الوحدة السادسة

المساحات في المستوى

P.67 ①

$f(x) = x^2 + 4 - 4x \qquad x = -1 \;،\; x = 4$

من الشكل :

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1 ، 4]$

$A = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{4} x^2 + 4 - 4x \; dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2\right]_{-1}^{4} = \left[\frac{64}{3} + 16 - 32\right] - \left[\frac{-1}{3} - 4 - 2\right]$

$= \frac{35}{3} = 11{,}6667$ units square

P.67 ②

اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f :

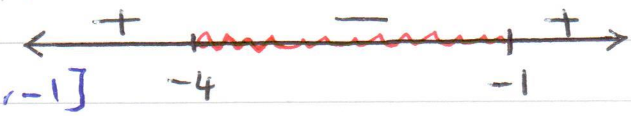
$f(x) = x^2 + 5x + 4$

ومحور السينات

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع لمنحنى f مع محور السينات

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow$

$(x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow x = -1$ أو $x = -4$



$\therefore f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-4 ، -1]$

$\therefore \quad A = -\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_{-4}^{-1}$

$= -\left[\left(\frac{-1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{5 \times 16}{2} - 16\right)\right]$

$= -\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}$ units square

P.69 (3) اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى f ، ومحور السينات ، والفترة المبينة

(a) $f(x) = x^3 - 9x$ ، $[-2, 1]$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$

$x(x-3)(x+3) = 0$

$x = 0$ ، $x = 3$ ، $x = -3$

$0 \in (-2, 1)$ ، $-3 \notin (-2, 1)$ ، $3 \notin (-2, 1)$

$\therefore A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right|$

$= \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 9x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 9x)\,dx\right|$

$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$

$= |[0 + 14]| + \left|\left[\frac{-17}{4} - 0\right]\right| = 14 + \frac{17}{4} = \frac{73}{4}$ units square

(b) $f(x) = \cos x$ ، $[0, \pi]$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx\right|$

$= \left|\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx\right|$

$= \left|[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$

$= |(1 - 0)| + |(0 - 1)| = 2$ units square

P.70 ④ اوجد مساحة المنطقة المحدده بمنحنى الدالة f :

$f(x) = x^2 + 3$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$, والمستقيمين $x = -1$, $x = 1$

علماً بأن $f(x) > g(x) \quad \forall x \in [-1,1]$

$\because f(x) > g(x) \quad \forall x \in [-1,1]$

$$\therefore A = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 + 3 - x^2 - 1\, dx = \int_{-1}^{1} 2\, dx$$

$= 2(1-(-1)) = 4$ units square

P.71 ⑤ أوجد مساحة المنطقة المحدده بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$

ومنحنى الدالة g : $g(x) = -x^2 - 3$, والمستقيمين

$x = -1$, $x = 1$

علماً بأن المنحنيين للدالتين f ، g غير متقاطعين

بما أن المنحنيين غير متقاطعين : نأخذ

$x = 0 \in (-1,1) \Rightarrow$

$f(0) = 0 + 1 = 1$, $g(0) = 0 - 3 = -3$

$\therefore f(x) > g(x) \quad \forall x \in [-1,1]$

$$\therefore A = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 + 1 + x^2 + 3\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2x^2 + 4\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{1}$$

$= \left(\frac{2}{3} + 4\right) - \left(\frac{-2}{3} - 4\right) = \frac{28}{3}$ units square

P. 72 6 اوجد مساحة المنطقة المحدده بمنحنى الدالتين

$$y_1 = x^2 + 2 \quad ، \quad y_2 = -2x + 5$$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 + 2 = -2x + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow x = -3 \quad ، \quad x = 1$$ «حدود التكامل»

$$x = 0 \in (-3, 1) \Rightarrow y_1 = 0 + 2 = 2 \quad ، \quad y_2 = -2(0) + 5 = 5$$

$$\therefore y_2 \geq y_1 \quad \forall x \in [-3, 1]$$

$$\therefore A = \int_{-3}^{1} (y_2 - y_1)\,dx = \int_{-3}^{1} (-2x + 5 - x^2 - 2)\,dx$$
$$= \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)\,dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1}$$
$$= \left(3\times1 - 1 - \frac{(1)^3}{3}\right) - \left(3\times -3 - (-3)^2 - \frac{(-3)^3}{3}\right) = \frac{32}{3}$$ units square

P. 72 7 $f(x) = -2x^2 + 2 \qquad g(x) = x^2 - 1$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -2x^2 + 2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = 1 \;،\; x = -1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} -2x^2 + 2 - x^2 + 1\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{1} -3x^2 + 3\,dx\right| = \left|\left[-x^3 + 3x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|[-(1)^3 + 3(1)] - [-(-1)^3 + 3(-1)]\right|$$

$$= 4$$ units square

P. 74 8

اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f والدالة g حيث

$f(x) = 1 - x^3 \qquad g(x) = -4x + 1$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع نضع

$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - x^3 = -4x + 1 \Rightarrow$

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \,،\, x = 2 \,،\, x = -2$

$\therefore A = \left| \int_{-2}^{0} f(x) - g(x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x) - g(x)\, dx \right|$

$= \left| \int_{-2}^{0} (1 - x^3 + 4x - 1)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} 1 - x^3 + 4x - 1\, dx \right|$

$= \left| \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_{0}^{2} \right|$

$= |0 - (+4)| + |4 - 0| = 8$ units square

P. 75 9

اوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$g(x) = \frac{x}{2} \,،\, f(x) = \sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 9 \,،\, x = 0$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين، نضع:

$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \,،\, x = 4$

$A = \left| \int_{0}^{4} (\sqrt{x} - \frac{x}{2})\, dx \right| + \left| \int_{4}^{9} \sqrt{x} - \frac{x}{2}\, dx \right|$

$= \left| \left[2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{4} \right]_{0}^{4} \right| + \left| \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} \right]_{4}^{9} \right|$

$= \left| \left(\frac{2}{3}(8) - \frac{16}{4}\right) - 0 \right| + \left| \left(\frac{2}{3}(27) - \frac{81}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}(8) - \frac{16}{4}\right) \right|$

$= \left| \frac{4}{3} \right| + \left| \frac{-43}{12} \right| = \frac{59}{12} = 4.9$ units square