رأس القطع المكافئ هو $(0,0)$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

إحداثيات النقطة B هي: $x_B = \frac{180}{2} = 90 \;\; , \;\; y_B = 33 - 3 = 30$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ نحصل على: $(90)^2 = 4p \times 30$

$p = \frac{90^2}{4 \times 30} = 67.5$

معادلة القطع المكافئ: $x^2 = 4 \times 67.5y$

$x^2 = 270y$

الإحداثي السيني للدعامة: $90 - 10 = 80$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ: $(80)^2 = 270y$

$y \approx 23.7$

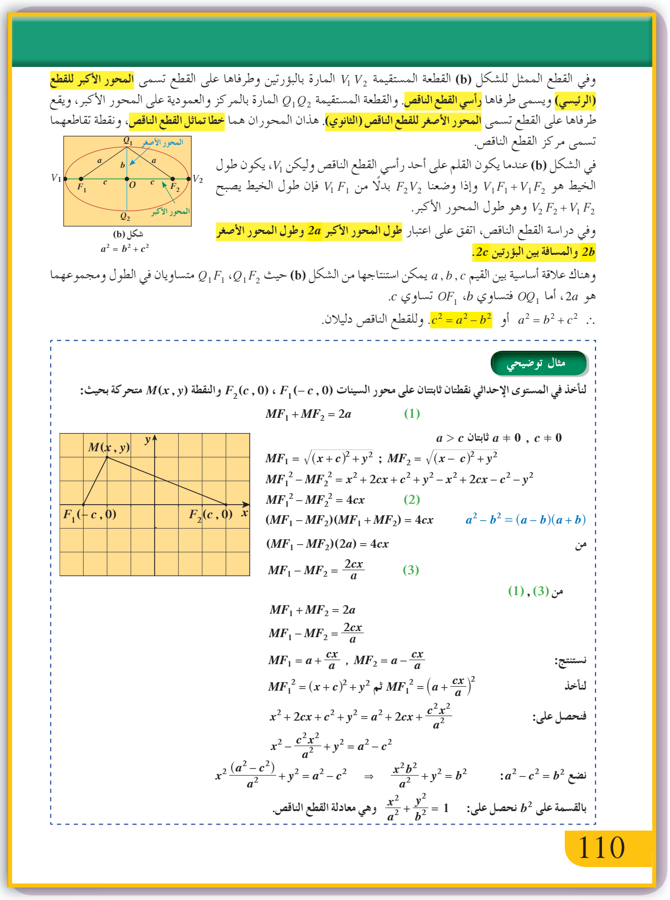
يبلغ طول الدعامة حوالي: $23.7 + 3 = 26.7$m

حاول أن تحل

8 في مثال (8)، إذا كان البعد بين العمودين 220 m وارتفاع كل عمود 36 m، فأوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

108

2–7: القطع الناقص



1 الأهداف

- يتعرف القطع الناقص وخواصه.
- يستخدم القطع الناقص في حلّ المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قطع ناقص – بؤرتين – المحور الأصغر – المحور الأكبر – نقطة المركز – رؤوس.

3 الأدوات والوسائل

أوراق رسم بياني – مسطرة – آلة حاسبة علمية – مسمار – خيط – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) اكتب كلًّا مما يلي على الصورة: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(a) $4x^2+9y^2=36$

(b) $2x^2+y^2=18$

(2) اكتب معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل في كل حالة:

(a) نصف قطرها: $r=2$

(b) قطرها: $d=1$

5 التدريس

يتم التركيز أوّلًا على تعريف القطع الناقص الذي مركزه $(0, 0)$ ومحوره الأكبر ينطبق على أحد المحورين. يمكن للمعلم الاستعانة بمسمارين وخيط، يثبّت المسمارين على خشبة ويتدلى بينهما الخيط؛ بواسطة القلم يمكن أن يرسم بيان القطع الناقص كما في الشكل (a).

لاحظ في القطع الناقص أن:

$a > b > 0$ وطول المحور الأكبر في القطع الناقص $2a$ وطول المحور الأصغر $2b$، وغيرها من الخواص.

يربط المعلم بين خطي تماثل القطع الناقص ووجود بؤرتين ودليلين ورأس القطع وطرفي المحور الأصغر.

يستحسن التكلم عن الحالة الخاصة الممثلة بالدائرة، عندما يكون $a = b$ أو عندما يكون المستوى القاطع للقطع عموديًّا على المحور.

يشدّد المعلم على أهمية معرفة الطلاب لخواص القطع الناقص.

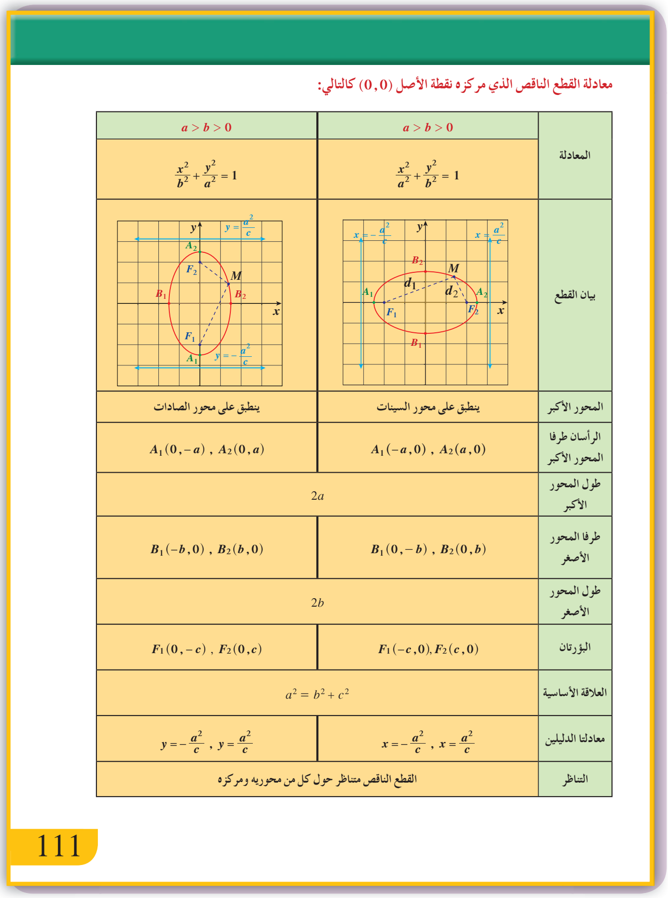
في المثال التوضيحي

استخدام التعريف الهندسي للقطع الناقص: $MF_1 + MF_2 = 2a$ لإيجاد معادلة القطع الناقص وكتابة العلاقة الأساسية $a^2 = b^2 + c^2$. سوف تستخدم هذه المعادلة مع العلاقة الأساسية في بعض الأمثلة.

في المثال (1)

إيجاد رأسي القطع، وطرفي المحور الأصغر، ومعادلتي الدليلين، وطولي المحورين، وإحداثيات البؤرتين باستخدام معادلة القطع الناقص ثم وضع رسم تقريبي له.

ألفت انتباه الطلاب في هذا المثال إلى معادلة القطع الناقص على الصورة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$، وبالتالي المحور الأكبر ينطبق على محور السينات والمحور الأصغر ينطبق على محور الصادات.



معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

111

تمرّنْ 7−2

القطع الناقص

Ellipse

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4—1)، لكل معادلة من معادلات القطع الناقص التالية أوجد: رأسي القطع – طرفي المحور الأصغر – البؤرتين – معادلتي دليلي القطع – طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لكل قطع.

(1) $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ **(2)** $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$

(3) $3x^2 + 5y^2 - 225 = 0$ **(4)** $4x^2 + y^2 - 28 = 0$

في التمارين (12—5)، اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

(5) البؤرتان $F_2\ (2,0)$ ، $F_1\ (-2,0)$ ، ونقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2\ (0,3)$ ، $B_1\ (0,-3)$.

(6) $V_1F_1 + V_1F_2 = 10$، حيث إنّ V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_2 و F_1 هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$.

(7) نقطتا طرفي المحور الأكبر هما $A_2\ (0,5)$, $A_1\ (0,-5)$ ، طول المحور الأصغر 4.

(8) نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2\ (0,4)$, $B_1\ (0,-4)$ ، طول المحور الأكبر 10.

(9) مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $F(5,0)$ ويمر بالنقطة $C(2,3)$.

(10) محوره الأكبر نقطتاه الطرفيتان $A_2(6,0)$, $A_1(-6,0)$ ومحوره الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-4)$.

(11) بؤرتاه $F_2(-5,0)$, $F_1(5,0)$ وطول محوره الأصغر 6.

(12) طول المحور الأكبر الذي ينطبق على محور السينات 10 والمسافة بين البؤرتين 6 ومركزه نقطة الأصل.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) رأسي القطع للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ هما: $(-9,0)$، $(9,0)$ (a) (b)

(2) النقطة $(\sqrt{33}, 0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ (a) (b)

(3) طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2 + 9y^2 = 225$ يساوي 10 units (a) (b)

(4) بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$، هما $(\pm 3, 0)$ (a) (b)

(5) في القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$، طول المحور الأصغر يساوي 8 (a) (b)

43

في المثال (2)

يوضّح هذا المثال كيفية إيجاد معادلة القطع الناقص بمعلومية بؤرتيه وطول محوره الأصغر. إن رسم شكل تقريبي للقطع يساعد على تركيز مفهوم القطع وخواصه لدى الطالب. ألفت انتباه الطلاب إلى المعادلة التي على الصورة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$، وبالتالي المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات والمحور الأصغر ينطبق على محور السينات.

في المثال (3)

يحول الطالب في هذا المثال المعادلة إلى الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. وبالمقارنة يوجد $a^2,\ b^2$، وباستخدام العلاقة الأساسية $a^2=b^2+c^2$ يوجد قيمة c^2، والمعروف أن قيم a, b, c تساعد على إيجاد إحداثيات البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر وطول المحور الأصغر.

في المثال (4)

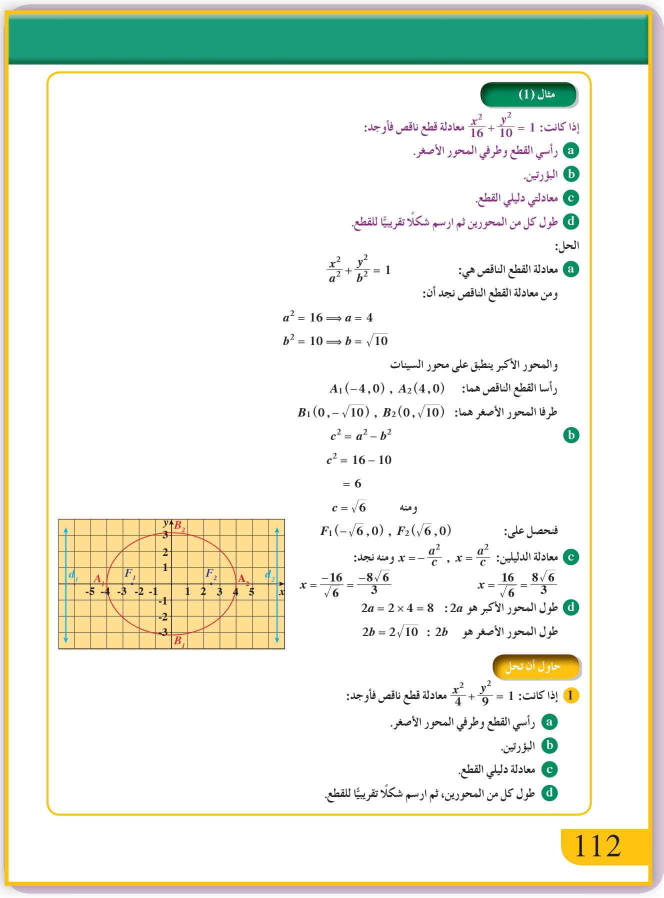
في هذا المثال يستخدم الطلاب خصائص القطع الناقص. من طول المحور الأكبر يتم استنتاج قيمة a ومن المسافة بين البؤرتين يتم استنتاج قيمة c، ثم من العلاقة الأساسية $a^2=b^2+c^2$ يتم الحصول على قيمة b^2، وبالتالي يمكن كتابة معادلة القطع الناقص.

في المثال (5)

في هذا المثال يتعامل الطلاب مع إحداثيات بؤرة، فيتعرفون على قيمة c ويستنتجون أن المحور الأكبر ينطبق على محور السينات، ويستخدمون مرور القطع الناقص بنقطة محددة ليستنتجوا علاقة تساعدهم على إيجاد $a^2\ ,\ b^2$ فيمكن عندها كتابة معادلة القطع الناقص.

في الأمثلة (6), (7), (8)

تعتبر هذه الأمثلة من التطبيقات الحياتية المهمة لاستخدام معادلة القطع الناقص وخواصه في مجالات متعددة مثل الطب، ودوران الكواكب حول الشمس باعتبارها إحدى بؤرتي قطع ناقص.



مثال (1)

إذا كانت: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

الحل:

a معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن:

$a^2=16 \Longrightarrow a=4$

$b^2=10 \Longrightarrow b=\sqrt{10}$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات

رأسا القطع الناقص هما: $A_1(-4,0)\ ,\ A_2(4,0)$

طرفا المحور الأصغر هما: $B_1(0,-\sqrt{10})\ ,\ B_2(0,\sqrt{10})$

b $c^2=a^2-b^2$

$c^2=16-10$

$=6$

ومنه $c=\sqrt{6}$

فنحصل على: $F_1(-\sqrt{6},0)\ ,\ F_2(\sqrt{6},0)$

c معادلة الدليلين: $x=\frac{a^2}{c}\ ,\ x=-\frac{a^2}{c}$ ومنه نجد:

$x=\frac{16}{\sqrt{6}}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$, $x=\frac{-16}{\sqrt{6}}=\frac{-8\sqrt{6}}{3}$

d طول المحور الأكبر هو $2a$: $2a=2\times 4=8$

طول المحور الأصغر هو $2b$: $2b=2\sqrt{10}$

حاول أن تحل

1 إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

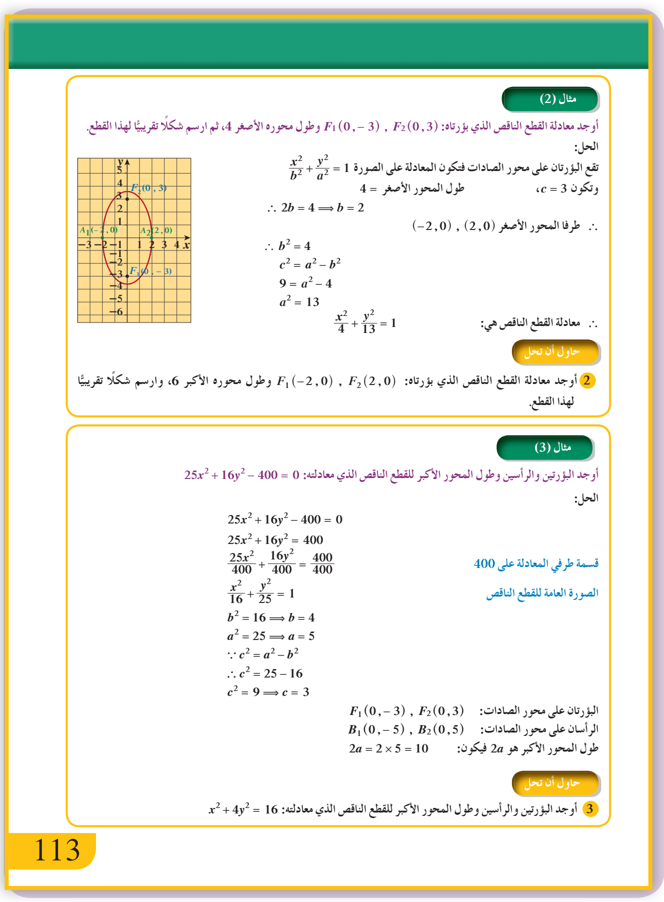
a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b البؤرتين.

c معادلة دليلي القطع.

d طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

112



مثال (2)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(0,-3)\ ,\ F_2(0,3)$ وطول محوره الأصغر 4، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور الصادات فتكون المعادلة على الصورة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

وتكون $c=3$، طول المحور الأصغر $=4$

$\therefore 2b=4 \Longrightarrow b=2$

$\therefore$ طرفا المحور الأصغر $(2,0)\ ,\ (-2,0)$

$\therefore b^2=4$

$c^2=a^2-b^2$

$9=a^2-4$

$a^2=13$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$

حاول أن تحل

2 أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_2(2,0)\ ,\ F_1(-2,0)$ وطول محوره الأكبر 6، وارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع.

مثال (3)

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2+16y^2-400=0$

الحل:

$25x^2+16y^2-400=0$

$25x^2+16y^2=400$

$\frac{25x^2}{400}+\frac{16y^2}{400}=\frac{400}{400}$ قسمة طرفي المعادلة على 400

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ الصورة العامة للقطع الناقص

$b^2=16 \Longrightarrow b=4$

$a^2=25 \Longrightarrow a=5$

$\because c^2=a^2-b^2$

$\therefore c^2=25-16$

$c^2=9 \Longrightarrow c=3$

البؤرتان على محور الصادات: $F_1(0,-3)\ ,\ F_2(0,3)$

الرأسان على محور الصادات: $B_1(0,-5)\ ,\ B_2(0,5)$

طول المحور الأكبر هو $2a$ فيكون: $2a=2\times 5=10$

حاول أن تحل

3 أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2+4y^2=16$

113

6 الربط

يبيّن المثال (6) كيفية الاستفادة من خصائص البؤرة في عمل جهاز تفتيت الحصى، ويبيّن المثال (7) كيفية متابعة الأصوات في أبنية بيضاوية الشكل. كما يبين المثال (8) مدارات الكواكب حول الشمس وهي قطوع ناقصة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الربط بين المحور الأكبر وإحداثيات البؤرتين. يمكن رسم عدة أشكال تبين الترابط بينهما. يشير المعلم إلى العلاقة بين قيمتي a, b واختيار المحور الأكبر الذي تقع عليه البؤرتان.

يتحقق المعلم من تمكن الطلاب من إيجاد معادلة القطع الناقص دون أخطاء حسابية.

ساعدهم على تحديد a^2 و b^2 لمعرفة شكل القطع الناقص وتحديد المحور الأكبر والمحور الأصغر وبالتالي البؤرتين.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل».
تحقق من تمكنهم من خواص القطع الناقص ومن صحة حساباتهم.

اختبار سريع

1 أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه:
$F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$ وطول محوره الأكبر 10.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

2 من معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$، أوجد إحداثيات نقطتي طرفي كل من المحور الأكبر والمحور الأصغر ومركز القطع وإحداثيات بؤرتيه.

المركز $(0, 0)$

$A_1(-12,0)$; $A_2(12,0)$

$B_1(0,-9)$, $B_2(0,9)$

$F_1(-\sqrt{63},0)$, $F_2(\sqrt{63},0)$

مثال (4)

أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني وطوله 12 cm والمسافة بين البؤرتين 8 cm.

الحل:

$\because$ طول المحور الأكبر هو 12 cm

$\therefore 2a = 12 \Longrightarrow a = 6$

$\because$ المسافة بين البؤرتين هو 8 cm

$\therefore 2c = 8 \Longrightarrow c = 4$

ولكن: $a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

بالتعويض نحصل على المعادلة: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm.

مثال (5)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(2,0)$ ويمر بالنقطة $A(2,1)$.

الحل:

$\because$ البؤرة $F(2,0)$ تقع على محور السينات

$\therefore$ معادلة للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $c = 2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$(2)^2 = a^2 - b^2$

$a^2 = b^2 + 4$ (1)

$\because$ القطع الناقص يمر بالنقطة $A(2,1)$

$\therefore \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{4b^2+a^2}{a^2b^2}=1$

$4b^2 + a^2 = a^2b^2$ (2)

بالتعويض (1) في (2) نجد: $4b^2 + b^2 + 4 = b^2(b^2+4)$

ومنه نحصل على المعادلة: $b^4 - b^2 - 4 = 0$

$b^2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

114

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص الذي معادلته $4x^2+9y^2=36$ هما:

a $(\pm 2,0)$ b $(\pm 3,0)$
c $(0,\pm 2)$ d $(0,\pm 3)$

(7) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7,0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0,\pm 6)$ هي:

a $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{36}=1$ b $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{85}=1$
c $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ d $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49}=1$

(8) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الأكبر 9 units وطول محوره الأصغر 4 units هي:

a $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ b $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$
c $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ d $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20.25}=1$

(9) النقطة $A(-10,0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. مجموع المسافتين AF_1+AF_2 حيث F_1 , F_2 هما البؤرتان يساوي:

a 10 units b 12 units
c 14 units d 20 units

(10) طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ يساوي:

a 12 units b $2\sqrt{41}$ units
c 16 units d 20 units

(11) المسافة بين البؤرتين للقطع الناقص $15x^2+25y^2-75=0$ هي:

a $\sqrt{2}$ b $2\sqrt{2}$
c 10 d $2\sqrt{3}$

(12) المسافة بين نقطة الأصل وأحد رأسي القطع الناقص على المحور الأكبر الذي معادلته $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$ هي:

a 9 b 2
c 4.5 d 16.25

44

❸ من معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$، أوجد إحداثيات نقطتي طرفي المحور الأكبر والمحور الأصغر وإحداثيات بؤرتيه.

$A_1(0,-9)$; $A_2(0,9)$

$B_1(-5,0)$, $B_2(5,0)$

$F_1(0,-\sqrt{56})$, $F_2(0\ ,\ \sqrt{56})$

❾ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

❶ **(a)** $(-4,0)$, $(4,0)$, $(0,-4)$, $(0,4)$

(b) إجابة ممكنة:

$(-2,-2\sqrt{3}),(-2,2\sqrt{3}),(2,-2\sqrt{3}),(2,2\sqrt{3})$

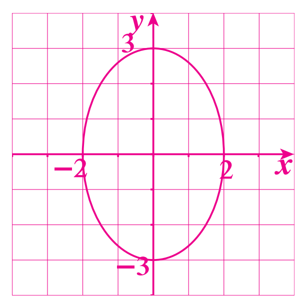
(c) $(0,\ 0)$

❷ **(a)** $(-4,0)$, $(4,0)$, $(0,-3)$, $(0,3)$

(b) راجع عمل الطلاب. قطع ناقص يمس الدائرة في النقطتين: $(-4,0)$, $(4,0)$.

«حاول أن تحل»

❶



(a) رأسا القطع الناقص هما:

$A_1(0,-3)$, $A_2(0,3)$

طرفا المحور الأصغر هما:

$B_1(-2,0)$, $B_2(2,0)$

(b) البؤرتين: $F_1(0,-\sqrt{5})$, $F_2(0,\sqrt{5})$

(c) معادلة الدليلين: $y = \frac{9\sqrt{5}}{5}$, $y = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$

(d) طول المحور الأكبر 6، طول المحور الأصغر 4.

بالتعويض عن b^2 في (1) نجد: $a^2 = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$

ومعادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{\frac{9+\sqrt{17}}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} = 1$$

$$\frac{2x^2}{9+\sqrt{17}} + \frac{2y^2}{1+\sqrt{17}} = 1$$

حاول أن تحل

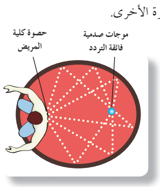
5 **a** هل يمكنك حل مثال (5) بطريقة أخرى؟ فسّر.

b أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ ومحوره الأصغر أفقي طوله 10 cm ويمر بالنقطة $A(2,2\sqrt{6})$.

تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة Applications Using Ellipses

عندما ندوّر قطعًا ناقصًا في فراغ ثلاثي الأبعاد حول محوره الأكبر، فإن القطع الناقص يُنتج **سطحًا لمجسم قطع ناقص.** فالضوء أو الصوت المنبعث من إحدى البؤرتين سينعكس عند السطح ويمر خلال البؤرة الأخرى.

كذلك تحتوي متاحف العلوم على صالات عرض للهمس تعمل بهذا المبدأ، إذا همس شخص يقف في إحدى البؤرتين، فيمكن للشخص الذي يقف في البؤرة الأخرى أن يسمعه بسهولة، حتى إذا كان المتحدث يدير له ظهره. هناك تطبيق طبي، أيضًا، في علاج حصوات الكلى. يبعث جهاز تفتيت الحصوات بموجات صدمية فائقة التردد (UHF) من إحدى البؤرتين وتمر الموجات الصدمية عبر حصوات كلية المريض في البؤرة الثانية وتفتتها.



مثال (6)

للقطع الناقص الذي يولد السطح الناقص لجهاز تفتيت الحصوات، محور أكبر نقطتاه الطرفيتان $A_1(-6,0)$, $A_2(6,0)$، ومحور الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-2.5)$ ، أوجد إحداثيات البؤرتين.

الحل:

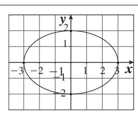
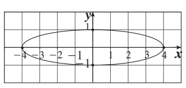
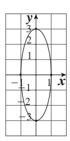
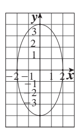
من المعلومات المعطاة نجد أن: $a = 6$, $b = 2.5$ ومركزه $(0,0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$= \sqrt{6^2 - 2.5^2}$$
$$\approx 5.454$$

البؤرتان هما بالتقريب النقطتان $F_1(-5.45,0)$, $F_2(5.45,0)$

115

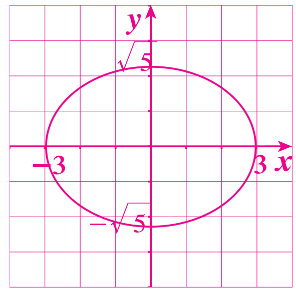
في التمارين (13–15)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع ناقص بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$	a 
(14) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$	b 
(15) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$	c 
	d 

45

2 رأسا القطع الناقص هما: $A_1(-3,0)\ ,\ A_2(3\ ,0)$

$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$



$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

3 $x^2 + 4y^2 = 16 \Longrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

$a = 4\ ,\ b = 2\ ,\ c = 2\sqrt{3}$

البؤرتان: $F_1(-2\sqrt{3}\ ,0)\ ,\ F_2(2\sqrt{3}\ ,0)$

الرأسان: $A_1(-4\ ,0)\ ,\ A_2(4\ ,0)$

طول المحور الأكبر 8.

4 $2a = 16 \Longrightarrow a = 8\ ;\ 2c = 10 \Longrightarrow c = 5$

$b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow b^2 = 39$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$

5 **(a)** تحقق من عمل الطلاب.

(b) $b^2 = 25 \Longrightarrow \frac{4}{25} + \frac{24}{a^2} = 1 \Longrightarrow a^2 = \frac{200}{7}$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{200}{7}} = 1$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{7y^2}{200} = 1$

6 $c^2 = 8^2 - 3.5^2 = 51.75$

$\Longrightarrow F_1(-\sqrt{51.75}\ ,0)\ ,\ F_2(\sqrt{51.75}\ ,0)$

7 $c^2 = 39^2 - 18^2 = 1197 \Longrightarrow c \approx 34.6$

إذًا المسافة هي حوالي 69.2 m

8 $\frac{x^2}{5\,776 \times 10^{12}} + \frac{y^2}{5\,476 \times 10^{12}} = 1$

حاول أن تحل

6 يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات، من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8\ ,0)\ ,\ A_2(8\ ,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0\ ,3.5)$؛ فأوجد إحداثيات البؤرتين.

مثال (7)

لمتابعة الهمس في الصالات البيضاوية الشكل فإن الصوت الذي ينطلق من بؤرة يمكن الاستماع إليه بشكل تام في البؤرة الثانية. على افتراض أن إحدى الصالات الكبرى مبنية على شكل بيضاوي طولي محوريها 98 m و 46 m.
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماعه بشكل واضح؟

الحل:

$\because$ مصدر الصوت عند إحدى البؤرتين

$\therefore$ يجب أن يقف الشخص عند البؤرة الأخرى حتى يسمع الصوت بوضوح

الشكل البيضاوي للصالة يمثل قطعًا ناقصًا له محور أكبر طوله 98 m

$\therefore\ 2a = 98$

$a = 49$

وطول المحور الأصغر 46 m $\quad \therefore\ 2b = 46$

$b = 23$

$c^2 = a^2 - b^2$

من المعادلة: $c^2 = (49)^2 - (23)^2$

$c^2 = 1872$

$c \approx 43.267$

والمسافة بين البؤرتين هي: $2c \approx 86.5$

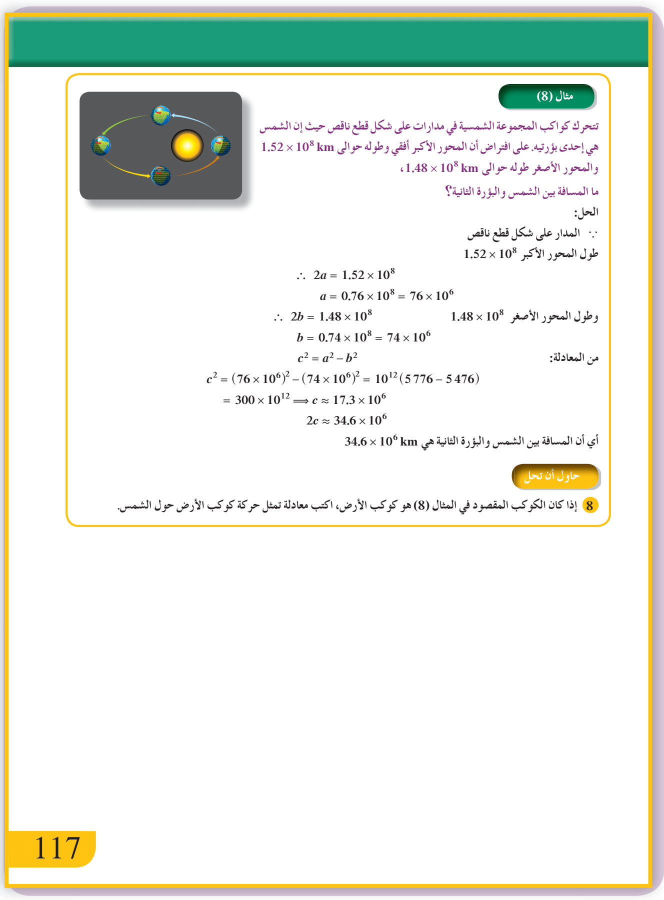
أي حوالي 86.5 m

يجب أن يكون موقع الشخص على بعد 86.5 m تقريبًا من مصدر الصوت.

حاول أن تحل

7 على افتراض أن الصالة بيضاوية الشكل طولي محوريها 78 m ، 36 m.
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماع الصوت المنطلق بشكل واضح؟

116



مثال (8)

تتحرك كواكب المجموعة الشمسية في مدارات على شكل قطع ناقص حيث إن الشمس هي إحدى بؤرتيه. على افتراض أن المحور الأكبر أفقي وطوله حوالى 1.52×10^8 km والمحور الأصغر طوله حوالى 1.48×10^8 km،
ما المسافة بين الشمس والبؤرة الثانية؟

الحل:

$\because$ المدار على شكل قطع ناقص

طول المحور الأكبر 1.52×10^8

$\therefore\ 2a = 1.52 \times 10^8$

$a = 0.76 \times 10^8 = 76 \times 10^6$

وطول المحور الأصغر 1.48×10^8 $\quad \therefore\ 2b = 1.48 \times 10^8$

$b = 0.74 \times 10^8 = 74 \times 10^6$

من المعادلة: $c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = (76 \times 10^6)^2 - (74 \times 10^6)^2 = 10^{12}(5\,776 - 5\,476)$

$= 300 \times 10^{12} \Longrightarrow c \approx 17.3 \times 10^6$

$2c \approx 34.6 \times 10^6$

أي أن المسافة بين الشمس والبؤرة الثانية هي 34.6×10^6 km

حاول أن تحل

8 إذا كان الكوكب المقصود في المثال (8) هو كوكب الأرض، اكتب معادلة تمثل حركة كوكب الأرض حول الشمس.

117

3–7: القطع الزائد

1 الأهداف

- يتعرف القطع الزائد وخواصه.
- يستخدم القطع الزائد في حل المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قطع زائد – خطوط مقاربة – رؤوس – المحور القاطع – المحور المرافق.

3 الأدوات والوسائل

أوراق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) اكتب كلًّا مما يلي على الصورة: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(a) $8x^2-4y^2=24$

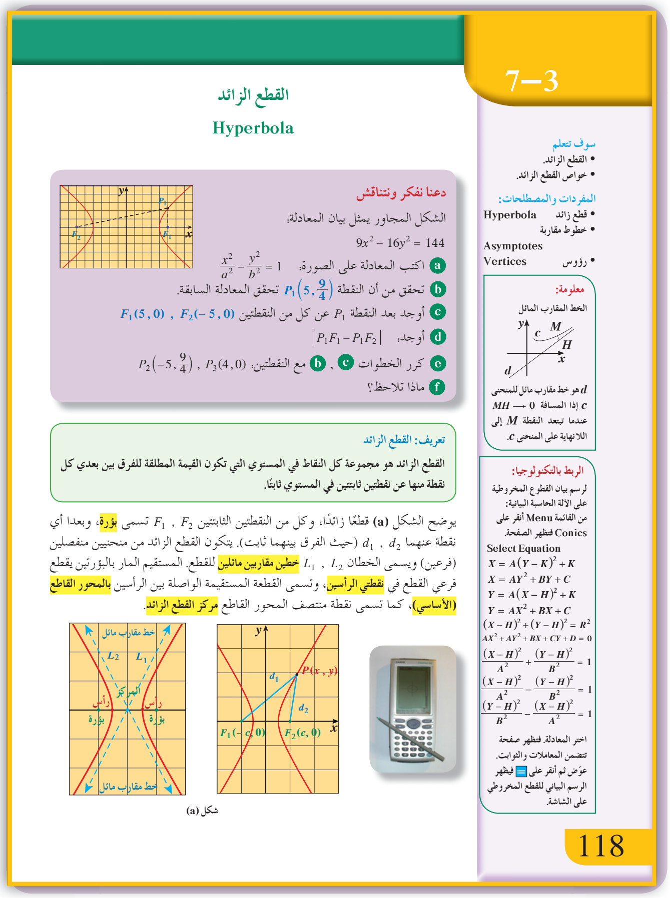
(b) $6y^2-x^2=-36$

(2) لتكن معادلة منحنى على الصورة:

$$mx^2-ny^2=m\,n:(m\neq 0\,,n\neq 0)$$

ويمر بالنقطتين: $A(4\,,0)\;,\;B(0\,,-3)$

فأوجد m, n ثم بيّن أنها معادلة قطع ناقص.



3–7

القطع الزائد

Hyperbola

دعنا نفكر ونتناقش

الشكل المجاور يمثل بيان المعادلة:

$9x^2-16y^2=144$

(a) اكتب المعادلة على الصورة: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(b) تحقق من أن النقطة $P_1\left(5,\frac{9}{4}\right)$ تحقق المعادلة السابقة.

(c) أوجد بعد النقطة P_1 عن كل من النقطتين $F_1(5,0)\;,\;F_2(-5,0)$

(d) أوجد: $|P_1F_1-P_1F_2|$

(e) كرر الخطوات (b) , (c) مع النقطتين: $P_2\left(-5,\frac{9}{4}\right)\;,\;P_3(4,0)$

(f) ماذا تلاحظ؟

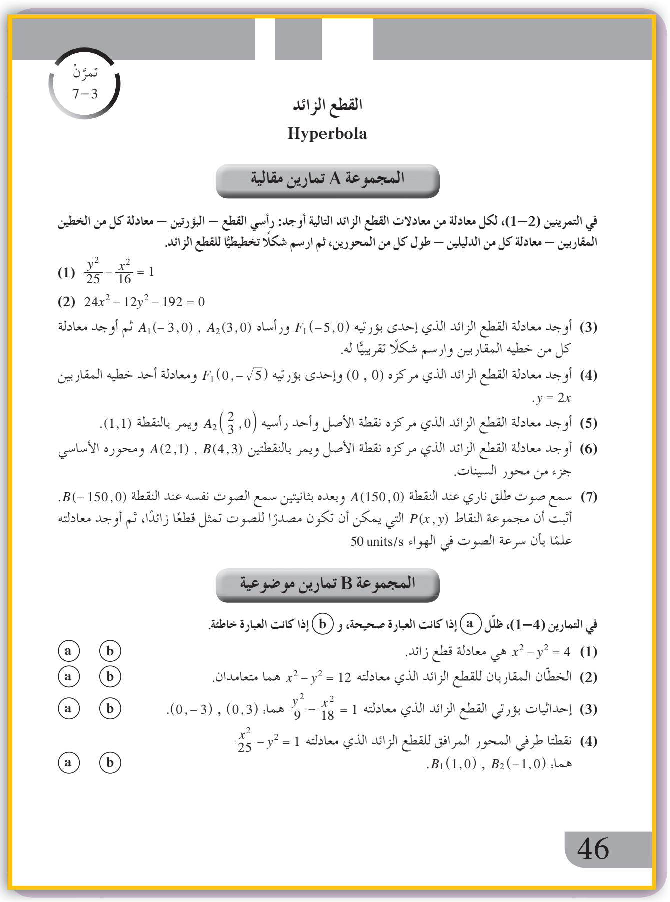
تعريف: القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.

يوضح الشكل **(a)** قطعًا زائدًا، وكل من النقطتين الثابتتين $F_2\;,\;F_1$ تسمى **بؤرة**، وبعدا أي نقطة عنهما $d_2\;,\;d_1$ (حيث الفرق بينهما ثابت). يتكون القطع الزائد من منحنيين منفصلين (فرعين) ويسمى الخطان $L_2\;,\;L_1$ **خطين مقاربين مائلين** للقطع. المستقيم المار بالبؤرتين يقطع فرعي القطع في **نقطتي الرأسين**، وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين **بالمحور القاطع (الأساسي)**، كما تسمى نقطة منتصف المحور القاطع **مركز القطع الزائد**.

شكل (a)

118



تمرّن 7–3

القطع الزائد

Hyperbola

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1–2)، لكل معادلة من معادلات القطع الزائد التالية أوجد: رأسي القطع – البؤرتين – معادلة كل من الخطين المقاربين – معادلة كل من الدليلين – طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع الزائد.

(1) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{16}=1$

(2) $24x^2-12y^2-192=0$

(3) أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F_1(-5,0)$ ورأساه $A_1(-3,0)\;,\;A_2(3,0)$ ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًّا له.

(4) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (0 , 0) وإحدى بؤرتيه $F_1(0,-\sqrt{5})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين $y=2x$.

(5) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه $A_2\left(\frac{2}{3},0\right)$ ويمر بالنقطة (1,1).

(6) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(2,1)\;,\;B(4,3)$ ومحوره الأساسي جزء من محور السينات.

(7) سمع صوت طلق ناري عند النقطة $A(150,0)$ وبعده بثانيتين سمع الصوت نفسه عند النقطة $B(-150,0)$. أثبت أن مجموعة النقاط $P(x,y)$ التي يمكن أن تكون مصدرًا للصوت تمثل قطعًا زائدًا، ثم أوجد معادلته علمًا بأن سرعة الصوت في الهواء 50 units/s

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $x^2-y^2=4$ هي معادلة قطع زائد. (a) (b)

(2) الخطّان المقاربان للقطع الزائد الذي معادلته $x^2-y^2=12$ هما متعامدان. (a) (b)

(3) إحداثيات بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{18}=1$ هما: $(0,3)\;,\;(0,-3)$. (a) (b)

(4) نقطتا طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\dfrac{x^2}{25}-y^2=1$ هما: $B_1(1,0)\;,\;B_2(-1,0)$. (a) (b)

46

5 التدريس

قم بالتركيز أولًا على تعريف القطع الزائد ثم بيّن للطلاب نقاط التشابه والاختلاف بين معادلتي القطع الزائد والقطع الناقص. ذكرهم أن القطع الزائد هو الوحيد بين القطوع المخروطية الذي له خطين مقاربين. اسأل الطلاب عن كيفية الاستفادة من الخطين المقاربين لرسم بيان قطع زائد. استخدم الحاسوب أو جهاز الإسقاط أو الرسم على السبورة لعرض الرسم البياني لكل من القطعين الزائدين $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ، $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ واعرض بالقرب من كل رسم بياني خواصه للمقارنة.

اعرض على الطلاب القطع الزائد بحالته الخاصة الذي معادلته: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ وناقش معهم خواصه. اسألهم عن خطوطه المقاربة. بيّن لهم أن الخطين المقاربين هما متعامدان ومعادلتهما $y=\pm x$.

اسأل الطلاب: ما قياس الزاوية التي يصنعها كل منهما مع المحور السيني؟

في المثال التوضيحي

يوضّح هذا المثال كيفية استخدام الخاصية: $MF_1-MF_2=2a$ لكتابة معادلة قطع زائد.

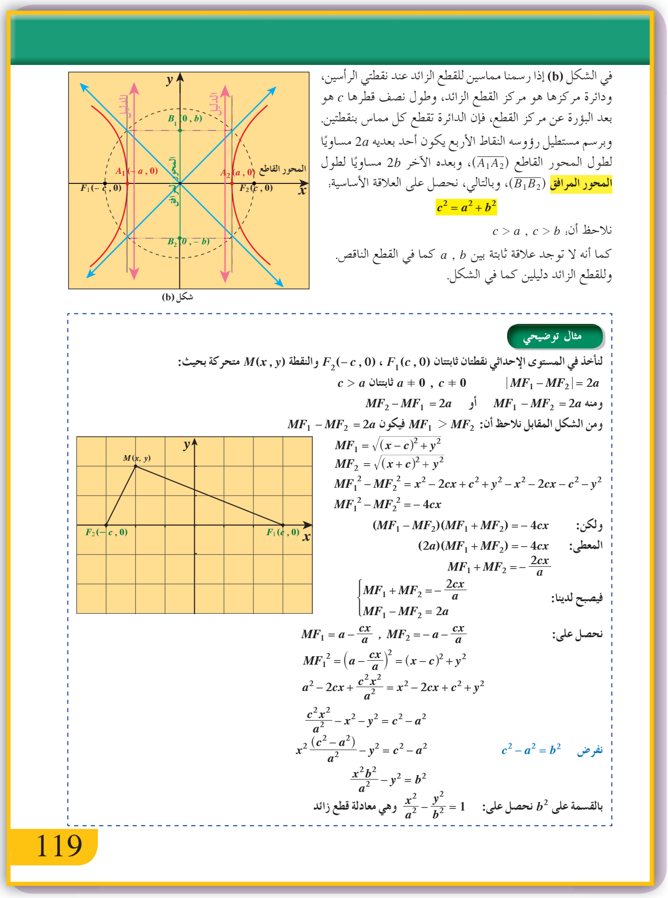
فسّر للطلاب أن معادلة القطع الزائد التي حصلنا عليها يمكن أيضًا الحصول عليها إذا أخذنا $MF_2-MF_1=2a$، علمًا أن F_1، F_2 هما بؤرتا القطع الزائد و $MF_2>MF_1$

في المثال (1)

يوضّح هذا المثال كيفية استخدام معادلة القطع الزائد لإيجاد خواصه، حيث يتم إيجاد إحداثيات الرأسين، وإحداثيات البؤرتين، ومعادلتي الدليلين وطول كل من المحورين ومعادلتي الخطين المقاربين. أشر إلى طريقة رسم القطع الزائد.

في المثال (2)

يهدف هذا المثال إلى إيجاد معادلة القطع الزائد ومعادلة كلّ من خطيه المقاربين بمعلومية بؤرتيه ورأسيه. إن وضع مخطط لرسمه البياني يسمح للطلاب بالمقارنة بين خواص القطع الزائد وما يرونه في الشكل المرسوم. أشر إلى الطريقة الأخرى لرسم القطع الزائد.



في الشكل (b) إذا رسمنا مماسين للقطع الزائد عند نقطتي الرأسين، ودائرة مركزها هو مركز القطع الزائد، وطول نصف قطرها c هو بعد البؤرة عن مركز القطع، فإن الدائرة تقطع كل مماس بنقطتين. وبرسم مستطيل رؤوسه النقاط الأربع يكون أحد بعديه $2a$ مساويًا لطول المحور القاطع $(\overline{A_1A_2})$، وبعده الآخر $2b$ مساويًا لطول **المحور المرافق** $(\overline{B_1B_2})$، وبالتالي، نحصل على العلاقة الأساسية:

$$c^2=a^2+b^2$$

نلاحظ أن: $c>a$, $c>b$

كما أنه لا توجد علاقة ثابتة بين a , b كما في القطع الناقص. وللقطع الزائد دليلين كما في الشكل.

شكل (b)

مثال توضيحي

لنأخذ في المستوى الإحداثي نقطتان ثابتتان $F_1(c,0)$ ، $F_2(-c,0)$ والنقطة $M(x,y)$ متحركة بحيث:

$|MF_1-MF_2|=2a$ $\quad$ $a\neq0$, $c\neq0$ ثابتتان $c>a$

ومنه $MF_1-MF_2=2a$ أو $MF_2-MF_1=2a$

ومن الشكل المقابل نلاحظ أن: $MF_1>MF_2$ فيكون $MF_1-MF_2=2a$

$$MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$MF_1^{\,2}-MF_2^{\,2}=x^2-2cx+c^2+y^2-x^2-2cx-c^2-y^2$$
$$MF_1^{\,2}-MF_2^{\,2}=-4cx$$

ولكن: $(MF_1-MF_2)(MF_1+MF_2)=-4cx$

المعطى: $(2a)(MF_1+MF_2)=-4cx$

$$MF_1+MF_2=-\frac{2cx}{a}$$

فيصبح لدينا: $\begin{cases}MF_1+MF_2=-\frac{2cx}{a}\\ MF_1-MF_2=2a\end{cases}$

نحصل على: $MF_1=a-\frac{cx}{a}$, $MF_2=-a-\frac{cx}{a}$

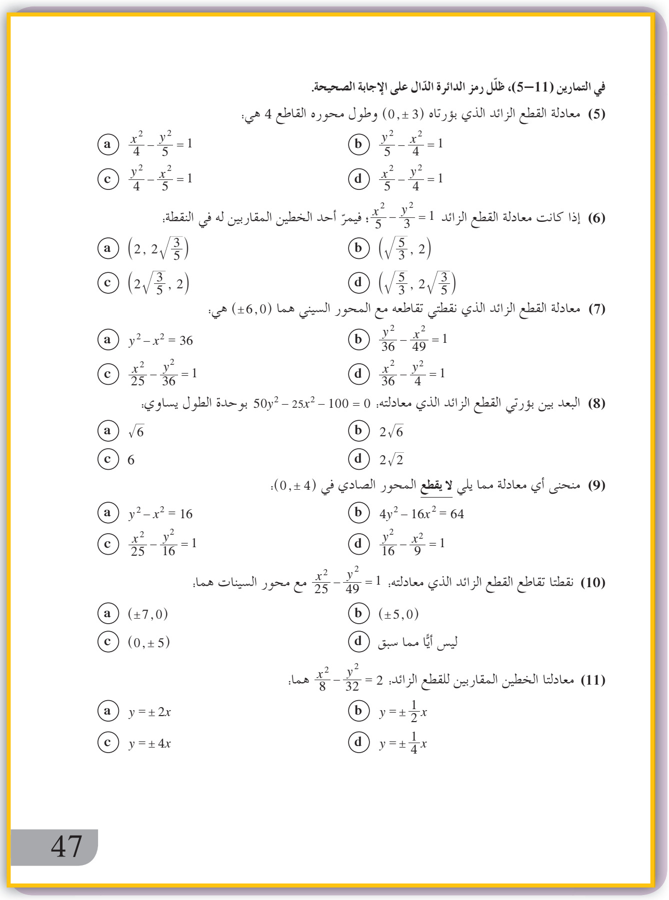
$$MF_1^{\,2}=\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2=(x-c)^2+y^2$$
$$a^2-2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}=x^2-2cx+c^2+y^2$$
$$\frac{c^2x^2}{a^2}-x^2-y^2=c^2-a^2$$

نفرض $c^2-a^2=b^2$

$$x^2\frac{(c^2-a^2)}{a^2}-y^2=c^2-a^2$$
$$\frac{x^2b^2}{a^2}-y^2=b^2$$

بالقسمة على b^2 نحصل على: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ وهي معادلة قطع زائد

119



في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0,\pm3)$ وطول محوره القاطع 4 هي:

(a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ $\quad$ (b) $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{4}=1$

(c) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ $\quad$ (d) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

(6) إذا كانت معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$؛ فيمرّ أحد الخطين المقاربين له في النقطة:

(a) $\left(2,2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ $\quad$ (b) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},2\right)$

(c) $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}},2\right)$ $\quad$ (d) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

(7) معادلة القطع الزائد الذي نقطتي تقاطعه مع المحور السيني هما $(\pm6,0)$ هي:

(a) $y^2-x^2=36$ $\quad$ (b) $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{49}=1$

(c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$ $\quad$ (d) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$

(8) البعد بين بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته: $50y^2-25x^2-100=0$ بوحدة الطول يساوي:

(a) $\sqrt{6}$ $\quad$ (b) $2\sqrt{6}$

(c) 6 $\quad$ (d) $2\sqrt{2}$

(9) منحنى أي معادلة مما يلي **لا يقطع** المحور الصادي في $(0,\pm4)$:

(a) $y^2-x^2=16$ $\quad$ (b) $4y^2-16x^2=64$

(c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ $\quad$ (d) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

(10) نقطتا تقاطع القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$ مع محور السينات هما:

(a) $(\pm7,0)$ $\quad$ (b) $(\pm5,0)$

(c) $(0,\pm5)$ $\quad$ (d) ليس أيًّا مما سبق

(11) معادلتا الخطين المقاربين للقطع الزائد: $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=2$ هما:

(a) $y=\pm2x$ $\quad$ (b) $y=\pm\frac{1}{2}x$

(c) $y=\pm4x$ $\quad$ (d) $y=\pm\frac{1}{4}x$

47

في المثال (3)

يوضّح هذا المثال كيفية استخدام إحدى بؤرتي القطع الزائد ومعادلة أحد خطيه المقاربين لكتابة معادلته.

في المثال (4)

يوضّح هذا المثال كيفية استخدام أحد رأسي القطع الزائد ونقطة يمر بها لإيجاد معادلته.

في المثالين (6) ,(5)

يعتبر هذين المثالين من التطبيقات الحياتية، لأنهما يوضحان كيفية إيجاد مسار مركبة فضائية وتأثير جاذبية الكواكب على مسارها ووضع معادلة، مما يسمح باستخلاص النتائج. ينصح هنا باستخدام الآلة الحاسبة.

ألفت انتباه الطلاب إلى تأثير جاذبية الكواكب في تغيير مسار مركبة فضائية من خط مستقيم إلى قطع زائد.

6 الربط

يشكل المثالان (6) ,(5) ترابطًا مهمًا مع مسارات المركبات الفضائية. أُطلب إلى الطلاب البحث عن مسارات بعض المراكب الفضائية على صورة قطع زائد وإيجاد معادلاتها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

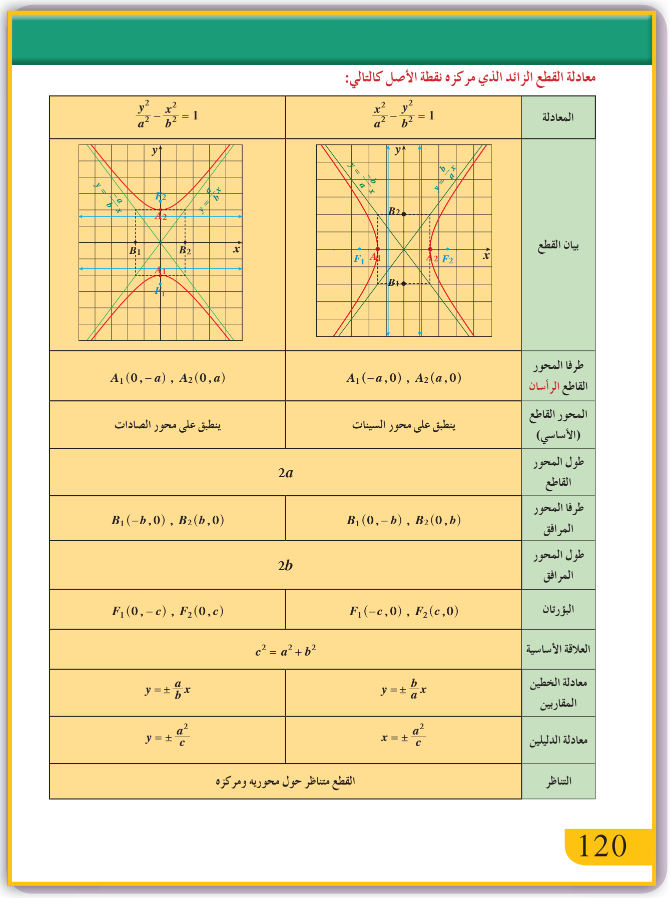
قد يخطئ الطلاب في استخدام خواص القطع الزائد وما إذا كان المحور القاطع منطبقًا على محور السينات أم منطبقًا على محور الصادات.

شدّد على الدقة في الحسابات لمنع الأخطاء وشدّد أيضًا على التمييز بين خواص القطع الزائد في كلتا الحالتين.

قد لا يفرق الطالب بين العلاقة الأساسية لكل من القطع الزائد والقطع الناقص وضّح لهم الفرق.

8 التقييم

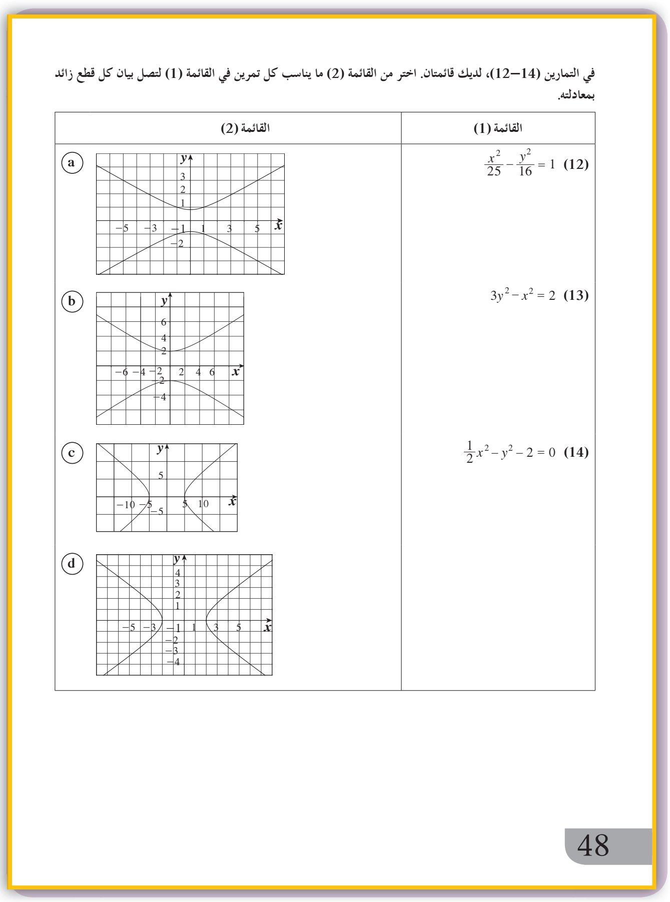
راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من تمكنهم من المفاهيم الواردة في الدرس والدقة في الحسابات.



معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

120



في التمارين (14–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع زائد بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$	a
(13) $3y^2-x^2=2$	b
(14) $\frac{1}{2}x^2-y^2-2=0$	c
	d

48

اختبار سريع

1 (a) وضح أن الرسم البياني للمعادلة:

$9x^2 - 4y^2 = 36$ هو قطع زائد.

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة قطع زائد

(b) أوجد مركزه ونقطتي طرفي المحور القاطع وبؤرتيه. المركز: $(0, 0)$

نقطتا طرفا المحور القاطع:

$A_1(2, 0)$, $A_2(-2, 0)$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$

(c) أوجد معادلتي الخطين المقاربين.

$y = \pm \frac{3}{2}x$

2 أوجد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0, 5)$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين: $y = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}x$

$c = 5$, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$, $a = \frac{\sqrt{17}\,b}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow a^2 = \frac{17b^2}{8}$

ولكن: $(5)^2 = b^2 + \frac{17b^2}{8} \Longrightarrow 25 = \frac{25b^2}{8}$

$b^2 = 8$, $a^2 = 17$

فتكون معادلة القطع الزائد: $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{17} = 1$ لأن المحور القاطع ينطبق على محور الصادات.

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

(b) $\frac{5^2}{16} - \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{9} = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} = 1$

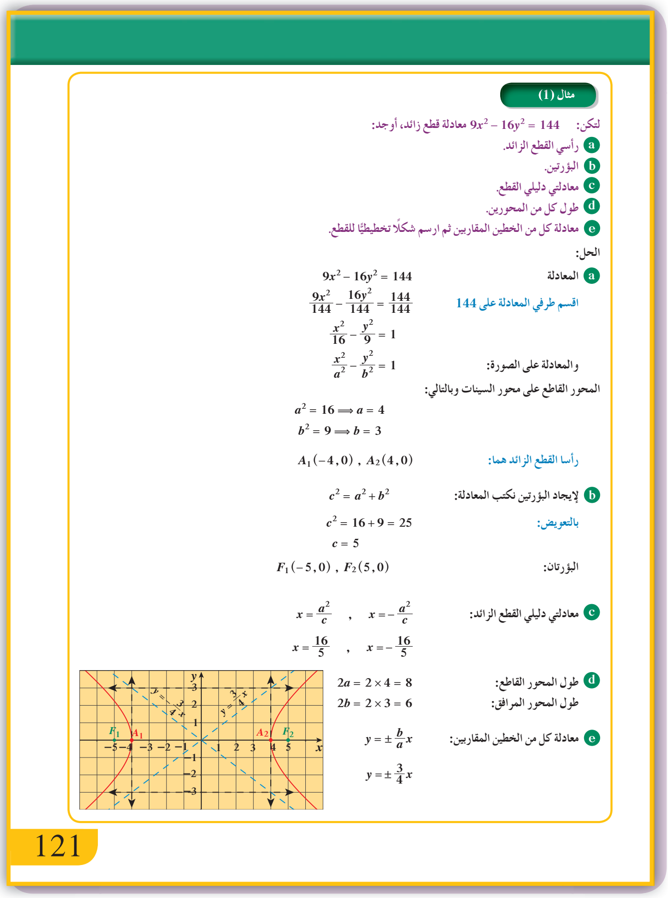
(c) $P_1F_1 = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = 2.25$

$P_1F_2 = \sqrt{10^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = 10.25$

(d) $|P_1F_1 - P_1F_2| = 8$

(e) تحقق من عمل الطلاب.

(f) قيمة $|PF_1 - PF_2|$ ثابتة.



مثال (1)

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين.

e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.

الحل:

a المعادلة $9x^2 - 16y^2 = 144$

اقسم طرفي المعادلة على 144 $\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

والمعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

المحور القاطع على محور السينات وبالتالي:

$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

رأسا القطع الزائد هما: $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

b لإيجاد البؤرتين نكتب المعادلة: $c^2 = a^2 + b^2$

بالتعويض: $c^2 = 16 + 9 = 25$

$c = 5$

البؤرتان: $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

c معادلتي دليلي القطع الزائد: $x = \frac{a^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$

$x = \frac{16}{5}$, $x = -\frac{16}{5}$

d طول المحور القاطع: $2a = 2 \times 4 = 8$

طول المحور المرافق: $2b = 2 \times 3 = 6$

e معادلة كل من الخطين المقاربين: $y = \pm \frac{b}{a}x$

$y = \pm \frac{3}{4}x$

121

«حاول أن تحل»

1 المعادلة: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

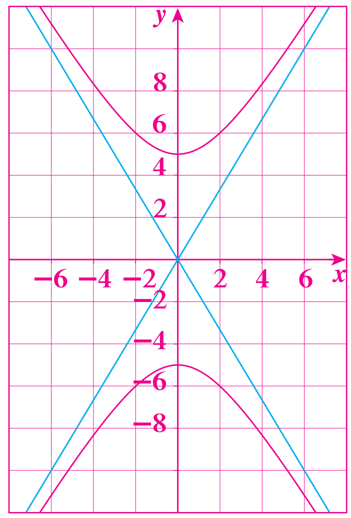
(a) $A_1(0\,,-5)\ ,\ A_2(0\,,5)$

(b) $F_1(0\,,-\sqrt{34})\ ,\ F_2(0\,,\sqrt{34})$

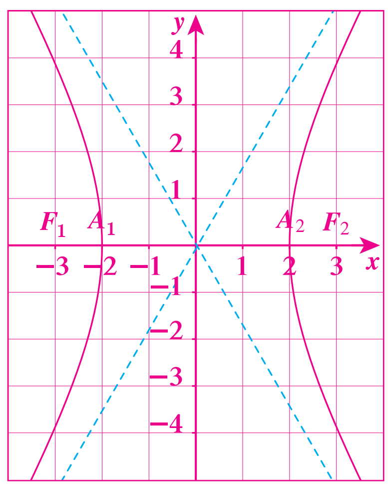
(c) $y = \pm\frac{25}{\sqrt{34}}$

(d) $10,\ 6$

(e) $y = \pm\frac{5}{3}x$



2 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1\ ,\ y = \pm\sqrt{3}\,x$



لرسم مخطط هذا القطع الزائد نعيّن طرفي المحور الأساسي (رأس القطع) ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور الصادات ونعيّن طرفي المحور المرافق ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور السينات.

تتقاطع هذه المستقيمات في أربع نقاط تشكل رؤوس مستطيل والخطان المقاربان للقطع الزائد ينطبقان على قطري المستطيل ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل

1 لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين.

e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع.

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(0\,,-3)\ ,\ F_2(0\,,3)$ ورأساه $A_1(0\,,-2)\ ,\ A_2(0\,,2)$ ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

الحل:

∵ البؤرتين على محور الصادات.

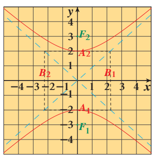
∴ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

∵ إحدى البؤرتين $F_2(0\,,3)$ $\therefore\ c = 3$

∵ أحد الرأسين $A_2(0\,,2)$ $\therefore\ a = 2$

ولكن:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$3^2 = 2^2 + b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$= 9 - 4$$
$$= 5$$



معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

معادلتا الخطين المقاربين هما: $y = \pm\frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x \Rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$

لرسم مخطط القطع الزائد، نبدأ برسم مستطيل رؤوسه هي الأزواج المرتبة: $(\pm a\,,\pm b)$ $(\pm 2\ ,\ \pm\sqrt{5})$، ثم نرسم الخطين المقاربين على أنهما ينطبقان على قطري المستطيل ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل

2 أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4\,,0)\,,F_2(4\,,0)$ ورأساه $A_1(-2\,,0)\,,A_2(2\,,0)$، ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين، وارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

122

ملاحظة: يمكنك رسم مخطط القطع الزائد بطرق أخرى.

مثال (3)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\,,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0\,,\sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y = \frac{3}{5}x$

الحل:

∵ إحدى البورتين $F(0\,,\sqrt{34})$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$
$$\therefore\ 34 = a^2 + b^2 \qquad (1)$$

معادلة المقارب: $y = \frac{a}{b}x$ حيث من المعطى $y = \frac{3}{5}x$

$$\therefore\ \frac{3}{5} = \frac{a}{b}$$
$$\therefore\ a = \frac{3b}{5}$$

بالتعويض في المعادلة (1):

$$34 = \left(\frac{3b}{5}\right)^2 + b^2$$
$$34 = \frac{9b^2}{25} + b^2$$
$$850 = 9b^2 + 25b^2$$
$$b^2 = \frac{850}{34}$$
$$b^2 = 25 \qquad \Longrightarrow\ b = 5$$

لإيجاد قيمة a نستخدم:

$$a = \frac{3b}{5}$$
$$a = \frac{3\times 5}{5} = 3$$

ومعادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41}\ ,0)$ ومعادلة أحد خطية المقاربين $y = \frac{4}{5}x$

مثال (4)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\,,0)$ وأحد رأسيه $(-4\,,0)$ ويمر بالنقطة $(5\,,-2)$.

الحل:

∵ أحد رأسي القطع الزائد $(-4\,,0)$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور السينات

123

3

$$c = \sqrt{41}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{5}\ ,\ b = \frac{4}{5}a$$

$$a^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 = 41$$

المعادلة: $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

4

$$a = \frac{5}{4}\ ;\ \frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{16}} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 1$$

المعادلة: $\dfrac{y^2}{\frac{25}{16}} - x^2 = 1$

محوره القاطع ينطبق على محور الصادات.

5

$$\frac{x^2}{(35\,988\,342)^2} - \frac{y^2}{(4\,498\,398\,844)^2} = 1$$

6

$$\frac{x^2}{(38\,942\,360)^2} - \frac{y^2}{(777\,572\,655.9)^2} = 1$$

ومعادلة القطع هي: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

من المعطيات: $a = 4$ فيكون: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

يمر القطع الزائد بالنقطة $(5, -2)$

بالتعويض

$$\therefore\ \frac{25}{16} - \frac{4}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{25}{16} - 1 = \frac{4}{b^2}$$

$$\frac{9}{16} = \frac{4}{b^2}$$

$$b^2 = \frac{64}{9}$$

معادلة القطع الزائد: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{9y^2}{64} = 1$$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وأحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

تطبيقات باستخدام القطع الزائد

يتحدث العلماء عن نظرية تقول إن الجرم السماوي الذي يتحرك ضمن مجال جاذبية جسم آخر أثقل منه يتبع مسارًا قريبًا جدًّا من شكل قطع مخروطي حيث إحدى بؤرتيه هي الجسم الأثقل، مثال على ذلك الشمس هي إحدى بؤرتي الكواكب التي تدور حولها. أما حركة المذنبات بالنسبة للشمس نظريًّا فإنها تقترب من الشمس ويكوّن معها حلقة جزئية لتترك بعد ذلك النظام الشمسي وتبتعد في الفضاء الواسع لتتبع مسارًا يشبه أحد فروع القطع الزائد.

مثال (5) تطبيقات حياتية

عند اقتراب مركبة فضائية من أحد الكواكب، تُغيّر جاذبية هذا الكوكب مسار المركبة إلى قطع زائد.

أوجد معادلة تنمذج مسار مركبة فضائية قرب كوكب زحل إذا كان $c = 492\,788.2$ km ، $a = 332\,965$ km

الحل:

نفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور القاطع أفقي.

تكون المعادلة على الصورة: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

العلاقة الأساسية للقطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$

حل في b^2 $b^2 = c^2 - a^2$

عوّض $b^2 = (492\,788.2)^2 - (332\,965)^2$

استخدم آلة حاسبة $b^2 \approx 1.320 \times 10^{11}$

$$\frac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \frac{y^2}{1.320 \times 10^{11}} = 1$$

يمكن أن تنمذج مسار سفينة فضائية حول زحل بالمعادلة: $\dfrac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \dfrac{y^2}{1.320 \times 10^{11}} = 1$

124

حاول أن تحل

5 في مثال (5): أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول نبتون إذا كان: $a = 35\,988\,342$ km ، $c = 4\,498\,542\,800$ km

مثال (6)

عندما تنطلق مركبة فضائية وتقترب من أحد الكواكب، فإن جاذبية هذا الكوكب تغير مسار المركبة من خط مستقيم إلى منحنى يشبه أحد فرعي القطع الزائد. أوجد معادلة قطع زائد تمثل مسار مركبة فضائية حول كوكب الزهرة إذا افترضنا أن نقطة الأصل هي مركز القطع الزائد والمحور القاطع في وضع أفقي علمًا أن طول نصف المحور القاطع 1 882 820 km والمسافة بين البؤرتين هي 108 208 000 km

الحل:

$\because$ المحور القاطع هو أفقي

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي على الصورة: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

من المعطيات:

$$a = 1\,882\,820$$

$$2c = 108\,208\,000$$

$$c = 54\,104\,000$$

من المعادلة الأساسية للقطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2$

$$b^2 = (54\,104\,000)^2 - (1\,882\,820)^2 = 2.9 \times 10^{15}$$

والمعادلة: $\dfrac{x^2}{3.5 \times 10^{12}} - \dfrac{y^2}{2.9 \times 10^{15}} = 1$

حاول أن تحل

6 في مثال (6): أوجد معادلة قطع زائد مركزه $(0, 0)$ لمسار المركبة الفضائية حول كوكب المشتري علمًا أن:

$a = 38\,942\,360$ km ، $c = 778\,547\,200$ km

125

7–4: الاختلاف المركزي

1 الأهداف

- يتعرف الاختلاف المركزي والدليل.
- يستخدم الاختلاف المركزي والدليل في حل المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

اختلاف مركزي – دليل.

3 الأدوات والوسائل

أوراق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد المسافة بين النقطتين $B(4,5)$, $A(2,3)$

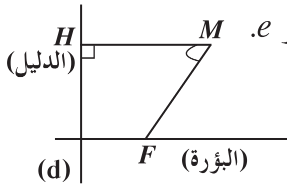
(b) أوجد البعد بين النقطة $A(2,3)$ والمستقيم $x=1:d$

(c) أوجد النسبة $= \dfrac{AB}{\text{البعد بين النقطة } A \text{ والمستقيم } d}$

5 التدريس

تمكنا في البنود السابقة من تعريف القطوع المخروطية الثلاث (القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد) واستخدمنا هذه التعريفات في حل مسائل وإيجاد رؤوس القطع وبؤرته (أو بؤرتيه). سنتعرف في هذا البند على تعريف جديد للقطوع المخروطية باستخدام نسبة مسافة النقاط في المستوى الإحداثي من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل). وسوف نرى من خلال هذا التعريف أن القطوع المخروطية تشكل عائلة مترابطة مع بعضها بواسطة هذه النسبة.

هذه النسبة تساوي مقدارًا ثابتًا يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e.



$$\frac{MF}{MH} = e$$

$$e = \frac{c}{a}$$

أكد على أنه إذا كانت $\left(e = \frac{3}{5}\right)$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $c = 3$ ، $a = 5$.

7–4

الاختلاف المركزي

Eccentricity

سوف تتعلم
- الاختلاف المركزي.
- الدليل.

المفردات والمصطلحات:
- اختلاف مركزي Eccentricity
- دليل Directrix

دعنا نفكر ونتناقش

1 في كل قطع من القطوع الموضحة إذا كانت MF تمثل المسافة بين البؤرة ونقطة تنتمي للقطع، MH تمثل البعد بين الدليل ونقطة تنتمي للقطع.
فأوجد $\frac{MF}{MH}$ (مستخدمًا الأدوات الهندسية).

2 بفرض أن النقطة M في التمثيلات البيانية أخذت موضعًا آخر على منحنى القطع.
أوجد $\frac{MF}{MH}$

3 من 2 , 1 ماذا تلاحظ؟

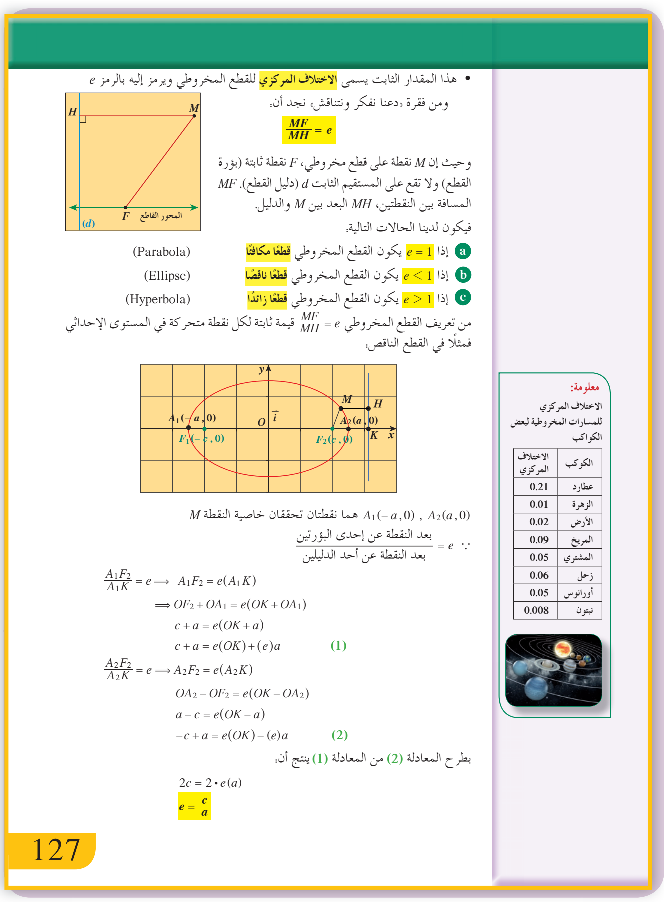
ملاحظة:
البؤرة لا تقع على الدليل.

معلومة:
الحرف e هو نسبة تستخدم في القطوع المخروطية $e > 0$ وليس له علاقة بالحرف e في اللوغاريتم الطبيعي حيث $\ln e = 1$

تمكنا في البنود السابقة من تعريف القطوع المخروطية (المكافئ – الناقص – الزائد).
يوفر الاختلاف المركزي فرصة جديدة للتعرف على القطوع المخروطية على أنها منحنيات مترابطة تشكل عائلة موحدة.

تعريف:
القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

126



- هذا المقدار الثابت يسمى **الاختلاف المركزي** للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e
ومن فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

$$\frac{MF}{MH} = e$$

وحيث إن M نقطة على قطع مخروطي، F نقطة ثابتة (بؤرة القطع) ولا تقع على المستقيم الثابت d (دليل القطع). MF المسافة بين النقطتين، MH البعد بين M والدليل.

فيكون لدينا الحالات التالية:

a إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا** (Parabola)

b إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا** (Ellipse)

c إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا** (Hyperbola)

من تعريف القطع المخروطي $e = \frac{MF}{MH}$ قيمة ثابتة لكل نقطة متحركة في المستوى الإحداثي فمثلًا في القطع الناقص:

$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ هما نقطتان تحققان خاصية النقطة M

$\because \; e = \dfrac{\text{بعد النقطة عن إحدى البؤرتين}}{\text{بعد النقطة عن أحد الدليلين}}$

$$\frac{A_1F_2}{A_1K} = e \Longrightarrow A_1F_2 = e(A_1K)$$
$$\Longrightarrow OF_2 + OA_1 = e(OK + OA_1)$$
$$c + a = e(OK + a)$$
$$c + a = e(OK) + (e)a \qquad (1)$$
$$\frac{A_2F_2}{A_2K} = e \Longrightarrow A_2F_2 = e(A_2K)$$
$$OA_2 - OF_2 = e(OK - OA_2)$$
$$a - c = e(OK - a)$$
$$-c + a = e(OK) - (e)a \qquad (2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) ينتج أن:

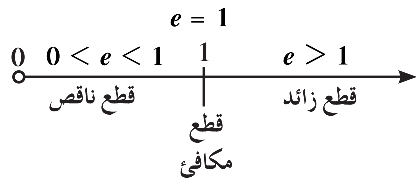
$$2c = 2 \cdot e(a)$$
$$e = \frac{c}{a}$$

معلومة:
الاختلاف المركزي للمسارات المخروطية لبعض الكواكب

الكوكب	الاختلاف المركزي
عطارد	0.21
الزهرة	0.01
الأرض	0.02
المريخ	0.09
المشتري	0.05
زحل	0.06
أورانوس	0.05
نبتون	0.008

127

يعرف القطع المخروطي بالثلاثية (البؤرة، الدليل، الاختلاف المركزي) ومنها يمكن إيجاد كل خصائص القطع المخروطي كما يحدد نوع القطع بمعلومية e.



في المثال (1)

يبيّن هذا المثال كيفية استخدام الاختلاف المركزي وبؤرة (أو إحدى البؤرتين) أو اختلاف المركزي ومعادلة دليله لإيجاد معادلة القطع المكافئ. يتعرف الطالب شكل القطع المخروطي من خلال قيمة الاختلاف المركزي.

في المثال (2)

يوضّح هذا المثال كيفية إيجاد الاختلاف المركزي بمعلومية معادلة القطع وذلك بتطبيق القاعدة $e = \frac{c}{a}$ في القطع الناقص وفي القطع الزائد مع العلاقة الأساسية $c^2 = a^2 - b^2$ (قطع ناقص)، $c^2 = a^2 + b^2$ (قطع زائد).

في المثال (3)

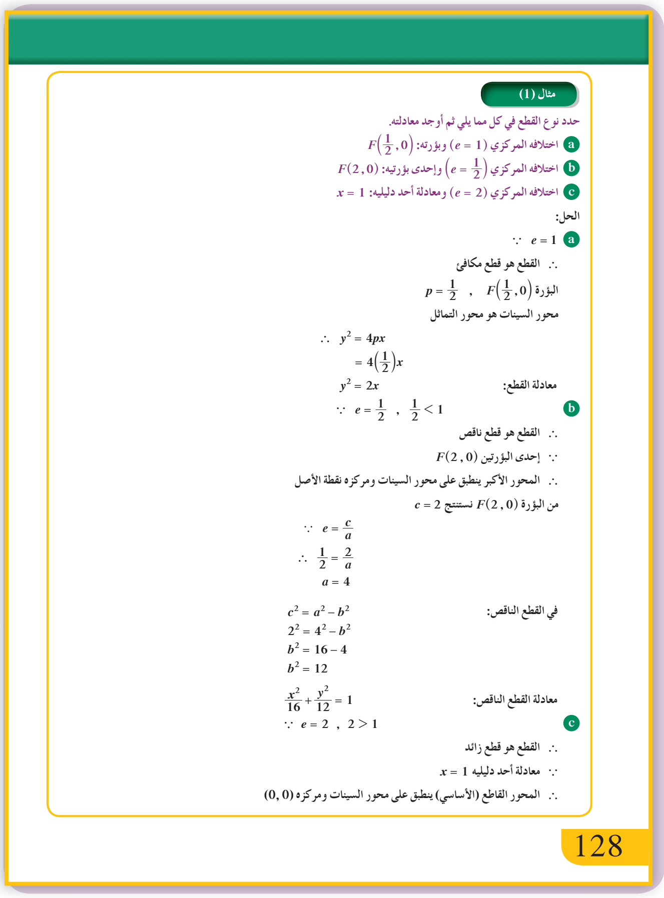
يوضّح هذا المثال كيف أنه من خلال معرفة الاختلاف المركزي وطول أحد المحورين نستطيع حساب طول المحور الآخر وذلك باستخدام القاعدة $e = \frac{c}{a}$ والعلاقة الأساسية في كل من القطع الناقص والقطع الزائد.

في المثال (4)

يعتبر هذا المثال تطبيق حياتي لمدارات الأقمار الاصطناعية حول الأرض وهي مدارات بيضاوية الشكل، كما يوضّح كيفية إيجاد معادلة أحد هذه المدارات بمعلومية الاختلاف المركزي وإحدى بؤرتي القطع ويتم فيه تحديد أطول وأقصر بُعد لأي قمر اصطناعي عن سطح الأرض.

6 الربط

يعتبر المثال (4) تطبيق حياتي، حيث يتم استخدام الاختلاف المركزي لدراسة مدارات الأقمار الاصطناعية.



مثال (1)

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته: $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{1}{2}\right)$ وإحدى بؤرتيه: $F(2, 0)$

c اختلافه المركزي $(e = 2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x = 1$

الحل:

a $\because\ e = 1$

$\therefore$ القطع هو قطع مكافئ

البؤرة $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $p = \frac{1}{2}$

محور السينات هو محور التماثل

$$\therefore\ y^2 = 4px = 4\left(\frac{1}{2}\right)x$$

معادلة القطع: $y^2 = 2x$

b $\because\ e = \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ القطع هو قطع ناقص

$\because$ إحدى البؤرتين $F(2, 0)$

$\therefore$ المحور الأكبر ينطبق على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

من البؤرة $F(2, 0)$ نستنتج $c = 2$

$$\because\ e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} = \frac{2}{a}$$

$$a = 4$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$2^2 = 4^2 - b^2$$
$$b^2 = 16 - 4$$
$$b^2 = 12$$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

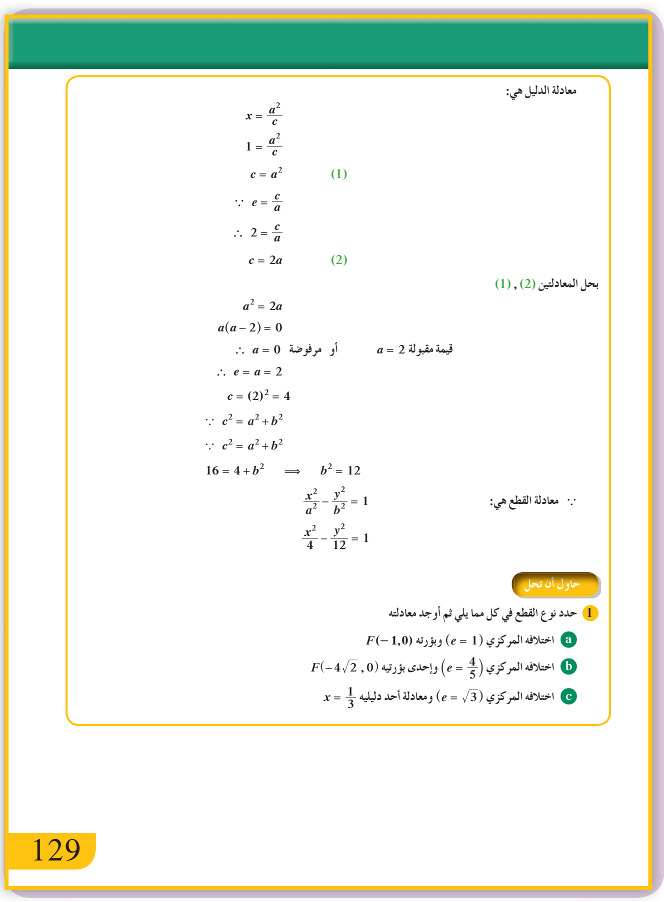
c $\because\ e = 2\ ,\ 2 > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

$\because$ معادلة أحد دليليه $x = 1$

$\therefore$ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

128



معادلة الدليل هي:

$$x = \frac{a^2}{c}$$
$$1 = \frac{a^2}{c}$$
$$c = a^2 \qquad (1)$$
$$\because\ e = \frac{c}{a}$$
$$\therefore\ 2 = \frac{c}{a}$$
$$c = 2a \qquad (2)$$

بحل المعادلتين (1) , (2)

$$a^2 = 2a$$
$$a(a-2) = 0$$

$\therefore\ a = 0$ مرفوضة أو $a = 2$ قيمة مقبولة

$$\therefore\ e = a = 2$$
$$c = (2)^2 = 4$$
$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$
$$\because\ c^2 = a^2 + b^2$$
$$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$$

$\because$ معادلة القطع هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

حاول أن تحل

1 حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته $F(-1, 0)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ وإحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2}, 0)$

c اختلافه المركزي $(e = \sqrt{3})$ ومعادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

129

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب فيعتبرون أن الاختلاف المركزي يساوي نسبة البعد عن مستقيم ثابت إلى المسافة من نقطة ثابتة. شدّد إلى أنّ: $e = \frac{MF}{MH}$

أشر إلى ضرورة الانتباه والدقة في حساب المسافة عن نقطة والبعد عن المستقيم دون أخطاء.

قد يخطئ بعض الطلاب في تحديد نوع القطع بمعلومية الاختلاف المركزي.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من تمكنهم من مفهومي الاختلاف المركزي والدليل والدقة في الحسابات.

اختبار سريع

1. أوجد معادلة القطع المخروطي الذي بؤرته $F(2,0)$ ومعادلة دليله $x = -2$ واختلافه المركزي: $e = 1$.

القطع المخروطي هو قطع مكافئ محور تماثله هو محور السينات ورأسه نقطة الأصل.

لذا معادلته: $y^2 = 8x$

2. أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

$a^2 = 9\ ;\ a = 3\ ,\ c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4\ ,\ c = 2$

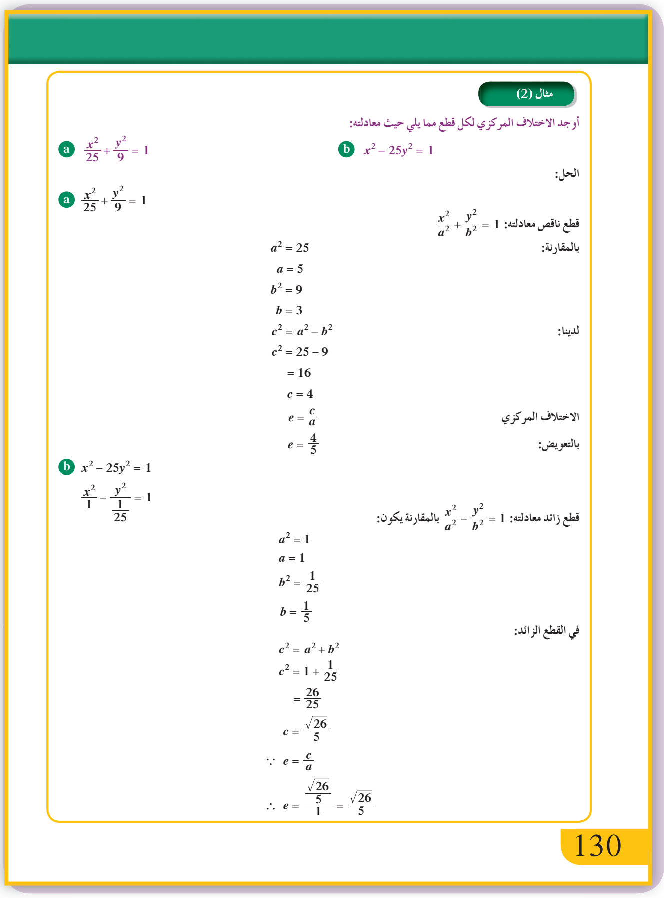
فتكون: $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

3. أوجد معادلة قطع زائد اختلافه المركزي: $e = \frac{\sqrt{10}}{2}$، مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه: $F(5,0)$.

$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Longrightarrow \frac{5}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Longrightarrow a = \sqrt{10}$

$b^2 = 25 - 10 = 15$

المعادلة: $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$



مثال (2)

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ b $x^2 - 25y^2 = 1$

الحل:

a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

قطع ناقص معادلته: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة: $a^2 = 25$, $a = 5$, $b^2 = 9$, $b = 3$

لدينا: $c^2 = a^2 - b^2$, $c^2 = 25 - 9 = 16$, $c = 4$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

بالتعويض: $e = \frac{4}{5}$

b $x^2 - 25y^2 = 1$

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$

قطع زائد معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة يكون:

$a^2 = 1$, $a = 1$, $b^2 = \frac{1}{25}$, $b = \frac{1}{5}$

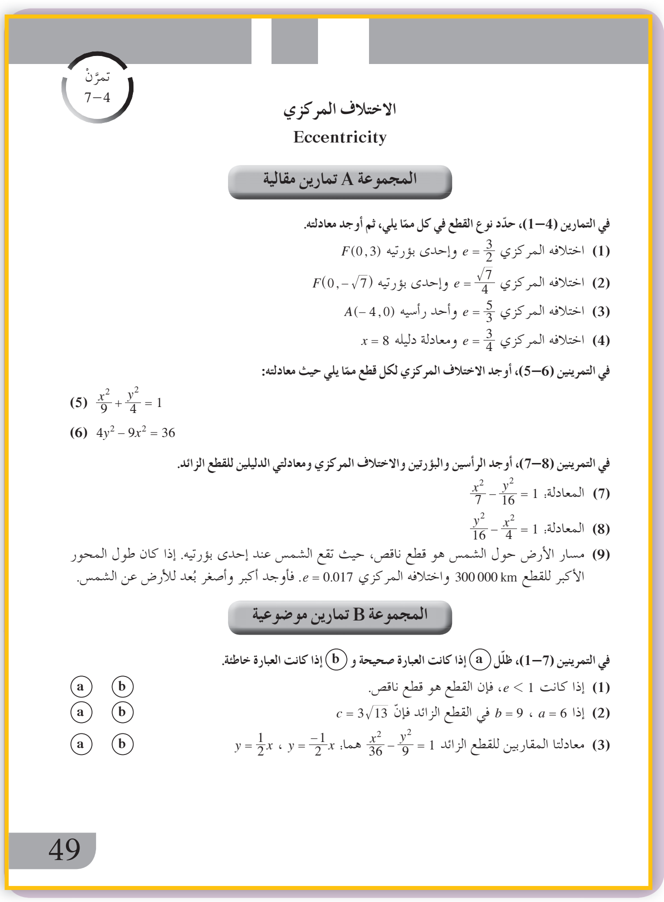
في القطع الزائد:

$c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}$, $c = \frac{\sqrt{26}}{5}$

$\because\ e = \frac{c}{a}$

$\therefore\ e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1} = \frac{\sqrt{26}}{5}$

130



تمرّنْ 7-4

الاختلاف المركزي

Eccentricity

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4—1)، حدّد نوع القطع في كل ممّا يلي، ثم أوجد معادلته.

(1) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{2}$ وإحدى بؤرتيه $F(0,3)$

(2) اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0,-\sqrt{7})$

(3) اختلافه المركزي $e = \frac{5}{3}$ وأحد رأسيه $A(-4,0)$

(4) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{4}$ ومعادلة دليله $x = 8$

في التمرينين (6—5)، أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع ممّا يلي حيث معادلته:

(5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

في التمرينين (8—7)، أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي ومعادلتي الدليلين للقطع الزائد.

(7) المعادلة: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$

(8) المعادلة: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

(9) مسار الأرض حول الشمس هو قطع ناقص، حيث تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه. إذا كان طول المحور الأكبر للقطع 300 000 km واختلافه المركزي $e = 0.017$. فأوجد أكبر وأصغر بُعد للأرض عن الشمس.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمرينين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $e < 1$، فإن القطع هو قطع ناقص. (a) (b)

(2) إذا $a = 6$ ، $b = 9$ في القطع الزائد فإنّ $c = 3\sqrt{13}$ (a) (b)

(3) معادلتا المقاربين للقطع الزائد $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ هما: $y = \frac{-1}{2}x$ ، $y = \frac{1}{2}x$ (a) (b)

49

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

2 – 1 تحقق من عمل الطلاب.

3 $\frac{MF}{MH}$ ثابت.

«حاول أن تحل»

1 (a) $e = 1$ قطع مكافئ. محور السينات هو محور التماثل.

$$y^2 = -4x$$

(b) $e < 1$ قطع ناقص. والمحور الأكبر ينطبق على المحور السيني $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ حيث $c = 4\sqrt{2}$

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$$

(c) $e > 1$ قطع زائد. والمحور القاطع ينطبق على المحور السيني $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ، $x = \frac{a^2}{c} = \frac{1}{3}$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} - \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$$

2 (a) $a = 5$

$$c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(b) $a = 5$

$$c = 7$$

$$e = \frac{7}{5}$$

حاول أن تحل

2 أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

b $24y^2 = 600 + 25x^2$ **a** $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

مثال (3)

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

الحل:

$$\because \quad e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

أي: $c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

طول المحور الأصغر 4 أي $2b = 4$

$$b = 2$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$$

$$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2 = 36 + 5a^2$$

$$4a^2 = 36$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$2a = 2(3) = 6$$

طول المحور الأكبر = 6 وحدات.

حاول أن تحل

3 أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ وطول محوره المرافق 6 وحدات.

131

مثال (4)

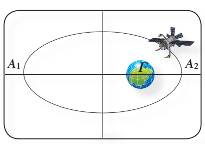
يمكن وضع الأقمار الاصطناعية في مدارات بيضاوية الشكل (قطع ناقص) في دورانها حول الأرض.

لنفترض أن قمرًا صناعيًا يتحرك في مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث الاختلاف المركزي $(e = 0.04)$ وطول نصف محوره الأكبر 7 500 km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b على افتراض أن طول نصف قطر الأرض 6 372 km

فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.



الحل:

a $e = 0.04 \ , \ a = 7\,500$ km

لدينا: $e = \frac{c}{a} = 0.04$ بالتعويض:

$$c = 7\,500 \times 0.04$$

$$= 300$$

ويكون مركز الأرض إحدى البؤرتين أي $F(300 , 0)$:

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2$

$$b^2 = (7\,500)^2 - (300)^2$$

$$b^2 = 56\,160\,000$$

معادلة المدار: $\frac{x^2}{56\,250\,000} + \frac{y^2}{56\,160\,000} = 1$

b أقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض هو عند النقطة A_2

نوجد أولًا المسافة FA_2

$$FA_2 = 7\,500 - 300 = 7\,200$$

طول نصف قطر الأرض = 6 372

فيكون أقصر بُعد: $7200 - 6372 = 828$

أي 828 km

أطول بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض هو عند النقطة A_1

نوجد FA_1

$$FA_1 = 7\,500 + 300 = 7\,800$$

أطول بُعد عن سطح الأرض:

$$7\,800 - 6\,372 = 1\,428$$

أي 1 428 km

132

(4) إذا كانت معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$، فإن طول محوره الأكبر هو 6 وطول محوره الأصغر هو 14. ⓐ ⓑ

(5) لأيّ معادلة قطع مكافئ، فإنّ $e=1$ ⓐ ⓑ

(6) المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{y^2}{15}-\frac{x^2}{10}=1$ ينطبق على محور الصادات. ⓐ ⓑ

(7) رأسا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ هما: $(0,-6)$ ، $(0,6)$ ⓐ ⓑ

في التمارين (8–13)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان $a=7$ ، $c=2\sqrt{10}$ ، فإن معادلة القطع المخروطي الناتج هي:

ⓐ $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$ ⓑ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$

ⓒ $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$ ⓓ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}=1$

(9) أيّ معادلة مما يلي تمثل قطعًا زائدًا معادلة أحد دليليه $y=\frac{25}{7}$؟

ⓐ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$ ⓑ $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=1$

ⓒ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$ ⓓ $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{24}=1$

(10) إذا كانت معادلة أحد المقاربين $y=\frac{-7}{5}x$ والاختلاف المركزي $e=\frac{\sqrt{74}}{5}$ فمعادلة القطع الزائد هي:

ⓐ $\frac{y^2}{7}-\frac{x^2}{5}=1$ ⓑ $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{5}=1$

ⓒ $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$ ⓓ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$

(11) الاختلاف المركزي للمعادلة $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ هو:

ⓐ $\frac{\sqrt{11}}{6}$ ⓑ $\frac{\sqrt{11}}{5}$

ⓒ $\frac{36}{25}$ ⓓ $\frac{25}{36}$

(12) معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(0,4)$ وأحد رأسيه $(0,-5)$ هي:

ⓐ $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{25}=1$ ⓑ $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{5}=1$

ⓒ $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$ ⓓ $\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{3}=1$

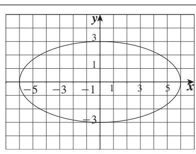
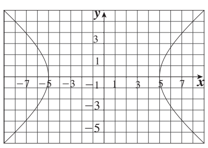
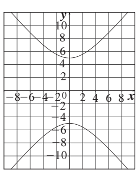
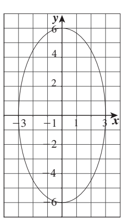
(13) لأيّ قطع ناقص يكون:

ⓐ $a>c$ ⓑ $a<c$

ⓒ $a=ec$ ⓓ $a=c$

50

في التمارين (14–16)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع مخروطي بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(14) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$	ⓐ 
(15) $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{9}=1$	ⓑ 
(16) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$	ⓒ 
	ⓓ 

51

حاول أن تحل

4 إذا كان القمر الاصطناعي له مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث اختلافه المركزي $e=0.05$ وطول نصف محوره الأكبر 8 600 km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

ⓐ أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

ⓑ إذا كان نصف قطر الأرض 6 372 km فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

133

3 طول المحور القاطع: $2\sqrt{3}$ units

4 (a) المعادلة: $\frac{x^2}{73\,960\,000}+\frac{y^2}{73\,775\,100}=1$

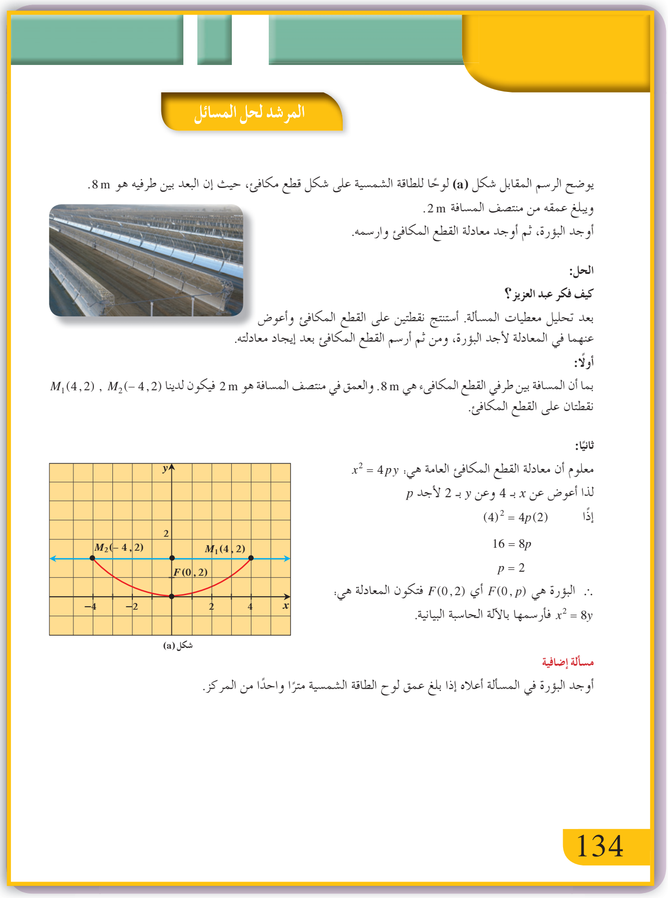
(b) أقصر بُعد = 1 798 km

أطول بُعد = 2 658 km

المرشد لحل المسائل

حل «مسألة إضافية»

$F(0\,,4)$


المرشد لحل المسائل

يوضح الرسم المقابل شكل **(a)** لوحًا للطاقة الشمسية على شكل قطع مكافئ، حيث إن البعد بين طرفيه هو $8\,m$.
ويبلغ عمقه من منتصف المسافة $2\,m$.
أوجد البؤرة، ثم أوجد معادلة القطع المكافئ وارسمه.

الحل:

كيف فكر عبد العزيز؟

بعد تحليل معطيات المسألة. أستنتج نقطتين على القطع المكافئ وأعوض عنهما في المعادلة لأجد البؤرة، ومن ثم أرسم القطع المكافئ بعد إيجاد معادلته.

أولًا:

بما أن المسافة بين طرفي القطع المكافئ هي $8\,m$. والعمق في منتصف المسافة هو $2\,m$ فيكون لدينا $M_1(4\,,2)$, $M_2(-4\,,2)$ نقطتان على القطع المكافئ.

ثانيًا:

معلوم أن معادلة القطع المكافئ العامة هي: $x^2 = 4py$
لذا أعوض عن x بـ 4 وعن y بـ 2 لأجد p

إذًا $(4)^2 = 4p(2)$

$16 = 8p$

$p = 2$

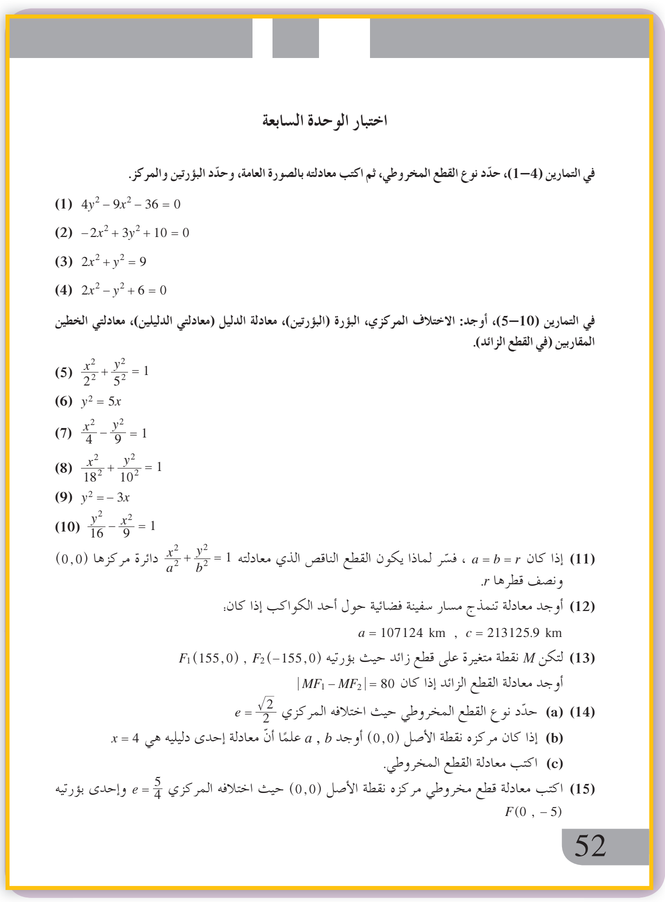
$\therefore$ البؤرة هي $F(0\,,p)$ أي $F(0\,,2)$ فتكون المعادلة هي:
$x^2 = 8y$ فأرسمها بالآلة الحاسبة البيانية.

شكل (a)

مسألة إضافية

أوجد البؤرة في المسألة أعلاه إذا بلغ عمق لوح الطاقة الشمسية مترًا واحدًا من المركز.

134


اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (4—1)، حدّد نوع القطع المخروطي، ثم اكتب معادلته بالصورة العامة، وحدّد البؤرتين والمركز.

(1) $4y^2 - 9x^2 - 36 = 0$

(2) $-2x^2 + 3y^2 + 10 = 0$

(3) $2x^2 + y^2 = 9$

(4) $2x^2 - y^2 + 6 = 0$

في التمارين (10—5)، أوجد: الاختلاف المركزي، البؤرة (البؤرتين)، معادلة الدليل (معادلتي الدليلين)، معادلتي الخطين المقاربين (في القطع الزائد).

(5) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

(6) $y^2 = 5x$

(7) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

(8) $\frac{x^2}{18^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$

(9) $y^2 = -3x$

(10) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

(11) إذا كان $a = b = r$ ، فسّر لماذا يكون القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ دائرة مركزها $(0\,,0)$ ونصف قطرها r.

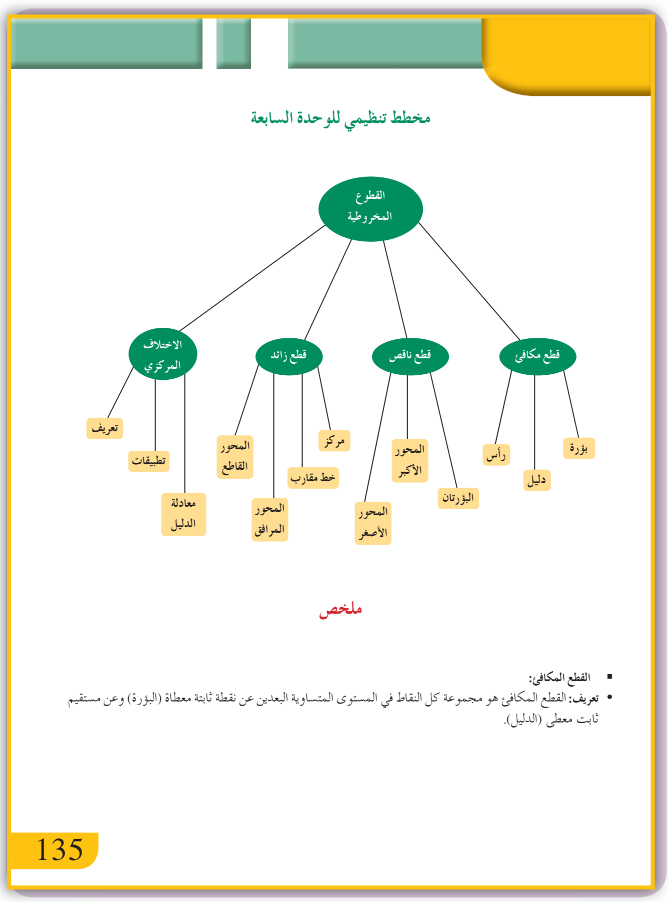
(12) أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول أحد الكواكب إذا كان:
$a = 107124\ km \ , \ c = 213125.9\ km$

(13) لتكن M نقطة متغيرة على قطع زائد حيث بؤرتيه $F_1(155,0)$, $F_2(-155,0)$
أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان $|MF_1 - MF_2| = 80$

(14) **(a)** حدّد نوع القطع المخروطي حيث اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(b) إذا كان مركزه نقطة الأصل $(0\,,0)$ أوجد $a\,,\,b$ علمًا أنّ معادلة إحدى دليليه هي $x = 4$
(c) اكتب معادلة القطع المخروطي.

(15) اكتب معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0\,,0)$ حيث اختلافه المركزي $e = \frac{5}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0\,,-5)$

52


مخطط تنظيمي للوحدة السابعة

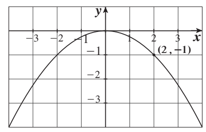
ملخص

- **القطع المكافئ:**
- **تعريف:** القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).

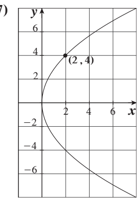
135

في التمارين (16–19)، اكتب معادلة القطع المخروطي الموضح في الرسم.

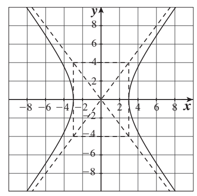
(16)



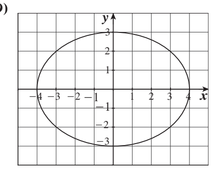
(17)



(18)



(19)



(20) أوجد معادلة قطع زائد إذا كان محوره الأكبر ينطبق على محور الصادات وطوله 12 والمسافة بين البؤرتين 20.

- قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$	$y^2 = 4px$
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل	إلى اليمين أو إلى اليسار
إشارة p	$p < 0$ ، $p > 0$	$p < 0$ ، $p > 0$
البؤرة	$(0, p)$	$(p, 0)$
الدليل	$y = -p$	$x = -p$
محور التناظر	محور الصادات $(y-axis)$	محور السينات $(x-axis)$
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\|p\|$	
المسافة من الرأس إلى الدليل	$\|p\|$	

- **القطع الناقص:**
- **تعريف:** القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.
- **معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ كالتالي:**

المعادلة	$a > b > 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a > b > 0$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

تمارين إثرائية

(1) أوجد معادلات الخطوط المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$، ومن ثم ارسم بيان هذا القطع الزائد.

(2) النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر في قطع ناقص إحداثياتهما $(-10, 0)$، $(10, 0)$ وإحدى النقاط الطرفية للمحور الأصغر هي $(0, 7)$. أوجد إحداثيات بؤرتيه.

(3) لتكن المعادلة: $mx^2 + (2m+1)y^2 + (m-1)x = 0$
حدّد m لتكون هذه المعادلة معادلة قطع مكافئ، ثم عدّد خواصه.

(4) لتكن المعادلة: $(m-1)x^2 - (2m+1)y^2 + 2m + 3 = 0$
إذا $m = 2$، فحدّد ما تمثّله المعادلة، ثم أوجد خواصه.

(5) لتكن المعادلتان: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

(a) حدّد ما تمثله كل معادلة.

(b) أوجد نقاط التقاطع مستخدمًا المنحنيين اللذين يمثلاهما.

(c) علّل النتيجة التي حصلت عليها في السؤال **(b)** مستخدمًا عمليّات حسابيّة.

(6) أوجد معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ حيث اختلافه المركزي $e = \frac{7}{5}$ ومعادلة إحدى دليليه $y = \frac{25}{7}$.

(7) أوجد معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ حيث اختلافه المركزي $e = \frac{5}{7}$ وإحدى بؤرتيه $F(-5, 0)$.

(8) أوجد معادلة القطع الزائد حيث بؤرتيه $F_1(-\sqrt{34}, 0)$, $F_2(\sqrt{34}, 0)$؛ وأحد خطّيه المقاربين يمر بالنقطة $A(3, 5)$.

(9) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وميل أحد الخطين المقاربين 2 وإحدى بؤرتيه $F(0, -\sqrt{5})$.

في التمارين (10–14)، أوجد: الاختلاف المركزي، البؤرة (البؤرتين)، معادلة الدليل (معادلتي الدليلين)، معادلتي الخطين المقاربين (في القطع الزائد).

(10) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

(11) $8y^2 - 25x^2 = 200$

(12) $x^2 = -2y$

(13) $y^2 = -x$

(14) $5x^2 - 9y^2 = 45$

- **القطع الزائد:**
- **تعريف:** القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.
- **معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:**

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a)$, $A_2(0, a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$c^2 = a^2 + b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x = \pm\frac{a^2}{c}$	$y = \pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

- **الاختلاف المركزي:**
- **تعريف:** القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.
هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e.
- في القطع المكافئ: $e = 1$
- في القطع الناقص: $e = \frac{c}{a} < 1$
- في القطع الزائد: $e = \frac{c}{a} > 1$

الوحدة الثامنة: الاحتمال Probability

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1–8: المتغيرات العشوائية المتقطعة.

جزء 1: المتغير العشوائي.

جزء 2: المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة).

جزء 3: التوزيع الاحتمالي.

جزء 4: بيان دالة التوزيع الاحتمالي.

جزء 5: التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة.

جزء 6: دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع.

جزء 7: بيان دالة التوزيع التراكمي.

جزء 8: توزيع ذات الحدين.

جزء 9: التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

2–8: المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة).

جزء 1: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

جزء 2: التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر).

جزء 3: التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$.

مقدمة الوحدة

تؤدّي الكثير من العمليات إلى نتائج ترتكز بقسم كبير منها أو كليًّا على الحظ. ولكن من الضروري اتخاذ قرارات حتى وإن لم نكن متأكدين من النتائج.

يأخذ علم الاحتمال أهمّية متزايدة في عالمنا الحاضر وعلى جميع الأصعدة: الهندسة، الأحياء، الاقتصاد...

يستخدم مربو الأسماك في الأحواض علم الاحتمال لمعرفة عدد الأسماك في الحوض كونهم لا يستطيعون عدّها بطريقة مباشرة. تقوم إحدى هذه الطرق على أخذ ألف سمكة مثلًا من الحوض ووضع علامة تسمح بالتعرف عليها، ثم إعادتها إلى الحوض. بعد مدّة من الزمن تؤخذ من جديد ألف سمكة من الحوض وتعد السمكات الموسومة ولنقل أن عددها مئة. وهذا يسمح بتقدير عدد الأسماك: احتمال أخذ مئة سمكة من ألف يعني أن عدد الأسماك في الحوض هو عشرة آلاف. هذه الطريقة تعطي فكرة غير دقيقة عن عدد الأسماك ولكنها كافية. ويمكن التأكيد بأن عدد الأسماك في الحوض يتخطّى بكثير الخمسة آلاف سمكة.

هذه الطريقة مستخدمة أيضًا في مجال اختبار الجودة. تخيلوا معملًا لصنع الأسهم النارية يريد التحقق من أن 95% من منتجاته صالحة. الطريقة التي عرضت أعلاه تصلح لهذا الاختبار.

ماذا يحدث عند تكرار تجربة عشوائية عددًا كبيرًا من المرّات؟ هل يمكن استخلاص معلومة؟

يقول قانون الأعداد الكبيرة بأن احتمال حصول حدث عشوائي يقترب أكثر فأكثر من احتماله النظري مع ازدياد مرّات إعادة التجربة العشوائية.

من الأفكار التي ينبغي مناقشتها: الفرق بين الاحتمالات النظرية والاحتمالات التطبيقية.

الوحدة الثامنة

الاحتمال

Probability

مشروع الوحدة: أهمية استخدام علم الاحتمالات المستند على إحصاءات سابقة للوصول إلى استنتاجات مفيدة.

1 مقدمة المشروع: في إحدى رحلات الخطوط الجوية التي يتم خلالها استخدام طائرة تتسع لِـ 213 راكبًا، تقوم الشركة ببيع أكثر من 213 بطاقة لأنه معروف من رحلات سابقة أن بعض الركاب ممن سبق أن حجزوا بطاقات سفر قد يتخلفون عن الرحلة.

2 الهدف: تهتم الشركة بأن يكون عدد الركاب في الرحلة مساويًا لعدد المقاعد المتوفرة على الطائرة أي 213 مقعدًا، لأنّه إذا وجدت مقاعد فارغة على الطائرة خلال الرحلة فإن المردود المادي للرحلة سيتناقص، أما إذا كان عدد الركاب أكبر من عدد المقاعد فإن الشركة ستقوم بدفع تعويض مادي لكل راكب لم يتوفر له مقعد على متن الطائرة وهذا أيضًا سينقص من المردود المادي للرحلة.

3 اللوازم: آلة حاسبة — حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

بناءً على إحصاءات سابقة فإن احتمال تخلف راكب واحد عن رحلة جوية هو 0.0975

a أثبت أن عدد البطاقات المباعة للرحلة يجب أن يكون 236 بطاقة حتى يتأمن وجود 213 راكبًا عند انطلاق الرحلة.

b إذا باعت الشركة 240 بطاقة أي 4 بطاقات أكثر مما يلزم لتأمين 213 راكبًا.

أوجد احتمال وجود راكب إضافي لا مقعد له على متن الطائرة.

c إذا كانت الشركة تدفع 200 دينار لكل راكب حجز بطاقة ولم يجد مقعدًا على متن الطائرة للرحلة.

فأوجد احتمال أن تدفع الشركة 1 000 دينار تعويضًا للركاب الذين لم يجدوا لهم مقاعد على متن الطائرة إذا كانت الشركة قد باعت 246 بطاقة.

5 التقرير: ضع تقريرًا مفصّلًا حول المشروع واعرض استخدام خصائص الاحتمال والتوقع في تنفيذه.

دروس الوحدة

المتغيرات العشوائية المتقطعة	المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
8–1	8–2

138

تستخدم المحاكاة لنمذجة الاحتمالات التطبيقية والقوانين لإيجاد الاحتمالات النظرية. وتسمح كلتا الطريقتين بوضع توقعات أو باتخاذ قرارات حول أحداث في المستقبل.

إن عمر قطعة إلكترونية أو مصباح كهربائي أو درجة حرارة مياه بحيرة هي متغيرات عشوائية تأخذ عددًا لا نهائيًّا من القيم على فترة ما. يُسمّى هذا المتغير متغيرًا متصلًا. لا يمكن في هذه الحالة التكلم عن احتمال حدث بل نتخطى ذلك ونأخذ قيمة المتغير على فترة ونتكلم عن كثافة احتمال. ونربط هنا بين الاحتمال الذي هو عدد ينتمي للفترة $[0,1]$ و $\sum Pi = 1$ من جهة وبين مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالّة f والمحور السيني والتي تساوي 1 أيضًا و f التي يجب أن تكون قيمتها تنتمي للفترة $[0,1]$ على I من جهة ثانية.

مشروع الوحدة

يعالج مشروع الوحدة مشكلة حول حجز بطاقات السفر مع شركات الطيران وكيفية التوفيق بين الربح الأقصى (امتلاء كل مقاعد الطائرة) وبين الخسارة الأقل (دفع تعويض للذين لم يجدوا مقعدًا لهم على الطائرة). تقوم شركات الطيران بحجز مقاعد أكثر من عدد مقاعد الطائرة لأن عددًا من الركاب سيتخلف عن السفر في آخر لحظة.

اسأل الطلاب: كيف يتم حجز المقاعد في الطائرات؟ وكيف تطوّر ليصبح إلكترونيًّا عبر شبكة الإنترنت؟

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) إذا كان X عدد البطاقات المباعة فإن:

$$(1 - 0.0975)X = 213$$

$$\therefore \quad X = 236$$

(b) $$P(X = 1) = {}_4C_1 \times (1 - 0.0975)^1 \times (0.0975)^3$$

$$\approx 0.003346$$

(c) إذا دفعت الشركة 1 000 دينار كويتي فهذا يعني أن $\frac{1\,000}{200} = 5$، 5 ركاب إضافيين لم يجدوا لهم مقعدًا على الطائرة من أصل 10 إضافيين.

$$P(Y = 5) = {}_{10}C_5 \times (1 - 0.0975)^5 \times (0.0975)^5$$

$$\approx 0.00133$$

التقرير

اكتب تقريرًا مفصّلًا شارحًا ما قمت به من حسابات مبيّنًا استخدام خصائص الاحتمال في عملك، واعرض ملاحظاتك حول حجز المقاعد في الطائرات واقتراحاتك.

سلّم التقييم	
4	الحسابات كلها صحيحة – استخدام القوانين دقيق – الشروحات واضحة وكاملة – أفكار التقرير واضحة ومتسلسلة – التوصيات صريحة ومعبرة.
3	الحسابات في معظمها صحيحة – بعض الأخطاء في استخدام القوانين – الشروحات واضحة – أفكار التقرير واضحة ومتسلسلة – التوصيات معقولة.
2	الحسابات تحتوي على أخطاء متعدّدة – استخدام القوانين غير واضح – أفكار التقرير غير مترابطة – التوصيات غير دقيقة.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة أو غير موجودة.

1–8: المتغيرات العشوائية المتقطعة

1 الأهداف

- يتعرف المتغير العشوائي والمتغير العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- يوجد وسط التوزيع الاحتمالي والتباين والانحراف المعياري.
- يتعرف دالة التوزيع التراكمي.
- يتعرف توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- يوجد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المتغير العشوائي – متغير عشوائي متقطع – التوزيع الاحتمالي – توزيع ذات الحدين – وسط التوزيع الاحتمالي – تباين التوزيع الاحتمالي – دالة التوزيع الاحتمالي – دالة التوزيع التراكمي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اسأل الطلّاب:

- ما الفرق بين التباديل والتوافيق؟
- احسب: ${}_{12}C_7$ ، ${}_{12}C_5$.
- في حالة دحرجة حجر نرد منتظم، ما احتمال الحصول على عدد زوجي؟ وما احتمال الحصول على عدد أكبر من 4؟

5 التدريس

أشر إلى أن التجربة العشوائية هي تجربة لا يمكن معرفة نتيجتها مسبقًا. اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة عن تجارب عشوائية. ناقش معهم القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي. أشر إلى أن مجموع احتمالات تجربة ما يساوي 1 وهذا يسمح بإيجاد أحد الاحتمالات بمعلومية البقية.


8–1

المتغيرات العشوائية المتقطعة

Discrete Random Variables

سوف تتعلم

- المتغيّر العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- وسط التوزيع الاحتمالي.
- دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي.

المفردات والمصطلحات:

- المتغيّر العشوائي Random Variable
- التوزيع الاحتمالي Distribution Probability
- متغيّر عشوائي متقطع Discrete Random Variable
- توزيع ذات الحدين Binomial Probability Distribution
- وسط التوزيع الاحتمالي Mean of a Probability Distribution
- تباين التوزيع الاحتمالي Variance of a Probability Distribution
- دالة التوزيع الاحتمالي Probability Distribution Function
- دالة التوزيع التراكمي Cumulative Distribution Function

ملاحظة: عندما نقول قطعة نقود نعني أنها قطعة نقود منتظمة واحتمال ظهور الصورة (H) يساوي احتمال ظهور الكتابة (T).

دعنا نفكر ونتناقش

عند إلقاء حجري نرد منتظمين وملاحظة الوجه العلوي.

الحجر الأول مرقم كما يلي:

وجهان مرقمان 0، وجهان مرقمان 1، وجهان مرقمان 2.

الحجر الثاني مرقم كما يلي:

ثلاثة أوجه مرقمة 0، ثلاثة أوجه مرقمة 1.

ليكن E: مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوي.

الحجر الأول / الحجر الثاني

+	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3

1 بيّن أن النتائج الممكنة هي: $0 , 1 , 2 , 3$

2 a مستخدمًا الجدول المقابل، أوجد احتمال كل من النتائج التالية:

$P(E=0)$

$P(E=1)$

$P(E=2)$

b استنتج احتمال $P(E=3)$

3 a إذا كنا نهتم بناتج ضرب العددين الظاهرين على الوجه العلوي، فما النتائج الممكنة؟

b أوجد احتمال كل من النتائج الممكنة.

مقدّمة Introduction

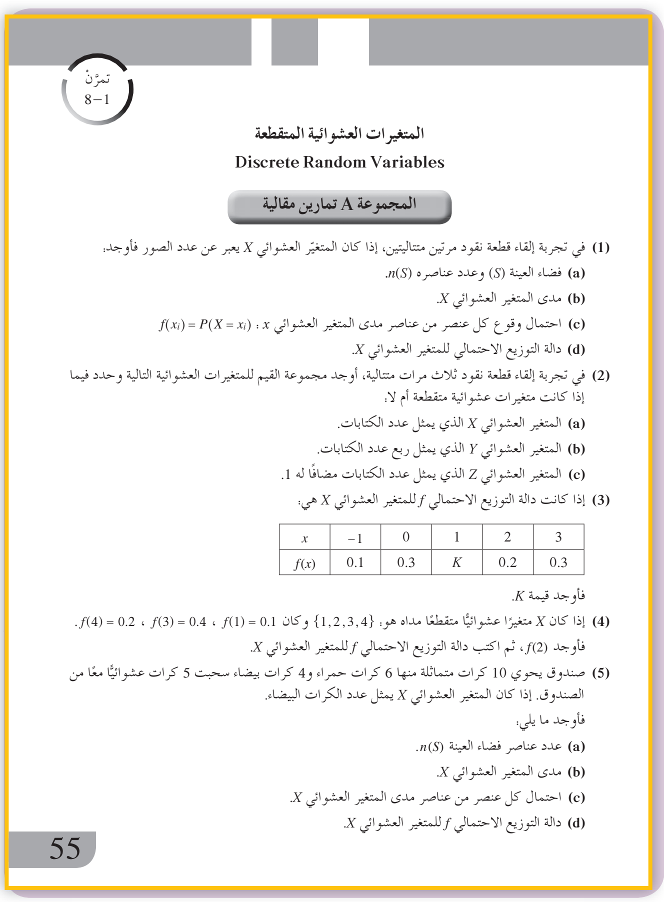
في ما سبق درسنا بعض مفاهيم التجارب العشوائية والاحتمال. ونحن نعلم أن فضاء العيّنة هو مجموعة نواتج التجربة العشوائية والتي غالبًا ما تكون صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًّا.

لذا يقوم الباحث بإقران هذه النواتج الوصفية للتجربة العشوائية بقيم عددية حقيقية تسمى **بالمتغير العشوائي** والذي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية.

فعلى سبيل المثال عند إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة يكون كالتالي:

$S = \{(H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T)\}$

140


تمرَّنْ 8–1

المتغيرات العشوائية المتقطعة

Discrete Random Variables

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، إذا كان المتغيّر العشوائي X يعبر عن عدد الصور فأوجد:

(a) فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي x : $f(x_i) = P(X = x_i)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

(2) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

(a) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.

(b) المتغير العشوائي Y الذي يمثل ربع عدد الكتابات.

(c) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مضافًا له 1.

(3) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.3	K	0.2	0.3

فأوجد قيمة K.

(4) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{1,2,3,4\}$ وكان $f(1) = 0.1$ ، $f(3) = 0.4$ ، $f(4) = 0.2$.

فأوجد $f(2)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(5) صندوق يحوي 10 كرات متماثلة منها 6 كرات حمراء و4 كرات بيضاء سحبت 5 كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء.

فأوجد ما يلي:

(a) عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

55

شدّد على أهمية جدول التوزيع الاحتمالي لأنه يعطي فكرة واضحة عن كل الاحتمالات.

راجع مع الطلاب شروط تجربة ذات الحدين مركّزًا على معلمتي التجربة. اشرح للطلاب معنى التوزيع التراكمي.

في المثال (1)

يأخذ المتغيّر X القيم من 0 إلى 2، لأن الحصول على صورة في الرمية الأولى لا يمنع الحصول على صورة أيضًا في الرمية الثانية فالحدثان مستقلان.

نستخدم (a) للإجابة عن (b) و(c).

في المثالين (2), (3)

تحقق من استيعاب الطلاب لمعطيات المسألة قبل البدء في الحل. أشر إلى ترابط الأسئلة الأربعة، وأوضح أهمية تمثيل دالة التوزيع الاحتمالي في جدول.

في المثالين (4), (5)

استخدام شرطي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغيّر العشوائي المتقطع X لإيجاد القيم المفقودة.

في المثال (6)

ذكّر الطلاب بمفهومي التوافيق والتباديل وخاصة دور ترتيب العناصر في عملية العد، مما يسمح للطلاب خلال عملهم على المثال (6) معرفة سبب استخدام التوافيق وليس التباديل.

في المثالين (7), (8)

يستخدم الطلاب صيغ التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X للإجابة عن الأسئلة المطلوبة.

في المثالين (9), (10)

يستخدم الطلاب خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X، لإيجاد القيم المفقودة.

فمثلًا إذا اقتصرت ملاحظتنا على **عدد الصور** التي ظهرت في كل عنصر من عناصر فضاء العينة S والتي هي كالتالي: 2، 1، 1، 0 على الترتيب نكون قد أقرنّا كل عنصر من عناصر فضاء العينة بعدد حقيقي كما هو موضّح في الجدول التالي:

عدد الصور في كل عنصر	عناصر فضاء العينة S
2	(H, H)
1	(H, T)
1	(T, H)
0	(T, T)

وسوف نرمز للمتغير العشوائي بالرمز X وعليه فإن مدى X هو: $\{0,1,2\}$

المتغيّر العشوائي Random Variable

تعريف: المتغير العشوائي Random Variable

هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

حيث $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي لتجربة عشوائية، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

في المثال السابق نلاحظ ما يلي:

1. مجال المتغير العشوائي X هو: $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$
2. المجال المقابل للمتغير العشوائي هو $\mathbb{R}$.
3. المدى للمتغير العشوائي X هو: $\{2, 1, 0\}$ ويرمز له بالرمز $X(S)$

يوجد عدة أنواع من المتغيرات العشوائية، سوف تدرس نوعين فقط منها وهما:

1. المتغيرات العشوائية **المتقطعة** (المنفصلة).
2. المتغيرات العشوائية **المتصلة** (المستمرة).

وسوف نستخدم X، Y، ... كرمز للمتغيرات العشوائية وx، y ... لقيم هذه المتغيرات.

المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة) Discrete Random Variables

كما ذكرنا سابقًا أن المتغيرات العشوائية تنقسم إلى عدة أنواع منها متغيرات عشوائية متقطعة (منفصلة) ومتغيرات عشوائية متصلة (مستمرة) وسنتناول كل منهما بالتفصيل:

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع Discrete Random Variable

يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$ هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.

141

(6) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

(7) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X.

x	7	8	9	10
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين σ^2.

(c) الانحراف المعياري (σ).

(8) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.15	0.1	0.25	0.3

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0), F(1), F(2), F(3), F(3.5), F(4), F(5)$

(9) الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	-1	3	5	7
$F(x)$	0.1	0.45	0.7	1

أوجد:

(a) $P(-1 < X \leqslant 5)$

(b) $P(3 < X \leqslant 7)$

(c) $P(X > 3)$

(10) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 8$, $P = 0.3$

فأوجد:

(a) $P(X = 0)$

(b) $P(2 < X \leq 5)$

56

في المثال (11)

تطبيق مباشر لإيجاد الاحتمال في تجربة ذات الحدين.
تحقّق من حسن تعامل الطلاب مع جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين.

في المثالين (12), (13)

يبيّن المثالان كيف نوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين. أشر إلى الحاجة لاستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الانحراف المعياري.

6 الربط

كل أمثلة هذا الدرس ترتبط مباشرة بالحياة اليومية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

من الأخطاء الشائعة في هذا الدرس عدم إيجاد احتمالات كل قيم المتغير العشوائي، وفي تجربة ذات الحدين عدم الانتباه إلى وجود نتيجتين فقط. وقد يخطئ في عدم القدرة على التمييز بين جدول التوزيع الاحتمالي وجدول التوزيع التراكمي. اطلب إليهم التحقق من أن مجموع الاحتمالات في جدول التوزيع الاحتمالي يساوي 1 وأنه إذا كان للتجربة العشوائية أكثر من ناتجين فلا تكون تجربة ذات الحدين.

(11) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 10$, $P = 0.5$
فأوجد:

(a) $P(X = 0)$

(b) $P(2 < X \le 4)$

(12) ينتج مصنع 100 وحدة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج الوحدات المعيبة 0.03، فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعيبة في يوم واحد.

(13) إذا رمينا قطعة نقود معدنية 12 مرّة، أوجد التوقّع والتباين إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–9)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) التوقع هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة. (a) (b)

(2) التباين هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع. (a) (b)

(3) دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. (a) (b)

(4) التوزيع التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير X. (a) (b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.05	0.4	0.4

(5) قيمة K التي تجعل التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي 1 لدالة التوزيع الاحتمالي f

x	2	1	0
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	K

هي صفر. (a) (b)

(6) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون: (a) (b)

$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

(7) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون: (a) (b)

$P(X < a) = 1 - F(a)$

57

مثال (1)

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية، ثم حدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

(a) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.

(b) المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.

(c) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

الحل:

(a) $S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

عناصر مدى المتغير العشوائي X	عناصر فضاء العينة S
2	(H,H)
1	(H,T)
1	(T,H)
0	(T,T)

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $X(S) = \{0, 1, 2\}$

نوع المتغير العشوائي X: متقطع

(b)

عناصر مدى المتغير العشوائي Y	عناصر فضاء العينة S
$(2)^2 = 4$	(H,H)
$(1)^2 = 1$	(H,T)
$(1)^2 = 1$	(T,H)
$(0)^2 = 0$	(T,T)

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $Y(S) = \{0, 1, 4\}$

نوع المتغير العشوائي Y: متقطع

(c)

عناصر مدى المتغير العشوائي Z	عناصر فضاء العينة S
$2 - 0 = 2$	(H,H)
$1 - 1 = 0$	(H,T)
$1 - 1 = 0$	(T,H)
$0 - 2 = -2$	(T,T)

∴ مدى المتغيّر العشوائي: $Z(S) = \{-2, 0, 2\}$

نوع المتغير العشوائي Z: متقطع

142

حاول أن تحل

1 في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

(a) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.

(b) المتغير العشوائي Y الذي يمثل مكعب عدد الكتابات.

(c) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه 2.

التوزيع الاحتمالي Probability Distribution

تعلمنا سابقًا أن المتغير العشوائي المتقطع هو دالة مداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ قابلة للعد. ونبحث الآن في احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة المناظر لكل عنصر من عناصر المدى.

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$

فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:

$$f(x_i) = P(X = x_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3, ...$$

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	.....
$f(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	.....

أي أن مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i , P(x_i))$ تسمى **دالة التوزيع الاحتمالي** Probability Distribution Function.

مثال (2)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، المتغير العشوائي X يعبّر عن:
الجذر التربيعي للعدد الظاهر على الوجه العلوي عندما يكون الجذر التربيعي عددًا كليًّا والصفر لغير ذلك.

فأوجد:

(a) فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X: $f(x_i) = P(X = x_i)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

143

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من تمكنهم من المفاهيم الواردة ومن الدقة في الحسابات.

اختبار سريع

1 يحتوي كيس على 6 قطع من الشوكولاتة بالحليب و4 قطع من الشوكولاتة المرّة. تحب سلمى الشوكولاتة بالحليب، من دون النظر في الكيس أخذت سلمى 5 حبات من الشوكولاتة معًا. إذا كان X يمثل عدد قطع الشوكولاتة بالحليب التي أخذتها سلمى، فأوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X، ثم وسط هذا التوزيع.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

$\mu = 3$

2 يعمل كريم نادلًا في أحد المطاعم. لاحظ أن 30% من الزبائن يقدمون له بدل خدمة. إذا دخل المطعم فترة الظهر 20 شخصًا، فما احتمال أن يترك له 8 منهم بدل خدمة؟

${}_{20}C_8 \times (0.3)^8 \times (0.7)^{12} \approx 0.1144$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $0 + 0 = 0\ ,\ 0 + 1 = 1\ ,\ 1 + 0 = 1\ ,\ 1 + 1 = 2\ ,$

$2 + 0 = 2\ ,\ 0 + 2 = 2\ ,\ 2 + 1 = 3\ ,\ 1 + 2 = 3$

2 **(a)** $P(E = 0) = \frac{1}{6}\ ,\ P(E = 1) = \frac{1}{3}\ ,$

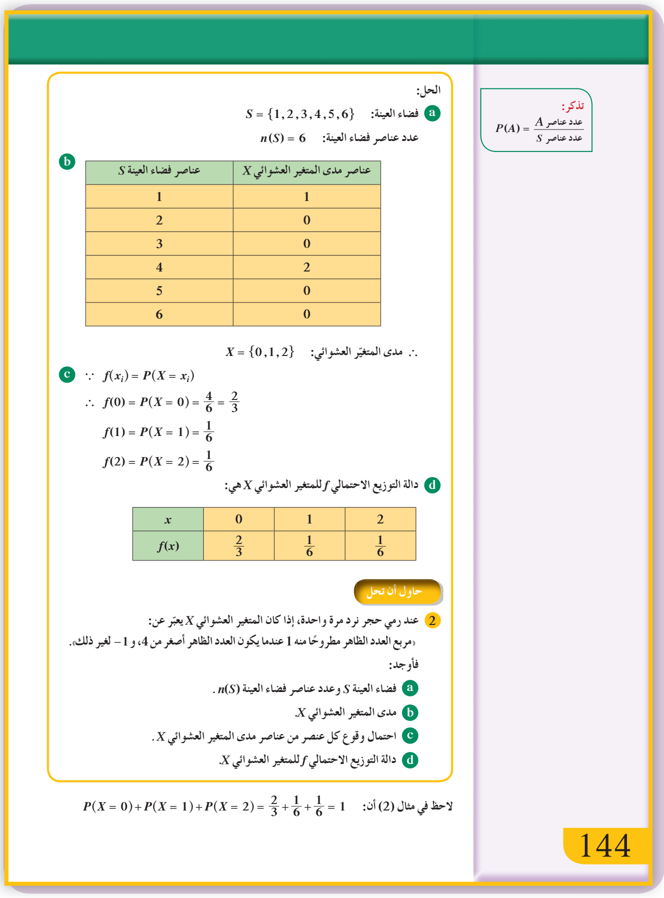
$P(E = 2) = \frac{1}{3}$

(b) $P(E = 3) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

3 **(a)** النتائج الممكنة: $0, 1, 2$

(b) $P(P = 0) = \frac{2}{3}\ ,\ P(P = 1) = \frac{1}{6}\ ,$

$P(P = 2) = \frac{1}{6}$



الحل:

a فضاء العينة: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = 6$

b

عناصر فضاء العينة S	عناصر مدى المتغير العشوائي X
1	1
2	0
3	0
4	2
5	0
6	0

$\therefore$ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0, 1, 2\}$

c $\because\ f(x_i) = P(X = x_i)$

$\therefore\ f(0) = P(X = 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$

$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

حاول أن تحل

2 عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن: «مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4، و -1 لغير ذلك».

فأوجد:

a فضاء العينة S وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

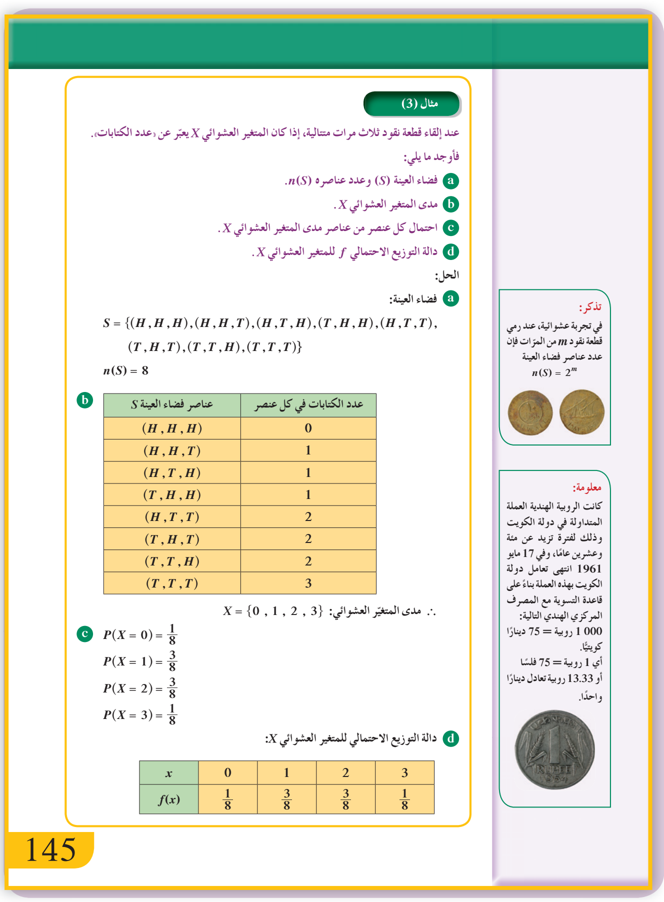
c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

لاحظ في مثال (2) أن: $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

تذكر: $P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{S \text{ عدد عناصر}}$

144



مثال (3)

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a فضاء العينة:

$S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H), (H, T, T), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$

$n(S) = 8$

b

عناصر فضاء العينة S	عدد الكتابات في كل عنصر
(H, H, H)	0
(H, H, T)	1
(H, T, H)	1
(T, H, H)	1
(H, T, T)	2
(T, H, T)	2
(T, T, H)	2
(T, T, T)	3

$\therefore$ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0, 1, 2, 3\}$

c $P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$P(X = 1) = \frac{3}{8}$

$P(X = 2) = \frac{3}{8}$

$P(X = 3) = \frac{1}{8}$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تذكر: في تجربة عشوائية، عند رمي قطعة نقود m من المرّات فإن عدد عناصر فضاء العينة $n(S) = 2^m$

معلومة: كانت الروبية الهندية العملة المتداولة في دولة الكويت وذلك لفترة تزيد عن مئة وعشرين عامًا، وفي 17 مايو 1961 انتهى تعامل دولة الكويت بهذه العملة بناءً على قاعدة التسوية مع المصرف المركزي الهندي التالية:
1 000 روبية = 75 دينارًا كويتيًا.
أي 1 روبية = 75 فلسًا أو 13.33 روبية تعادل دينارًا واحدًا.

145

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

$\therefore$ مدى المتغير العشوائي $X(S) = \{0, 1, 2\}$

نوع المتغيّر العشوائي X: متقطع.

(b) مدى المتغيّر العشوائي: $Y(S) = \{0, 1, 8\}$

نوع المتغيّر العشوائي Y: متقطع.

(c) مدى المتغيّر العشوائي: $Z(S) = \{-2, -1, 0\}$

نوع المتغيّر العشوائي Z: متقطع.

2 **(a)** فضاء العينة: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = 6$

(b) مدى المتغير العشوائي: $X = \{-1, 0, 3, 8\}$

(c) $f(-1) = P(X = -1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

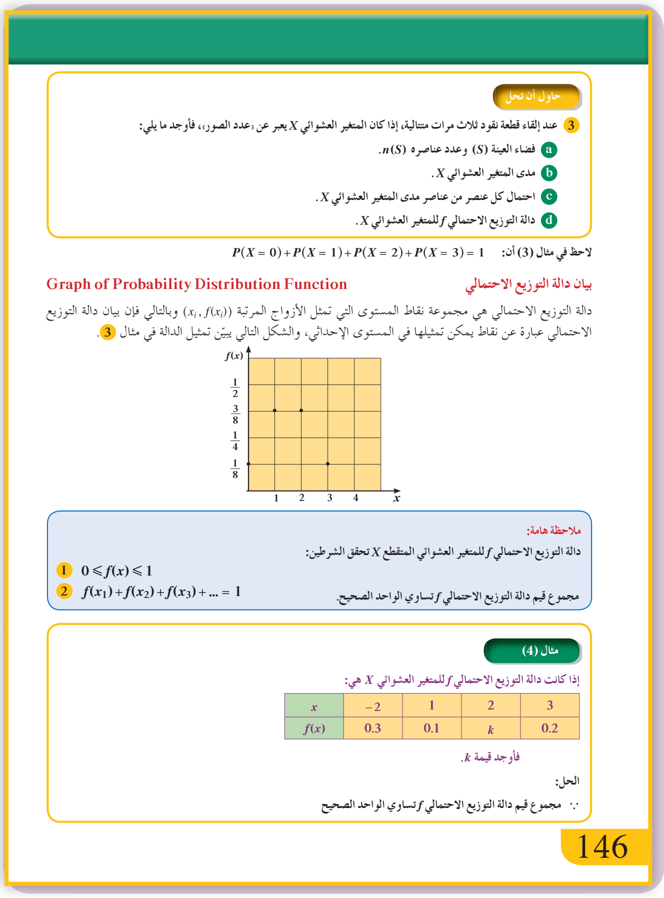
$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{6}$

$f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$

$f(8) = P(X = 8) = \frac{1}{6}$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هو:

x	-1	0	3	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



حاول أن تحل

3 عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

لاحظ في مثال (3) أن: $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

بيان دالة التوزيع الاحتمالي **Graph of Probability Distribution Function**

دالة التوزيع الاحتمالي هي مجموعة نقاط المستوى التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i, f(x_i))$ وبالتالي فإن بيان دالة التوزيع الاحتمالي عبارة عن نقاط يمكن تمثيلها في المستوى الإحداثي، والشكل التالي يبيّن تمثيل الدالة في مثال 3.

ملاحظة هامة:

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

1. $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$
2. مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح. $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots = 1$

مثال (4)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

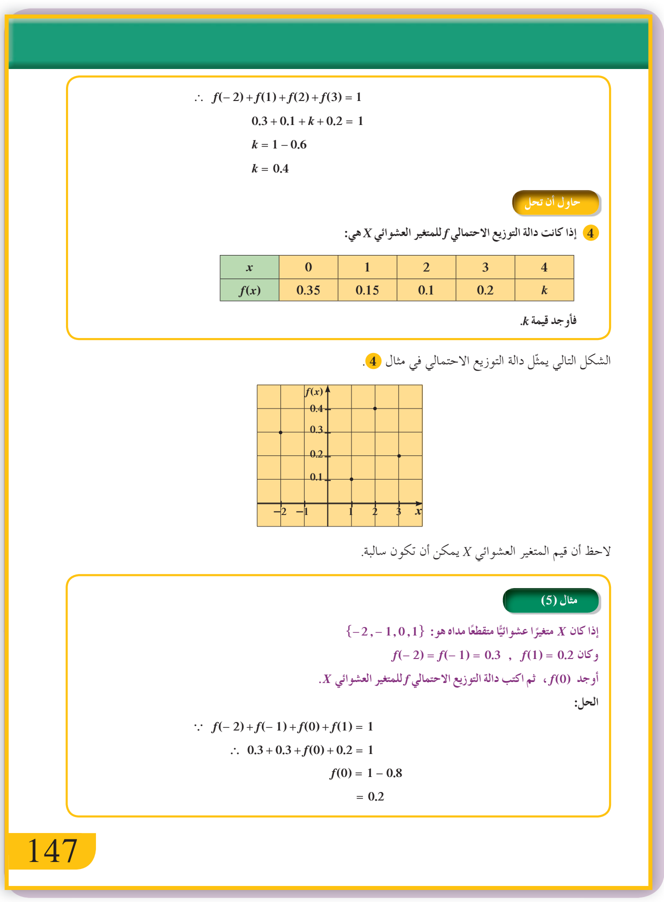
x	-2	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.1	k	0.2

فأوجد قيمة k.

الحل:

$\because$ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح

146



$\therefore \quad f(-2) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$

$0.3 + 0.1 + k + 0.2 = 1$

$k = 1 - 0.6$

$k = 0.4$

حاول أن تحل

4 إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

فأوجد قيمة k.

الشكل التالي يمثّل دالة التوزيع الاحتمالي في مثال 4.

لاحظ أن قيم المتغير العشوائي X يمكن أن تكون سالبة.

مثال (5)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{-2, -1, 0, 1\}$

وكان $f(-2) = f(-1) = 0.3 \quad , \quad f(1) = 0.2$

أوجد $f(0)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

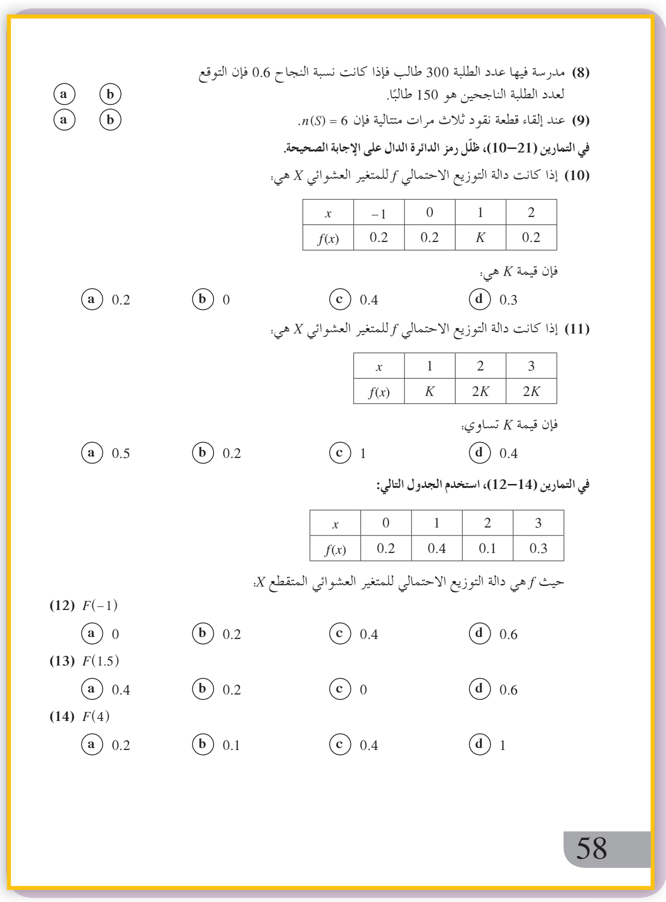
$\because \quad f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) = 1$

$\therefore \quad 0.3 + 0.3 + f(0) + 0.2 = 1$

$f(0) = 1 - 0.8$

$= 0.2$

147



(8) مدرسة فيها عدد الطلبة 300 طالب فإذا كانت نسبة النجاح 0.6 فإن التوقع لعدد الطلبة الناجحين هو 150 طالبًا. (a) (b)

(9) عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن $n(S) = 6$. (a) (b)

في التمارين (10–21)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(10) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.2	0.2	K	0.2

فإن قيمة K هي:

(a) 0.2 (b) 0 (c) 0.4 (d) 0.3

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	1	2	3
$f(x)$	K	$2K$	$2K$

فإن قيمة K تساوي:

(a) 0.5 (b) 0.2 (c) 1 (d) 0.4

في التمارين (12–14)، استخدم الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.4	0.1	0.3

حيث f هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X:

(12) $F(-1)$

(a) 0 (b) 0.2 (c) 0.4 (d) 0.6

(13) $F(1.5)$

(a) 0.4 (b) 0.2 (c) 0 (d) 0.6

(14) $F(4)$

(a) 0.2 (b) 0.1 (c) 0.4 (d) 1

58

(d) جدول دالة التوزيع الاحتمالي f

x	-1	0	3	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3 **(a)** فضاء العينة:

$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),$
$(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

$n(S) = 8$

(b) مدى المتغير العشوائي: $X = \{0,1,2,3\}$

(c) $P(X=0) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = \frac{3}{8}$

$P(X=2) = \frac{3}{8}$

$P(X=3) = \frac{1}{8}$

(d)

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

∴ دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.3	0.3	0.2	0.2

حاول أن تحل

5 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{0,1,2,3\}$

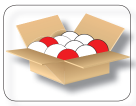
وكان: $f(0) = 0.1 \ , \ f(1) = 0.6 \ , \ f(2) = 0.15$

فأوجد $f(3)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

مثال (6)

صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و3 كرات حمراء. سحبت أربع كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثّل عدد الكرات الحمراء.

فأوجد ما يلي:



a عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a عدد عناصر فضاء العينة (S): $n(S) = {}_{10}C_4 = 210$

b عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها كالتالي:

لدينا 4 حالات:

- أن تكون كل الكرات المسحوبة بيضاء.

∴ عدد الكرات الحمراء المسحوبة = صفر $\longleftarrow X = 0$

- أن تكون الكرات المسحوبة منها 3 كرات بيضاء وواحدة حمراء $\longleftarrow X = 1$
- أن تكون الكرات المسحوبة منها 2 كرة بيضاء و2 كرة حمراء $\longleftarrow X = 2$
- أن تكون الكرات المسحوبة منها 1 كرة بيضاء و3 كرات حمراء $\longleftarrow X = 3$

∴ مدى المتغير العشوائي X هو: $\{0,1,2,3\}$

c $P(X=0) = \frac{{}_7C_4 \times {}_3C_0}{{}_{10}C_4} = \frac{35}{210}$

$P(X=1) = \frac{{}_7C_3 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{105}{210}$

$P(X=2) = \frac{{}_7C_2 \times {}_3C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{63}{210}$

$P(X=3) = \frac{{}_7C_1 \times {}_3C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{7}{210}$

تذكر:

إذا كان

$n, r \in \mathbb{Z}^+ , n \geqslant r$

1 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)...$
$...(n-r+1)$

${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

2 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$

${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

148

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3	المجموع
$f(x)$	$\frac{35}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{7}{210}$	1

حاول أن تحل

6 صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و3 كرات حمراء. سحبت عشوائيًّا 3 كرات معًا من الصندوق.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء،

فأوجد ما يلي:

a عدد عناصر فضاء العينة (S).

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

Expectation and Variance for Discrete Random Variables

التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع X هو أحد مقاييس النزعة المركزية ويرمز له بالرمز μ.

وهو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع، و**التباين** (σ^2) هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة، وبالتالي فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية وسوف ندرس كلًّا من التوقع والتباين لكل من المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أولًا: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع Expectation for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،

مدى X: $X(S) = \{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$

فإن التوقع (μ) للمتغير العشوائي X يعطى بالصيغة التالية:

$$\mu = \Sigma x_i f(x_i)$$

أي أن:

$$\mu = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + ...$$

149

(15) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا دالة توزيع الاحتمالي f هي:

x	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.50	0.25

فإن التوقع له يساوي:

(a) 1 (b) 1.25 (c) 1.5 (d) 0.5

(16) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا لدالة التوزيع الاحتمالي f وكان التوقع = 0.5 ، $\sum x^2 f(x) = 4.25$،
فإن الانحراف المعياري هو:

(a) 4 (b) 2 (c) 3.75 (d) 1

(17) إذا كانت بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي X معطاة في الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$F(x)$	0.1	0.3	0.7	1

فإن $f(2)$ تساوي:

(a) 0.7 (b) 0.3 (c) 0.4 (d) 1

(18) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

فإن التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي:

(a) 1 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{7}{9}$ (d) 0

(19) عند إلقاء قطعة نقود منتظمة أربع مرات متتالية فإن التباين σ^2 للمتغير العشوائي X «ظهور صورة» يساوي:

(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 4

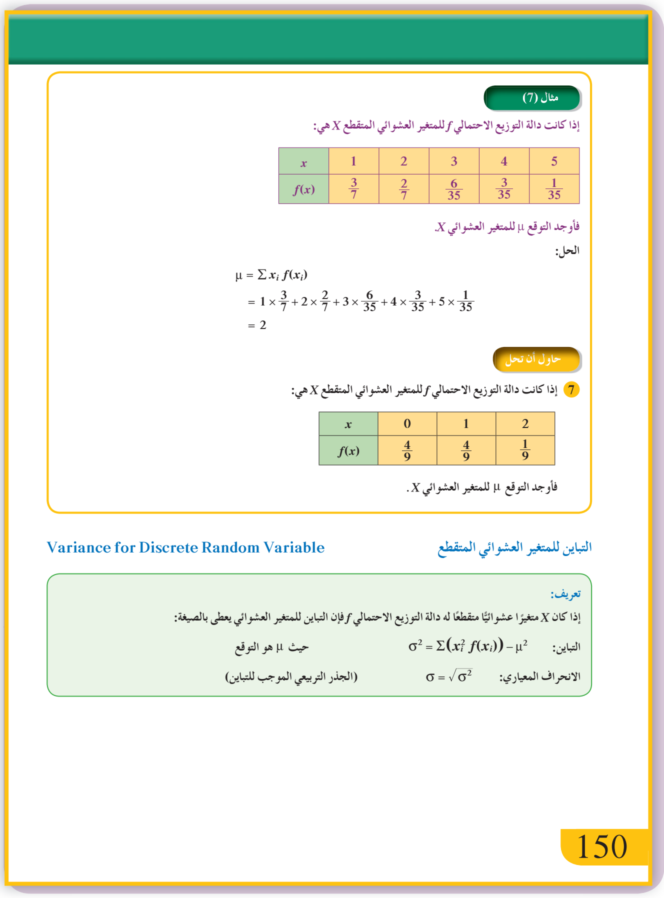
(20) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا يأخذ القيم 1.5 , 1 , 1− وكان: $P(X=-1) = 0.6 \ , \ P(X=1) = 0.3$
فإن $P(X > 0)$ يساوي:

(a) 0.6 (b) 0.9 (c) 0.4 (d) 0.7

(21) ينتج مصنع سيارات 200 سيارة في الشهر. إذا كانت نسبة السيارات المعيبة 0.02 فإن التوقع لعدد السيارات المعيبة المنتجة في الشهر يساوي:

(a) 2 (b) 4 (c) 20 (d) 40

59



مثال (7)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

الحل:

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$
$$= 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{6}{35} + 4 \times \frac{3}{35} + 5 \times \frac{1}{35}$$
$$= 2$$

حاول أن تحل

7 إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

التباين للمتغير العشوائي المتقطع — Variance for Discrete Random Variable

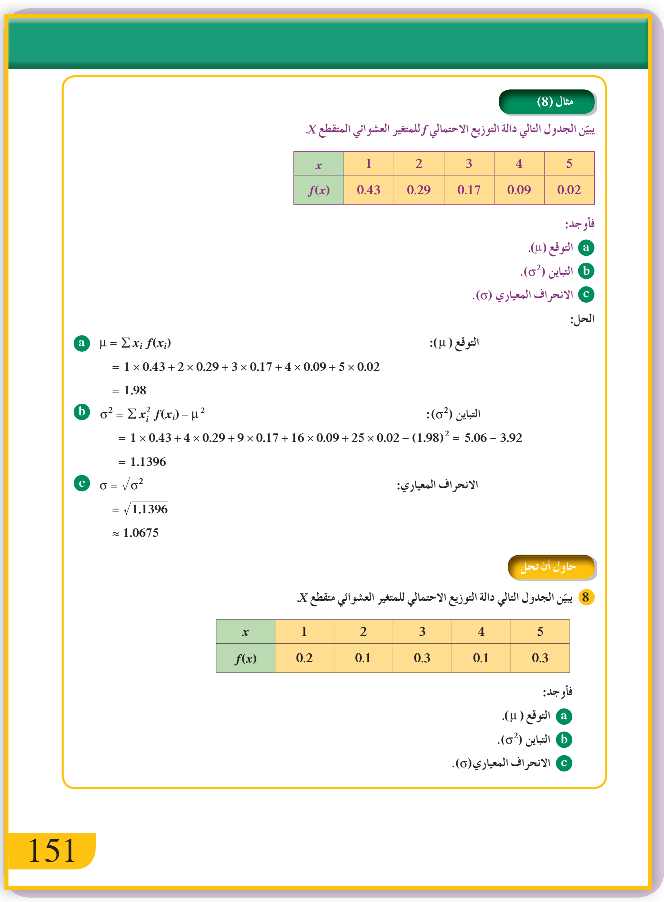
تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين: $\sigma^2 = \Sigma\left(x_i^2 f(x_i)\right) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (الجذر التربيعي الموجب للتباين)

150



مثال (8)

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري (σ).

الحل:

a التوقع (μ):
$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$
$$= 1 \times 0.43 + 2 \times 0.29 + 3 \times 0.17 + 4 \times 0.09 + 5 \times 0.02$$
$$= 1.98$$

b التباين (σ^2):
$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$
$$= 1 \times 0.43 + 4 \times 0.29 + 9 \times 0.17 + 16 \times 0.09 + 25 \times 0.02 - (1.98)^2 = 5.06 - 3.92$$
$$= 1.1396$$

c الانحراف المعياري:
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1396}$$
$$\approx 1.0675$$

حاول أن تحل

8 يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري(σ).

151

4

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$
$$0.35 + 0.15 + 0.1 + 0.2 + K = 1$$
$$K = 1 - 0.8$$
$$= 0.2$$

5

$$f(3) = 1 - (0.1 + 0.6 + 0.15)$$
$$= 1 - 0.85$$
$$= 0.15$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.6	0.15	0.15

6

(a) عدد عناصر فضاء العينة (S):

$$n(S) = {}_{10}C_3 = 120$$

(b) مدى المتغير العشوائي X هو: $\{0, 1, 2, 3\}$

(c)

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_3 \times {}_7C_0}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_0 \times {}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

(d)

x	0	1	2	3	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

7 $\mu = \Sigma x_i\, f(x_i)$

$$= 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

8 **(a)** $\mu = \Sigma x_i\, f(x_i)$

$$= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.1$$

$$+ 5 \times 0.3 = 3.2$$

(b) $\sigma^2 = \Sigma x_i^2 f(x_i) - \mu^2$

$$= 1 \times 0.2 + 4 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 16$$

$$\times 0.1 + 25 \times 0.3 - (3.2)^2$$

$$= 12.4 - 10.24 = 2.16$$

(c) $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.16}$

$$\approx 1.47$$

$$F(4.5) = P(X \leqslant 4.5)$$
$$= P(X < 4.5) + P(X = 4.5)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 4.5)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0$$
$$= 0.8$$

$$F(5) = P(X \leqslant 5)$$
$$= P(X < 5) + P(X = 5)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0.2$$
$$= 1$$

$$F(7) = P(X \leqslant 7)$$
$$= P(X < 7) + P(X = 7)$$
$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0.2 + 0$$
$$= 1$$

حاول أن تحل

9 الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0)$, $F(1)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(8)$

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X:

1. $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a)$
2. $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable

درسنا بالتفصيل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .
وبيّنا أن دالة التوزيع الاحتمالي f تحقق الشرطين:

1. $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$
2. $\Sigma f(x_i) = 1$

ونتعرض الآن لدالة أخرى للمتغير العشوائي المتقطع X وهي دالة التوزيع التراكمي.

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a

أي أن: $F(a) = P(X \leqslant a)$

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي F هو $\mathbb{R}$ وأن المجال المقابل يساوي المدى $[0,1]$

تذكر:
نرمز لدالة التوزيع الاحتمالي بالرمز f.
ونرمز لدالة التوزيع التراكمي بالرمز F.

مثال (9)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X .

فأوجد: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

الحل:

$$F(2) = P(X \leqslant 2) = 0$$

$$F(3) = P(X \leqslant 3) = P(X < 3) + P(X = 3)$$
$$= 0 + 0.5$$
$$= 0.5$$

$$F(4) = P(X \leqslant 4)$$
$$= P(X < 4) + P(X = 4)$$
$$= P(3) + P(4)$$
$$= 0.5 + 0.3$$
$$= 0.8$$

مثال (10)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد:

a. $P(1 < X \leqslant 3)$
b. $P(2 < X \leqslant 5)$
c. $P(X > 2)$

الحل:

a. $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1)$
$$= 0.6 - 0.15$$
$$= 0.45$$

b. $P(2 < X \leqslant 5) = F(5) - F(2)$
$$= 1 - 0.2$$
$$= 0.8$$

c. $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$
$$= 1 - F(2)$$
$$= 1 - 0.2$$
$$= 0.8$$

حاول أن تحل

10 يبيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.25	0.40	0.65	1

أوجد:

a. $P(2 < X \leqslant 4)$
b. $P(X > 3)$

توزيع ذات الحدين Binomial Distribution

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتويًا على عنصرين فمثلًا:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختبارًا في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

وهكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط وهي ما يسمى **بتجربة ذات الحدين**. والتي تتبع دالة التوزيع الاحتمالي المتقطع.

تعريف: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

1 تتكوّن التجربة من عدد n من المحاولات المستقلة والمتماثلة.
(المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

2 كل محاولة يكون لها ناتجان فقط مثل (نجاح أو فشل).

3 احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز P.
وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة برنولي Bernoulli.

فمثلًا إذا أجريت تجربة برنولي عدد n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة P وكان X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات النجاح في كل المحاولات فإن احتمال النجاح في x من المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X=x)=f(x)={}_nC_x \cdot P^x \cdot (1-P)^{n-x} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

حيث n عدد المحاولات

مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X = \{0,1,2,\ldots,n\}$

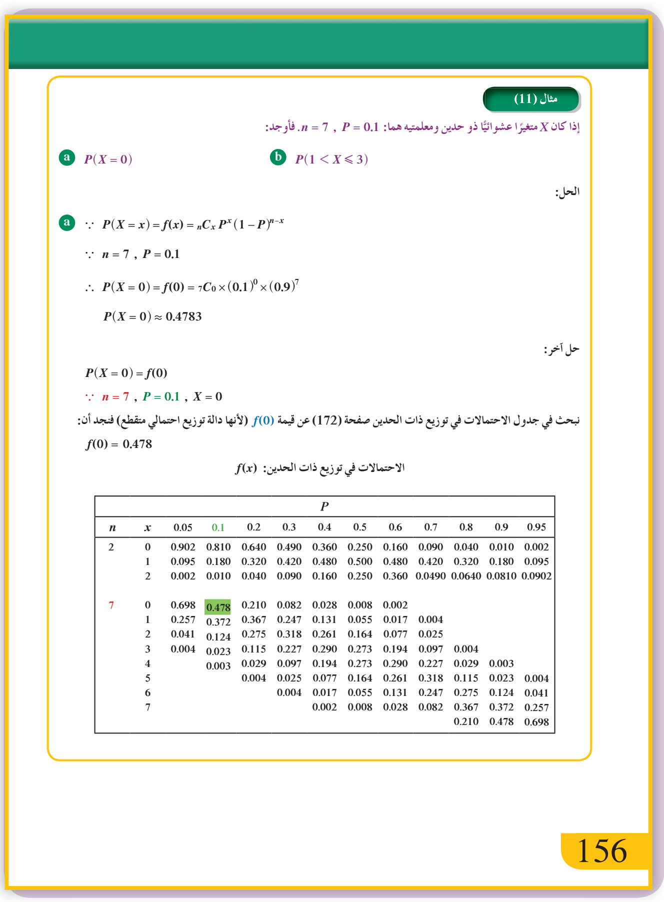
x عدد مرات النجاح في n من المحاولات

P احتمال النجاح

$(1-P)$ احتمال الفشل

يسمى توزيع المتغير العشوائي X بتوزيع ذي الحدين للمعلمتين n , P.

155



مثال (11)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $P = 0.1$, $n = 7$. فأوجد:

a $P(X=0)$ b $P(1 < X \leqslant 3)$

الحل:

a $\because\ P(X=x)=f(x)={}_nC_x P^x (1-P)^{n-x}$

$\because\ n=7\ ,\ P=0.1$

$\therefore\ P(X=0)=f(0)={}_7C_0 \times (0.1)^0 \times (0.9)^7$

$P(X=0) \approx 0.4783$

حل آخر:

$P(X=0)=f(0)$

$\because\ n=7\ ,\ P=0.1\ ,\ X=0$

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين صفحة (172) عن قيمة $f(0)$ (لأنها دالة توزيع احتمالي متقطع) فنجد أن:

$f(0) = 0.478$

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025			
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.004		
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.029	0.003	
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.115	0.023	0.004
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.275	0.124	0.041
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.367	0.372	0.257
										0.210	0.478	0.698

156

9 $F(0) = P(X \leq 0) = 0$

$F(1) = P(X \leq 1) = 0.43$

$F(2) = P(X \leq 2) = 0.43 + 0.29 = 0.72$

$F(3.5) = P(X \leq 3.5) = 0.43 + 0.29 + 0.17 = 0.89$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0.43 + 0.29 + 0.17 + 0.09$

$= 0.98$

$F(5) = P(X \leq 5) = 0.98 + 0.02 = 1$

$F(8) = P(X \leq 8)$

$= P(X < 8) + P(X = 8)$

$= 1 + 0$

$= 1$

10 **(a)** $P(2 < X \leqslant 4) = F(4) - F(2)$

$= 1 - 0.4 = 0.6$

(b) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$

$= 1 - F(3)$

$= 1 - 0.65 = 0.35$

11 **(a)** $P(X = 1) = f(1)$

$= {}_6C_1 \times (0.6)^1 \times (0.4)^5$

$= \dfrac{576}{15\ 625}$

(b) $P(2 < X \leqslant 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$= f(3) + f(4)$

$f(3) = {}_6C_3 \times (0.6)^3 \times (0.4)^3$

$= 0.27648$

$f(4) = {}_6C_4 \times (0.6)^4 \times (0.4)^2$

$= 0.31104$

$P(2 < X \leqslant 4) = 0.58752$

12 عدد السيارات المصنعة في اليوم الواحد: $n = 350$

نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد:

$p = 0.02$

التوقع: $\mu = np = 350(0.02) = 7$

التباين: $\sigma^2 = np(1-p) = 350(0.02)(0.98) = 6.86$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{6.86}$

≈ 2.619

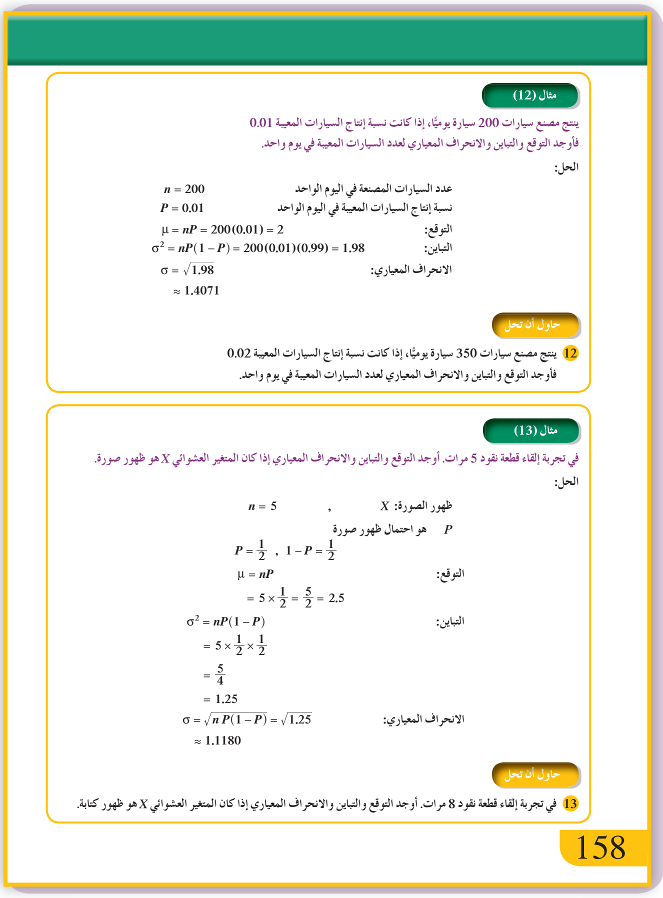
13 $n = 8 \ , \ p = \frac{1}{2} \ , \ 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

التوقع: $\mu = np = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

التباين: $\sigma^2 = np(1-p) = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{2}$

≈ 1.4



مثال (12)

ينتج مصنع سيارات 200 سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.01 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

الحل:

عدد السيارات المصنعة في اليوم الواحد $n = 200$

نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد $P = 0.01$

التوقع: $\mu = nP = 200(0.01) = 2$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P) = 200(0.01)(0.99) = 1.98$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{1.98}$

≈ 1.4071

حاول أن تحل

12 ينتج مصنع سيارات 350 سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.02 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

مثال (13)

في تجربة إلقاء قطعة نقود 5 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

الحل:

ظهور الصورة: X , $n = 5$

P هو احتمال ظهور صورة

$P = \frac{1}{2} \ , \ 1 - P = \frac{1}{2}$

التوقع: $\mu = nP$

$= 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P)$

$= 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{5}{4}$

$= 1.25$

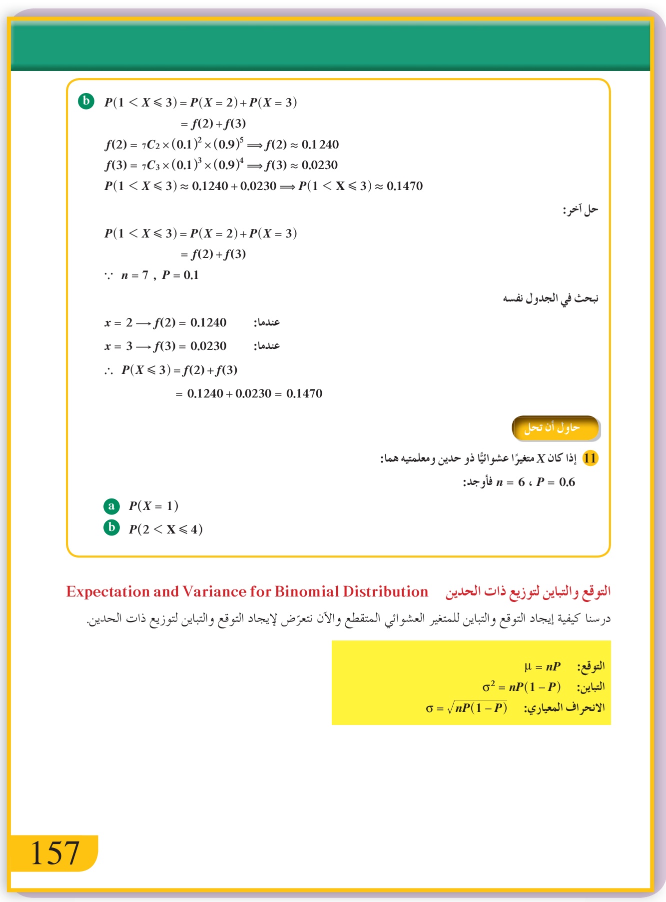
الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{n\,P(1-P)} = \sqrt{1.25}$

≈ 1.1180

حاول أن تحل

13 في تجربة إلقاء قطعة نقود 8 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور كتابة.

158



b $P(1 < X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$= f(2) + f(3)$

$f(2) = {}_7C_2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^5 \Longrightarrow f(2) \approx 0.1240$

$f(3) = {}_7C_3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^4 \Longrightarrow f(3) \approx 0.0230$

$P(1 < X \leqslant 3) \approx 0.1240 + 0.0230 \Longrightarrow P(1 < X \leqslant 3) \approx 0.1470$

حل آخر:

$P(1 < X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$= f(2) + f(3)$

$\because \ n = 7 \ , \ P = 0.1$

نبحث في الجدول نفسه

عندما: $x = 2 \longrightarrow f(2) = 0.1240$

عندما: $x = 3 \longrightarrow f(3) = 0.0230$

$\therefore \ P(X \leqslant 3) = f(2) + f(3)$

$= 0.1240 + 0.0230 = 0.1470$

حاول أن تحل

11 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما:

$n = 6$ ، $P = 0.6$ فأوجد:

a $P(X = 1)$

b $P(2 < X \leqslant 4)$

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين Expectation and Variance for Binomial Distribution

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتقطع والآن نتعرّض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

التوقع: $\mu = nP$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P)$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{nP(1-P)}$

157

8–2

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

سوف تتعلم

- المتغيّر العشوائي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

المفردات والمصطلحات:

- متغيّر عشوائي متصل Continuous Random Variable
- توزيع احتمالي متصل Continuous Probability Distribution
- توزيع احتمالي منتظم Regular Probability Distribution
- توزيع احتمالي طبيعي Natural Probability Distribution

دعنا نفكر ونتناقش

a حدّد المتغير العشوائي المتقطع والمتغير العشوائي غير المتقطع فيما يلي:

1 عدد الأهداف في مباريات كرة القدم.

2 عدد الأولاد والبنات في الأسرة.

3 أطوال مجموعة من طلاب المرحلة الثانوية.

4 الحرارة القصوى في منطقة معينة.

b ما الفرق بين المدى للمتغير العشوائي المتقطع والغير المتقطع؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» تبيّن لنا أن مدى المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) X هو مجموعة قيم متقطعة قابلة للعد.

أما المدى للمتغير العشوائي غير المتقطع فهو مجموعة قيم غير قابلة للعد ويسمى هذا النوع من المتغير العشوائي بـ «المتغير العشوائي المتصل».

تعريف: المتغير العشوائي المتصل Continuous Random Variable

هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ وهي مجموعة غير قابلة للعد.

أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:

- كتلة مجموعة طلاب بالكيلوجرام أعمارهم من (15–20) سنة.
- درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.
- المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.
- كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر.

159

2–8: المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

1 الأهداف

- يتعرف المتغير العشوائي المتصل ودالة كثافة الاحتمال.
- يوجد التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل.
- يتعرف التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- يتعرف التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

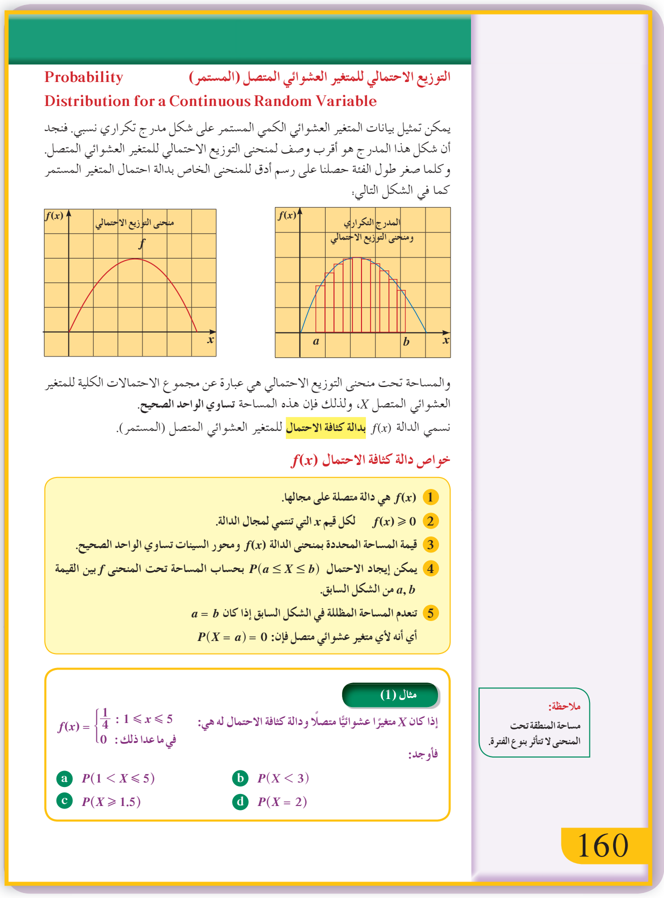
متغيّر عشوائي متصل – توزيع احتمالي متصل – توزيع احتمالي منتظم – توزيع احتمالي طبيعي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اسأل الطلاب: ارسم بيان الدالة $y = 2x$ على الفترة $[0, 3]$، ثم أوجد مساحة المثلث المكون من $y = 2x$، محور السينات، $x = 1$.



التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر) Probability Distribution for a Continuous Random Variable

يمكن تمثيل بيانات المتغير العشوائي الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي. فنجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل. وكلما صغر طول الفئة حصلنا على رسم أدق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر كما في الشكل التالي:

والمساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي هي عبارة عن مجموع الاحتمالات الكلية للمتغير العشوائي المتصل X، ولذلك فإن هذه المساحة **تساوي الواحد الصحيح**.

نسمي الدالة $f(x)$ **بدالة كثافة الاحتمال** للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

خواص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

1. $f(x)$ هي دالة متصلة على مجالها.
2. $f(x) \geqslant 0$ لكل قيم x التي تنتمي لمجال الدالة.
3. قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.
4. يمكن إيجاد الاحتمال $P(a \le X \le b)$ بحساب المساحة تحت المنحنى f بين القيمة a, b من الشكل السابق.
5. تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان $a = b$ أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن: $P(X = a) = 0$

مثال (1)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

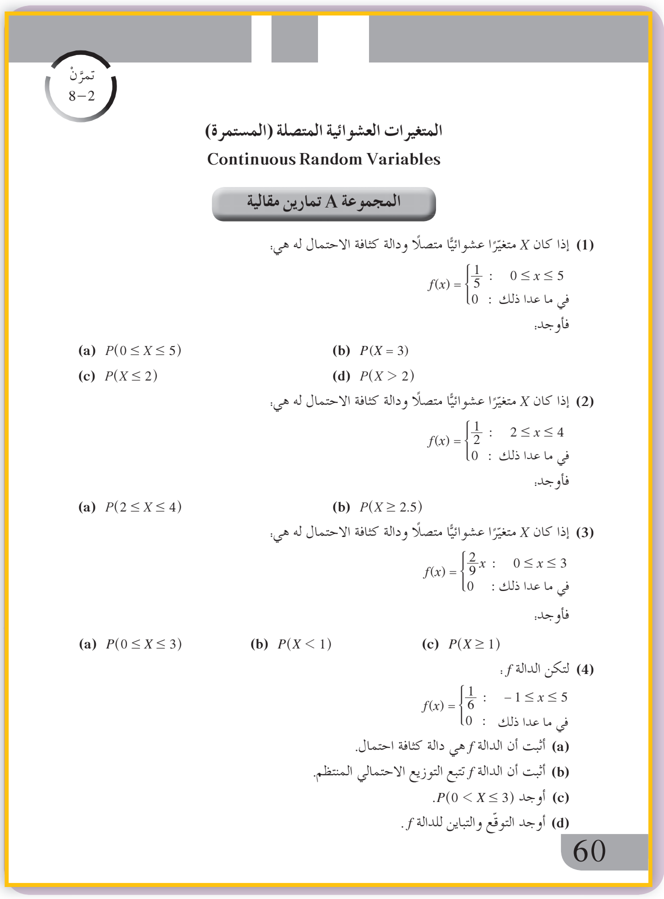
فأوجد:

(a) $P(1 < X \leqslant 5)$ (b) $P(X < 3)$

(c) $P(X \geqslant 1.5)$ (d) $P(X = 2)$

ملاحظة: مساحة المنطقة تحت المنحنى لا تتأثر بنوع الفترة.

160



تمرَّنْ 8–2

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

المجموعة A تمارين مقالية

(1) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : 0 \le x \le 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 5)$ **(b)** $P(X = 3)$

(c) $P(X \le 2)$ **(d)** $P(X > 2)$

(2) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 2 \le x \le 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(2 \le X \le 4)$ **(b)** $P(X \ge 2.5)$

(3) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 3)$ **(b)** $P(X < 1)$ **(c)** $P(X \ge 1)$

(4) لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : -1 \le x \le 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(c) أوجد $P(0 < X \le 3)$.

(d) أوجد التوقّع والتباين للدالة f.

60

5 التدريس

ناقش مع الطلاب فكرة المتغيرات المتصلة واطلب إليهم إعطاء أمثلة حياتية حول متغيرات متصلة.

شدّد على تعريف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل.

اشرح كل من النقاط الثلاث: f متصلة على الفترة I، $f > 0$، المساحة المحددة تساوي العدد الصحيح 1.

اسأل الطلاب: كيف يمكن إيجاد المساحة المحددة بين بيان الدالة $y = \frac{1}{4}$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 0$، $x = 4$؟

أشر إلى أنه نحسب مساحة المستطيل حيث بعديه 4 و $\frac{1}{4}$.

نبّه الطلاب إلى:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b)$$
$$= P(a < X < b) \ldots$$

أي أنه إذا كانت الفترة مغلقة أو مفتوحة فالاحتمال هنا لا يتغيّر لأن احتمال قيمة معزولة للمتغير X تساوي الصفر.

في المثالين (1), (2)

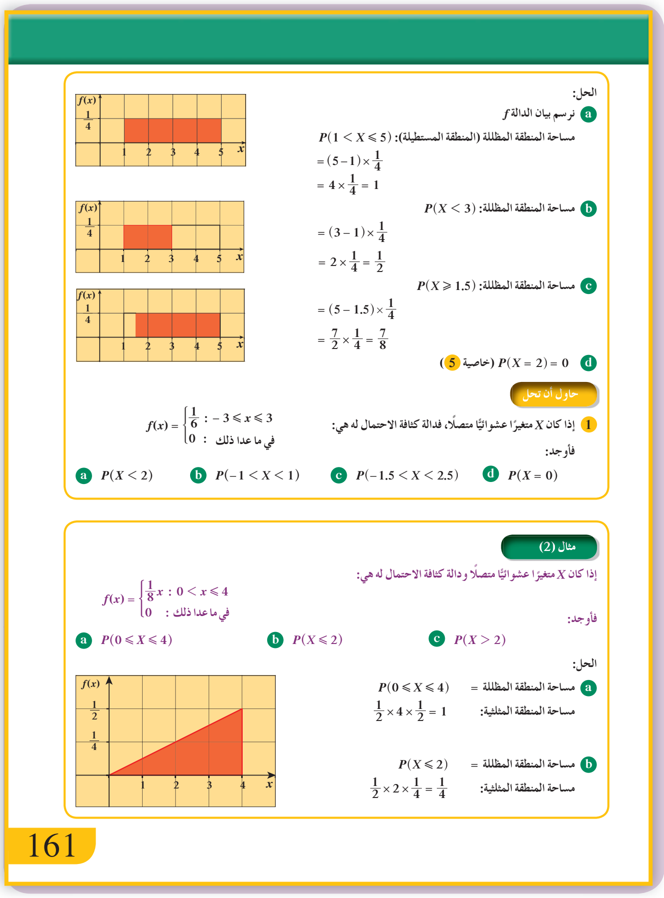
يعتبر هذان المثالان تطبيق مباشر لمفهوم التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل يهدف إلى تركيز خواص دالة كثافة الاحتمال عند الطالب. في المثال (1) مساحة المنطقة هي مساحة مستطيل بينما في المثال (2) فهي مساحة مثلث.

في المثال (3)

يعتبر هذا المثال تطبيق مباشر وسهل على مفهوم التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل وإيجاد التوقع والتباين.

في المثالين (4), (5)

تحقق من أن الطلاب يجيدون استخدام جدولي التوزيع الطبيعي المعياري (z) رقم (4) ورقم (5) لحساب الاحتمالات.


الحل:

a نرسم بيان الدالة f

مساحة المنطقة المظللة (المنطقة المستطيلة): $P(1 < X \leqslant 5)$

$= (5-1) \times \frac{1}{4}$

$= 4 \times \frac{1}{4} = 1$

b مساحة المنطقة المظللة: $P(X < 3)$

$= (3-1) \times \frac{1}{4}$

$= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

c مساحة المنطقة المظللة: $P(X \geqslant 1.5)$

$= (5-1.5) \times \frac{1}{4}$

$= \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

d $P(X = 2) = 0$ (خاصية 5)

حاول أن تحل

1 إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(X < 2)$ b $P(-1 < X < 1)$ c $P(-1.5 < X < 2.5)$ d $P(X = 0)$

مثال (2)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & : 0 < x \leqslant 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a $P(0 \leqslant X \leqslant 4)$ b $P(X \leqslant 2)$ c $P(X > 2)$

الحل:

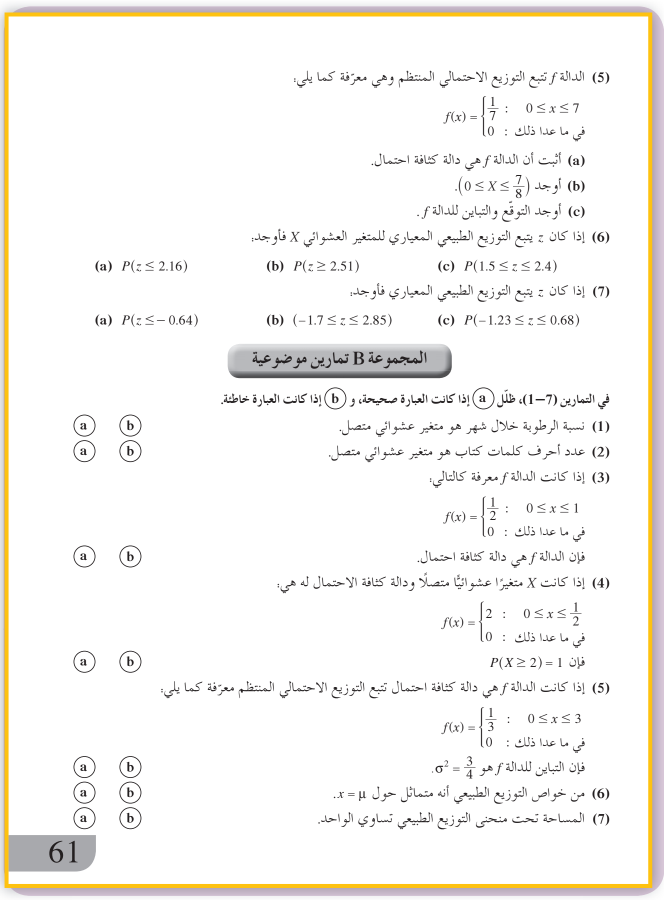
a مساحة المنطقة المظللة $= P(0 \leqslant X \leqslant 4)$

مساحة المنطقة المثلثية: $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} = 1$

b مساحة المنطقة المظللة $= P(X \leqslant 2)$

مساحة المنطقة المثلثية: $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

161


(5) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & : 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) أوجد $\left(0 \leq X \leq \frac{7}{8}\right)$.

(c) أوجد التوقّع والتباين للدالة f.

(6) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z \leq 2.16)$ (b) $P(z \geq 2.51)$ (c) $P(1.5 \leq z \leq 2.4)$

(7) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \leq -0.64)$ (b) $(-1.7 \leq z \leq 2.85)$ (c) $P(-1.23 \leq z \leq 0.68)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل a إذا كانت العبارة صحيحة، و b إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) نسبة الرطوبة خلال شهر هو متغير عشوائي متصل. a b

(2) عدد أحرف كلمات كتاب هو متغير عشوائي متصل. a b

(3) إذا كانت الدالة f معرفة كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن الدالة f هي دالة كثافة احتمال. a b

(4) إذا كانت X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن $P(X \geq 2) = 1$ a b

(5) إذا كانت الدالة f هي دالة كثافة احتمال تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم معرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن التباين للدالة f هو $\sigma^2 = \frac{3}{4}$. a b

(6) من خواص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول $x = \mu$. a b

(7) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد. a b

61

6 الربط

يبيّن المثالان (2) ,(1) الترابط بين هذا الدرس وكل الوحدة مع الحياة اليومية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في إيجاد الاحتمالات وخاصة في التمييز بين العلاقتين < ،< .

كما قد يجدون صعوبة في استخدام جدولي التوزيع الطبيعي المعياري، أعطهم بعض الأمثلة لتجنب ذلك.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من صحة عملهم ودقته.

اختبار سريع

1 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : \ -3 \le x \le 1 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(-1 \le X \le 1)$ $\qquad 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(b) $P(X = 0)$ $\qquad 0$

2 لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : \ -1 \le x \le 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

$5 \times \frac{1}{5} = 1$

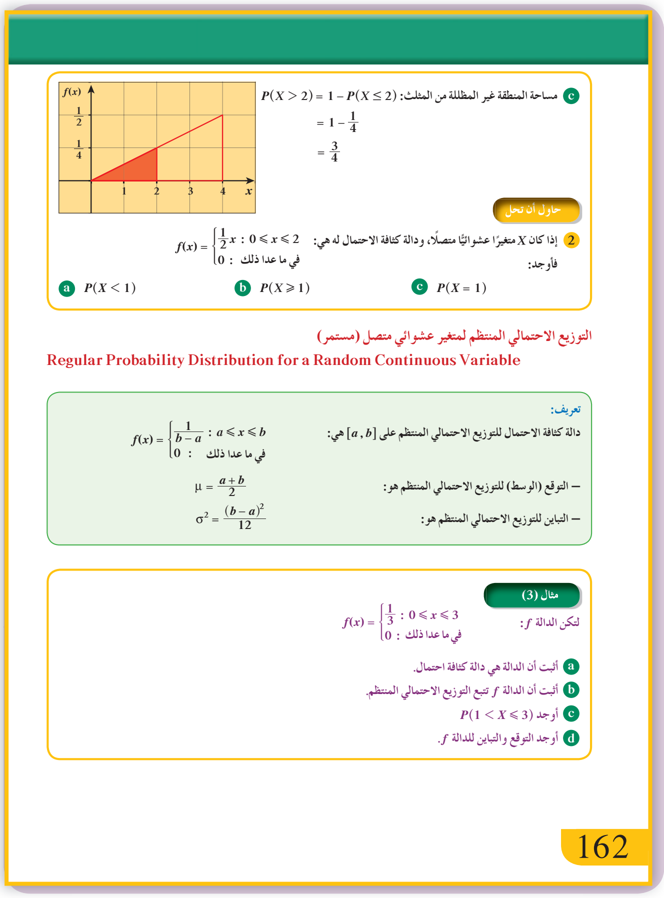
(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{4-(-1)} = \frac{1}{5}$

(c) أوجد التوقع والتباين للدالة f.

التوقع: $\mu = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$

التباين: $\sigma^2 = \frac{(4-(-1))^2}{12} = \frac{25}{12}$



c مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث: $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$
$= 1 - \frac{1}{4}$
$= \frac{3}{4}$

حاول أن تحل

2 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، ودالة كثافة الاحتمال له هي: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \le x \le 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

فأوجد:

a $P(X < 1)$ b $P(X \ge 1)$ c $P(X = 1)$

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

Regular Probability Distribution for a Random Continuous Variable

تعريف:

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a, b]$ هي: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \le x \le b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

– التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\mu = \frac{a+b}{2}$

– التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

مثال (3)

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

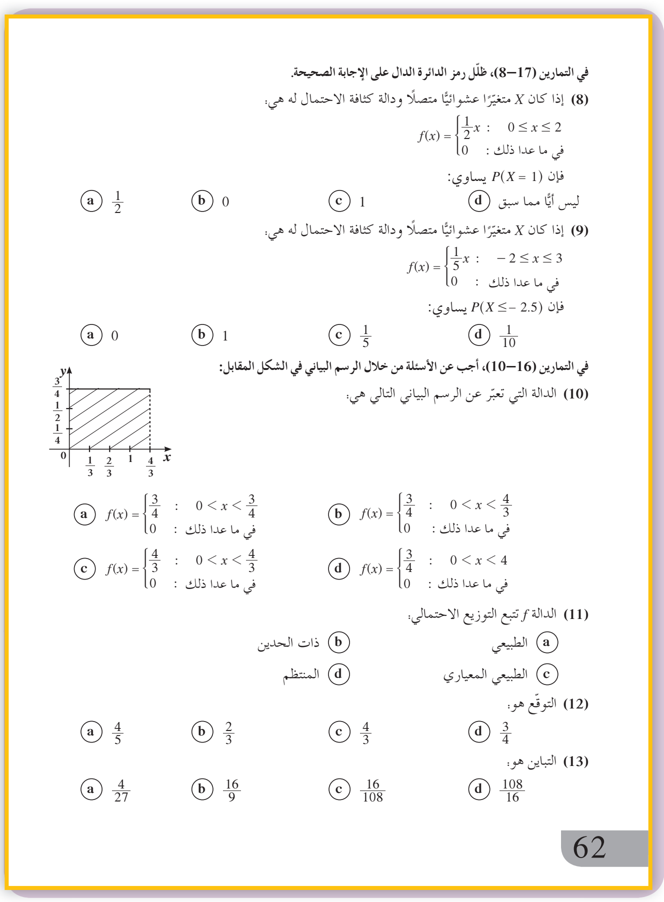
a أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد $P(1 < X \le 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f.

162



في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \le x \le 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

فإن $P(X = 1)$ يساوي:

a $\frac{1}{2}$ b 0 c 1 d ليس أيًّا مما سبق

(9) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x & : -2 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

فإن $P(X \le -2.5)$ يساوي:

a 0 b 1 c $\frac{1}{5}$ d $\frac{1}{10}$

في التمارين (10–16)، أجب عن الأسئلة من خلال الرسم البياني في الشكل المقابل:

(10) الدالة التي تعبّر عن الرسم البياني التالي هي:

a $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < x < \frac{3}{4} \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$ b $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < x < \frac{4}{3} \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

c $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} & : 0 < x < \frac{4}{3} \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$ d $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < x < 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(11) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي:

a الطبيعي b ذات الحدين c الطبيعي المعياري d المنتظم

(12) التوقع هو:

a $\frac{4}{5}$ b $\frac{2}{3}$ c $\frac{4}{3}$ d $\frac{3}{4}$

(13) التباين هو:

a $\frac{4}{27}$ b $\frac{16}{9}$ c $\frac{16}{108}$ d $\frac{108}{16}$

62

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) ❶ متغيّر عشوائي متقطع.

❷ متغيّر عشوائي متقطع.

❸ متغيّر عشوائي غير متقطع.

❹ متغيّر عشوائي غير متقطع.

(b) المدى للمتغير العشوائي المتقطع هو مجموعة قيم متقطعة قابلة للعد، أمّا المدى للمتغيّر العشوائي غير المتقطع فهو مجموعة قيم غير قابلة للعد.

«حاول أن تحل»

1

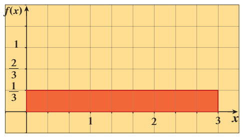
(a) $P(X < 2) = (2 - (-3)) \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(b) $P(-1 < X < 1) = (1 + 1) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

(c) $P(-1.5 < X < 2.5) = (2.5 + 1.5) \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(d) $P(X = 0) = 0$

الحل:



a لإثبات أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال يجب إثبات أن المساحة تحت المنحنى تساوي 1:

المساحة تحت المنحنى من الشكل هي

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$= 3 \times \frac{1}{3} = 1$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

b لإثبات أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$\because a = 0 , b = 3 \Longrightarrow b - a = 3 - 0 = 3$

$\therefore \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3}$

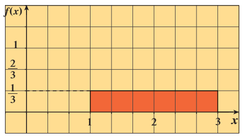
وبالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أي أن f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c مساحة المنطقة المظللة: $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$

$= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



d التوقع: $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

التباين: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

حاول أن تحل

3 لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

a أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد: $P(2 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f .

163

(14) $P\left(X < \frac{4}{6}\right) =$

ⓐ $\frac{1}{3}$ ⓑ $\frac{1}{4}$ ⓒ $\frac{1}{6}$ ⓓ $\frac{1}{2}$

(15) $P\left(X > \frac{4}{12}\right) =$

ⓐ $\frac{2}{6}$ ⓑ $\frac{6}{2}$ ⓒ $\frac{3}{4}$ ⓓ 1

(16) $P(0 < X < 1) =$

ⓐ $\frac{4}{5}$ ⓑ $\frac{1}{3}$ ⓒ 1 ⓓ $\frac{3}{4}$

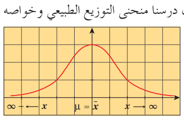
(17) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي فإن: $P(0 \leq z \leq 2.35)$ يساوي:

ⓐ 0.9906 ⓑ 0.5 ⓒ 0.4906 ⓓ 0.218

63

التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ Natural Probability Distribution $N(\mu , \sigma^2)$

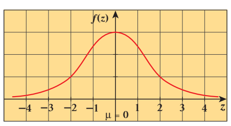
يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(x = \mu)$.
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $-\infty$ وإلى ∞ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي $\mu = \overline{x}$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).

التوزيع الطبيعي المعياري $N(0 , 1)$



منحنى التوزيع الطبيعي $N(0 , 1)$

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم σ^2، μ من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

وتمّ وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير X فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد $P(a \leq X \leq b)$:

1 نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a بالتعويض في العلاقة: $z_1 = \frac{a - \mu}{\sigma}$

والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة b بالتعويض في العلاقة: $z_2 = \frac{b - \mu}{\sigma}$

2 نستخدم العلاقة: $P(a < X \leqslant b) = P(z_1 < z < z_2)$

3 نستخدم أحد جدولي المساحة تحت المنحنى الطبيعي (5) ,(4) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $P(z)$

- إذا كانت $a \geqslant z$ أو $a \leqslant z$، حيث $a \geqslant 0$ نستخدم جدول z رقم (4).
- إذا كانت $a \geqslant z$ أو $a \leqslant z$، حيث $a < 0$ نستخدم جدول z رقم (5).

164

2 (a) $P(X < 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(c) $P(X = 1) = 0$

3 (a) مساحة المنطقة المستطيلة: $\frac{1}{2} \times (3 - 1) = 1$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $\frac{1}{b-a} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

إذًا دالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم فهي على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \ -a \leq x \leq b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(c) $P(2 < X \leq 3) = (3 - 2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(d) التوقع: $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

التباين: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$

4 (a) $P(z \leq 0.95) = 0.82894$

(b) $P(z > 0.71) = 1 - P(z \leq 0.71)$

$= 1 - 0.76115$

$= 0.23885$

(c) $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

$= P(z \leqslant 3.26) - P(z \leqslant 1.45)$

$= 0.99944 - 0.92647$

$= 0.07297$

مثال (4)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leqslant 2.18)$ b $P(z \geqslant 2.43)$ c $P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6)$

الحل:

a $P(z \leqslant 2.18)$ لاحظ أن: $2.18 \geqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (4) صفحة (177) الموجود في نهاية الوحدة.

$P(z \leqslant 2.18) = 0.98537$

b $P(z \geqslant 2.43) = 1 - P(z \leqslant 2.43)$

$= 1 - 0.99245$

$= 0.00755$

c $P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6)$

$= P(z \leqslant 2.6) - P(z \leqslant 1.4)$

$= 0.99534 - 0.91924$

$= 0.0761$

حاول أن تحل

4 إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq 0.95)$ b $P(z > 0.71)$ c $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

مثال (5)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leqslant -0.55)$ b $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6)$ c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28)$

الحل:

a $P(z \leqslant -0.55)$ لاحظ أن: $-0.55 \leqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (5) صفحة (178).

$P(z \leqslant -0.55) = 0.29116$

b $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6) = P(z \leqslant -1.6) - P(z \leqslant -2.2)$

$= 0.0548 - 0.01390$

$= 0.0409$

165

c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = P(z \leqslant 0.28) - P(z \leqslant -1.3)$

لاحظ أن: $0.28 \geqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (4)

وأن $-1.3 \leqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (5)

$P(z \leqslant 0.28) = 0.61026$

$P(z \leqslant -1.3) = 0.09680$

$P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = 0.61026 - 0.09680$

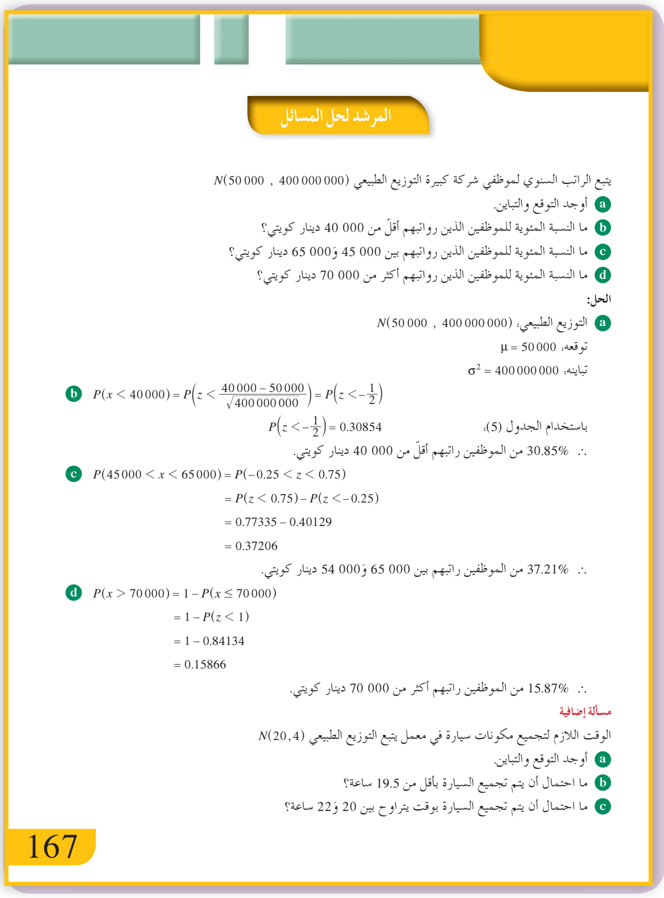
$= 0.51346$

حاول أن تحل

5 إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq -0.12)$ b $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$ c $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

166



المرشد لحل المسائل

يتبع الراتب السنوي لموظفي شركة كبيرة التوزيع الطبيعي $N(50\,000\ ,\ 400\,000\,000)$

a أوجد التوقع والتباين.

b ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أقلّ من 000 40 دينار كويتي؟

c ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم بين 000 45 وَ000 65 دينار كويتي؟

d ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أكثر من 000 70 دينار كويتي؟

الحل:

a التوزيع الطبيعي: $N(50\,000\ ,\ 400\,000\,000)$

توقعه: $\mu = 50\,000$

تباينه: $\sigma^2 = 400\,000\,000$

b $P(x < 40\,000) = P\left(z < \frac{40\,000 - 50\,000}{\sqrt{400\,000\,000}}\right) = P\left(z < -\frac{1}{2}\right)$

باستخدام الجدول (5): $P\left(z < -\frac{1}{2}\right) = 0.30854$

$\therefore$ 30.85% من الموظفين راتبهم أقلّ من 000 40 دينار كويتي.

c $P(45\,000 < x < 65\,000) = P(-0.25 < z < 0.75)$

$= P(z < 0.75) - P(z < -0.25)$

$= 0.77335 - 0.40129$

$= 0.37206$

$\therefore$ 37.21% من الموظفين راتبهم بين 000 65 وَ000 54 دينار كويتي.

d $P(x > 70\,000) = 1 - P(x \leq 70\,000)$

$= 1 - P(z < 1)$

$= 1 - 0.84134$

$= 0.15866$

$\therefore$ 15.87% من الموظفين راتبهم أكثر من 000 70 دينار كويتي.

مسألة إضافية

الوقت اللازم لتجميع مكونات سيارة في معمل يتبع التوزيع الطبيعي $N(20, 4)$

a أوجد التوقع والتباين.

b ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بأقل من 19.5 ساعة؟

c ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بوقت يتراوح بين 20 وَ22 ساعة؟

167

5 **(a)** $P(z \leq -0.12) = 0.45224$

(b) $P(-3.2 \leqslant z \leqslant -0.1)$

$= P(z \leq -0.1) - P(z \leq -3.2)$

$= 0.46017 - 0.00069$

$= 0.45948$

(c) $P(-5.26 \leqslant z \leqslant 0.69)$

$= P(z \leq 0.69) - P(z \leq -5.26)$

$= 0.75490 - 0$

$= 0.7549$

المرشد لحل المسائل

حل «مسألة إضافية»

(a) التوقع: $\mu = 20$

(b) التباين: $\sigma^2 = 4$

$$\textbf{(b)}\quad P(X < 19.5) = P\left(z < \frac{19.5 - 20}{\sqrt{4}}\right)$$
$$= P(z < -0.25) = 0.40129$$

$$\textbf{(c)}\quad P(20 < X < 22) = P(0 < z < 1)$$
$$= P(1) - P(0)$$
$$= 0.84134 - 0.50000$$
$$= 0.34134$$

اختبار الوحدة الثامنة

(1) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو $\{2, 3, 4, 5\}$ وكان $f(2) = 0.3$، $f(3) = 0.2$، $f(4) = 0.1$
فأوجد $f(5)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(2) يحتوي صندوق على 8 كرات متماثلة منها: 5 كرات حمراء و3 كرات صفراء سحبت 4 كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الصفراء، فأوجد ما يلي:

(a) عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(3) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X.

x	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

(4) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.14	0.16	0.35	0.15	0.2

أوجد باستخدام دالة التوزيع التراكمي F: $F(7)$, $F(6)$, $F(5)$, $F(4)$, $F(3.5)$, $F(3)$, $F(2)$, $F(1)$

(5) ينتج مصنع أجبان 1 250 علبة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج العلب الفاسدة 0.04، فأوجد ما يلي لمعرفة عدد العلب الفاسدة في أحد الأيام:

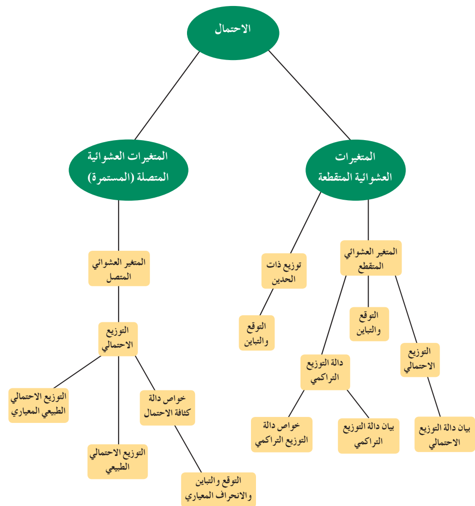
(a) التوقع (μ)

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

64

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



168

(6) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : \quad -2 \le x \le 3 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 3)$ **(b)** $P(-2 \le X \le 0)$

(c) $P(X = 2)$ **(d)** $P(-1 \le X \le 2)$

(7) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا. دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x & : \quad 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P\left(0 \le X \le \frac{1}{3}\right)$ **(b)** $P\left(X \ge \frac{1}{3}\right)$

(8) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & : \quad -3 \le x \le 5 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $P(-1 \le X \le 3)$

(c) أوجد التوقع والتباين للدالة f.

(9) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X، فأوجد:

(a) $P(z \le 2.24)$ **(b)** $P(z \ge 1.52)$ **(c)** $P(1.4 \le z \le 2.6)$

(10) يمثّل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

(a) $P(30 < X < 65)$ **(b)** $P(X \ge 45)$

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.16	0.24	K	0.15	0.2

فأوجد قيمة K

(12) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \le 1.45)$ **(b)** $P(z > 0.27)$

(c) $P(-1.32 \le z \le 1.75)$ **(d)** $P(-2.87 \le z \le -1.42)$

65

تمارين إثرائية

(1) متغير عشوائي X يتبع توزيعًا طبيعيًّا توقعه $\mu = 55$ وتباينه $\sigma^2 = 25$، أوجد:

(a) $P(X > 55)$

(b) $P(X < 50)$

(c) $P(30 < X < 40)$

(2) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	K	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

(a) أوجد K.

(b) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي f.

(c) أوجد دالة التوزيع التراكمي F.

(d) ارسم دالة التوزيع التراكمي F.

(3) مدفع يتبع مداه توزيعًا طبيعيًّا توقعه 14 km وتباينه 1 km.

(a) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة أبعد من 15 km؟

(b) ما احتمال أن تصل القذيفة فقط إلى مسافة أقل من 11 km؟

(c) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة بين 13 km, 15 km؟

(4) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)$

(b) $P\left(X \ge \frac{1}{2}\right)$

(5) عند إلقاء حجر نرد منتظم 7 مرات متتالية، أوجد:

(a) احتمال ظهور العدد 2 خمس مرات.

(b) احتمال ظهور العدد 2 مرة واحدة على الأقل.

(c) احتمال ظهور العدد 2 مرة واحدة على الأكثر.

66

ملخص

المتغيّر العشوائي: هو دالة مجالها فضاء العينة S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ حيث $X : S \to \mathbb{R}$
(X هو المتغير العشوائي، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

- يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$: هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$، فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:
$f(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, ...$
- دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:
  1. $0 \le f(x) \le 1$
  2. مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح،
  أي أن: $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... = 1$
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،
مدى $X = \{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$
فإن التوقع للمتغير العشوائي X يكون:
التوقع: $\mu = \sum x_i \, f(x_i)$
أي أن: $\mu = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + ...$
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f، فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:
التباين: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \, f(x_i) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع.
الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$
- دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a
هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. أي أن:

1. $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
2. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$
3. $P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

169

(6) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \le 2.65)$

(b) $P(-2.85 \le z \le -1.96)$

(c) $P(z \ge 1.56)$

(7) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f لمتغير عشوائي متقطع X .

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

(8) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	3	4	5	6
$f(x)$	0.17	0.24	0.23	0.36

أوجد باستخدام دالة التوزيع التراكمي F: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(6)$, $F(6.5)$

67

- يمكن تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام:
  1. القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a: $z_1 = \frac{a - \mu}{\sigma}$
  2. القيمة المعيارية المناظرة للقيمة b: $z_2 = \frac{b - \mu}{\sigma}$
- نستخدم الجدول (4) إذا كات a أو b قيمة موجبة.
- نستخدم الجدول (5) إذا كات a أو b قيمة سالبة.
- التوقع للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\mu = \frac{a + b}{2}$
- التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$

170

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
3	0	0.857	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001	
	1	0.135	0.243	0.384	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.096	0.027	0.007
	2	0.007	0.027	0.096	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.384	0.243	0.135
	3		0.001	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	0.857
4	0	0.815	0.656	0.410	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.002		
	1	0.171	0.292	0.410	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.026	0.004	
	2	0.014	0.049	0.154	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.154	0.049	0.014
	3		0.004	0.026	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.410	0.292	0.171
	4			0.002	0.008	0.026	0.062	0.130	0.240	0.410	0.656	0.815
5	0	0.774	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002			
	1	0.204	0.328	0.410	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.006		
	2	0.021	0.073	0.205	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.051	0.008	0.001
	3	0.001	0.008	0.051	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.205	0.073	0.021
	4			0.006	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.410	0.328	0.204
	5				0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.328	0.590	0.774
6	0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001			
	1	0.232	0.354	0.393	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.002		
	2	0.031	0.098	0.246	0.324	0.311	0.234	0.138	0.060	0.015	0.001	
	3	0.002	0.015	0.082	0.185	0.276	0.312	0.276	0.185	0.082	0.015	0.002
	4		0.001	0.015	0.060	0.138	0.234	0.311	0.324	0.246	0.098	0.031
	5			0.002	0.010	0.037	0.094	0.187	0.303	0.393	0.354	0.232
	6				0.001	0.004	0.016	0.047	0.118	0.262	0.531	0.735
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025	0.004		
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.029	0.003	
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.115	0.023	0.004
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.275	0.124	0.041
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.367	0.372	0.257
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.210	0.478	0.698

171

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
8	0	0.663	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001				
	1	0.279	0.383	0.336	0.198	0.090	0.031	0.008	0.001			
	2	0.051	0.149	0.294	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.001		
	3	0.005	0.033	0.147	0.254	0.279	0.219	0.124	0.047	0.009		
	4		0.005	0.046	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.046	0.005	
	5			0.009	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.147	0.033	0.005
	6			0.001	0.010	0.041	0.109	0.209	0.296	0.294	0.149	0.051
	7				0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.336	0.383	0.279
	8					0.001	0.004	0.017	0.058	0.168	0.430	0.663
9	0	0.630	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002					
	1	0.299	0.387	0.302	0.156	0.060	0.018	0.004				
	2	0.063	0.172	0.302	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004			
	3	0.008	0.045	0.176	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.003		
	4	0.001	0.007	0.065	0.172	0.251	0.246	0.167	0.074	0.017	0.001	
	5		0.001	0.017	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.066	0.007	0.001
	6			0.003	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.176	0.045	0.008
	7				0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.302	0.172	0.063
	8					0.004	0.018	0.060	0.156	0.302	0.387	0.299
	9						0.002	0.010	0.040	0.134	0.387	0.630
10	0	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001					
	1	0.315	0.387	0.268	0.121	0.040	0.010	0.002				
	2	0.075	0.194	0.302	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001			
	3	0.010	0.057	0.201	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.001		
	4	0.001	0.011	0.088	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.006		
	5		0.001	0.026	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.026	0.001	
	6			0.006	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.088	0.011	0.001
	7			0.001	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.201	0.057	0.010
	8				0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.302	0.194	0.075
	9					0.002	0.010	0.040	0.121	0.268	0.387	0.315
	10						0.001	0.006	0.028	0.107	0.349	0.599

172

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
11	0	0.569	0.314	0.086	0.020	0.004						
	1	0.329	0.384	0.236	0.093	0.027	0.005	0.001				
	2	0.087	0.213	0.295	0.200	0.089	0.027	0.005	0.001			
	3	0.014	0.071	0.221	0.257	0.177	0.081	0.023	0.004			
	4	0.001	0.016	0.111	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.002		
	5		0.002	0.039	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.010		
	6			0.010	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.039	0.002	
	7			0.002	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.111	0.016	0.001
	8				0.004	0.023	0.081	0.177	0.257	0.221	0.071	0.014
	9				0.001	0.005	0.027	0.089	0.200	0.295	0.213	0.087
	10					0.001	0.005	0.027	0.093	0.236	0.384	0.329
	11							0.004	0.020	0.086	0.314	0.569
12	0	0.540	0.282	0.069	0.014	0.002						
	1	0.341	0.377	0.206	0.071	0.017	0.003					
	2	0.099	0.230	0.283	0.168	0.064	0.016	0.002				
	3	0.017	0.085	0.236	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001			
	4	0.002	0.021	0.133	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.001		
	5		0.004	0.053	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.003		
	6			0.016	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.016		
	7			0.003	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.053	0.004	
	8			0.001	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.133	0.021	0.002
	9				0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.236	0.085	0.017
	10					0.002	0.010	0.064	0.168	0.283	0.230	0.099
	11						0.003	0.017	0.071	0.206	0.377	0.341
	12							0.002	0.014	0.069	0.282	0.540

173

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

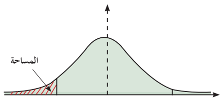
		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
13	0	0.513	0.254	0.055	0.010	0.001						
	1	0.351	0.367	0.179	0.054	0.011	0.002					
	2	0.111	0.245	0.268	0.139	0.045	0.010	0.001				
	3	0.021	0.100	0.246	0.218	0.111	0.035	0.005	0.001			
	4	0.003	0.028	0.154	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003			
	5		0.006	0.069	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.001		
	6		0.001	0.023	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.006		
	7			0.006	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.023	0.001	
	8			0.001	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.069	0.006	
	9				0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.154	0.028	0.003
	10				0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.246	0.100	0.021
	11					0.001	0.010	0.045	0.139	0.268	0.245	0.111
	12						0.002	0.011	0.054	0.179	0.367	0.351
	13							0.001	0.010	0.055	0.254	0.513
14	0	0.488	0.229	0.044	0.007	0.001						
	1	0.359	0.356	0.154	0.041	0.007	0.001					
	2	0.123	0.257	0.250	0.113	0.032	0.006	0.001				
	3	0.026	0.114	0.250	0.194	0.085	0.022	0.003				
	4	0.004	0.035	0.172	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001			
	5		0.008	0.086	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007			
	6		0.001	0.032	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.002		
	7			0.009	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.0009		
	8			0.002	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.032	0.001	
	9				0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.086	0.008	
	10				0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.172	0.035	0.004
	11					0.003	0.022	0.085	0.194	0.250	0.114	0.026
	12					0.001	0.006	0.032	0.113	0.250	0.257	0.123
	13						0.001	0.007	0.041	0.154	0.356	0.359
	14							0.001	0.007	0.044	0.229	0.488

174

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
15	0	0.463	0.206	0.035	0.005							
	1	0.366	0.343	0.132	0.031	0.005						
	2	0.135	0.267	0.231	0.092	0.022	0.003					
	3	0.031	0.129	0.250	0.170	0.063	0.014	0.002				
	4	0.005	0.043	0.188	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001			
	5	0.001	0.010	0.103	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003			
	6		0.002	0.043	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.001		
	7			0.014	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.003		
	8			0.003	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.014		
	9			0.001	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.043	0.002	
	10				0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.103	0.010	0.001
	11				0.001	0.007	0.042	0.127	0.210	0.188	0.043	0.005
	12					0.002	0.014	0.063	0.170	0.250	0.129	0.031
	13						0.003	0.022	0.092	0.231	0.267	0.135
	14							0.005	0.031	0.132	0.343	0.366
	15								0.005	0.035	0.206	0.463

175

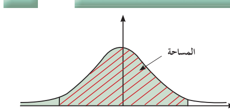


جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

جدول (5)

177



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

جدول (4)

176

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $F'(x) = 5(3x+2)^4 \times 3 = 15(3x+2)^4 = f(x)$

إذاً F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(2) $F'(x) = x^2 - 2x + 1 = f(x)$

إذاً F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(3) $F'(x) = \frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}} \times 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} = f(x)$

إذاً F هي مشتقة عكسية للدالة f.

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx = \frac{x^6}{6} - 3x^2 + 3x + C$

(5) $\int (3 - 6x^2)dx = 3x - 2x^3 + C$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = x^{\frac{1}{3}} + C$

(7) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int (x^3 - x^{-3})dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{2} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2} + C$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx = \int \frac{x^3 - 27}{x-3}dx = \int (x^2 + 3x + 9)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 9x + C$

(9) $\int (x-2)(2x+3)dx = \int (2x^2 - x - 6)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 6x + C$

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}dx = \int (\sqrt{x}-1)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$

(11) $\int \frac{x - \sqrt{x}}{x}dx = \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = x - 2\sqrt{x} + C$

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{5}{\sqrt{x}}dx + \int 2\sqrt{x}\,dx = 10\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$

(13) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$

(14) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C$

(15) $F(x) = x^3 - 5x + C$

$F(2) = 3 \quad \therefore \quad C = 5 \quad \therefore \quad F(x) = x^3 - 5x + 5$

(16) $F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + C$

$F(-1) = 0 \quad \therefore \quad C = 10 \quad \therefore \quad F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 10$

(17) $r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + C$

$r(0) = 0 \quad \therefore \quad r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$

(18) ليكن s ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض عند الزمن t. نفرض أن s دالة في t قابلة للاشتقاق مرتين، ونرمز إلى سرعة القذيفة بالرمز v وإلى عجلتها بالرمز a : $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$

(a) $a = -9.8$

$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow -9.8 = \frac{dv}{dt}$

$v_{(t)} = -\int 9.8\, dt = -9.8t + C_1$

$16 = -9.8(0) + C_1$

$v(t) = -9.8t + 16$

عندما تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع، تكون $v(t) = 0$، أي أن:

$-9.8t + 16 = 0 \quad \therefore \quad t = 1.63s$

(b) $s(t) = \int v(t)dt = \int (-9.8t + 16)dt = -4.9t^2 + 16t + C_2$

$s(0) = 115 \quad \therefore \quad C_2 = 115$

$s(t) = -4.9t^2 + 16t + 115$

عندما تصل الكرة إلى الأرض يكون ارتفاعها $s(t) = 0$، أي أن:

$-4.9t^2 + 16t + 115 = 0 \quad \therefore \quad t = 6.74\, s$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (b)

(5) (b) **(6)** (b) **(7)** (a) **(8)** (c)

(9) (c) **(10)** (a) **(11)** (b) **(12)** (d)

التكامل بالتعويض — تمرَّنْ 2–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $u = x^2 - 3x + 5 \quad , \quad du = (2x-3)dx$

$$\int (2x-3)\sqrt{x^2 - 3x + 5}\, dx = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

(2) $u = 4x - 5 \quad , \quad du = 4dx$

$$\int (4x-5)^8 dx = \int \frac{1}{4}u^8 du = \frac{u^9}{36} + C = \frac{(4x-5)^9}{36} + C$$

(3) $u = x^2 + 4x - 1 \quad , \quad du = (2x+4)dx = 2(x+2)dx$

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2 + 4x - 1}\, dx = \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}(x^2 + 4x - 1)^{\frac{4}{3}} + C$$

(4) $u = x^3 - 3x + 5$, $du = (3x^2 - 3)dx = 3(x^2 - 1)dx$

$$\int (x^2 - 1)\sqrt{x^3 - 3x + 5}\,dx = \int \frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

(5) $u = x^3 - 3x^2 + 4$, $du = (3x^2 - 6x)dx = 3(x^2 - 2x)dx$

$$\int (x^2 - 2x)(x^3 - 3x^2 + 4)^5 dx = \int \frac{1}{3}u^5 du = \frac{u^6}{18} + C = \frac{(x^3 - 3x^2 + 4)^6}{18} + C$$

(6) $u = 4 + x^3$, $du = 3x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4 + x^3}}dx = \int x^2(4 + x^3)^{-\frac{1}{3}}dx = \int \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \frac{(4 + x^3)^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

(7) $u = 2 - 3x$, $du = -3dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 3x}} = \int (2 - 3x)^{-\frac{1}{3}}dx = \int -\frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}du = -\frac{u^{\frac{2}{3}}}{2} + C = -\frac{(2 - 3x)^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

(8) $u = 3x + 2$, $du = 3dx$, $x = \frac{u}{3} - \frac{2}{3}$

$$\int x(3x + 2)^6 dx = \int \left(\frac{u}{3} - \frac{2}{3}\right)u^6 \times \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^8}{24} - \frac{2u^7}{21}\right] + C$$

$$= \frac{u^8}{72} - \frac{2u^7}{63} + C = \frac{(3x + 2)^8}{72} - \frac{2(3x + 2)^7}{63} + C$$

(9) $u = 1 + 3x$, $du = 3dx$, $x = \frac{u}{3} - \frac{1}{3}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + 3x}}dx = \int x(1 + 3x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int \left(\frac{u}{3} - \frac{1}{3}\right)u^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3}du = \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{27}(1 + 3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1 + 3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

(10) $u = x - 1$, $du = dx$, $x^2 = (u + 1)^2$

$$\int x^2\sqrt{x - 1}\,dx = \int (u + 1)^2 \times u^{\frac{1}{2}} \times du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7}(x - 1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(11) $u = x^2 - 2$, $du = 2x\,dx$, $x^2 = u + 2$

$$\int x^2 \cdot x\sqrt{x^2 - 2}\,dx = \frac{1}{2}\int (u + 2)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du + \int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{5}(x^2 - 2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(12) $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2 dx$, $x^3 = u - 1$

$$\int x^3 \cdot x^2(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{3}\int (u - 1) \times u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{4}{3}}du - \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{3}}du$$

$$= \frac{1}{7}(x^3 + 1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}(x^3 + 1)^{\frac{4}{3}} + C$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (a)	**(6)** (a)	**(7)** (b)	**(8)** (d)
(9) (b)	**(10)** (a)	**(11)** (c)	**(12)** (b)

تكامل الدوال المثلثية — تمرَّنْ 3–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x)dx = \sec x - \cos x + C$

(2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x)dx = -\int -\csc x \cot x\, dx + \int \sec^2 x\, dx = -\csc x + \tan x + C$

(3) $\int \left(-\frac{1}{x^2} + 5\sin 3x\right)dx = \frac{1}{x} - \frac{5}{3}\cos 3x + C$

(4) $\int \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$

(5) $\int \cos^5 x \sin x\, dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$

(6) $\int x^2 \sin(x^3+1)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin(x^3+1)dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3+1) + C$

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx = \int \sin x(\cos x)^{-3}dx = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2}\sec^2 x + C$

(8) $\int \sec^3 x \tan x\, dx = \int \sin x \times (\cos x)^{-4}dx = -\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

(9) $\int \csc^3 x \cot x\, dx = \int \cos x \times (\sin x)^{-4}dx = \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C$

(10) $\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x\, dx = -\int \sqrt{\cot x}(-\csc^2 x)dx = -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} x + C$

(11) $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\, dx = \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + C$

(12) $\int \sqrt{1+\sin x}\cos x\, dx = \frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$

(13) $\int \frac{1}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}dx = -\int \frac{-1}{\sin^2 x}(1+\cot x)^{-\frac{1}{2}}dx = -2\sqrt{1+\cot x} + C$

(14) $\int \frac{1}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}(1+\tan x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{1+\tan x} + C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (a)	**(6)** (c)	**(7)** (d)	**(8)** (b)
(9) (c)	**(10)** (c)	**(11)** (b)	**(12)** (b)

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية   تمرَّنْ 4–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{dy}{dx} = (\ln 7) \times 7^x$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 5}{2\sqrt{x+1}} \times 5^{\sqrt{x+1}}$

(3) $\frac{dy}{dx} = (\ln 8)(\sec^2 x) \times 8^{\tan x}$

(4) $\frac{dy}{dx} = 2e^x$

(5) $\frac{dy}{dx} = -\,e^{-x}$

(6) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5} e^{\frac{x}{5}}$

(7) $\frac{dy}{dx} = (2x-1)e^{x^2-x+1}$

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}+3}$

(9) $\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x \cdot e^{\csc x}$

(10) $\frac{dy}{dx} = 4x^3 e^{x^4-5}$

(11) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}$

(12) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$

(13) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}$

(14) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$

(15) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$

(16) $\frac{e^{0.1x}}{0.1} + C = 10e^{0.1x} + C$

(17) $-e^{\frac{1}{x}}+C$

(18) $e^{x^2+x+4}+C$

(19) $\frac{1}{3}e^{x^3-6x}+C$

(20) $\frac{1}{0.5}e^{0.5x}+0.5\ln|x|+C$

(21) $\ln(e^x+1)+C$

(22) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C$

(23) $\frac{1}{4}\ln|x^4-2x^2|+C$

(24) $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C$

(25) $\frac{2}{3}\ln|3x+1|+C$

(26) $-2\ln|\cos x|+\cot x+C$

(27) $\ln|\sin x|+\frac{x^3}{3}+C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (c)	**(8)** (a)
(9) (b)	**(10)** (d)	**(11)** (c)	**(12)** (b)
(13) (a)	**(14)** (b)		

التكامل بالتجزيء — تمرَّنْ 5–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $u=x \qquad dv=\cos(3x)\,dx$

$du=dx \qquad v=\frac{\sin(3x)}{3}$

$$\int x\cos(3x)\,dx=\frac{x}{3}\sin(3x)-\frac{1}{3}\int\sin(3x)\,dx$$
$$=\frac{x}{3}\sin(3x)+\frac{1}{9}\cos(3x)+C$$

(2) $u=x \qquad dv=\sin(5x)\,dx$

$du=dx \qquad v=-\frac{1}{5}\cos(5x)$

$$\int x\sin(5x)\,dx=-\frac{x}{5}\cos(5x)+\frac{1}{5}\int\cos(5x)\,dx$$
$$=-\frac{x}{5}\cos(5x)+\frac{1}{25}\sin(5x)+C$$

(3) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = e^{x-3}dx \qquad v = e^{x-3}$

$$\int x\,e^{x-3}\,dx = x\,e^{x-3} - \int e^{x-3}dx = x\,e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

(4) $\int (x-5)e^{x-5}dx = (x-6)e^{x-5} + C$ (إرشاد: $dv = e^{x-5}dx \quad , \quad u = x-5$)

(5) $u = \ln\sqrt[4]{x} = \ln x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\ln x \qquad du = \frac{1}{4x}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int \ln\sqrt[4]{x}\,dx = \frac{x}{4}\ln x - \int \frac{1}{4x} \times x\,dx = \frac{1}{4}(x\ln x - x) + C$$

(6) $u = \ln(2x-1) \qquad du = \frac{2}{2x-1}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int \ln(2x-1)dx = x\ln(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}dx = x\ln(2x-1) - \int \frac{2x-1+1}{2x-1}dx$$

$$= x\ln(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$= x\ln(2x-1) - x - \frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$$

(7) $\int (2x+1)\ln(x+1)dx = (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C$ (إرشاد: $dv = (2x+1)dx \quad , \quad u = \ln(x+1)$)

(8) $u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = \frac{1}{x^2}dx \qquad v = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2}\ln x\,dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

(9) $u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^{-\frac{1}{3}}dx \qquad v = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$$\int x^{-\frac{1}{3}}\ln x\,dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \int \frac{1}{x} \times \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C$$

(10) $u = \ln x^2 = 2\ln x \qquad du = \frac{2}{x}dx$

$dv = x^2dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2\ln x^2dx = \frac{1}{3}x^3\ln x^2 - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x} \times x^3dx = \frac{1}{3}x^3\ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C$$

(11) $u = x^2 - 2x \qquad du = 2(x-1)dx$

$dv = \cos x\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int (x^2-2x)\cos x\, dx = (x^2-2x)\sin x - 2\int (x-1)\sin x\, dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int (x-1)\sin x\, dx$

$u = x-1 \qquad du = dx$

$dv = \sin x\, dx \qquad v = -\cos x$

$$\int (x^2-2x)\cos x\, dx = (x^2-2x)\sin x - 2\left[-(x-1)\cos x + \int \cos x\, dx\right]$$

$$= (x^2-2x-2)\sin x + 2(x-1)\cos x + C$$

(12) $u = x^2+3x \qquad du = (2x+3)dx$

$dv = \sin x\, dx \qquad v = -\cos x$

$$\int (x^2+3x)\sin x\, dx = -(x^2+3x)\cos x + \int (2x+3)\cos x\, dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int (2x+3)\cos x\, dx$

$u = 2x+3 \qquad du = 2dx$

$dv = \cos x\, dx \qquad v = \sin x$

$$\int (x^2+3x)\sin x\, dx = -(x^2+3x)\cos x + (2x+3)\sin x - 2\int \sin x\, dx$$

$$= -(x^2+3x-2)\cos x + (2x+3)\sin x + C$$

(13) $u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$

$dv = e^{x+1}\, dx \qquad v = e^{x+1}$

$$\int x^2 e^{x+1}\, dx = x^2 e^{x+1} - \int 2x\, e^{x+1}\, dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int x\, e^{x+1}\, dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{x+1}\, dx \qquad v = e^{x+1}$

$$\int x^2 e^{x+1}\, dx = x^2 e^{x+1} - 2x\, e^{x+1} + 2\int e^{x+1}\, dx = e^{x+1}(x^2-2x+2) + C$$

(14) $u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$

$dv = e^{2x-3}\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int x^2 e^{2x-3}\, dx = \frac{x^2}{2} e^{2x-3} - \int x\, e^{2x-3}\, dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int x\, e^{2x-3}\, dx$

$u = x \qquad du = dx$

$$dv = e^{2x-3}dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$$

$$\int x^2 e^{2x-3}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \left[\frac{x}{2}e^{2x-3} - \int \frac{1}{2}e^{2x-3}dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \frac{x}{2}e^{2x-3} + \frac{1}{4}e^{2x-3} + C = e^{2x-3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$$

(15) $u = (\ln(x))^2 \qquad du = 2\frac{\ln(x)}{x}dx$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int (\ln(x))^2\,dx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln x\,dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int \ln x\,dx$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int (\ln(x))^2 dx = x(\ln(x))^2 - 2\left[x\ln x - \int dx\right] = x(\ln(x))^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

(16) $u = \sin x \qquad dv = e^{2x}dx$

$$du = \cos x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\sin x\,e^{2x} - \frac{1}{2}\int \cos x\,e^{2x}dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية فنحصل على:

$$u = \cos x \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = -\sin x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\sin x\,e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos x\,e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\sin x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\,e^{2x} \Longrightarrow \int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{2}{5}e^{2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x + C$$

(17) $u = \sin x(\ln x) \qquad du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int \cos(\ln x)dx$

$$u = \cos(\ln x) \qquad du = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x)] + \int x \cdot \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$$

$$\Longrightarrow 2\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)
(5) (a)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (d)
(9) (b)	**(10)** (b)	**(11)** (c)	

التكامل باستخدام الكسور الجزئية — تمرّنْ 6–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f(x) = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$

$2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 5 $\quad \therefore \quad A_1 = 1$

$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}$

$\int f(x)\,dx = \ln|x-5| - \ln|x-3| + C$

(2) $x^2 + 2x = x(x+2)$

$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x+2)}$

$1 = A_1(x+2) + A_2 x$

عوّض عن x بـ -2 $\quad \therefore \quad A_2 = -\frac{1}{2}$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}$

$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

(3) $x^2 + x + 12 = (x-3)(x+4)$

$f(x) = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+4}$

$-x + 10 = A_1(x+4) + A_2(x-3)$

عوّض عن x بـ -4 $\quad \therefore \quad A_2 = -2$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_1 = 1$

$\therefore \; f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+4}$

$\int f(x)\,dx = \ln|x-3| - 2\ln|x+4| + C$

(4) $f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+3}$

$12 = A_1(x-1)(x+3) + A_2(x)(x+3) + A_3(x)(x-1)$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = -4$

عوّض عن x بـ 1 $\quad \therefore \quad A_2 = 3$

عوّض عن x بـ -3 $\quad \therefore \quad A_3 = 1$

$f(x) = \frac{-4}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+3}$

$\int f(x)\,dx = -4\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+3| + C$

(5) $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$

$\frac{x+17}{(2x-1)(x+3)} = \frac{A_1}{2x-1} + \frac{A_2}{x+3}$

$x + 17 = A_1(x+3) + A_2(2x-1)$

عوّض عن x بـ $\frac{1}{2}$ $\quad \therefore \quad A_1 = 5$

عوّض عن x بـ -3 $\quad \therefore \quad A_2 = -2$

$\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx = \int \left(\frac{5}{2x-1} - \frac{2}{x+3}\right)dx$

$= \frac{5}{2}\ln|2x-1| - 2\ln|x+3| + C$

(6) $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$

$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-3)} + \frac{A_3}{(x-3)^2}$

$\therefore \; -6x + 25 = A_1(x-3)^2 + A_2x(x-3) + A_3x$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_3 = \frac{7}{3}$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = \frac{25}{9}$

عوّض في المعادلة عن $A_1 = \frac{25}{9}$ و $A_3 = \frac{7}{3}$ ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_2.

$\therefore \; A_2 = -\frac{25}{9}$

$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x} = \frac{25}{9x} - \frac{25}{9(x-3)} + \frac{7}{3(x-3)^2}$

$\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx = \frac{25}{9}\ln|x| - \frac{25}{9}\ln|x-3| - \frac{7}{3} \times \frac{1}{(x-3)} + C$

(7) $x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-3}$$

$\therefore\ 3x^2 - 4x + 3 = A_1 x(x-3) + A_2(x-3) + A_3 x^2$

عوّض عن x بـ 0 $\quad\therefore\quad A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 3 $\quad\therefore\quad A_3 = 2$

عوّض في المعادلة عن $A_2 = -1$ و $A_3 = 2$ ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$\therefore\ A_1 = 1$

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-3}$$

$$\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-3| + C$$

(8) $\dfrac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \dfrac{9x-7}{(x-3)^2}$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$9x - 7 = A_1(x-3) + A_2$

عوّض عن x بـ 3 $\quad\therefore\quad A_2 = 20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$\therefore\ A_1 = 9$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx = x + 9\ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

(9) $\dfrac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \dfrac{x+5}{x^2-1}$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$x + 5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$

عوّض عن x بـ 1 $\quad\therefore\quad A_1 = 3$

عوّض عن x بـ -1 $\quad\therefore\quad A_2 = -2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}\,dx = \int\left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= 2x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

(10) $\frac{x^3-2}{x^2+x} = x-1+\frac{x-2}{x^2+x}$

$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}$

$x-2 = A_1(x+1)+A_2 x$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1 = -2$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore$ $A_2 = 3$

$\frac{x^3-2}{x^2+x} = x-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}$

$\int \frac{x^3-2}{x^2+x}dx = \frac{x^2}{2}-x-2\ln|x|+3\ln|x+1|+C$

(11) $\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2+\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$

$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}$

$2x-1 = A_1(x-1)+A_2$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_2 = 1$

عوّض عن A_2 بـ 1 ولتكن $x = 0$ $\therefore$ $A_1 = 2$

$\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}\,dx = \frac{x^3}{3}+2\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}+C$

(12) **(a)** $f(x) = \frac{(x-2)(2x^3-x^2-9x+14)}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{2x^3-x^2-9x+14}{x^2-4}$

$= 2x-1+\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)}$

(b) $\frac{-x+10}{(x-2)(x+2)} = \frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+2} = \frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+2}$

(c) $f(x) = 2x-1+\frac{2}{x-2}+\frac{-3}{x+2}$

$\int f(x)\,dx = x^2-x+2\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)
(5) (d)	**(6)** (c)	**(7)** (b)	**(8)** (c)
(9) (c)	**(10)** (d)		

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\int_{-1}^{1}(3x^2-12x)dx=[x^3-6x^2]_{-1}^{1}=2$

(2) $\int_{0}^{2}(x^2+2x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^2=\frac{26}{3}$

(3) $\int_0^4\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}dx=\int_0^4(x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^4=4$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}[\sin\pi-\sin 0]=0$

(5) $\int_1^4\left(\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(-\frac{4}{x}\right)_1^4-\left(\frac{x^3}{6}\right)_1^4=-\frac{15}{2}$

(6) $\int_0^1 x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg]_0^1=\frac{2}{5}$

(7) $[3e^x+5\ln|x|]_1^2=3(e^2-e)+5\ln 2$

(8) $\int_{-1}^{2}(-x+2)dx+\int_2^3(x-2)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=5$

(9) $\int_{-1}^{0}-x^3dx+\int_0^1x^3dx=-\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big]_0^1=\frac{1}{2}$

(10) $\int_{-2}^{0}(-x^2+3)dx+\int_0^3(x^2+3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^3=\frac{64}{3}$

(11) $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$

$x_1=-4\quad,\quad x_2=2$

x		-4		2	
x^2+2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore\ x^2+2x-8\leqslant 0\ \ \therefore\ \forall x\in[-4,2]$

$\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)dx\leqslant 0$

(12) $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)=x(x+1)(x-6)$

	-1		0		6	
$-$		$+$		$-$		$+$

$x^3-5x^2-6x\geqslant 0\qquad\forall x\in[-1,0]$

$\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)dx\geqslant 0$

(13) $f(x) = x^2 - 3x + 7$

$g(x) = 4x - 5$

$f(x) - g(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

x	$0 \quad 1$	3		4	
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) - g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [0,1]$

$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx \geqslant 0 \Longrightarrow \int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 g(x)dx$

$\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)dx \geqslant \int_0^1 (4x-5)dx$

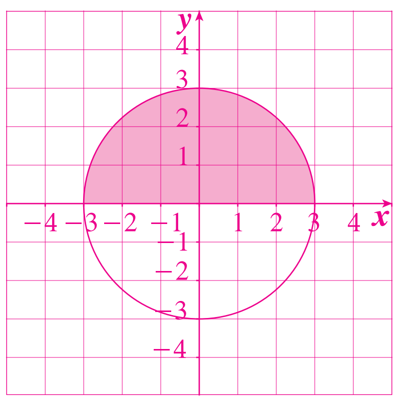
(14) $y = \sqrt{9-x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 9 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y = \sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة تساوي: $\therefore \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9}{2}\pi$



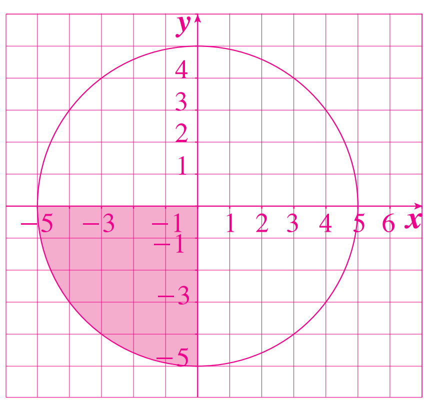
(15) $y = -\sqrt{25-x^2} \quad \therefore \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \therefore \quad y^2 + x^2 = 25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

والدالة $y = -\sqrt{25-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة.

$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\,dx = -A$

$= \frac{-1}{4}\pi(5)^2 = \frac{-25}{4}\pi$



(16) $u = 1 + x \quad , \quad du = dx$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2} = \int_1^4 \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}\Big]_1^4 = \frac{3}{4}$$

(17) $u = \ln x \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$

$x = e \quad , \quad u = 1$

$x = 6 \quad , \quad u = \ln 6$

$$\int_1^{\ln 6} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_1^{\ln 6} = \ln(\ln 6)$$

(18) $u = \ln x \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^6}{x} dx = \int_0^1 u^6 du = \left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(19) $u = x^2 + 1 \quad , \quad du = 2xdx$

$x = -1 \Longrightarrow u = 2 \quad , \quad x = 3 \Longrightarrow u = 10$

$$\int_{-1}^3 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_2^{10} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}[\ln|u|]_2^{10} = \frac{1}{2}\ln 5$$

(20) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = \sin x \, dx \quad , \quad v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = -x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(21) $u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = \cos 3x \, dx \quad , \quad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int_0^{\pi} x \cos 3x \, dx = \frac{x}{3}\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin 3x \, dx = \left[\frac{1}{9}\cos 3x\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{9}$$

(22) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3 \quad , \quad v = \frac{x^4}{4}$

$$\int_1^3 x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4}\ln x]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{4} dx = \frac{81}{4}\ln 3 - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^3 = \frac{81}{4}\ln 3 - 5$$

(23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx$

$u = \cos x \qquad dv = e^{2x} dx$

$du = -\sin x \, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}[e^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x \, dx$$

نطبق القاعدة مرّة ثانية على التكامل المحدد:

$u = \sin x \qquad dv = e^{2x} dx$

فيكون:
$du = \cos x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\, dx = \frac{e^{\pi}}{5} - \frac{2}{5}$$

(24) $\frac{4}{x^2-4} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x+2)}$

$4 = A_1(x+2) + A_2(x-2)$

عوّض عن x بـ -2 $\quad\therefore\quad A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 2 $\quad\therefore\quad A_1 = 1$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}dx = [\ln|x-2| - \ln|x+2|]_{-1}^{1} = -2\ln 3$$

(25) $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+3}$

$5x - 1 = A_1(x+3) + A_2(x-1)$

عوّض عن x بـ -3 $\quad\therefore\quad A_2 = 4$

عوّض عن x بـ 1 $\quad\therefore\quad A_1 = 1$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+3}$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}dx = [\ln|x-1| + 4\ln|x+3|]_{-2}^{0} = 3\ln 3$$

(26)
$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x^2 \\ \hline & -\ \underline{x^2+2x+1} \\ & -2x-1 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2}$$

$-2x - 1 = A_1(x+1) + A_2$

عوّض عن x بـ -1 ، $A_2 = +1$

عوّض عن x بـ 0 مع قيمة A_2 نجد $A_1 = -2$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx = \int_1^3\left[1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]dx = \left[x - 2\ln|x+1| \frac{+1}{x+1}\right]_1^3 = \frac{9}{4} - 2\ln 2$$

حل آخر

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx$$

$u = x+1 \Longrightarrow du = dx$

$x = u-1$

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx = \int_2^4 \frac{(u-1)^2}{u^2}du$$
$$= \int_2^4 \frac{(u^2-2u+1)}{u^2}du$$
$$= \int_2^4 \left(1-\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du$$
$$= \left[u - 2\ln|u| - \frac{1}{u}\right]_2^4$$
$$= \left(4-2\ln 4-\frac{1}{4}\right)-\left(2-2\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{4}-2\ln 2$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (c)
(9) (c)	**(10)** (a)	**(11)** (b)	**(12)** (d)
(13) (d)	**(14)** (b)	**(15)** (c)	

اختبار الوحدة الخامسة

(1) $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(2x^2+6x+5)^{\frac{1}{2}}(4x+6) = (2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5} = f(x)$

(2) $F(x) = x^3 - x^2 + C$

$F(2) = 6 \quad ; \quad C = 2$

$F(x) = x^3 - x^2 + 2$

(3) $\frac{1}{2}\int (2x+4)(x^2+4x+7)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(x^2+4x+7)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

(4) $\int (2x-1)(x^2-x+7)^{-5}dx = \frac{(x^2-x+7)^{-4}}{-4}+C = \frac{-1}{4(x^2-x+7)^4}+C$

(5) $u = x-3 \; , \; x^2 = (u+3)^2 \; , \; du = dx$

$$\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx = \int (u+3)^2 \cdot u^{\frac{1}{3}}du = \int \left(u^{\frac{5}{3}}+6u^{\frac{4}{3}}+9u^{\frac{1}{3}}\right)du$$
$$= \frac{3u^{\frac{8}{3}}}{8}+\frac{18u^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{27}{4}u^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3(x-3)^{\frac{8}{3}}}{8}+\frac{18(x-3)^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{27}{4}(x-3)^{\frac{4}{3}}+C$$

(6) $u = x^2 - 8 \quad , \quad x^2 = u + 8 \quad , \quad du = 2xdx \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}du$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 8}\, dx = \int x^2 \sqrt{x^2 - 8}\,(x\, dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int (u+8)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + 8u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{8u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2-8)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{8(x^2-8)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt[3]{x}+1)}dx$

$$= \int \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + x\right)dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$$

(8) $\int \cos x(\sin x)^{-3}dx = \frac{(\sin x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$

(9) $-\int -\sin x(\cos x)^{\frac{2}{3}}dx = -\frac{3\cos x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(10) $\int \sec^7 x \tan x\, dx = \int \sec^6 x(\tan x \cdot \sec x\, dx)$

$u = \sec x \quad , \quad du = \tan x \sec x\, dx$

$$\int \sec^6 x(\tan x \sec x\, dx) = \int u^6 du = \frac{\sec^7 x}{7} + C$$

(11) $\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$

(12) $2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = 2\, e^{\sqrt{x}} + C$

(13) $\frac{1}{3}\int \frac{3x^2 - 12}{x^3 - 6x^2 + 1}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 6x^2 + 1| + C$

(14) $\frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x} + 2x}{e^{2x} + x^2 + 3}dx = \frac{1}{2}\ln|e^{2x} + x^2 + 3| + C$

(15) $\int (x^2 - 4)\cos x\, dx = \int x^2 \cos x\, dx - 4\int \cos x\, dx = \int x^2 \cos x\, dx - 4\sin x + C_1$

في التكامل: $\int x^2 \cos x\, dx$

نأخذ:

$u = x^2 \qquad\qquad dv = \cos x\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad\qquad v = \sin x$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx$$

نستخدم القاعدة مرة ثانية لنجد $\int x \sin x\, dx$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C_2$$

$$\int (x^2 - 4)\cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 6\sin x + C$$

(16) $u = \ln(3x+2) \Longrightarrow du = \dfrac{3}{3x+2}dx$

$dv = dx \quad \Longrightarrow \quad v = x$

$$\int \ln(3x+2)\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2}\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x+2-2}{3x+2}\,dx$$

$$= x\ln(3x+2) - x + \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C$$

(17) $u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}dx$

$du = 3dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x+1}$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\cdot 3x\,e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}dx$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$$

$$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)e^{2x+1} + C$$

(18) $u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^{2x-1}dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x-1}$

$$\int x^2 e^{2x-1}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-1} - \int x\,e^{2x-1}dx$$

نستخدم القاعدة مرة ثانية

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{2x-1}dx \qquad v = \dfrac{1}{2}e^{2x-1}$

$$\int x^2 e^{2x-1}dx = \frac{x^2}{2}e^{2x-1} - \frac{x}{2}e^{2x-1} + \int \frac{1}{2}e^{2x-1}dx = e^{2x-1}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$$

(19) $\dfrac{x^2-3x-28+28}{x^2-3x-28} = 1 + \dfrac{28}{x^2-3x-28}$

$x^2-3x-28 = (x-7)(x+4)$

$\dfrac{28}{x^2-3x-28} = \dfrac{A_1}{x-7} + \dfrac{A_2}{x+4}$

$28 = A_1(x+4) + A_2(x-7)$

عوّض عن x بـ -4 $\therefore$ $A_2 = -\dfrac{28}{11}$

عوّض عن x بـ 7 $\therefore$ $A_1 = \dfrac{28}{11}$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-3x-28} = 1 + \frac{28}{11(x-7)} - \frac{28}{11(x+4)}$$

$$\int \frac{x^2-3x}{x^2-3x-28}dx = x + \frac{28}{11}\ln|x-7| - \frac{28}{11}\ln|x+4| + C$$

(20) $\frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}=\frac{x(x^3+2x+6)}{x(x^2+4x+4)}=\frac{x^3+2x+6}{x^2+4x+4}$

$\frac{x^3+2x+6}{x^2+4x+4}=x-4+\frac{14x+22}{(x+2)^2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\frac{14x+22}{(x+2)^2}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}$

$14x+22=A_1(x+2)+A_2$

عوّض عن x بـ -2 نحصل على $A_2=-6$

نضع $A_2=-6$ ونأخذ $x=0$ نحصل على $A_1=14$

$\int \frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx=\frac{x^2}{2}-4x+14\ln|x+2|+\frac{6}{x+2}+C$

(21) $[\ln|x|]_1^e=\ln e-\ln 1=1$

(22) $-\int_{-1}^{1}-2x\sin(1-x^2)dx=[\cos(1-x^2)]_{-1}^{1}=0$

(23) $\int_0^{\frac{5}{2}}(-2x+5)dx+\int_{\frac{5}{2}}^{5}(2x-5)dx=[-x^2+5x]_0^{\frac{5}{2}}+[x^2-5x]_{\frac{5}{2}}^{5}=\frac{25}{2}$

(24) $y=-\sqrt{36-x^2}\quad\therefore\quad y^2=36-x^2\quad\therefore\quad y^2+x^2=36$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 6 وحدات.

والدالة $y=-\sqrt{36-x^2}$ تمثل النصف السفلي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظلّلة تساوي:

$\int_{-6}^{0}-\sqrt{36-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{4}\pi(6)^2=9\pi\text{ units}^2$

(25) $\frac{x^2-3}{x^2-3x+2}=1+\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\frac{3x-5}{x^2-3x+2}=\frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x-1)}$

$3x-5=A_1(x-1)+A_2(x-2)$

عوّض عن x بـ 1 $\quad\therefore\quad A_2=2$

عوّض عن x بـ 2 $\quad\therefore\quad A_1=1$

$\frac{x^2-3}{x^2-3x+2}=1+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}$

$\int \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}\,dx=[x+\ln|x-2|+2\ln|x-1|]_3^5=2+\ln 3+2\ln 2$

(26) $\frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}=1+\frac{-8x^2-9x+2}{x(x+3)^2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\frac{-8x^2-9x+2}{x(x+3)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+3}+\frac{A_3}{(x+3)^2}$

$-8x^2-9x+2=A_1(x+3)^2+A_2x(x+3)+A_3x$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore \quad A_1 = \frac{2}{9}$

عوّض عن x بـ -3 $\therefore \quad A_3 = \frac{43}{3}$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{2}{9}$ وعن A_3 بـ $\frac{43}{3}$ ولتكن $x = 1$ $\therefore \quad A_2 = -\frac{74}{9}$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^3 + 6x^2 + 9x} = 1 + \frac{2}{9x} - \frac{74}{9(x+3)} + \frac{43}{3(x+3)^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^3 + 6x^2 + 9x}\, dx = \left[x + \frac{2}{9}\ln|x| - \frac{74}{9}\ln|x+3| - \frac{43}{3(x+3)}\right]_1^3$$

$$= 2 + \frac{2}{9}\ln 3 + \frac{43}{36} - \frac{74}{9}(\ln 6 - \ln 4)$$

$$= \frac{115}{36} + \frac{2}{9}\ln 3 - \frac{74}{9}(\ln 6 - \ln 4)$$

(27) $-x^2 + 7x + 8 = (x+1)(-x+8)$

$2 \quad 5$

x		-1		8	
$-x^2 + 7x + 8$	$-$	0	$+$	0	$-$

$-x^2 + 7x + 8 \geqslant 0 \qquad \forall x \in [2, 5]$

$\therefore \quad \int_2^5 (-x^2 + 7x + 8)dx \geqslant 0$

(28) $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

x		-5		-2	
$x^2 + 7x + 10$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x^2 + 7x + 10 \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-4, -2]$

$\therefore \quad \int_{-4}^{-2} (x^2 + 7x + 10)dx \leqslant 0$

(29) $f(x) = x^2 + 13x + 9$

$g(x) = 5x - 6$

$f(x) - g(x) = x^2 + 8x + 15$

$f(x) - g(x) = (x+3)(x+5)$

-4

x		-5		-3	
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

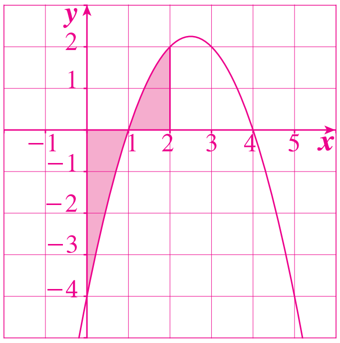
$f(x) - g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-5, -4]$

$\therefore \quad \int_{-5}^{-4} (f(x) - g(x))\, dx \leqslant 0 \implies \int_{-5}^{-4} f(x)dx \leqslant \int_{-5}^{-4} g(x)dx$

$\implies \int_{-5}^{-4} (x^2 + 13x + 9)dx \leqslant \int_{-5}^{-4} (5x - 6)dx$

تمارين إثرائية

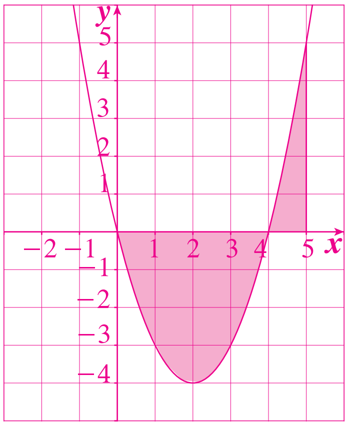
(1) (a) $\int_0^2 (-x^2+5x-4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_0^2 = -\frac{2}{3}$



(b) $A = \int_0^1 (x^2-5x+4)dx + \int_1^2 (-x^2+5x-4)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-4x\right]_1^2 = 3$ units square

(2) (a) $\int_0^5 (x^2-4x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_0^5 = -\frac{25}{3}$



(b) $A = \int_0^4 (-x^2+4x)dx + \int_4^5 (x^2-4x)dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4 + \left[\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_4^5 = 13$ units square

(3) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^2\,dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$\int x^2 \ln x\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

(4) $\int \cos\theta \cdot (\sin\theta)^{-2}\,d\theta = -\frac{1}{\sin\theta} + C$

(5) $\frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2 + C_1$

$y'(0) = 4 \quad \therefore \quad C_1 = 4$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2 + 4$

$y = x^2 - x^3 + 4x + C_2$

$y(0) = 1 \quad \therefore \quad C_2 = 1$

$y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

(6) $C(x) = \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} + C_1$

$C(x) =$ التكلفة

$x =$ عدد النسخات

$\therefore \quad C = (25) = 50 \Longrightarrow 50 = 4\sqrt{25} + C_1 \Longrightarrow C_1 = 30$

$C(x) = 4\sqrt{x} + 30$

$C(2\,500) = 4\sqrt{2\,500} + 30 = 230$

التكلفة: 230 دينارًا

(7) $u = x^3 \qquad du = 3x^2 dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية

$u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثالثة

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\, e^x - 6\int e^x dx$

$= e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

(8) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3 dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$

$\int x^3 \ln x\, dx \, \frac{x^4}{4} \bullet \ln x - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$

(9) (a) $2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$

$\frac{x - 2}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{A_1}{2x - 3} + \frac{A_2}{x - 1}$

$x - 2 = A_1(x - 1) + A_2(2x - 3)$

عوّض عن x بـ $1 \quad \therefore \quad A_2 = 1$

عوّض عن x بـ $\frac{3}{2} \quad \therefore \quad A_1 = -1$

$$\frac{x-2}{2x^2-5x+3}=\frac{-1}{2x-3}+\frac{1}{x-1}$$

$$\int\frac{x-2}{2x^2-5x+3}\,dx=-\frac{1}{2}\ln|2x-3|+\ln|x-1|+C$$

(b) $x^2+10x+25=(x+5)^2$

$$\frac{x^2-9}{(2x+1)(x^2+10x+25)}=\frac{A_1}{2x+1}+\frac{A_2}{x+5}+\frac{A_3}{(x+5)^2}$$

$$x^2-9=A_1(x+5)^2+A_2(2x+1)(x+5)+A_3(2x+1)$$

عوّض عن x بـ -5 $\therefore$ $A_3=-\frac{16}{9}$

عوّض عن x بـ $-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $A_1=-\frac{35}{81}$

عوّض عن A_3 بـ $-\frac{16}{9}$ و A_2 بـ $-\frac{35}{81}$ ولتكن $x=0$ $\therefore$ $A_2=\frac{58}{81}$

$$\frac{x^2-9}{(2x+1)(x+5)^2}=\frac{-35}{81(2x+1)}+\frac{58}{81(x+5)}-\frac{16}{9(x+5)^2}$$

$$\int\frac{x^2-9}{(2x+1)(x+5)^2}\,dx=\frac{-35}{162}\ln|2x+1|+\frac{58}{81}\ln|x-5|+\frac{16}{9(x+5)}+C$$

(c) $\frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)}=x-4+\frac{30x^2-50x+17}{(x-1)^2(x+6)}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$$\frac{30x^2-50x+17}{(x+6)(x-1)^2}=\frac{A_1}{x+6}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2}$$

$$30x^2-50x+17=A_1(x-1)^2+A_2(x-1)(x+6)+A_3(x+6)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_3=-\frac{3}{7}$

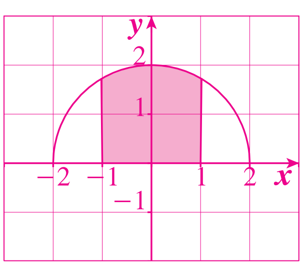
عوّض عن x بـ -6 $\therefore$ $A_1=\frac{1\,397}{49}$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{1\,397}{49}$ و A_2 بـ $-\frac{3}{7}$ ولتكن $x=0$ $\therefore$ $A_2=\frac{73}{49}$

$$\frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)}=x-4+\frac{1\,397}{49(x+6)}+\frac{73}{49(x-1)}-\frac{3}{7(x-1)^2}$$

$$\int\frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)}\,dx=\frac{x^2}{2}-4x+\frac{1\,397}{49}\ln|x+6|+\frac{73}{49}\ln|x-1|+\frac{3}{7(x-1)}+C$$

(10)



لايجاد التكامل المحدد: $\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$

نفترض: $x=2\cos\theta \Longrightarrow dx=-2\sin\theta\,d\theta$

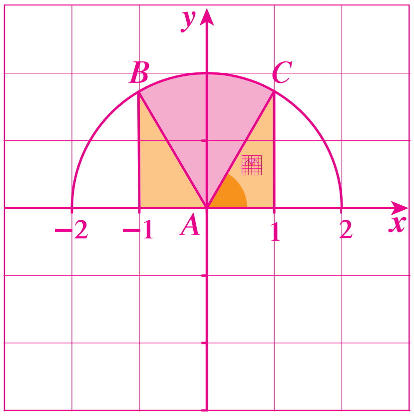
عند $x=-1$ تكون $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ؛ عند $x=1$ تكون $\theta=\frac{\pi}{3}$

لذا:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sqrt{4-4\cos^2\theta}\right)(2\sin\theta\,d\theta)$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}4\sin^2\theta\,d\theta=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(1-\cos2\theta)d\theta=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$$

حل آخر

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$



قياس زاوية القطاع الدائري (ABC) هو أيضًا $\frac{\pi}{3}$

فتكون مساحته تساوي $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}(2)^2$

أي أن مساحة $(ABC)=\frac{2\pi}{3}$

مساحة كل مثلث $=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

مساحة المثلثين $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

المساحة الإجمالية $=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$$

(11) $\int_{-4}^{4}\frac{1}{\pi}\sqrt{16-x^2}\,dx-\int_{-4}^{4}x\sqrt{16-x^2}\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}-2x\sqrt{16-x^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)(p)(4)^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[(16-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{4}=8+\frac{1}{3}(0)=8$$

(12) $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+4}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+4}$$
$$2x+3=A_1(x+4)+A_2(x+1)$$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore$ $A_1=\frac{1}{3}$

عوّض عن x بـ -4 $\therefore$ $A_2=\frac{5}{3}$

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+4}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{5}{3(x+4)}$$
$$\int\frac{2x+3}{x^2+5x+4}\,dx=\left[\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{5}{3}\ln|x+4|\right]_0^2=\frac{1}{3}\ln3+\frac{5}{3}\ln6-\frac{5}{3}\ln4=2\ln3-\frac{5}{3}\ln2$$

(13) $\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}=1+\frac{-9x+3}{x^3-6x^2+9x}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$$x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$$
$$\frac{-9x+3}{x(x-3)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{(x-3)^2}$$
$$-9x+3=A_1(x-3)^2+A_2x(x-3)+A_3x$$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = \frac{1}{3}$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_3 = -8$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{1}{3}$ وعن A_3 بـ -8 ولتكن $x = 1$ $\quad \therefore \quad A_2 = -\frac{1}{3}$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 3}{x^3 - 6x^2 + 9x} = 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x-3)} - \frac{8}{(x-3)^2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{x^3 - 6x^2 + 9x}\, dx = \left[x + \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x-3| + \frac{8}{x-3}\right]_1^2 = -3 + \frac{2}{3}\ln 2$$

(14) $\int_3^5 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx = \int_3^5 x^2\sqrt{x^2-4}\,(x\,dx)$

$u = x^2 - 4 \implies du = 2x\,dx$

$x^2 = u + 4$

$$\frac{1}{2}\int_5^{21}(u+4)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_5^{21}u^{\frac{3}{2}}du + 2\int_5^{21}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_5^{21} + \frac{4}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^{21} = \frac{581}{5}\sqrt{21} - \frac{35}{3}\sqrt{5}$$

(15) $-x^2 + 9x - 18 = (-x+6)(x-3)$

$0 \quad 2$

x		3		6	
$-x^2+9x-18$	$-$	0	$+$	0	$-$

$-x^2 + 9x - 18 \leqslant 0 \qquad \forall x \in [0, 2]$

$\therefore \quad \int_0^2 (-x^2 + 9x - 18) \leqslant 0$

(16) $f(x) - g(x) = x^2 + 13x + 15 - 3x + 6 = x^2 + 10x + 21$

$f(x) - g(x) = (x+3)(x+7)$

$-1 \quad 2$

x		-7		-3	
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) - g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [-1, 2]$

$\int_{-1}^2 (f(x) - g(x))dx \geqslant 0$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 f(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 g(x)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 (x^2 + 13x + 15)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 (3x - 6)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 f(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 g(x)\,dx$

$\therefore \quad \int_{-1}^2 (x^2 + 13x + 15)\,dx \geqslant \int_{-1}^2 (3x - 6)\,dx$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $A = \int_1^3 8x^3\,dx = 2x^4\Big]_1^3 = 160$ units square

(2) $A = \int_0^5 (-x^2+5x)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = \frac{125}{6}$ units square

(3) $A = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12-x^2)dx = \left[12x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = 32\sqrt{3}$ units square

(4) $A = \int_{-3}^{-2} (x^2-x-6)dx + \int_{-2}^{2} (-x^2+x+6)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{2} = \frac{43}{2}$ units square

(5) يتقاطع منحنى الدالة مع محور السينات إذا كان: $f(x)=0$

فيكون: $\Longrightarrow x(x^2-6)=0 \Longrightarrow x=-\sqrt{6}\ ,\ x=0\ ,\ x=\sqrt{6}$

$A = \int_0^{\sqrt{6}} (-x^3+6x)dx + \int_{\sqrt{6}}^{3} (x^3-6x)dx = \left[-\frac{x^4}{4}+3x^2\right]_0^{\sqrt{6}} + \left[\frac{x^4}{4}-3x^2\right]_{\sqrt{6}}^{3} = \frac{45}{4}$ units square

(6) $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$ units square

(7) $A = \int_0^2 (x^2+x^2-4x+5)dx = \int_0^2 (2x^2-4x+5)dx = \left[2\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_0^2 = \frac{22}{3}$ units square

(8) $A = \int_1^8 (x-\sqrt[3]{x})dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 = \frac{81}{4}$ units square

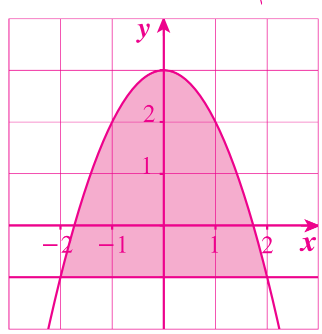
(9) حل $3-x=2x^2$، إذاً تقاطع المنحنيات عند $x=1$

$A = \int_0^1 (3-x-2x^2)dx + \int_1^3 (2x^2-3+x)dx$

$= \left[3x-\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3-3x+\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{103}{6}$ units square

(10) تقاطع المنحنيات عند $x=\pm 2$

استخدم التناظر:



$A = 2\int_0^2 (3-x^2+1)dx = 2\int_0^2 (4-x^2)dx$

$= 2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-0\right]$

$= \frac{32}{3}$ units square

حل آخر

$f(x) > g(x)$

$A = \int_{-2}^{2} (f(x)-g(x))dx = \int_{-2}^{2} (3-x^2+1)dx$

$= \left[3x-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{2} = \left(6-\frac{8}{3}+2\right)-\left(-6+\frac{8}{3}-2\right) = \frac{32}{3}$ units square

(11) حل $x^2-2=2$ ؛ $x^2=4$ ، إذاً تتقاطع المنحنيات عند $x=\pm 2$

$$A=\int_{-2}^{2}[2-(x^2-2)]dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}\text{ units square}$$

(12) حل $4x-x^2=0$ ؛ $2x-x^2=-2x$

إذاً، تتقاطع المنحنيات عند $x=4$ ، $x=0$

$$A=\int_{0}^{4}(4x-x^2)dx=\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{4}=\frac{32}{3}\text{ units square}$$

(13) حل $x^2=1$ ؛ $7-2x^2=x^2+4$ ، إذاً تتقاطع المنحنيات عند $x=\pm 1$

$$A=\int_{-1}^{1}[((7-2x^2)-(x^2+4)]dx=\int_{-1}^{1}(-3x^2+3)dx=3\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$=3\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=3\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=4\text{ units square}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (a) **(4)** (b) **(5)** (b) **(6)** (d)

(7) (b) **(8)** (c) **(9)** (a) **(10)** (a)

حجوم الأجسام الدورانية — تمرَّنْ 2–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) الحجم: $V=\int_{0}^{2}\pi x^4dx=\left[\pi\frac{1}{5}x^5\right]_{0}^{2}=\frac{32\pi}{5}\text{ units cube}$

(2) الحجم: $V=\pi\int_{1}^{4}\frac{1}{x^2}dx=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{4}=\frac{3\pi}{4}\text{ units cube}$

(3) $V=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}\pi\text{ units cube}$

(4) نقاط التقاطع عند $x=2$ ، $x=-1$

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left[(x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx=\pi\int_{-1}^{2}(-x^4-x^2+6x+8)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-1}^{2}=\frac{117\pi}{5}\text{ units cube}$$

(5) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x=-\frac{\pi}{4}$ إلى $x=\frac{\pi}{4}$

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2-\sec^2x)dx=\pi[2x-\tan x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\pi^2-2\pi\text{ units cube}$$

(6) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x=1$ إلى $x=4$

$$V=\pi\int_{1}^{4}((x+1)^2-(x-1)^2)dx=\pi\int_{1}^{4}4x=[2\pi x^2]_{1}^{4}=30\pi\text{ units cube}$$

(7) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 1$

$$V = \pi\int_0^1 (1 - x^2)dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\frac{\pi}{3} \text{ units cube}$$

(8) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 4$

$$V = \pi\int_0^4 x\,dx \Longrightarrow V = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \text{ units cube}$$

(9) $V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$

$$V = \pi\frac{r^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ units cube}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (c)	**(6)** (d)
(7) (d)	**(8)** (c)	**(9)** (a)	**(10)** (c)	**(11)** (d)	**(12)** (d)

طول قوس ومعادلة منحنى دالة — تمرَّنْ 3–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x}\,dx = \frac{2}{27}\left[(1 + 9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{14}{27} \text{ units}$$

(2) $f'(x) = 2(7 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{1 + 4(7 + 4x)}\,dx = \int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{29 + 16x}\,dx = \left[\frac{(29 + 16x)^{\frac{3}{2}}}{24}\right]_1^{\frac{5}{4}}$$

$$L = \frac{343 - 135\sqrt{5}}{24} \approx 1.714 \text{ units}$$

(3) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)dx$$

$$L = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x}\right]_1^2 = \frac{17}{12} \text{ units}$$

(4) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + 19$

(5) $f(x) = -x^4 + x^2 + 5x - 2$

(6) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 3$

(7) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + 1$

(8) $f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x+5| + 3$

(9) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + C_1$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow C_1 = 3$

$\therefore\ f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + C_2$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} \Longrightarrow C_2 = 2$

$\Longrightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 2$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (a) **(5)** (c) **(6)** (b)

(7) (b) **(8)** (c) **(9)** (d)

المعادلات التفاضلية تمرَّنْ 4–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y' = y'' = 3e^x \Longrightarrow 3e^x - 3e^x + 2x = 2x \Longrightarrow 2x = 2x$

إذًا الدالة $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

(2) $y' = y'' = e^x \Longrightarrow e^x + e^x = 2e^x$

إذًا الدالة $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^x$

(3) $y = \int (x^2 + x + 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$

$y(1) = 4$

$\therefore\ C = \frac{7}{6}$

$\therefore\ y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{6}$

(4) $y' = \frac{1}{x} - x$

$\therefore\ y = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$

(5) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{4}{x}dx$

$\ln|y| = 4\ln|x| + C$

$y = \pm e^{C} \cdot e^{4\ln|x|}$

$\therefore \ y = ke^{4\ln|x|} \ , \ k = \pm e^{C}$

$y = kx^4$

(6) $y(x) = ke^{3x}$

(7) $y = ke^{5x}$

(8) $y = ke^{\frac{5}{2}x}$

$\therefore \ k = 4e^{-5}$

$\therefore \ y = 4e^{\frac{5}{2}x-5}$

(9) $y = ke^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

$y(0) = \sqrt{2}$

$\therefore \ k = \sqrt{2}$

$\therefore \ y = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

(10) $y = ke^{x} - 1$

(11) $y = ke^{-8x} + \frac{1}{4}$

$ke^{-8x} + \frac{1}{4}$

$k = \frac{e^2}{2}$

$\therefore \ y = \frac{1}{2}e^{2-8x} + \frac{1}{4}$

(12) $y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 4$

$y(0) = 2$

$\therefore \ k = -2$

$\therefore \ y = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 4$

(13) $y' = \cos 4x + C_1$

$y = \frac{1}{4}\sin 4x + C_1 x + C_2$

(14) $y' = 3x^2 - 8x + C_1$

$y = x^3 - 4x^2 + C_1 x + C_2$

(15) $y = C_1 e^{\frac{5}{2}x} + C_2 e^{-3x}$

(16) $y = (C_1 x + C_2)e^{3x}$

(17) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

(18) $y = (C_1 x + C_2)e^x$

(19) $y = e^{-x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

(20) **(a)** $y = ke^{-2x}$

(b) $k = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}e^{-2x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (b) **(5)** (a) **(6)** (a)

(7) (a) **(8)** (c) **(9)** (b) **(10)** (c) **(11)** (c) **(12)** (d)

(13) (a) **(14)** (d)

اختبار الوحدة السادسة

(1) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 1$.

$$A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ units square}$$

(2) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 1$ إلى $x = 5$.

$$A = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5 = \frac{32}{3} \text{ units square}$$

(3) $A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \left|\int_0^2 (x^3 - 4x)dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = 4 + 4 = 8 \text{ units square}$

(4) $A = \int_1^2 (x^2 + 1 - \sqrt{x})dx = \left[\frac{x^3}{3} + x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \text{ units square}$

(5) يتقاطع المنحنيات عند النقاط: $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 + 1 - x - 1)dx + \int_0^1 (x + 1 - x^3 - 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ units square}$$

(6) يتقاطع المنحنيات عند $x = -2$ و $x = 2$.

$$V = \pi\int_{-2}^{2} \left(4 - \frac{1}{4}x^4\right)dx = \pi\left[4x - \frac{1}{20}x^5\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{5}\pi \text{ units cube}$$

(7) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = -1$ إلى $x = 2$ ويتقاطعا عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

$$V = \pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}} [(-x+3)^2 - (x+2)^2]dx + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} [(x+2)^2 - (-x+3)^2]dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (5 - 10x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (-5 + 10x)dx$$

$$= [5x - 5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}} + [-5x + 5x^2]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{135}{4}\pi \text{ units cube}$$

(8) $V = \pi\int_{-2}^{1} [(-x^2 + 4)^2 - (x+2)^2]dx = \pi\int_{-2}^{1} (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)dx$

$$V = \pi\left[\frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x\right]_{-2}^{1} = \frac{108}{5}\pi \text{ units cube}$$

(9) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x}\, dx = \frac{8}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12} = \frac{56}{3} \text{ units}$$

(10) $f'(x) = -\sqrt{3}$

$$L = \int_{-3}^{1} \sqrt{1+3}\, dx = \int_{-3}^{1} 2dx = 8 \text{ units}$$

(11) $f'(x) = (-1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_{2}^{8} \sqrt{1 + (-1 + 2x)}\, dx = \int_{2}^{8} \sqrt{2x}\, dx = \frac{56}{3} \text{ units}$$

(12) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad \therefore \quad f(x) = x^3 - x^2 + x + C$

يمر بالنّقطة $A(-1, -5) \quad \therefore \quad C = -2$

$\therefore \quad f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

(13) $f'(x) = \frac{-1}{3x - 2} \quad \therefore \quad f(x) = -\frac{1}{3}\ln|3x - 2| + C$

يمر بالنّقطة $A(1, -1) \quad \therefore \quad C = -1$

$\therefore \quad f(x) = -\frac{1}{3}\ln|3x - 2| - 1$

(14) $A(-1 , 3)$ نقطة صغرى محليّة إذاً:

$f'(-1) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 4x + C_1 \quad \therefore \quad C_1 = 0$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + C_2$

منحنى f يمرّ بالنقطة $A(-1 , 3)$ إذاً:

$C_2 = 4$

$\therefore \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

(15) $y = ke^{-\frac{5}{3}x} + \frac{2}{5}$

(16) $y = k|x|^{\frac{5}{3}}$

(17) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$

(18) $y = (C_1x + C_2)e^{3x}$

(19) $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$

(20) $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$

تمارين إثرائية

(1) $A = \int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)dx = \int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ units square $\qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

(2) استخدم التناظر:

$$2\int_0^2[2x^2-(x^4-2x^2)]dx = 2\int_0^2(-x^4+4x^2)dx = 2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left[\left(-\frac{32}{5}+\frac{32}{3}\right)-0\right]$$

$$= \frac{128}{15} \text{ units square}$$

(3) استخدم التناظر:

$$2\int_0^1(x^2+2x^4)dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right) = \frac{22}{15} \text{ units square}$$

(4) $A = \int_{-2}^{2}(8+2x^2-x^4)dx = \frac{448}{15} \approx 32.5\overline{3}$ units square

(5) $A(x) = \int_{-3}^{5}(15+2x-x^2)dx = \frac{256}{3}$ units square

(6) يتقاطع منحنيا $g(x) = x$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}$ عند $x = 1$ ومنه تكون:

$$A = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}-(-1)\right] = 1 \text{ units square}$$

(7) $V = \pi\int_0^2\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)[(2-x)^3]_0^2 = \frac{2\pi}{3}$ units cube

(8) $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\cos^2 x)dx$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{16} \text{ units cube}$$

(9) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

$\frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\cos 3\times\frac{\pi}{3} + C$

$\therefore\ C = 1$

$f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + 1$

(10) $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{27}\sqrt{1+\frac{9}{16}x}\,dx = \frac{32}{27}\left[\frac{259}{64}\sqrt{259}-1\right] \approx 76 \text{ units}$$

(11) $y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} + \frac{4}{3}$

(12) $y(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$

(13) $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$

(14) **(a)** $y = ke^{ax} + 2$

(b) $k = 168 \quad \therefore \quad y = 168e^{ax} + 2$

(c) $7 = 168e^{6a} \Longrightarrow a = -\dfrac{\ln 24}{6}$

(15) $f'(x) = 3x^2 - 6x + C_1$

$A(3,-2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f إذاً:

$f'(3) = 0 \quad \therefore \quad C_1 = -9$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C_2$

$A(3,-2)$ هي نقطة على منحنى الدالة f إذاً:

$f(3) = -2 \quad \therefore \quad C_2 = 25$

$\therefore \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 25$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y^2 = -12x$

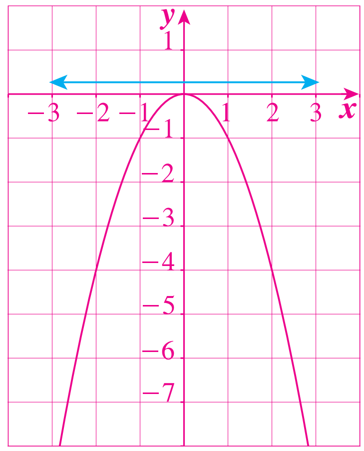
(2) $x^2 = -8y$

(3) $x^2 = 8y$

(4) $x^2 = -y$ البؤرة $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

الدليل: $y = \frac{1}{4}$

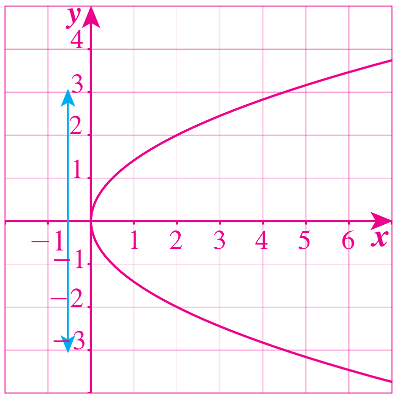
خطّ التماثل محور الصادات



(5) $y^2 = 2x$ البؤرة $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

الدليل: $x = \frac{-1}{2}$

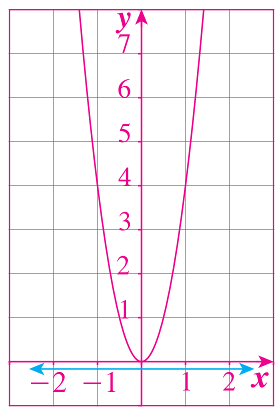
خطّ التماثل محور السينات



(6) $y = 4x^2$ $x^2 = \frac{1}{4}y$ البؤرة $\left(0, \frac{1}{16}\right)$

الدليل: $y = \frac{-1}{16}$

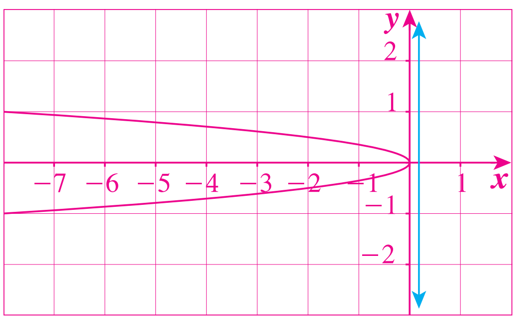
خطّ التماثل محور الصادات



(7) $x = -8y^2$ $y^2 = \frac{-x}{8}$ البؤرة $\left(\frac{-1}{32}, 0\right)$

الدليل: $x = \frac{1}{32}$

خطّ التماثل محور السينات



(8) معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = 4px$

وبالتعويض عن (x, y) بإحداثيات A نحصل على:

$$(2^2) = 4p(-1)$$
$$4 = -4p$$
$$p = -1$$

المعادلة:

$$y^2 = -4x$$

(9) النقطتان $B(3,4)$, $A(-3,4)$ متماثلتان في محور الصادات

معادلة القطع المكافئ هي: $x^2 = 4py$

وبالتّعويض عن (x,y) بإحداثيات A (أو بإحداثيات B) نحصل على:

$$(-3)^2 = 4p(4)$$

$$9 = 16p \Longrightarrow p = \frac{9}{16}$$

المعادلة:

$$x^2 = 4 \times \frac{9}{16}y$$

$$x^2 = \frac{9}{4}y$$

(10) البؤرة $(0\ ;\ -4)$ إذاً المعادلة هي: $x^2 = -16y$

(11) البؤرة $(5\ ;\ 0)$ إذاً المعادلة هي: $y^2 = 20x$

(12) $x^2 = 10y$ $\quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ إذاً البؤرة $\left(0\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

(13) معادلة القطع المكافئ هي على الصورة: $x^2 = 4py$

لنأخذ النقطة $A(50\ ,15)$ وبالتعويض عن (x,y) بإحداثيات A نحصل على:

$$(50)^2 = 4p(15)$$

$$2\,500 = 60p$$

$$p = \frac{125}{3}$$

المعادلة:

$$x^2 = \frac{500}{3}y$$

الإحداثي السيني للدعامة: $50 - 8 = 42$

بالتعويض في المعادلة نوجد y : $(42)^2 = \frac{500}{3}y$ ومنه $y \approx 10.6$

طول الدعامة يكون: $10.6 + 5 = 15.6\ \text{m}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)
(6) (b)	**(7)** (a)	**(8)** (d)	**(9)** (c)	**(10)** (d)
(11) (a)	**(12)** (b)	**(13)** (c)	**(14)** (a)	**(15)** (b)
(16) (c)	**(17)** (b)	**(18)** (d)		

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

$a^2=8^2 \Longrightarrow a=8$

رأسا القطع: $A_1(-8,0)\ ,\ A_2(8,0)$

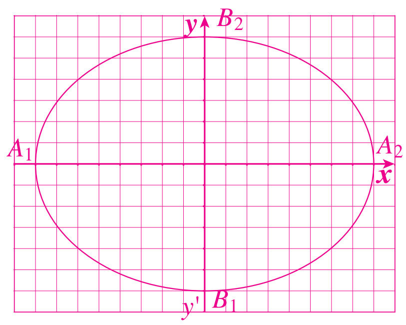
$b^2=6^2 \Longrightarrow b=6$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(0,-6)\ ,\ B_2(0,6)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=8^2-6^2=28 \Longrightarrow c=2\sqrt{7}$

البؤرتان: $F_1(-2\sqrt{7},0)\ ,\ F_2(2\sqrt{7},0)$



معادلتا دليلي القطع الناقص: $x=-\frac{a^2}{c}=\frac{-64}{2\sqrt{7}}=\frac{-32\sqrt{7}}{7}\quad ,\quad x=\frac{a^2}{c}=\frac{64}{2\sqrt{7}}=\frac{32\sqrt{7}}{7}$

طول المحور الأكبر: $2a=2\times 8=16$

طول المحور الأصغر: $2b=2\times 6=12$

(2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

$a^2=6^2 \Longrightarrow a=6$

رأسا القطع: $A_1(0,-6)\ ,\ A_2(0,6)$

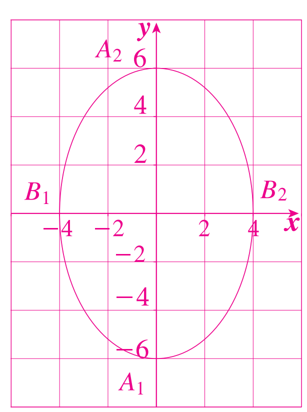
$b^2=4^2 \Longrightarrow b=4$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(-4,0)\ ,\ B_2(4,0)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=6^2-4^2=20 \Longrightarrow c=2\sqrt{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-2\sqrt{5})\ ,\ F_2(0,2\sqrt{5})$



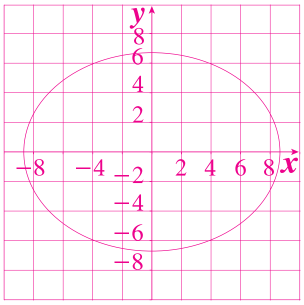
$y = \frac{a^2}{c} = \frac{36}{2\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $y = -\frac{a^2}{c} = \frac{-36}{2\sqrt{5}} = \frac{-18\sqrt{5}}{5}$ معادلتا دليلي القطع الناقص:

طول المحور الأكبر: $2a = 12$

طول المحور الأصغر: $2b = 8$

(3) $3x^2 + 5y^2 - 225 = 0$

$\frac{3x^2}{225} + \frac{5y^2}{225} = \frac{225}{225}$



معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{45} = 1$

$a^2 = 75 \Longrightarrow a = 5\sqrt{3}$

رأسا القطع: $A_1(5\sqrt{3}, 0)$, $A_2(-5\sqrt{3}, 0)$

$b^2 = 45 \Longrightarrow b = 3\sqrt{5}$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(0, -3\sqrt{5})$, $B_2(0, 3\sqrt{5})$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 75 - 45 = 30 \Longrightarrow c = \sqrt{30}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{30}, 0)$, $F_2(\sqrt{30}, 0)$

$x = \frac{a^2}{c} = \frac{75}{\sqrt{30}} = \frac{5\sqrt{30}}{2}$ $\qquad$ $x = -\frac{a^2}{c} = \frac{-75}{\sqrt{30}} = \frac{-5\sqrt{30}}{2}$ معادلتا دليلي القطع:

طول المحور الأكبر: $2a = 10\sqrt{3}$

طول المحور الأصغر: $2b = 6\sqrt{5}$

(4) $4x^2 + y^2 - 28 = 0$

$\frac{4x^2}{28} + \frac{y^2}{28} = \frac{28}{28}$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{28} = 1$

$a^2 = 28 \Longrightarrow a = 2\sqrt{7}$

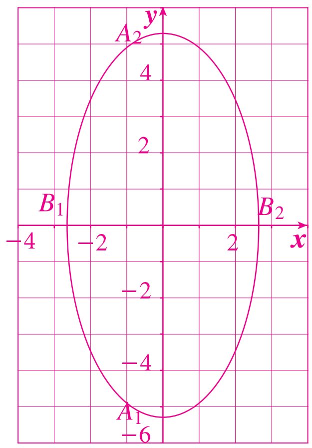
رأسا القطع: $A_1(0, -2\sqrt{7})$, $A_2(0, 2\sqrt{7})$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(-\sqrt{7}, 0)$, $B_2(\sqrt{7}, 0)$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 28 - 7 = 21 \Longrightarrow c = \sqrt{21}$

البؤرتان: $F_1(0, -\sqrt{21})$, $F_2(0, \sqrt{21})$



معادلتا دليلي القطع الناقص:

$y = -\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{-28}{\sqrt{21}} = \dfrac{-28\sqrt{21}}{21} = \dfrac{-4}{3}\sqrt{21}$

$y = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{28}{\sqrt{21}} = \dfrac{28\sqrt{21}}{21} = \dfrac{4}{3}\sqrt{21}$

طول المحور الأكبر: $2a = 4\sqrt{7}$

طول المحور الأصغر: $2b = 2\sqrt{7}$

(5) $c = 2$, $b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \quad \dfrac{x^2}{13} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(6) $2a = 10 \Longrightarrow a = 5$; $c = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$\therefore \quad \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

(7) $a = 5$, $2b = 4 \Longrightarrow b = 2$

فتكون معادلة القطع الناقص: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

(8) $b = 4$

$2a = 10 \Longrightarrow a = 5$

$\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

(9) $c = 5$

$a^2 = b^2 + 5^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + 25$

$\dfrac{2^2}{a^2} + \dfrac{3^2}{b^2} = 1$

$\Longrightarrow a^2b^2 = 4b^2 + 9a^2 \Longrightarrow (b^2+25)b^2 = 4b^2 + 9(b^2+25) \Longrightarrow b^4 + 25b^2 = 4b^2 + 9b^2 + 225$

$\Longrightarrow b^4 + 12b^2 - 225 = 0 \Longrightarrow b^2 = -6 + 3\sqrt{29}$

$\Longrightarrow a^2 = 19 + 3\sqrt{29}$

$$\frac{x^2}{(19+3\sqrt{29})} + \frac{y^2}{(-6+3\sqrt{29})} = 1$$

(10) $a = 6 \; ; \; b = 4$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

(11) $c = 5 \; ; \; 2b = 6 \Longrightarrow b = \frac{6}{2} = 3$

$a^2 = c^2 + b^2 \Longrightarrow a^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

(12) $2a = 10 \Longrightarrow a = 5 \;\; ; \;\; 2c = 6 \Longrightarrow c = \frac{6}{2} = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)	**(6)** (c)
(7) (a)	**(8)** (b)	**(9)** (d)	**(10)** (d)	**(11)** (b)	**(12)** (c)
(13) (b)	**(14)** (c)	**(15)** (d)			

القطع الزائد — تمرّنْ 3–7

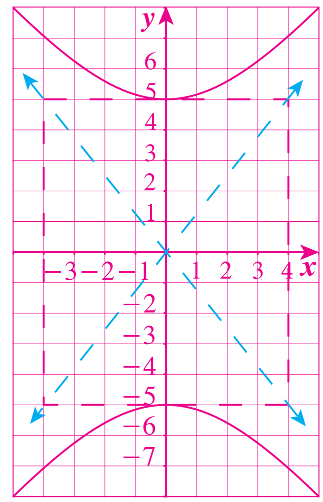
المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

$a^2 = 25 \;\therefore\; a = 5 \;\therefore$ رأسا القطع الزائد: $A_1(0,5) \; , \; A_2(0,-5)$

$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41 \Longrightarrow c = \sqrt{41}$



البؤرتان: $F_1(0, \sqrt{41})\ ,\ F_2(0, -\sqrt{41})$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm \dfrac{a}{b}x = \pm \dfrac{5}{4}x$

معادلتا الدليلين: $y = \pm \dfrac{a^2}{c} = \pm \dfrac{25\sqrt{41}}{41}$

طول المحور الأكبر: $2a = 4 \times 5 = 10$

طول المحور المرافق: $2b = 2 \times 4 = 8$

(2) $24x^2 - 12y^2 - 192 = 0$

$\dfrac{24x^2}{192} - \dfrac{12y^2}{192} = \dfrac{192}{192}$

$\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 8 \Longrightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

رأسا القطع: $A_1(2\sqrt{2}, 0)\ ,\ A_2(-2\sqrt{2}, 0)$

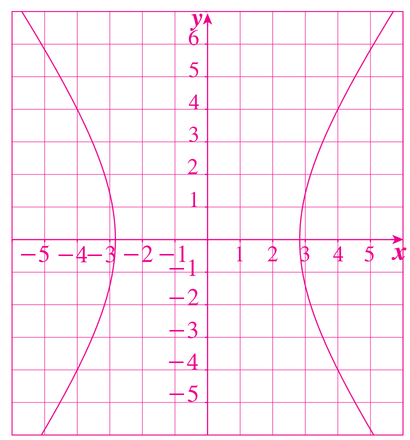
$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 16 = 24 \Longrightarrow c = 2\sqrt{6}$

البؤرتان: $F_1(2\sqrt{6}, 0)\ ,\ F_2(-2\sqrt{6}, 0)$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm \dfrac{b}{a}x = \pm \dfrac{4x}{2\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}\,x$

معادلتا الدليلين: $x = \pm \dfrac{a^2}{c} = \pm \dfrac{8}{2\sqrt{6}} = \pm \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$



طول المحور الأكبر: $2a = 4\sqrt{2}$

طول المحور المرافق: $2b = 2 \times 4 = 8$

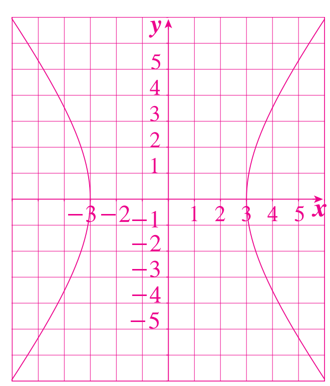
(3) $c = 5\ ,\ a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow b = 4$

معادلة القطع الزائد: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm \dfrac{b}{a}x = \pm \dfrac{4x}{3}$



(4) $\frac{a}{b} = 2 \Longrightarrow a = 2b$

$$c = \sqrt{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow (2b^2) + b^2 = 5 \Longrightarrow 5b^2 = 5$$

$$\Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$$

$$\therefore \quad a = 2$$

$\Longrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1 \ , \ \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$:معادلة القطع الزائد

(5) $a = \frac{2}{3}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

لنضع إحداثيات النقطة $(1, 1)$ في المعادلة:

$$\frac{1}{\frac{4}{9}} - \frac{1}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2 = \frac{4}{5}$$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = 1$:معادلة القطع الزائد

(6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:بما أن محوره الأساسي هو جزء من محور السينات فالمعادلة هي

لنضع إحداثيات A في المعادلة:

$$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{a^2} = \frac{1}{b^2} + 1 \Longrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4}$$

لنضع إحداثيات B في المعادلة:

$$\frac{16}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$$

بالتعويض نوجد المعادلة التالية:

$$16\left(\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{b^2} = 1$$

$$4 + \frac{4}{b^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{5}{b^2} = 3 \Longrightarrow b^2 = \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{a^2} - \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 \Longrightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{8}{5} \Longrightarrow a^2 = \frac{5}{2}$$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1$

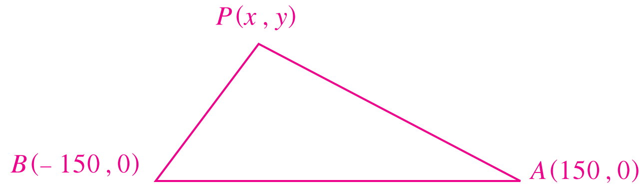
(7) نستخدم قاعدة المسافة بدلالة الزمن والسرعة:

$$d = vt \Longleftrightarrow t = \frac{d}{v}$$

$$t_1 = \frac{PA}{50}$$

$t_2 = \frac{PB}{50}$

$t_1 - t_2 = \frac{PA}{50} - \frac{PB}{50}$



ولكن: $t_1 - t_2 = 2$

$2 = \frac{PA}{50} - \frac{PB}{50} \Longrightarrow PA - PB = 100$

بما أن A, B نقطتان ثابتتان فيكون منحنى النقاط المتغيرة P هي قطع زائد بؤرتاه هما A, B حيث: $2a = 100$

$c = 150 \ , \ a = 50$

$b^2 = (150)^2 - (50)^2 = 20\,000$

معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{2\,500} - \frac{y^2}{20\,000} = 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (b)	**(5)** (c)
(6) (a)	**(7)** (d)	**(8)** (b)	**(9)** (c)	**(10)** (b)
(11) (a)	**(12)** (c)	**(13)** (a)	**(14)** (d)	

الاختلاف المركزي تمرّنْ 4–7

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $e = \frac{3}{2} \ , \ \frac{3}{2} > 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع زائد

$c = 3 \ , \ e = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \Longrightarrow a = 2$

ولكن في القطع الزائد:

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 9 - 4$

$b^2 = 5$

معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

(2) $e = \frac{\sqrt{7}}{4} \ , \ \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع ناقص

$c = \sqrt{7} \ , \ e = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{a} \Longrightarrow a = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 16 - 7 \Longrightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

(3) $e = \frac{5}{3}\ ,\ \frac{5}{3} > 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع زائد

$a = 4\ ,\ e = \frac{c}{a}$

$\frac{c}{4} = \frac{5}{3} \Longrightarrow c = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3}$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = \frac{400}{9} - 16 = \frac{256}{9}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{256}{9}} = 1$

(4) $e = \frac{3}{4}\ ,\ \frac{3}{4} < 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع ناقص

معادلة الدليل: $8 = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow c = \frac{a^2}{8}$

$\frac{3}{4} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{a^2}{8}}{a} \Longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{a}{8} \Longrightarrow a = 6$

$c = e \cdot a = \frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2}$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 36 - \frac{81}{4} = \frac{63}{4}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{63}{4}} = 1$

(5) $(a^2 = 9\ ,\ b^2 = 4) \Longrightarrow (a = 3\ ,\ b = 2)$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = 9 - 4 = 5 \Longrightarrow c = \sqrt{5}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ على الصورة $\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$

(7) $a^2 = 7 \Longrightarrow a = \sqrt{7}$

$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

الرأسان: $A_1(-\sqrt{7}, 0)\ ,\ A_2(\sqrt{7}, 0)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 7 + 16 \Longrightarrow c = \sqrt{23}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{23}, 0)\ ,\ F_2(\sqrt{23}, 0)$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{161}}{7}$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{7}{\sqrt{23}} = \pm\frac{7\sqrt{23}}{23}$

(8) $a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

الرأسان: $A_1(0, -4)\ ,\ A_2(0, 4)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20 \Longrightarrow c = 2\sqrt{5}$

البؤرتان: $F_1(0, -2\sqrt{5})\ ,\ F_2(0, 2\sqrt{5})$

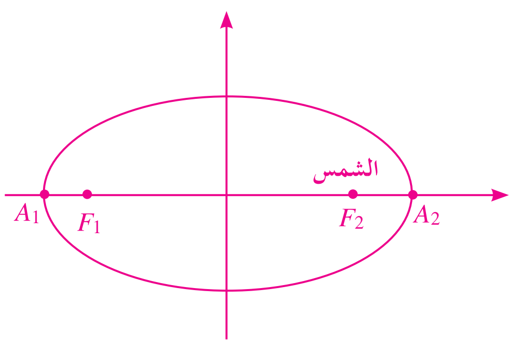
$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

معادلتا الدليلين: $y = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{16}{2\sqrt{5}} = \pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$

(9) $2a = 3\,000\,000 \Longrightarrow a = 150\,000$

$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = e \cdot a = 0.017 \times 150\,000 = 2\,550$

$c = 2\,550$



أصغر بعد للأرض عن الشمس هو: F_2A_2 فيكون:

$F_2A_2 = 150\,000 - 2\,550 = 147\,450$ km

أكبر بعد للأرض عن الشمس هو: F_2A_1 فيكون:

$F_2A_1 = 150\,000 + 2\,550 = 152\,550$ km

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)	**(6)** (a)
(7) (b)	**(8)** (b)	**(9)** (c)	**(10)** (d)	**(11)** (a)	**(12)** (c)
(13) (a)	**(14)** (b)	**(15)** (d)	**(16)** (a)		

اختبار الوحدة السابعة

(1) $4y^2 - 9x^2 = 36 \Longrightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 9 \;,\; b^2 = 4$

$\Longrightarrow c^2 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

البؤرتان: $F_1(0, -\sqrt{13}) \;,\; F_2(0, \sqrt{13})$

(2) $-2x^2 + 3y^2 + 10 = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 3y^2 = -10 \Longrightarrow 2x^2 - 3y^2 = 10$

$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{\frac{10}{3}} = 1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 5 \;,\; b^2 = \frac{10}{3}$

$\Longrightarrow c^2 = \frac{25}{3} \Longrightarrow c = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

البؤرتان: $F_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right) \;,\; F_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$

(3) $2x^2 + y^2 = 9$

$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{9} = 1$

إذًا هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = \frac{9}{2} \;,\; b^2 = 9$

$c^2 = 9 - \frac{9}{2}$

$c^2 = \frac{9}{2}$

البؤرتان: $F_1\left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \;,\; F_2\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

(4) $2x^2 - y^2 + 6 = 0 \Longrightarrow 2x^2 - y^2 = -6 \Longrightarrow y^2 - 2x^2 = 6$

$\frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 6 \;,\; b^2 = 3 \Longrightarrow c^2 = 9$

البؤرتان: $F_1(0, -3) \;,\; F_2(0, 3)$

(5) $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$

هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2=5^2 \Longrightarrow a=5$

$b^2=2^2 \Longrightarrow b=2$

في القطع الناقص: $a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=5^2-2^2=21 \Longrightarrow c=\sqrt{21}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-\sqrt{21})\ ;\ F_2(0,\sqrt{21})$

معادلتا الدليلين: $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{\sqrt{21}}=\pm\frac{25\sqrt{21}}{21}$

(6) $y^2=5x$

هي معادلة قطع مكافئ مركزه نقطة الأصل.

$4p=5 \Longrightarrow p=\frac{5}{4}$

الاختلاف المركزي: $e=1$

البؤرة: $F\left(\frac{5}{4},0\right)$

معادلة الدليل: $x=-\frac{5}{4}$

(7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=4 \Longrightarrow a=2$

$b^2=9 \Longrightarrow b=3$

في القطع الزائد: $c^2=a^2+b^2=13 \Longrightarrow c=\sqrt{13}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{13},0)\ ;\ F_2(\sqrt{13},0)$

معادلتا الدليلين: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{2}x$

(8) $\frac{x^2}{18^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$

هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2=18^2 \Longrightarrow a=18$

$b^2=10^2 \Longrightarrow b=10$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 = c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 18^2 - 10^2 = 224 \Longrightarrow c = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{14}}{18} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

البؤرتان: $F_1(-4\sqrt{14}, 0)\ ;\ F_2(4\sqrt{14}, 0)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{18^2}{4\sqrt{14}} = \pm\frac{81\sqrt{14}}{14}$

(9) $y^2 = -3x$

هي معادلة قطع مكافئ مركزه نقطة الأصل.

$4p = -3 \Longrightarrow p = -\frac{3}{4}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = \frac{3}{4}$

(10) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Longrightarrow c = 5$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

البؤرتان: $F_1(0, -5)\ ;\ F_2(0, 5)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{16}{5}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm\frac{a}{b}x = \pm\frac{4}{3}x$

(11) $x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore\ \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$

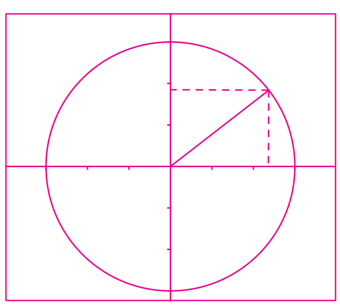
لتكن $M(x, y)$ نقطة على دائرة؛ لنذكّر أنّ $OM = r$.

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\Longrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = r^2$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$



(12) $e = \frac{c}{a} = \frac{213125.9}{107124} \approx 1.99$

$e = 1.99 > 1$ إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$b^2 = c^2 - a^2 \Longrightarrow b^2 = 3.39 \times 10^{10}$

بفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور أفقي.

تكون المعادلة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{1.15 \times 10^{10}} - \frac{y^2}{3.39 \times 10^{10}} = 1$

(13) لتكن $M(x, y)$ نقطة على القطع الزائد و $F_2(155, 0)$ ، $F_1(-155, 0)$ البؤرتين.

$|MF_1 - MF_2| = 80$

$2a = 80 \Longrightarrow a = 40 \Longrightarrow a^2 = 1600$

$\therefore\ c = 155$

في القطع الزائد: $b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 22425$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{22425} = 1$

(14) **(a)** $e = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

إذًا هي معادلة قطع ناقص.

(b) $e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 2c = \sqrt{2}\,a \Longrightarrow a = \sqrt{2}\,c$

$x = 4 = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow 4 = \frac{(\sqrt{2}\,c)^2}{c} = 2c \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow a = 2\sqrt{2}$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow (2\sqrt{2})^2 = b^2 + 4 \Longrightarrow b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

(c) الصورة العامة للقطع الناقص حيث أن المحور القاطع ينطبق على محور السينات هي:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(15) $e = \frac{5}{4}\ ,\ \frac{5}{4} > 1$ إذًا هي معادلة قطع زائد.

$\frac{5}{4} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 4c = 5a \Longrightarrow a = \frac{4}{5}c$

$c = 5 \Longrightarrow a = \frac{4}{5} \times 5 = 4$

في القطع الزائد: $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$

إذًا الصورة العامة للقطع الزائد هي: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

(16) $x^2 = -4y$

(17) $y^2 = 8x$

(18) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

(19) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

(20) $2a=12 \Longrightarrow a=6$

$2c=20 \Longrightarrow c=10$

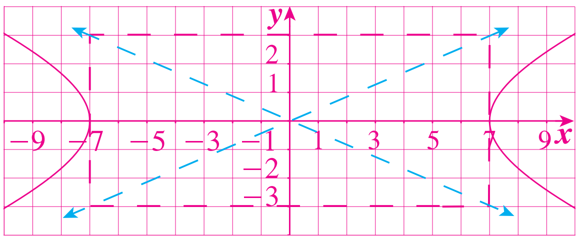
$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow b^2=c^2-a^2=100-36=64 \Longrightarrow b=8$

المعادلة: $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$

تمارين إثرائية

(1) معادلات الخطوط المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$

$y=\pm\frac{b}{a}x \quad \therefore \quad y=\pm\frac{3}{7}x$



(2) $a=10 \qquad b=7$

$c^2=a^2-b^2=100-49=51 \Longrightarrow c=\sqrt{51}$

$\therefore \ F_1(-\sqrt{51},0)\ ,\ F_2(\sqrt{51},0)$

(3) $m=0 \Longrightarrow y^2-x=0$

$y^2=x$

معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل

$4p=1 \Longrightarrow p=\frac{1}{4}$

البؤرة: $F\left(\frac{1}{4},0\right)$

معادلة الدليل $x=-\frac{1}{4}$

(4) $x^2-5y^2+7=0 \Longrightarrow x^2-5y^2=-7 \Longrightarrow 5y^2-x^2=7$

$\frac{y^2}{\frac{7}{5}}-\frac{x^2}{7}=1$

إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=\frac{7}{5} \Longrightarrow a=\sqrt{\frac{7}{5}}$

$b^2=7 \Longrightarrow b=\sqrt{7}$

الرأسان: $A_1\left(0,-\sqrt{\frac{7}{5}}\right)\ ;\ A_2\left(0,\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{\sqrt{\frac{7}{5}}}{\sqrt{7}}x=\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = \frac{7}{5} + 7 = \frac{42}{5} \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{42}{5}}$$

$$F_1\left(0, -\sqrt{\frac{42}{5}}\right) \ ; \ F_2\left(0, \sqrt{\frac{42}{5}}\right)$$

معادلتا الدليلين: $y = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{7}{\frac{5\sqrt{42}}{\sqrt{5}}} = \pm\frac{\sqrt{210}}{30}$

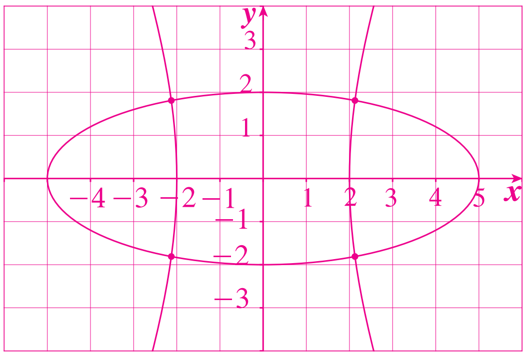
(5) (a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

إذاً هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

إذاً هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

(b)



يبيّن الشكل وجود 4 نقاط تقاطع بين المنحنيين.

(c) $\frac{x^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{25}$

$x^2 = 4\left(1 + \frac{y^2}{25}\right)$

$\frac{x^2}{25} = 1 - \frac{y^2}{4}$

$x^2 = 25\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$

$\Longrightarrow 4\left(1 + \frac{y^2}{25}\right) = 25\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)$

$\Longrightarrow 4 + \frac{4}{25}y^2 = 25 - \frac{25}{4}y^2 \Longrightarrow y^2\left(\frac{4}{25} + \frac{25}{4}\right) = 25 - 4$

$\frac{641}{100}y^2 = 21$

$y^2 = \frac{2\,100}{641}$

$y = \pm 10\sqrt{\frac{21}{641}}$

$x^2 = \frac{2\,900}{641}$

$x = \pm 10\sqrt{\frac{29}{641}}$

يوجد 4 نقاط تقاطع بين المنحنيين.

(6) $e = \frac{7}{5}\ ,\ \frac{7}{5} > 1$

إذاً قطع زائد.

$\frac{7}{5} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 7a = 5c \Longrightarrow a = \frac{5}{7}c$

$\frac{25}{7} = \frac{a^2}{c} = \frac{\frac{25}{49}c^2}{c} = \frac{25}{49}c \Longrightarrow c = 7 \Longrightarrow a = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 7^2 - 5^2 = 24$

معادلة القطع الزائد: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$

(7) $e = \frac{5}{7}\ ,\ \frac{5}{7} < 1$

إذاً إنه قطع ناقص

$c = 5$

$\frac{c}{a} = \frac{5}{7}\ ;\ \frac{5}{a} = \frac{5}{7} \Longrightarrow a = 7$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow b^2 = 49 - 25 \Longrightarrow b^2 = 24$

المعادلة: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

(8) الخط المقارب $y = \frac{b}{a}x$ يمر بالنقطة $A(3,5)$ فيكون:

$5 = \frac{b}{a}(3) \Longrightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{3} \Longrightarrow a = \frac{3}{5}b$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 34 = \frac{9b^2}{25} + b^2 \Longrightarrow 34 = \frac{34b^2}{25} \Longrightarrow b^2 = 25 \Longrightarrow b = 5$

$a = \frac{3}{5}(5) = 3$

فتكون معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

(9) $\frac{a}{b} = 2\ ,\ c = \sqrt{5}\ ,\ a = 2b$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow 5 = b^2 + 4b^2 \Longrightarrow 5 = 5b^2 \Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$

ولكن: $a = 2b \Longrightarrow a = 2$

لذا معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

(10) $a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c^2 = b^2 - a^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow c = 4$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-4)\ ,\ F_2(0,4)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{25}{4}$

(11) $8y^2 - 25x^2 = 200 \Longrightarrow \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{8} = 1$

$a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$

$b^2 = 8 \Longrightarrow b = 2\sqrt{2}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 8 = 33 \Longrightarrow c = \sqrt{33}$

الاختلاف المركزي: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{33}}{5}$

البؤرتان: $F_1(0, -\sqrt{33})\ ;\ F_2(0, \sqrt{33})$

معادلتا الدليلين: $y = \pm \dfrac{a^2}{c} = \pm \dfrac{25}{\sqrt{33}} = \pm \dfrac{25\sqrt{33}}{33}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm \dfrac{a}{b}x = \pm \dfrac{5\sqrt{2}}{4}x$

(12) $x^2 = -2y$

$4p = -2 \Longrightarrow p = -\dfrac{1}{2}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

معادلة الدليل: $y = \dfrac{1}{2}$

(13) $y^2 = -x$

$4p = -1 \Longrightarrow p = -\dfrac{1}{4}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = \dfrac{1}{4}$

(14) $5x^2 - 9y^2 = 45 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

$a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$

$b^2 = 5 \Longrightarrow b = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 5 = 14 \Longrightarrow c = \sqrt{14}$

الاختلاف المركزي: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{14}, 0)\ ;\ F_2(\sqrt{14}, 0)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm \dfrac{a^2}{c} = \pm \dfrac{9\sqrt{14}}{14}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm \dfrac{b}{a}x = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{3}x$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) فضاء العينة: $(S) = \{(H, T), (T, T), (T, H), (H, H)\}$

عدد عناصره: $n(S) = 4$

(b) $X \in \{0, 1, 2\}$

(c) $P(X = 0) = \frac{1}{4}$

$P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = \frac{1}{4}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2) (a) $X = \{0, 1, 2, 3\}$

X متغير عشوائي متقطّع.

(b) $Y = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$

Y متغير عشوائي متقطّع.

(c) $Z = \{1, 2, 3, 4\}$

Z متغير عشوائي متقطّع.

(3) $k = 1 - (0.1 + 0.3 + 0.2 + 0.3) = 0.1$

(4) $f(2) = 1 - (0.1 + 0.4 + 0.2) = 0.3$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2

(5) (a) عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = {}_{10}C_5 = 252$

(b) $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(c) $P(X = 0) = \frac{{}_6C_5 \times {}_4C_0}{252} = \frac{1}{42}$

$P(X = 1) = \frac{{}_6C_4 \times {}_4C_1}{252} = \frac{5}{21}$

$$P(X = 2) = \frac{{}_6C_3 \times {}_4C_2}{252} = \frac{10}{21}$$

$$P(X = 3) = \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_3}{252} = \frac{5}{21}$$

$$P(X = 4) = \frac{{}_6C_1 \times {}_4C_4}{252} = \frac{1}{42}$$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

(6) $\mu = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.1 = 1.4$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 1.4$

(7) **(a)** $\mu = 7 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{1}{8} = \frac{17}{2}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{17}{2}$

(b) $\sigma^2 = 49 \times \frac{1}{8} + 64 \times \frac{3}{8} + 81 \times \frac{3}{8} + 100 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 0.75$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 0.75$

(c) $\sigma = \sqrt{0.75} = 0.866$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 0.866$

(8) $F(0) = P(X \leqslant 0) = 0.2$

$F(1) = P(X \leqslant 1) = P(X < 1) + P(X = 1) = 0.2 + 0.15 = 0.35$

$F(2) = P(X \leqslant 2) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0.2 + 0.15 + 0.1 = 0.45$

$F(3) = P(X \leqslant 3) = P(X < 3) + P(X = 3) = 0.2 + 0.15 + 0.1 + 0.25 = 0.7$

$F(3.5) = P(X \leqslant 3.5) = P(X < 3.5) + P(X = 3.5) = 0.2 + 0.15 + 0.1 + 0.25 = 0.7$

$F(4) = P(X \leqslant 4) = P(X < 4) + P(X = 4) = 0.2 + 0.15 + 0.1 + 0.25 + 0.3 = 1$

$F(5) = P(X \leqslant 5) = P(X < 5) + P(X = 5) = 1$

(9) **(a)** $P(-1 < X \leqslant 5) = F(5) - F(-1) = 0.7 - 0.1 = 0.6$

(b) $P(3 < X \leqslant 7) = F(7) - F(3) = 1 - 0.45 = 0.55$

(c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.45 = 0.55$

(10) **(a)** $P(X = 0) = {}_8C_0 \times 0.3^0 \times (1 - 0.3)^8 = 0.0576$

(b) $P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$= {}_8C_3 \times 0.3^3 \times 0.7^5 + {}_8C_4 \times 0.3^4 \times 0.7^4 + {}_8C_5 \times 0.3^5 \times 0.7^3 = 0.437$

(11) **(a)** $P(X=0) = {}_{10}C_0 \times 0.5^0 \times 0.5^{10} = 9.766.10^{-4}$

(b) $P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$

$$= {}_{10}C_3 \times 0.5^3 \times 0.5^7 + {}_{10}C_4 \times 0.5^4 \times 0.5^6 = 0.322$$

(12) $n = 100 \;\;,\;\; p = 0.03$

$\mu = n\,p = 100 \times 0.03 = 3$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 3$

$\sigma^2 = n\,p(1-p) = 100 \times 0.03 \times 0.97 = 2.91$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 2.91$

$\sigma = \sqrt{2.91} = 1.7059$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 1.7059$

(13) $n = 12 \;\;,\;\; p = 0.5$

$\mu = n\,p = 12 \times 0.5 = 6$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 6$

$\sigma^2 = n\,p(1-p) = 12 \times 0.5 \times 0.5 = 3$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 3$

$\sigma = \sqrt{3} = 1.732$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 1.732$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (b)	**(6)** (a)
(7) (b)	**(8)** (b)	**(9)** (b)	**(10)** (c)	**(11)** (b)	**(12)** (a)
(13) (d)	**(14)** (d)	**(15)** (a)	**(16)** (b)	**(17)** (c)	**(18)** (c)
(19) (b)	**(20)** (c)	**(21)** (b)			

المجموعة A تمارين مقالية

(1) **(a)** $P(0 \leq X \leq 5) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$

(b) $P(X = 3) = 0$

(c) $P(X \leq 2) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(d) $P(X > 2) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(2) **(a)** $P(2 \leq X \leq 4) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

(b) $P(X \geq 2.5) = (4 - 2.5) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

(3) **(a)** $x = 3 \quad \therefore \; y = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$P(0 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3} = 1$

(b) $x = 1 \quad \therefore \; y = \frac{2}{9}$

$P(X < 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

(c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

(4) **(a)** المساحة تحت المنحنى (وهو منطقة مستطيلة)

$\frac{1}{6} \times (5 - (-1)) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$

$\therefore$ الدّالة هي كثافة إحتمال.

(b) لإثبات أنّ الدّالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدّالة f على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \leq x \leq b \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$a = -1 \;,\; b = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-(-1)} = \frac{1}{6} & : \quad -1 \leq x \leq 5 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذًا f هي دالة توزيع احتمالي منتظم.

(c) $P(0 < X \leq 3) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

(d) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 2$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-1))^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

إذًا، التباين $(\sigma^2) = 3$

(5) **(a)** لإثبات أنّ الدّالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدّالة f على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \le x \le b \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$a = 0 \;,\; b = 7$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7-0} = \frac{1}{7} & : \quad 0 \le x \le 7 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذًا f هي دالة توزيع إحتمالي منتظم.

(b) $P\left(0 \le X \le \frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{8}$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+7}{2} = \frac{7}{2}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{7}{2}$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(7-0)^2}{12} = \frac{49}{12}$$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{49}{12}$

(6) **(a)** $P(z \le 2.16) = 0.98461$

(b) $P(z \ge 2.51) = 1 - P(z < 2.51) = 1 - 0.99396 = 0.00604$

(c) $P(1.5 \le z \le 2.4) = P(z \le 2.4) - P(z \le 1.5) = 0.99180 - 0.93319 = 0.05861$

(7) **(a)** $P(z \le -0.64) = 0.26109$

(b) $P(-1.7 \le z \le 2.85) = P(z \le 2.85) - P(z \le -1.7)$

$= 0.99781 - 0.04457 = 0.95324$

(c) $P(-1.23 \le z \le 0.68) = P(z \le 0.68) - P(z \le -1.23)$

$= 0.75175 - 0.10935 = 0.6424$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (b) **(5)** (a) **(6)** (a)

(7) (a) **(8)** (b) **(9)** (a) **(10)** (b) **(11)** (d) **(12)** (b)

(13) (a) **(14)** (d) **(15)** (c) **(16)** (d) **(17)** (c)

اختبار الوحدة الثامنة

(1) $f(5) = 1 - (0.3 + 0.2 + 0.1) = 0.4$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	2	3	4	5
$f(x)$	0.3	0.2	0.1	0.4

(2) (a) $n(S) = {}_8C_4 = 70$

(b) $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

(c) $P(X = 0) = \dfrac{{}_5C_4}{70} = \dfrac{1}{14}$

$P(X = 1) = \dfrac{{}_5C_3 \times {}_3C_1}{70} = \dfrac{3}{7}$

$P(X = 2) = \dfrac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{70} = \dfrac{3}{7}$

$P(X = 3) = \dfrac{{}_5C_1 \times {}_3C_3}{70} = \dfrac{1}{14}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

(3) (a) $\mu = 3 \times \dfrac{2}{11} + 4 \times \dfrac{5}{11} + 5 \times \dfrac{3}{11} + 6 \times \dfrac{1}{11} = \dfrac{47}{11}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \dfrac{47}{11}$

(b) $\sigma^2 = 9 \times \dfrac{2}{11} + 16 \times \dfrac{5}{11} + 25 \times \dfrac{3}{11} + 36 \times \dfrac{1}{11} - \left(\dfrac{47}{11}\right)^2 = \dfrac{90}{121}$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \dfrac{90}{121}$

(c) $\sigma = \sqrt{\dfrac{90}{121}} = \dfrac{3}{11}\sqrt{10}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = \dfrac{3}{11}\sqrt{10}$

(4) $F(1) = p(X \leq 1) = 0$

$F(2) = p(X \leq 2) = p(X < 2) + p(X = 2) = 0.14$

$F(3) = p(X \leq 3) = p(X = 3) + p(X < 3) = p(X = 3) + p(X = 2) = 0.3$

$F(3.5) = p(X \leqslant 3.5) = p(X = 3.5) + p(X < 3.5) = p(X = 3) + p(X = 2) = 0.3$

$F(4) = p(X \leq 4) = p(X = 4) + p(X < 4) = p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 0.65$

$F(5) = p(X \leq 5) = p(X = 5) + p(X < 5) = p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 0.8$

$F(6) = p(X \leq 6) = p(X = 6) + p(X < 6) = p(X = 6) + p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 1$

$F(7) = p(X \leqslant 7) = p(X = 7) + p(X < 7) = p(X = 6) + p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 1$

(5) $n = 1250\ ,\ p = 0.04$

(a) $\mu = n\,p = 1250 \times 0.04 = 50$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 50$

(b) $\sigma^2 = n\,p(1-p) = 1250 \times 0.04 \times 0.96 = 48$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 48$

(c) $\sigma = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 4\sqrt{3}$

(6) **(a)** $P(0 \le X \le 3) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(b) $P(-2 \le X \le 0) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(c) $P(X = 2) = 0$

(d) $P(-1 \le X \le 2) = (2-(-1)) \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(7) **(a)** $x = \frac{1}{3} \quad \therefore\ y = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

$P\left(0 \le X \le \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

(b) $P\left(X \ge \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(8) **(a)** المساحة تحت منحنى الدّالة f هي: $(5-(-3)) \times \frac{1}{8} = 8 \times \frac{1}{8} = 1$

$\therefore$ الدّالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $P(-1 \le x \le 3) = (3-(-1)) \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 1$

$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-3))^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{16}{3}$

(9) **(a)** $P(z \le 2.24) = 0.98745$

(b) $P(z \ge 1.52) = 1 - P(z < 1.52) = 1 - 0.93574 = 0.06426$

(c) $P(1.4 \le z \le 2.6) = P(x \le 2.6) - P(x \le 1.4) = 0.99534 - 0.91924 = 0.0761$

(10) **(a)** $x_1 = 30 \quad \therefore\ z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{30-40}{8} = -\frac{5}{4} = -1.25$

$x_2 = 65 \quad \therefore\ z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{65-40}{8} = \frac{25}{8} = 3.125$

$P(30 < X < 65) = P(-0.125 < z < 3.125) = P(z < 3.125) - P(z < -1.25)$

$= \frac{0.99910 + 0.99913}{2} - 0.10565 = 0.893465$

(b) $X = 45 \quad \therefore \quad z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{45 - 40}{8} = \dfrac{5}{8} = 0.625$

$P(X \geq 45) = 1 - P(X < 45) = 1 - P(z < 0.625) = 1 - \dfrac{0.73237 + 0.73565}{2}$

$= 1 - 0.73401 = 0.26599$

(11) $K = 1 - (0.16 + 0.24 + 0.15 + 0.2) = 0.25$

(12) **(a)** $P(z \leq 1.45) = 0.92647$

(b) $P(z > 0.27) = 1 - P(z \leq 0.27) = 1 - 0.60642 = 0.39358$

(c) $P(-1.32 \leq z \leq 1.75) = P(z \leq 1.75) - P(z \leq -1.32) = 0.95994 - 0.09342 = 0.86652$

(d) $P(-2.87 \leq z \leq -1.42) = P(x \leq -1.42) - P(x \leq -2.87) = 0.07780 - 0.00205 = 0.07575$

تمارين إثرائية

(1) $\sigma^2 = 25 \quad \therefore \quad \sigma = 5$

(a) $x = 55 \quad \therefore \quad z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{55 - 55}{5} = 0$

$P(X > 55) = 1 - P(X \leq 55) = 1 - P(z \leq 0) = 1 - 0.5 = 0.5$

(b) $x = 50 \quad \therefore \quad z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{50 - 55}{5} = -\dfrac{5}{5} = -1$

$P(X < 50) = P(z < -1) = 0.15866$

(c) $x_1 = 30 \quad \therefore \quad z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = \dfrac{30 - 55}{5} = -5$

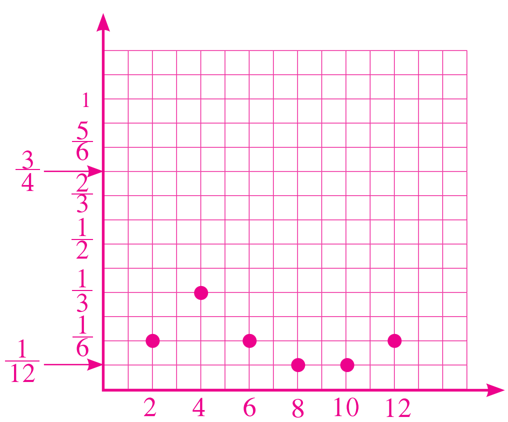
$x_2 = 40 \quad \therefore \quad z_2 = \dfrac{x_2 - \mu}{\sigma} = \dfrac{40 - 55}{5} = -3$

$P(30 < X < 40) = P(-5 < z < -3) = P(z < -3) - P(z < -5)$

$= 0.00135 - 0 = 0.00135$

(2) **(a)** $K = 1 - \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{6}$

(b)



(c) $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

$F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{1}{2}$

$F(6) = P(X \leq 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{2}{3}$

$F(8) = P(X \leq 8) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) = \frac{3}{4}$

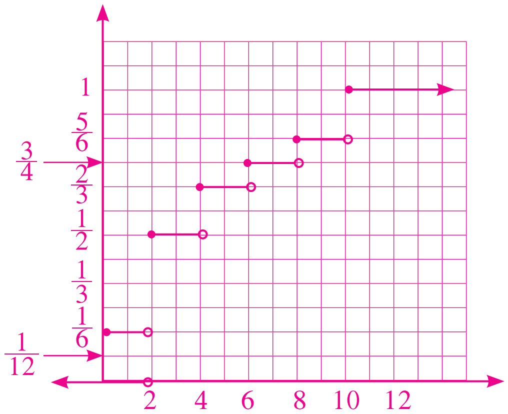
$F(10) = P(X \leq 10) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) = \frac{5}{6}$

$F(12) = P(X \leq 12) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) + P(X = 12) = 1$

جدول التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	2	4	6	8	10	12
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1

(d)



(3) $\mu = 14$ $\sigma = \sqrt{1} = 1$

(a) $x = 15 \therefore z = \frac{x - \mu}{\sigma} = 15 - 14 = 1$

$P(X > 15) = P(z > 1) = 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$

(b) $x = 11 \therefore z = \frac{x - \mu}{\sigma} = 11 - 14 = -3$

$P(X < 11) = P(z < -3) = 0.00135$

(c) $x_1 = 13 \therefore z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = 13 - 14 = -1$

$x_2 = 15 \therefore z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = 15 - 14 = 1$

$P(13 < X < 15) = P(-1 < z < 1) = P(z < 1) - P(z < -1)$

$= 0.84134 - 0.15866 = 0.68268$

(4) (a) $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = P\left(X \leq \frac{3}{2}\right) - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = 2$

(b) $P\left(X \ge \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{3}{4}$

(5) $n = 7\ ,\ p = \frac{1}{2}$

(a) $P(X = 5) = {}_7C_5 \times 0.5^5 \times 0.5^2 = 0.164$

(b) $P(X > 0) = 1 - P(X \le 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - {}_7C_0 \times 0.5^0 \times 0.5^7 = 0.992$

(c) $P(X = 0) + P(X = 1) = 7.8125 . 10^{-3} + {}_7C_1 \times 0.5^1 \times 0.5^6 = 0.0625$

(6) **(a)** $P(z \le 2.65) = 0.99598$

(b) $P(-2.85 \le z \le -1.96) = P(z \le -1.96) - P(z \le -2.85) = 0.025 - 0.00219 = 0.02281$

(c) $P(z \ge 1.56) = 1 - P(z < 1.56) = 1 - 0.94062 = 0.05938$

(7) **(a)** $\mu = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{17}{6}$

(b) $\sigma^2 = 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{12} + 25 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{59}{36}$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{59}{36}$

(c) $\sigma = \sqrt{\frac{59}{36}} = \frac{\sqrt{59}}{6}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = \frac{\sqrt{59}}{6}$

(8) $F(2) = P(X \le 2) = 0$

$F(3) = P(X \le 3) = P(X < 3) + P(X = 3) = P(X = 3) = 0.17$

$F(4) = P(X \le 4) = P(X < 4) + P(X = 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.41$

$F(4.5) = P(X \leqslant 4.5) = P(X < 4.5) + P(X = 4.5) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.41$

$F(5) = P(x \le 5) = P(X < 5) + P(X = 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.64$

$F(6) = P(X \le 6) = P(X < 6) + P(X = 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$

$F(6.5) = P(X \leqslant 6.5) = P(X < 6.5) + P(X = 6.5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$

شركة مطابع الرسالة - الكويت
أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (١٧) بتاريخ ١٣ / ٤ / ٢٠١٦