وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الثاني

حل الأسئلة الموضوعية الصف الحادي عشر الفصل الدراسي الثاني
أعداد وتجميع : أ/ صبحي عطية السيد
أعداد وتجميع : أ/ صبحي عطية السيد أحمد
حل الأسئلة الموضوعية الصف الحادي عشر الفصل الدراسي الثاني
حل الأسئلة الموضوعية الصف الحادي عشر الفصل الدراسي الثاني
أعداد وتجميع : أ/ صبحي عطية السيد أحمد

حل الأسئلة الموضوعية

أعداد وتجميع

أ/ صبحي عطية السيد

أعداد وتجميع : أ/ صبحي عطية السيد أحمد
حل الأسئلة الموضوعية الصف الحادي عشر الفصل الدراسي الثاني

الوحدة
السابعة
الأعداد المركبة

تمرَّنْ
7−1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$

[✓ a] b

السبب:

بأستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{-4}+3 = 2i + 3 = 3 + 2i$

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو: $\bar{z} = -3-4i$

a [✓ b]

السبب:

مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو $\bar{z} = 3 - 4i$

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو: $-z = 3+2i$

a [✓ b]

السبب:

المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو $-z = -3+2i$

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$

[✓ a] b

السبب: ملوحظة عند استخدام الآلة الحاسبة يجب استخدام زر الطرح وليس اشارة (-) ولا سنحصل على خطأ

باستخدام الآلة الحاسبة $(12+5i)-(2-i) = 12+5i-2+i = 10 - 6i$

في التمارين (14—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

- a $-15+6i$
- b $6+15i$
- c $6-15i$
- [✓ d] $32+15i$

السبب: الإجابات c و b و a لاتصلح لان جزءها الحقيقي لايساوي 32

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{-225}+32 = 15i+32 = 32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i = 2x+3yi$ هو:

- a $x=5\ ,\ y=-2$
- [✓ b] $x=-5\ ,\ y=-2$
- c $x=-5\ ,\ y=2$
- d $x=5\ ,\ y=2$

السبب:

$$\begin{cases}2x = -10\\ 3y = -6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \frac{-10}{2} = -5\\ y = \frac{-6}{3} = -2\end{cases} \qquad x = -5, y = -2$$

(7) إذا كان $z_1 = 5i+2$ ، $z_2 = -3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ [✓ (c)] $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

السبب: كتابة العدد المركب في الصور الجبرية

$z_1 = 2 + 5i \quad , \quad z_2 = -3 - i$

$\overline{z}_1 = 2 - 5i \quad , \quad \overline{z}_2 = -3 + i$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{\overline{z_2}}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{2-5i}{-3+i} = -\frac{1}{10} + \frac{17}{10}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

(8) إذا كان: $x\,i^2 + 3\,y\,i = 5 + 3\,i^5$ فإن $(x\,,\,y)$ تساوي

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ [✓ (d)] $(-5,\ 1)$

السبب:

$$i^2 = -1 \qquad .\,i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$$

$$x\,i^2 + 3\,y\,i = 5 + 3\,i^5 \;\Rightarrow\; -x + 3\,yi = 5 + 3\,i$$

$$\begin{cases} -x = 5 \Rightarrow x = -5 \\ 3\,y = 3 \;\Rightarrow\; y = 1 \end{cases}$$

$$x = -5 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad (x\,,y) = (-5\,,1)$$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

(a) $18+17i$ (b) $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

[✓ (c)] $6+17i$ (d) 18

السبب:

$$(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9}) = (3+2i)(4+3i) = 6+17\,i$$

يمكن كتابة التعبير السابق مباشرة باستخدام الآلة الحاسبة وسيظهر الناتج مباشرة

(بشرط أن تكون الآلة الحاسبة بوضع الأعداد المركبة)

كيفة التنفيذ M ODE + 2

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (1+2i)^2$ هي:

[✓ (a)] $z = -3+4i$ (b) $z = 5+4i$ (c) $z = -3$ (d) $z = 5$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$z = (1+2\,i)^2 = -3 + 4\,i$$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

ⓓ $z=2-13i$ [✓ ⓒ $z=2-11i$] ⓑ $z=14-13i$ ⓐ $z=14+13i$

السبب: باستخدام الآلة الحاسبة

$$z = (2-i)^3 = (2-i)^2 \cdot (2-i)^1 = 2-11\,i$$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

ⓑ $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ [✓ ⓐ $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$]

ⓓ $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ⓒ $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

السبب: باستخدام الآلة الحاسبة

$$z = \frac{i}{i+5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{3}\,i$$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

[✓ ⓓ -1] ⓒ 1 ⓑ i ⓐ $-i$

السبب: عند أستخدام الآلة الحاسبة مباشرتا في هذا التمرين سوف نحصل Err عند الأستخدام

∵ (250) عدد زوجي في هذا الحالة سوف نسبعد كلا من الأجابة ⓐ و ⓑ

∵ (250) لا تقبل القسمة على 4 ∴ الإجابة (-1) هي

$$(i)^{250} = (i^2)^{125} = (-1)^{125} = -1$$

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

[✓ ⓓ $\{2,4,6,\ldots\}$] ⓒ $\{1,3,5,\ldots\}$ ⓑ $\{0,2,4,6,\ldots\}$ ⓐ $\mathbb{Z}^+$

السبب:

∵ الناتج عدداً حقيقي ∴ x يجب أن تكون عدد زوجب

∵ الشرط أن $x\in\mathbb{Z}^+$ ∴ x لايمكن أن تكون صفر

الأجابة ⓓ مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة " بدون الصفر "

تمرَّنْ
7−2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−6)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$

a [✓ b]

السبب:

$r = 4 \quad . \quad \theta = \frac{7\pi}{6}$

$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{7\pi}{6} = -2\sqrt{3} \quad . \quad y = r\sin\theta = 4\sin\frac{7\pi}{6} = -2$

$A = (-2\sqrt{3} \ . -2)$

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135^{\circ})$ هي: $B(-1,1)$

[✓ a] b

السبب:

$r = \sqrt{2} \quad . \quad \theta = 135^{\circ}$

$x = r\cos\theta = 4\cos 135^{\circ} = -1 \quad . \quad y = r\sin\theta = 4\sin 135^{\circ} = 1$

$B = (-1 \ .1)$

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$

[✓ a] b

السبب:

$r = 1 \quad . \quad \theta = \frac{7\pi}{6}$

$x = r\cos\theta = 1\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad . \quad y = r\sin\theta = 1\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B = (-\frac{\sqrt{2}}{2} \ .\frac{-\sqrt{2}}{2})$

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

a [✓ b]

السبب:

$z = 2\left(\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i\right.$

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ [✓ a] b

السبب:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\ \sin\frac{7\pi}{4}\right)=1-1$$

(6) السعة الأساسية للعدد $z=\cos 30^\circ+i\cos 240^\circ$ هي 330° [✓ a] b

السبب:

$$z=\cos 30^\circ+i\ \cos 240^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\alpha=\tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|=30^\circ \qquad .\ x>0\ .y<0$$

$$\theta=360^\circ-30^\circ=330^\circ$$

في التمارين (7–13)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

[✓ d] $A(2,-2\sqrt{3})$	c $A(-2,-2\sqrt{3})$	b $A(-2,2\sqrt{3})$	a $A(2,2\sqrt{3})$
الربع الرابع	الربع الثالث	الربع الثاني	الربع الأول

السبب:

$$A\left(4.\frac{5\pi}{3}\right) \qquad .\ \theta=\frac{5\pi}{3}=\frac{5\times180^\circ}{3}=300^\circ$$

(الربع الرابع)

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

a $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ b $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ [✓ c] $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ d $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

السبب:

$$B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$.\ r=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

$$\alpha\ \tan^{-1}\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}\right|=\frac{\pi}{4} \qquad .\ \theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$y<0\ .\ x>0$$

$\therefore$ z (تقع في الربع الرابع)

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

[✓ a] $= 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ربع رابع

(b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ربع أول

(c) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ربع أول

(d) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ربع ثاني

السبب:

بدون حل يمكن مناقشة الاختيارات

$x > 0$, $y < 0$ أي أن z تقع في الربع الرابع

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

[✓ b] $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

الحـــــــــــل

$$\boldsymbol{z = \frac{-4}{1-i} = -2 - 2i}$$

$$. \ r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\alpha \ \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-2}\right| = \frac{\pi}{4} \qquad . \ \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$y < 0 \ . \ x < \ 0$$

$\therefore$ z **(تقع في الربع الثالث)**

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

[✓ b] $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

السبب:

$$\boldsymbol{z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\ \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\frac{2\pi}{3} - 3\ \sin\frac{2\pi}{3} i = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\ i}$$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2}+i^{2n+8})$ تساوي:

ⓐ 1 [✓ b] 0 ⓒ -1 ⓓ i^{-2n}

السبب:

$$(i^{2n+2} + i^{2n+8}) = (i^{2n} \times i^{2} + i^{2n} \times i^{8}) = i^{2n}\,(i^{2} + i^{2})$$
$$= i^{2n}\ (-1+1) = 0$$

(13) $(6-2i+3i^{5})^{2}$ تساوي:

[✓ a] $35-12i$ ⓑ $35+12i$ ⓒ $81-12i$ ⓓ $81+12i$

السبب:

$$(6-2i+3i^{5})^{2} = (6-2i+3i \times i^{4})^{2} = (6-i)^{2} = 35-12i$$

تمرَّنْ
7–3

حل معادلات

Solving Equations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

[✓ a] b

(1) حل المعادلة: $\overline{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$

السبب:

$$z=3+i \quad \Longrightarrow \quad \bar{z}=3-i$$

$$\bar{z}+2=3-i+2=5-i$$

a [✓ b]

(2) حل المعادلة: $2z+\overline{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$

السبب:

$$z=1-5i \quad \Longrightarrow \quad \bar{z}=1+5i$$

$$2\,(1-5i\,)+1+5\,i-3-5i \;=\; -10\,i \;\neq 0$$

a [✓ b]

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i\,,2+i\}$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة مود 5 , 3 نجد أن نجد أن الجواب خاطئ

أو ملاحظة : يجب أن يكون الحلان عددان مترافقان لأنها معادلة تربيعية ذات معاملات حقيقية

a [✓ b]

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$

السبب:

الجذر التربيعية للعدد السالب أعداد تخيلية

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$

[✓ a] ⓑ

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة : $(5 + 3i)^2 = 16 + 30\,i$ والجذر الآخر هو المعكوس الجمعي

(6) إذا كان z_1 , z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$

[✓ a] ⓑ

السبب:

إذا كان z_1 جذر للعدد z فإن الجذر الآخر هو المعكوس الجمعي $z_2 = z_1$

$\therefore\ z_2 + z_1 = 0$ صحيحة

في التمارين (10–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$ هو:

[✓ a] $z = 1 + 6i$　ⓑ $z = -1 + 6i$　ⓒ $z = 1 - 6i$　ⓓ $z = -1 - 6i$

السبب: يجب الحل بطريقة مقالية أو التعويض بالآلة الحاسبة أربع مرات

$$2\,z - 5 + 6i = -3\,\bar{z} \Rightarrow 2\,z + 3\bar{z} = 5 - 6i$$

$$2(x + i\,y) + 3\,(x - iy) = 5 - 6i \Rightarrow x = 1\ .y = 6$$

$$z = 1 + 6\ i$$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

ⓐ $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$　ⓑ $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

ⓒ $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$　[✓ d] $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة الاجابة الجذرين عددين مترافقين إذا a , b لاتنفع مباشرة

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

[✓ b] $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

a $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$

d $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

c $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$

السبب:

جذري العدد المركب متعاكسين اذا d . c لا ينفعان

في الحل a إشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي متماثلين والحل مرفوض لأن إشارة الجزء التخيلي للعدد سالبة وبالتالي يجب أن يكون الأشارتين مختلفتين

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

a $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$

b $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$

[✓ c] $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$

d $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$z = \frac{5-2i}{3-4i} = \frac{23}{25} + \frac{14}{25}\ i$$

أعداد وتجميع : أ/ صبحي عطية السيد أحمد
حل الأسئلة الموضوعية الصف الحادي عشر الفصل الدراسي الثاني
حل الأسئلة الموضوعية الصف الحادي عشر الفصل الدراسي الثاني
أعداد وتجميع : أ/ صبحي عطية السيد أحمد

الوحدة
الثامنة
حساب المثلثات

تمرَّنْ
8−1

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—7)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

في التمارين (1—7)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ a [✓ b]

السبب:

يوجد أكثر من دالة لها نفس السعة والدورة $y = \pm a\ \sin(\pm\, b\, x)$

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ a [✓ b]

السبب:

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4$

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ [✓ a] b

السبب:

دورة دالة الظل $= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|\frac{3}{4}|} = \frac{4\pi}{3}$

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4\cos(6x)$ [✓ a] b

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$

ملاحظة :

الفرق بين السؤال الأول والسؤال الرابع حدد الدالة أما في السؤال الرابع كتب يمكن أن يكون

(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5

a [✓ b]

السبب:

لا يمكن أن تكون السعة سالبة السعة = $|a| = 5$

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$

a [✓ b]

السبب:

$$2|a| = \max f - \min f$$

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة.

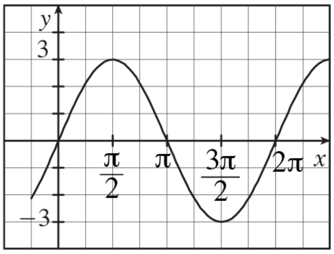
[✓ a] b

السبب:

دورة الظل = $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{4}$ ، دورة جيب التمام = $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:



[✓ a] $f(x) = 3\sin x$

a $f(x) = 3\cos x$

d $f(x) = \sin 3x$

c $f(x) = -3\sin x$

السبب:

(a) لا تنفع لان المنحني يمر بالنقطة الأصل .

(b) تنفع لان المنحني يمر بالنقطة الأصل والسعة تساوي 3 والدورة هي $\frac{2\pi}{1}$

(b) لا تنفع لان أشارة الدالة سالب منحناها يبدأ من الأسفل وليس من الأعلي

(d) لا تنفع لان سعة 1 وادورة $\frac{2\pi}{1}$ وليست $\frac{2\pi}{3}$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

a السعة $= 1$

b السعة $= 2$

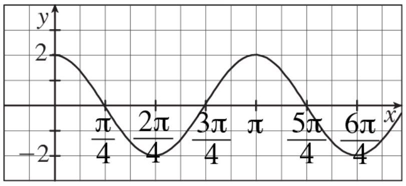
c السعة $= 3$

[✓ d] f ليس لها سعة

السبب:

دالة الظل " *tan* " ليس لها سعة

(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:



فإن f يمكن أن تكون:

[✓ a] $2\cos 2x$

b $\cos 2x$

c $\cos \frac{x}{2}$

d $\sin 2x$

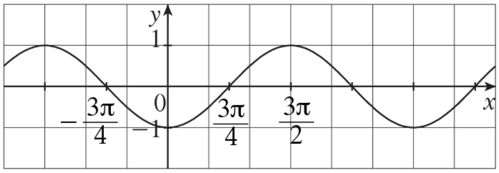
السبب:

من خلال الرسم نلاحظ أن السعة 2 الأجابة حتما (a)

ملحوظة :

يمكن التعويض بنقطة من الخط البياني أو أكثر من نقطة في كل أجابة للتحقق مثل النقط (0,2)

(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:



a π

b 2π

[✓ c] 3π

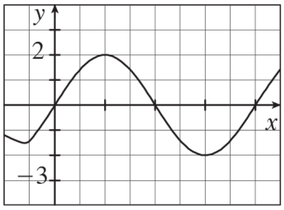
d $\frac{6\pi}{4}$

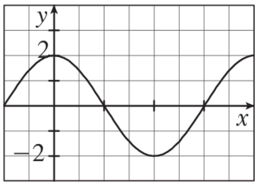
السبب:

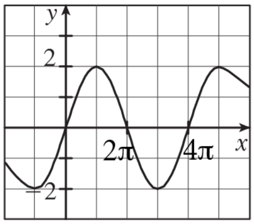
نحسب نصف الدورة : {
بين قمة وقاع " من 0 إلي $\frac{3\pi}{2}$ " = $\frac{3\pi}{2}$
بين نقطتي تقاطع مع محور الأفقي متتاليتين " من $\frac{-3\pi}{4}$ إلي $\frac{3\pi}{4}$ "

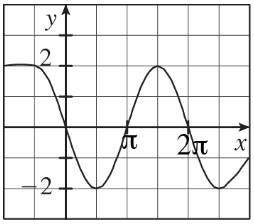
نضرب نصف الدورة بـ (2) الدورة = $\frac{3\pi}{2} \times 2 = 3\pi$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

a


[✓ b]


c


d


السبب:

الدالة $y = a \sin b\, x$ يجب أن تمر من نقطة الأصل

$\therefore$ المنحني b لا ينفع أن يكون منحني للدالة ·

(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

a $y = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

[✓ b] $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

c $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$

d $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

السبب:

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{6} \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3}$$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

a $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

b $y = 8\cos(8x)$

[✓ c] $y = 2\cos(8x)$

d $y = 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

السبب:

الإجابة (d) , (b) لا تنفع سعتهما مختلفة الأجابة أ م (a) , (c) لان السعة متساوية

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |b| = \frac{8\pi}{\pi} \Rightarrow |b| = 8$$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

a $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

b $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

c $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

[✓ d] $y = 3\sin(4x)$ أو $y = -3\sin(4x)$

السبب:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow |b| = \frac{4\pi}{\pi} = 4$$

$$y = -3\ \sin 4x \quad . \quad y = 3\ \sin 4x$$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

- a $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$
- [✓ b] $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$
- c $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$
- d $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

السبب:

$$\frac{\pi}{|b|} = \frac{3}{4} \Longrightarrow |b| = \frac{4\pi}{3}$$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

- a $-2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$
- b $2\ ,\ \frac{10\pi}{3}$
- c $2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$
- d $2\ ,\ \frac{2\pi}{15}$

السبب:

الدورة هي $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{10\pi}{3}$ ، السعة $= |a| = |-2| = 2$

تمرَّنْ
8−3

قانون الجيب

Law of Sine

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (3–1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$, $BC = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC = 10.154\text{ cm}$ ⓑ ⓐ

السبب:

من قانون الجيب :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}$$

$$AC = BC \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$AC = 10 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} = 10.1542\,6612$$

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80^\circ$, $AB = 12\text{ cm}$, $AC = 16\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ ⓑ ⓐ

السبب:

من قانون الجيب :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{16}{\sin 80^\circ} = 16.2$$

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{12}{\sin 50^\circ} = 15.6$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} \neq \frac{AB}{\sin\gamma}$$

(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{c}$

ⓐ ⓑ

السبب:

القانون خطأ : القانون الصحيحة هي : $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

في التمارين (4–9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80^{o}$, $m(\widehat{B}) = 40^{o}$, $AC = 10$ cm فإنّ طولي $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ يساويان:

ⓐ 7.43 cm , 15.32 cm

ⓑ 6.53 cm , 13.47 cm

[✓ c] 13.47 cm , 15.32 cm

ⓓ 7.43 cm , 6.53 cm

السبب:

$$\alpha = 80^\circ \; .\beta = 40^\circ .\gamma = 60^\circ$$

$$b = 10\ cm$$

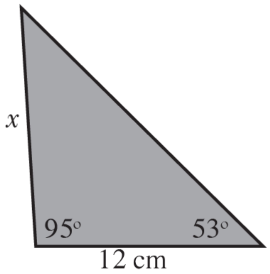
∵ الزاوية β هي أصغر زاوية ∴ الضلع b هو أصغر ضلع

$BC > 0 \;.\; AB > 10$

الإجابة الوحيد التي تصلح هي الإجابة (c)

ملاحظة : ترتيب الأضلاع يشبه ترتيب قياسات الزوايا الضلع الأطوال يقابل الزاوية الأكبر .

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:



ⓐ 8.6 cm

ⓑ 15 cm

[✓ c] 18.1 cm

ⓓ 19.2 cm

السبب:

$$\vartheta = 180^\circ - (95^\circ + 53^\circ) = 32^\circ$$

$$\frac{x}{\sin 53^\circ} = \frac{12}{\sin 32^\circ} \Longrightarrow x = \frac{12 \cdot \sin 53^\circ}{\sin 32^\circ} = 18.1$$

(6) مثلث قياسات زواياه: $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالى:

[✓ a] 11 cm

(b) 11.5 cm

(c) 12 cm

(d) 12.5 cm

السبب:

الضلع المقابل لأصغر زاوية 50° هو أصغر ضلع

إذا كان x أكبر صلع فهو مقابل لأكبر زاوية 70°

$$\frac{9}{\sin 50^\circ} = \frac{x}{\sin 70^\circ}$$

$$x = \frac{9\cdot\sin 70^\circ}{\sin 50^\circ} = 11.04$$

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56^\circ$, $AC = 23\text{ cm}$, $AB = 19\text{ cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm

(b) 18 cm

(c) 19 cm

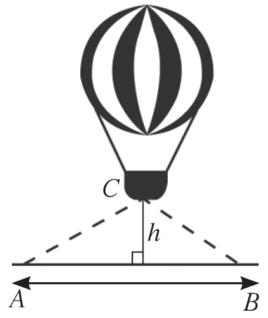
(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

السبب:

المعلوم ضلعين وزاوية محصورة بينهما ∴ لا يمكن استخدام قانون الجيب

ملحوظة : لا ستخدام قانون الجيب نحن بحاجة الي ضلع وزاوية مقابلة

(8) رأى شخصان، أحدهما يقف عند النقطة A والثاني عند النقطة B، منطادًا، حيث المسافة بينهما 3 km. إذا كان قياس زاوية الارتفاع عند النقطة A هي 28° وقياس زاوية الارتفاع عند النقطة B هي 37°، فإنّ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض هو:



(a) $h \approx 1200\text{ m}$

(b) $h \approx 2\,500\text{ m}$

(c) $h \approx 940\text{ m}$

(d) $h \approx 880\text{ m}$

نوجد الزاوية الثالثة $\gamma = 180^\circ - (28^\circ + 37^\circ) = 118^\circ$

نوجد احد الضلعين a أو b

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Longrightarrow \frac{b}{\sin 37^\circ} = \frac{3}{\sin 115^\circ}$$

$$b = \frac{3\cdot\sin 37^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 2$$

في المثلث القائم $CC'A$:

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

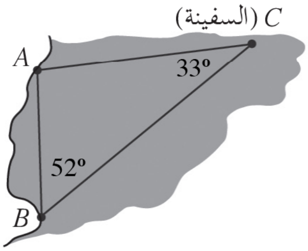
$$\sin 28^\circ = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \cdot \sin 28^\circ \approx 940\ cm$$

(9) تقع منارتان A , B على خط واحد من الشمال إلى الجنوب وتساوي المسافة بينهما 20 km،

إذا كان قائد السفينة موجود في الموقع C بحيث إن $m(A\widehat{C}B) = 33^\circ$

وعامل الراديو موجود في الموقع B بحيث إن: $m(A\widehat{B}C) = 52^\circ$،

فإن المسافة بين السفينة وكل من المنارتين تساوي:



ⓐ $AC \approx 13.8$ km , $BC \approx 10.9$ km

ⓑ $AC \approx 32.6$ km , $BC \approx 36.6$ km

ⓒ $AC \approx 28.9$ km , $BC \approx 10.9$ km

ⓓ $AC \approx 28.9$ km , $BC \approx 36.6$ km

السبب:

$$AC = AB \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 20 \cdot \frac{\sin 52^\circ}{\sin 33^\circ} \approx 28 \cdot 9 \quad K \cdot m$$

الإجابة أ ما (c) أو (d)

$$\alpha = 180^\circ - (52^\circ + 33^\circ) = 95^\circ$$

$$\alpha > \beta \qquad \Rightarrow a > b$$

الإجابة (d) يمكن حساب طول الضلع BC بنفس الطريقة السابقة

$$BC = AB \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 20 \cdot \frac{\sin 95^\circ}{\sin 33^\circ} \approx 36 \cdot 6 \quad K \cdot m$$

تمرَّنْ
8−4

قانون جيب التمام

Law of Cosine

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (4−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24$ cm , $AC = 19$ cm , $BC = 27$ cm فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^o$ [✓ a] b

السبب:

$$\cos(\hat{A}) = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2\cdot AC\cdot AB} = \frac{19^2+24^2-27^2}{2\times19\times24} = \frac{13}{57}$$

$$\therefore m(\hat{A}) = \cos^{-1}\frac{13}{57} \approx 76\cdot 82^\circ$$

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^o$, $BC = 44$ cm , $AB = 20$ cm فإنّ: $AC \approx 50.5$ cm [✓ a] b

السبب:

معلوم ضلعين وزاوية مقابل أحدهما يجب تطبيق قانون الجيب :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{44}{\sin(60^\circ)} = \frac{20}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{20\sin(60^\circ)}{44} = \frac{5\sqrt{3}}{22}$$

$$\therefore \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{22}\right) = 23^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - (60^\circ + 23^\circ) = 97^\circ$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{44}{\sin(60^\circ)} = \frac{b}{\sin 97^\circ} \Rightarrow b = \frac{44\ \sin 97^\circ}{\sin(60^\circ)} = 50\cdot 5\ cm$$

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ a [✓ b]

السبب:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\ \csc A$$

$$\because\ a^2 > 0 \quad \Rightarrow\ b^2 + c^2 - 2\,b\,c\ \csc A > 0 \Rightarrow b^2 + c^2 > 2\,b\,c\ \csc A$$

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\text{ cm}, 8\text{ cm}, 12\text{ cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالى 133.4°

[✓ a] b

السبب:

أكبر زاوية تقابل ضلع " 12 cm "

$$\cos\theta = \frac{5^2+8^2-12^2}{2\times5\times8} = -\frac{11}{16}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{11}{16}\right) = 133\cdot4^\circ$$

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10\text{ cm}$, $BC = 20\text{ cm}$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

- (a) $AB = 10\sqrt{7}\text{ cm}$
- (b) $AB = 10\sqrt{3}\text{ cm}$
- (c) $AB = 12.4\text{ cm}$
- (d) $AB = 29\text{ cm}$

السبب:

$$A\,B = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2\,BC\cdot AC\ \cos(c)}$$

$$A\,B = \sqrt{20^2+10^2-2\times 20\times 10\ \cos(60^\circ)} \quad = 10\sqrt{3}\ cm$$

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30\text{ cm}$, $AC = 40\text{ cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

- (a) $BC \approx 60.8\text{ cm}$
- (b) $BC \approx 36\text{ cm}$
- (c) $BC \approx 68\text{ cm}$
- (d) $BC \approx 21\text{ cm}$

السبب:

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\ \cos(A)}$$

$$A\,B = \sqrt{40^2+30^2-2\times 40\times 30\ \cos(120^\circ)} \quad = 10\sqrt{37} \approx 60\cdot8\ \ cm$$

(7) إذا كان $BC = 25\text{ cm}$, $AC = 17\text{ cm}$, $AB = 12\text{ cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالى:

- (a) 118°
- (b) 110°
- (c) 125°
- (d) 100°

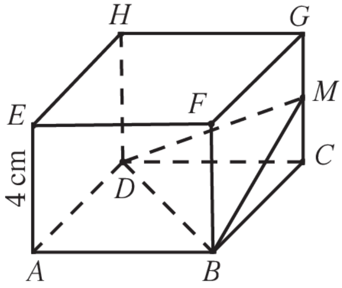
السبب: أكبر زاوية تقابل ضلع " 12 cm "

$$\cos\alpha = \frac{17^2+12-25^2}{2\times17\times12} = -\frac{8}{17}$$

$$\therefore\ \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{8}{17}\right) = 118^\circ$$

(8) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 4 cm، النقطة M منتصف الضلع $\overline{GC}$

فإن: قياس الزاوية $(D\widehat{M}B)$ يساوي:



ⓐ 78.46º ⓑ 86.82º ⓒ 11.54º ⓓ 3.2º

في المثلث القائم NCD $M\,B = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}\ \ cm$

في المثلث القائم MCD $M\,D = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}\ \ cm$

في المثلث القائم DAB القائم في A والمتطابق الضلعين

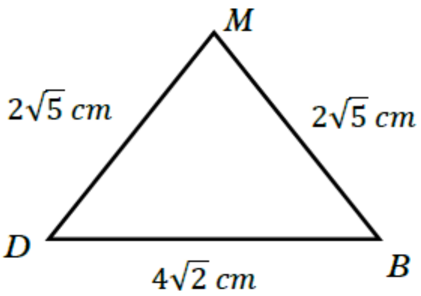
$D\,B = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}\ \ cm$

DMB مثلث علمت أطوال أضلاعه الثلاثة باستخدام قاعدة جيب التمام نجد

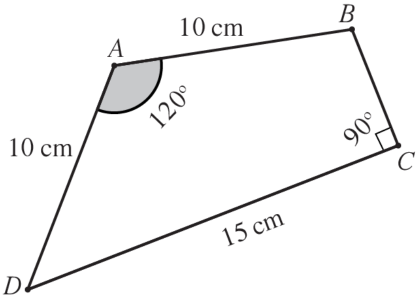
$$\cos(D\widehat{M}B) = \frac{(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$$

$$m\,(D\widehat{M}B) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\approx 78\cdot46^{\circ}$$



(9) في الشكل الرباعي $ABCD$ طول $\overline{BC}$ هو:



ⓐ 12.16 cm ⓑ 8.66 cm

ⓒ 11.5 cm ⓓ 13.7 cm

نرسم القطر BD

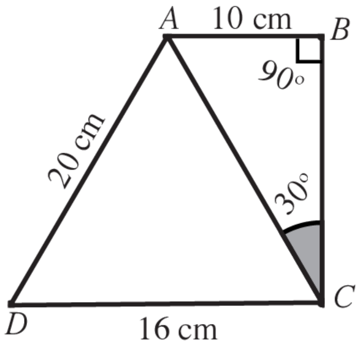
في المثلث ABD

$$BC = \sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\,\cos(B\hat{A}D)}$$

$$A\,B = \sqrt{10^2+10^2-2\times10\times10\,\cos(120^{\circ})} = 10\sqrt{3} \approx 60\cdot8\ \ cm$$

في المثلث BCD القائم في C حسب فيثاغورث

$$BC = \sqrt{(10\sqrt{3})^2-15^2} = 5\sqrt{3} \approx 8\cdot66\ cm$$



(10) في الشكل الرباعي $ABCD$، قياس الزاوية $(B\widehat{A}D)$ يساوي تقريبًا:

ⓑ 104° ⓐ 110°

ⓓ 120° ⓒ 107°

السبب:

المثلث ABC قائم في B ثلاثيني ستيني

الضلع المقابل للزاوية 30° في المثلث القائم يساوي نصف الوتر

$\because$ $AB = 10\ cm$ $\therefore$ طول الوتر $= AC = 20$

المثلث ADC اطوال اضلاعه معلومة لايجاد قياس الزاوية $D\hat{A}C$ نستخدم قانون الجيب التمام .

$$\cos(D\hat{A}C) = \frac{(20)^2 + (20)^2 - (16)^2}{2\times 20\times 20} = \frac{17}{25}$$

$$m\,(D\hat{A}C) = \cos^{-1}\left(\frac{17}{25}\right)$$

$$\approx 47^{\circ}$$

$$m\,(B\hat{A}D) = 60^{\circ} + 47^{\circ}$$

تمرَّنْ
8−5

مساحة المثلث

Area of Triangle

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1−6)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. [✓ a] b

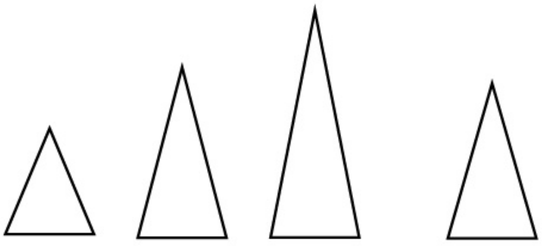
السبب:

الإجابة صحيحة لأن قاعدة هيرون تعتمد على الأضلاع والمحيط

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. [✓ a] b

السبب:

الإجابة صحيحة لأن لايجاد مساحة مثلث أو لحل مثلث أو لرسم مثلث نحن نحتاج إلي ضلع واحد على الأقل ... هناك عدد لانهائي من المثلثات يمكن أن تكون لها نفس القياسات الزوايا



.. وهكذا

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. a [✓ b]

السبب:

خطأ : يمكن أستخدام قاعدة هيرون لأي مثلث علم أطوال أضلاعه

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته.

a [✓ b]

السبب:

يمكن إيجاد المساحة بمعلومية الأضلاع فقط •

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما

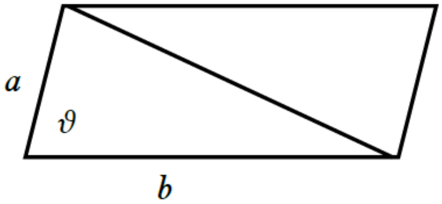
فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$

a [✓ b]

السبب:

قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلي مثلثين متطابقين مساحة كلاً منهما يساوي $\frac{1}{2}\, ab\ \sin\vartheta$

مساحة متوازي الأضلاع = $ab\ \sin\vartheta$



(6) في المثلث ABC: $BC = 5\,\text{cm}$, $AB = 7\,\text{cm}$, $AC = 9\,\text{cm}$

فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي $15\,\text{cm}^2$

a [✓ b]

السبب:

$$s = \frac{1}{2}\,(9+7+5\,) = 10\cdot 5\ \ cm$$

$$Area = \sqrt{10\cdot 5\,(10\cdot 5-9)(10\cdot 5-7)(10\cdot 5-5)}\ \approx 17\cdot 4\ cm^2$$

في التمارين (7—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40^{\circ}$, $b = 3\,\text{cm}$, $a = 2\,\text{cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي:

a $4.6\,\text{cm}^2$

b $3.86\,\text{cm}^2$

[✓ c] $1.93\,\text{cm}^2$

d $2.3\,\text{cm}^2$

السبب:

$$Area = \frac{1}{2}\ a\cdot b\ \ \sin c = \frac{1}{2}\ \times 2\times 3\times \sin 40\,^{\circ} \approx 1\cdot 93\ cm^2$$

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 9 cm , 8 cm , 7 cm هي:

(a) $6\sqrt{15}\ \text{cm}^2$ [✓ (b)] $12\sqrt{5}\ \text{cm}^2$

(c) $16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ (d) $18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

السبب:

$$s = \frac{1}{2}(7+8+9) = 12\ cm$$

$$Area = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = 12\sqrt{5}\quad Cm^2$$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

[✓ (a)] $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ \text{units}^2$ (b) $a^2\ \text{units}^2$

(c) $\frac{1}{2}a^2\text{units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\ \text{units}^2$

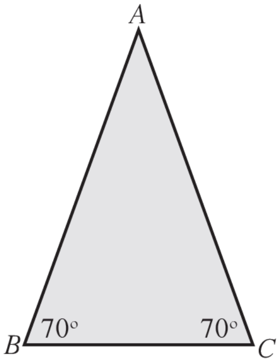
السبب:

$$s = \frac{1}{2}(a+a+a) = \frac{3a}{2}\quad cm$$

$$Area = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}\quad Cm^2$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{3}{16}\ a^4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ a^4\ \text{units}^2$$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالي $8\ \text{cm}^2$ فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالي:



[✓ (a)] 5 cm (b) 8 cm

(c) 4 cm (d) 6 cm

السبب:

$$\alpha = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$$

$$Area = \frac{1}{2}\ a\cdot b\ \sin\alpha$$

$$8 = \frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot \sin 40^\circ$$

$$\frac{16}{\sin 40^\circ} = x^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5\ cm$$

الوحدة
التاسعة
تطبيقات علي
حساب المثلثات

تمرَّنْ
9–2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة. a [✓ b]

السبب: من خلال التعويض في طرفي المتطابق ببعض القيم غير الصفر

لأنه إذا كانت $x = 30^\circ$ مثلاً فإن :

الطرف الأيسر = $3\ \sin 30^\circ = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

الطرف الأيمن = $\sin 3\times 30^\circ = \sin 90^\circ = 1$

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة. a [✓ b]

السبب:

من خلال التعويض في طرفي المتطابق ببعض القيم غير الصفر

لأنه إذا كانت $x = 60^\circ$ مثلاً فإن :

الطرف الأيسر = $cos 2x = cos 2\times 60^\circ = \cos 12\,0^\circ = -\frac{1}{2}$

الطرف الأيمن = $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 60^\circ - \cos^2 60^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

وبالتالي : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \neq \sin^2 x - \cos^2 x$

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ تمثل متطابقة.

[✓ a] b

السبب

$$\sec x - \cos x = \frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \sin x}{\cos x} = \tan x \ \sin x$$ = الطرف الأيمن

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

a [✓ b]

السبب:

$$\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\sin x}}{\sin^3 x} - \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin^3 x}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{\cos x}{\sin^4 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos x}{\sin^4 x}} = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin^2 x} \neq \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$$

في التمارين (10—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

a $\sin x \tan x$

b $\sin x \sec^2 x$

c $\cos x \sec^2 x$

[✓ b] $\sin x \csc x$

السبب:

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\tan^2 x}{\sin x} = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \sin x \cdot \sec^2 x$$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

a $-4 \sin x \cos x$

b 2

c -2

[✓ d] $4 \sin x \cos x$

السبب:

$$(\cos x+\sin x)^2-(\cos x-\sin x)^2$$
$$=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin x^2-\cos x^2+2\cos x\sin x-\sin^2 x$$
$$=4\sin x\cos x$$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x}+\tan x$ متطابق مع المقدار:

[✓ a] $\sec x\csc x$

b $\sec x\sin x$

c $\sec x\cos x$

d $\sin x\cos x$

السبب:

$$\frac{1}{\tan x}+\tan x=\cot x+\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{1}{\sin x\cos x}=\csc x\sec x$$

(8) المقدار: $\tan^2 x-\sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

a $\tan^2 x$

b $\cot^2 x$

[✓ c] $\tan^2 x\sin^2 x$

d $\cot^2 x\cos^2 x$

السبب:

$$\tan^2 x-\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)$$
$$=\sin^2 x(\sec^2 x-1)=\sin^2 x\tan^2 x$$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x}+\frac{\cos x}{\sec x}+1$ متطابق مع المقدار:

a 1

b -1

c 2

d -2

السبب:

$$\frac{\sin x}{\csc x}+\frac{\cos x}{\sec x}+1=\sin x\cdot\sin x+\cos x\cdot\cos x+1$$
$$=\sin^2 x+\cos x^2+1=1+1=2$$

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

[✓ a] $-\tan x \sin x$

(b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$

(d) $\tan x$

السبب:

$$\frac{\cos^2 x-1}{\cos x} = \frac{-\ \sin x}{\cos x} = -\ \sin^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\ \sin x \ \cdot \tan x$$

تمرَّنْ
9−3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

a [✓ b]

السبب:

$$\sin\alpha = |\sin x| = \frac{1}{2} \implies \alpha = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \sin x > 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الثاني

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad or \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi\, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad : \ k \in \mathbb{Z}$$

السبب:

المعادلة $\cos x = \sqrt{2} \approx 1.4$ ليس لها حل

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.

[✓ b] b

السبب:

$$\tan\alpha = |\tan x| = \sqrt{3} \implies \alpha = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x < 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{2\pi}{3} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}$$

$$or \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k\pi\, x = \frac{5\pi}{3} + k\pi \quad : \ k \in \mathbb{Z}$$

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0,\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

[✓ a] b

السبب:

$$\sin x \tan^2 x = \sin x \Rightarrow \sin x \tan^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x\,(\tan^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (0\,.\pi\ )\,.\pi \notin (0\,.\pi\ )$$

$$\tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in (0\,.\pi\ ) \quad or \quad x\ \frac{5\pi}{4} \notin (0\,.\pi\ )$$

$$\tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in (0\,.\pi\ ) \quad or \quad x\ \frac{7\pi}{4} \notin (0\,.\pi\ )$$

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0,2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$

a [✓ b]

السبب:

$$2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0,2\pi) \quad .x = \frac{3\pi}{4} \in [0,2\pi)$$

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \in [0,2\pi) \quad .x = \frac{7\pi}{4} \in [0,2\pi)$$

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

ⓐ الأول
ⓑ الأول أو الثالث
ⓒ الثالث
ⓓ الثاني أو الرابع

السبب:

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow \tan x < 0$$

وبالتالي فأن x تقع في الربع الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{7\pi}{6}\,,\ \frac{3\pi}{2}$

(b) $\frac{4\pi}{3}\,,\ \frac{3\pi}{2}\,,\ \frac{5\pi}{3}$

(c) $\frac{3\pi}{2}\,,\ \frac{11\pi}{6}$

[✓ d] $\frac{7\pi}{6}\,,\ \frac{3\pi}{2}\,,\ \frac{11\pi}{6}$

السبيب:

$$2\ \sin^2 x + 3\ \sin x + 1 = 0 \Longrightarrow (2\sin x + 1)\,(\sin x + 1) = 0$$

$\sin x + 1 = 0\ \Longrightarrow \sin x = -1$	$2\sin x + 1 = 0\ \Longrightarrow\ \sin x = -\frac{1}{2}$
x زاوية ربعية فتكون	x تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع
$x\ =\ \frac{3\pi}{2} \in\ [0\ .2\pi]$	$x\ =\ \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}\ \in\ [0\ .2\pi]$
	$x =\ 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{2}\ \in\ [0\ .2\pi]$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{5\pi}{6}\,,\ \frac{7\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}\,,\ \frac{3\pi}{4}\,,\ \frac{5\pi}{6}\,,\ \frac{5\pi}{4}$

(d) $\frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{3}\,,\ \frac{4\pi}{3}\,,\ \frac{7\pi}{4}$

السبب:

$$2\sqrt{2}\ \sin x\ \cos x\ -\ \sqrt{2}\ \cos x - 2\ \sin x\ =\ -1$$

$$2\sqrt{2}\ \sin x\ \cos x\ -\ \sqrt{2}\ \cos x - 2\ \sin x + 1 = 0$$

$$\sqrt{2}\ \sin x\ \cos x\ - 2\ \sin x) - \left(\sqrt{2}\ \cos x - 1\right) = 0$$

$$2\ \sin x\ \left(\sqrt{2}\ \cos x - 1\right) - \left(\sqrt{2}\ \cos x - 1\right) = 0$$

$$\left(\sqrt{2}\ \cos x - 1\right)(2\ \sin x - 1) = 0$$

$2\ \sin x - 1 = 0\ \Longrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$	$\sqrt{2}\ \cos x - 1 = 0\ \Longrightarrow\ \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
x تقع في الربع الأول أو الربع الثاني	x تقع في الربع الأول أو الربع الرابع
$x\ =\ \frac{\pi}{6} \in\ [0\ .2\pi\ )$	$x\ =\ \frac{\pi}{4} \in [0\ .2\pi\ )$
$x\ = \pi -\ \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ \in\ [0\ .2\pi\ )$	$x =\ 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{2}\ \in\ [0\ .2\pi\ )$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

ⓐ 0 ⓑ 1

ⓒ 2 ⓓ 3

السبب:

$$2 \quad \cos 4x = 1 \Longrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد للزاوية $4x$ تساوي $\frac{\pi}{3}$

الـ $4x$ تقع في الربع الأول أو الربع الرابع لأن $4x > 0$ وبالتالي فإن :

$4x = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi : k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\,\pi}{2} \quad : k \in \mathbb{Z}$	$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi : k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\,\pi}{2} \quad : k \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{0 \times \pi}{2} = \frac{5\pi}{12} \notin [0 . \frac{\pi}{8})$	$k = o: x = \frac{\pi}{12} + \frac{0 \times \pi}{2} = \frac{\pi}{12} \in [0 . \frac{\pi}{8})$
يوجد حل واحد فقط	$k = 1x = \frac{\pi}{12} + \frac{1 \times \pi}{2} = \frac{13\pi}{12} \notin [0 . \frac{\pi}{8})$

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

ⓐ $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.

ⓑ $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

[✓ c] $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.

ⓓ $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

السبب:

$$3\tan 2y = \sqrt{3} \Longrightarrow \tan 2y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

زاوية الأسناد للزاوية $2y$ تساوي $\frac{\pi}{6}$ ولكن $\tan 2y > 0$

$2y$ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث وبالتالي فإن :

$2y = \frac{\pi}{6} + k\,\pi \Longrightarrow y = \frac{\pi}{12} + \frac{k\,\pi}{2}$ أو $2y = \pi + \frac{\pi}{6} + k\,\pi \Longrightarrow y = \frac{7\pi}{12} + \frac{k\,\pi}{2} \quad : k \in \mathbb{Z}$

(11) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x)=\sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ هي:

(a) $\left\{\frac{\pi}{18}\,,\,\frac{7\pi}{18}\,,\,\frac{13\pi}{18}\right\}$

(b) $\left\{\frac{\pi}{18}\,,\,\frac{7\pi}{18}\right\}$

(c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}\,,\,\frac{\pi}{18}\right\}$

[✓ d] $\left\{\frac{-5\pi}{18}\,,\,\frac{\pi}{18}\,,\,\frac{7\pi}{18}\right\}$

السبب:

$$3\tan 3x=\sqrt{3}\implies \tan 3x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

زاوية الأسناد للزاوية $3x$ تساوي $\frac{\pi}{6}$ ولكن $\tan 3x>0$

$3x$ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث وبالتالي فإن

$3x=\frac{5\pi}{6}+k\,\pi : k\in\mathbb{Z}$ $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k\,\pi}{3}\quad : k\in\mathbb{Z}$	$3x=\frac{\pi}{6}+k\,\pi\quad : k\in\mathbb{Z}$ $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\,\pi}{3}\quad : k\in\mathbb{Z}$
$x=\frac{5\pi}{18}+\frac{0\times\pi}{3}=\frac{5\pi}{18}\notin(-\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{\pi}{2})$	$k=o:x=\frac{\pi}{18}+\frac{0\times\pi}{3}=\frac{\pi}{18}\in(-\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{\pi}{2})$
	$k=1:x=\frac{\pi}{18}+\frac{1\times\pi}{3}=\frac{7\pi}{18}\in(-\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{\pi}{2})$
	$k=-1:x=\frac{\pi}{18}+\frac{-1\times\pi}{3}=\frac{-5\pi}{18}\in(-\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{\pi}{2})$

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

[✓ a]   ⓑ

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\sin 75^{\circ} = \sin(45^{\circ} + 30^{\circ}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ⓐ   [✓ b]

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(60^{\circ} - 45^{\circ}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\cos h$

ⓐ   [✓ b]

السبب:

$$\cos\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = \cos h\ \cos\frac{\pi}{2} - \sin h\ \sin\frac{\pi}{2} = 0 - \sin h\ \times 1 = -\sin h$$

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=14$ [✓ a] b

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2=14$$

في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

a $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ b $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

c $2+\sqrt{3}$ [✓ d] $-2-\sqrt{3}$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$tan\,\frac{7\pi}{12}=tan\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-2-\sqrt{3}$$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

a $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ b $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

[✓ c] $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ d $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

السبب:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\,\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a $1+\tan h$ b $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

[✓ c] $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ d $1-\tan h$

السبب:

$$\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h\times 1}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$

b $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

c $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$

[✓ d] $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

السبب:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\ \cos\frac{\pi}{4}+\sin x\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

(9) $\cos 94°\cos 18°+\sin 94°\sin 18°$ تساوي:

a $\cos 112°$

[✓ b] $\cos 76°$

c $\sin 112°$

d $\sin 76°$

$$\cos 94^{\circ}\ \cos 18^{\circ}-\sin 94^{\circ}\ \sin 18^{\circ}=\cos(94^{\circ}-18^{\circ})=\cos 78^{\circ}$$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

a $\cos\frac{4\pi}{21}$

[✓ b] $\sin\frac{4\pi}{21}$

c $\cos\frac{10\pi}{21}$

d $\sin\frac{10\pi}{21}$

السبب:

$$\sin\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{\pi}{7}-\ \cos\frac{\pi}{3}\ \sin\frac{\pi}{7}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{4\pi}{21}$$

(11) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

a $\tan\dfrac{2\pi}{15}$

b $\tan\dfrac{8\pi}{15}$

c $\tan\left(\dfrac{-8\pi}{15}\right)$

[✓ ***d***] $\tan\left(\dfrac{-2\pi}{15}\right)$

السبب:

$$\frac{\tan\frac{\pi}{5}-tan\,\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{5}\cdot\tan\frac{\pi}{3}}=\tan\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$ ● a ○ b

السبب:

لأنه من قانون ضعف الزاوية يكون

$$\sin 4x = \sin 2(2x) = 2\ \sin(2x)\cos(2x)$$

(2) $\sin 4x = -4\cos x\sin^3 x + 4\cos^3 x\sin x$ ● a ○ b

السبب:

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 2\ (2\sin x\cos x)\ (\cos^2 x - \sin^2 x\ )$$

$$= 4\ \sin x\ \cos^3 x - 4\ \cos x\sin^3 x = -4\ \cos x\sin^3 x + 4\ \sin x\ \cos^3 x$$

(3) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ ● a ○ b

السبب:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

بتربيع الطرفين

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ ● a ○ b

السبب

لأنه من قانون ضعف الزاوية يكون

$$\cos 6x = \cos 2(3x) = 2\ \cos^2(3x) - 1$$

(5) $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

[✓ a] ○ b

السبب:

$$\cos 2x = 2\ \cos^2 x - 1$$

بالتعويض عن x بـــــ $\frac{x}{2}$ يكون

$$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos x\ = 2\ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2\cos^2\frac{x}{2}$ تساوي:

- [✓ b] $1 + \cos x$
- ○ a $\frac{1 + \cos x}{2}$
- ○ d $\frac{1 - \cos 2x}{2}$
- ○ c $1 + \cos 2x$

السبب:

$$\cos 2x = 2\ \cos^2 x - 1$$

بالتعويض عن x بـــــ $\frac{x}{2}$ يكون

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow 2\ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x\ + 1$$

(7) $\cos\frac{\pi}{8}$ تساوي:

- ○ b $\sqrt{2} - 1$
- ○ a $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$
- ○ d $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$
- [✓ c] $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

السبب:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) \quad .\ 0 < \frac{x}{4} < \frac{\pi}{2} \quad .\ 0 < \frac{x}{8} < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

a $\frac{2}{5}$

b $\frac{-2}{5}$

[✓ **c**] $\frac{-3}{5}$

d $\frac{3}{5}$

السبب:

$$0 < \vartheta < \frac{3\pi}{2} \qquad \Longrightarrow 0 < \frac{\vartheta}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

الزاوية $\frac{\vartheta}{2}$ تقع في الربع الثاني ويكون $\cos\frac{\vartheta}{2} < 0$

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\vartheta}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

الوحدة

العاشرة

الهندسة الفراغية

(هندسة الفضاء)

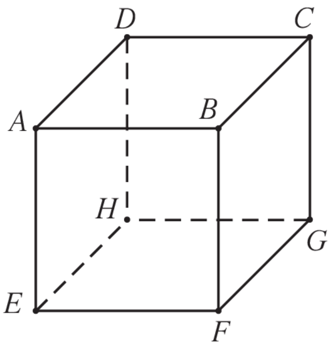
المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة B تمارين موضوعية

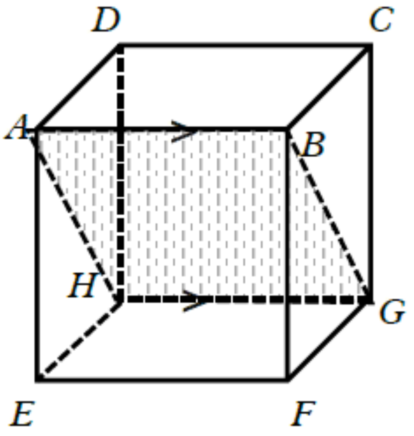
في التمارين (5–1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

$ABCDEFGH$ مكعّب.



(1) المستقيمان HG , AB يعينان مستويًا. [✓ a] b

السبب :

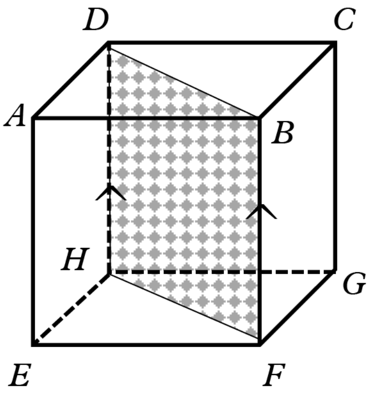


المستقيمان HG , AB يعينان مستوياً

(لأنهما مستقيمان متوازيان)

(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا.

[✓ a] b



السبب:

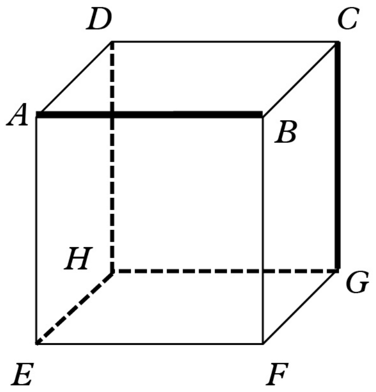
النقاط B , D , H , F تعين مستوياً

لأن $\overleftrightarrow{BF} // \overleftrightarrow{DH}$

وبالتالي فأن B , D , H , F تعين المستو $(BDHF)$

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا.

a [✓ b]



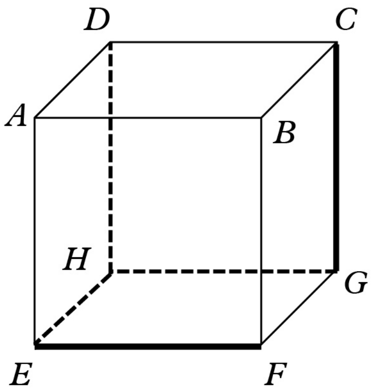
السبب:

النقاط A. B . G . C لأ تعين مستوياً

لأن $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{GC}$ متخالفان ولا يمكن أن يحويهما مستو واحد

(4) المستقيمان GC, EF يعينان مستويًا.

a [✓ b]



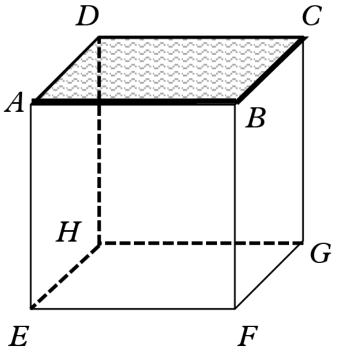
السبب:

المستقيمان $\overleftrightarrow{GC} . \overleftrightarrow{EF}$ لا يعينان مستوياً

لأنهما مستقيمان متخالفان

(5) المستقيمان AB ,BC يعينان مستويًا.

[✓ a] b

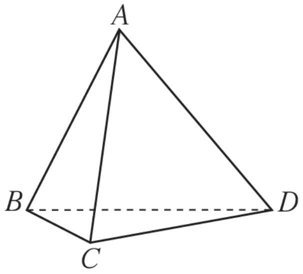


السبب:

المستقيمان BC . AB يعينان مستوياً

لأنهما مستقيمان متقاطعان $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{B\}$

في التمرينين (7–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



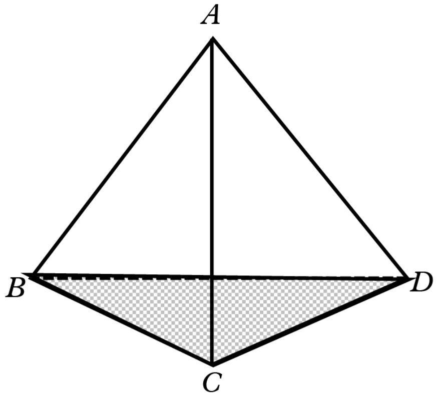
(6) النقاط B, C, D تعيّن:

[✓ a] مستويًا واحدًا

b مستويين مختلفين

c عدد لا منته من المستويات المختلفة

d لا يمكن أن تعيّن مستويًا



السبب:

النقاط $B . C . D$ تعين مستوياً واحداً

(لأنهما ليست على استقامة واحدة)

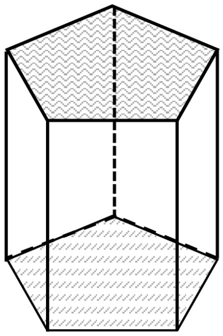
(7) أوجه منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

a خمسة مستويات مختلفة

b ستة مستويات مختلفة

[✓ c] سبعة مستويات مختلفة

d ثمانية مستويات مختلفة



السبب:

منشور قائم خماسي القاعدة يعين سبعة مستويات

خمسة جانبية ومستويين للقاعدتين ٠

تمرَّنْ
10–2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

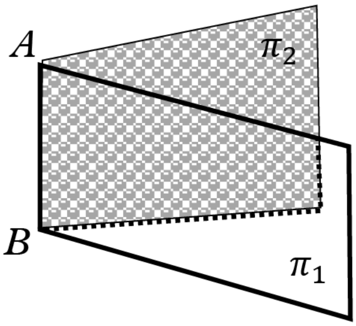
المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. a [✓ b]

السبب

إذا اشتركا المستويان π_1 . π_2 في نقطة واحدة على الأقل فإنها يشتركان في مستقيم وبالتالي فهما غير متوازيين ٠

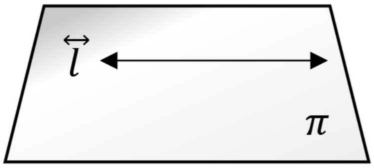


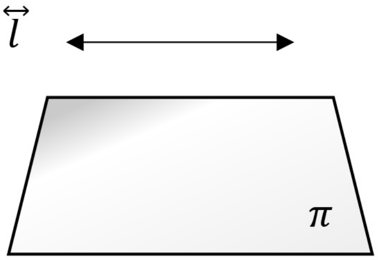
(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. a [✓ b]

السبب:

إذا كان $\overleftrightarrow{l} // \pi$

فأنه أما يكون $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ أو $\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \emptyset$

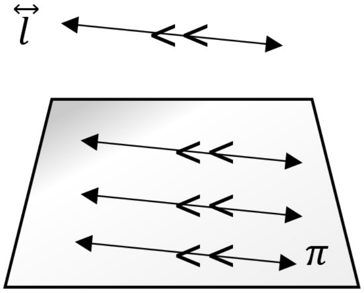




(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π a [✓ b]

السبب

إذا مستقيم $\overleftrightarrow{l}$ مستوي π فإنه يوازي عدد لانهائي من المستقيمات المتوازية في π وليس مستقيماً واحداً ٠

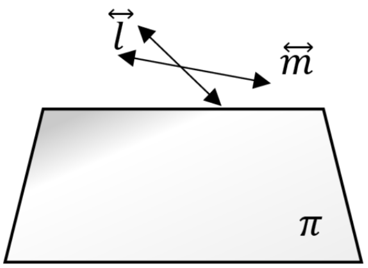


(4) إذا كان: $\pi // \overleftrightarrow{m}$, $\pi // \overleftrightarrow{l}$ فإن $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$

a [✓ b]

السبب:

من الممكن أن $\overleftrightarrow{l}$ لأيوازى $\overleftrightarrow{m}$



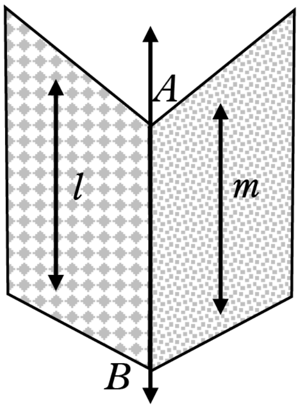
(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

[✓ a] b

السبب:

إذا $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$

فأن $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{AB}$



في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

a متقاطعان

b متخالفان

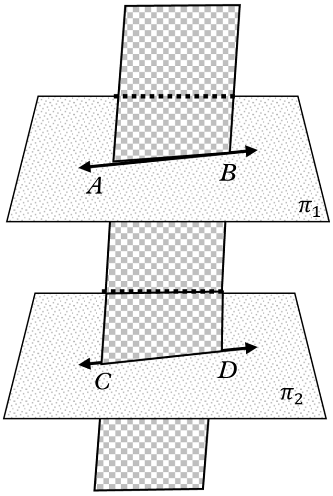
[✓ c] متوازيان

d متعامدان

إذا كان $\pi_1 // \pi_2$ ، المستوى π قاطع لهما

وكان $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{AB}$. $\pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{CD}$

فإن $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$



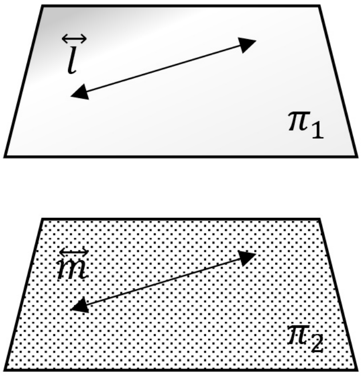
(7) إذا كان $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$ فإن:

- a $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$
- b $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$
- c $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ متخالفان
- [✓ d] $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$

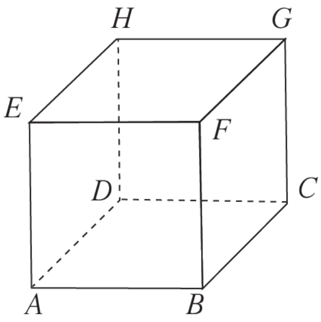
السبب:

إذا كان $\pi_1 \;//\; \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$

فإن $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \emptyset$

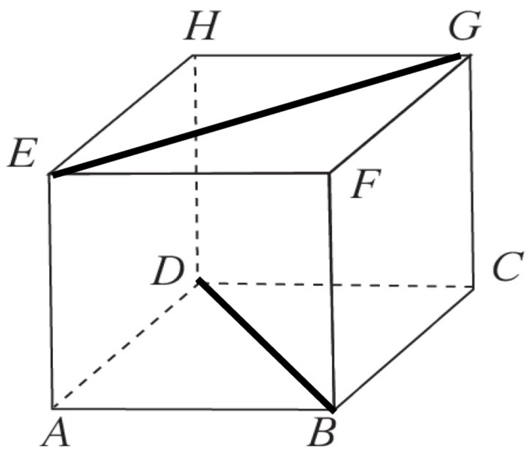


(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{EG}$ هما:



- a متوازيان
- b متقاطعان
- [✓ c] متخالفان
- d يحويهما مستوٍ واحد

السبب:



في المكعب $ABCDEFGH$

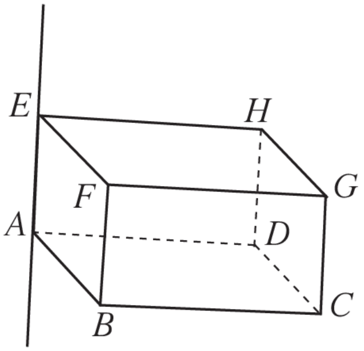
$\overleftrightarrow{BD} \;//\; \overleftrightarrow{EG}$ مستقيمان متخلفان

تمرَّنْ
10−3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane

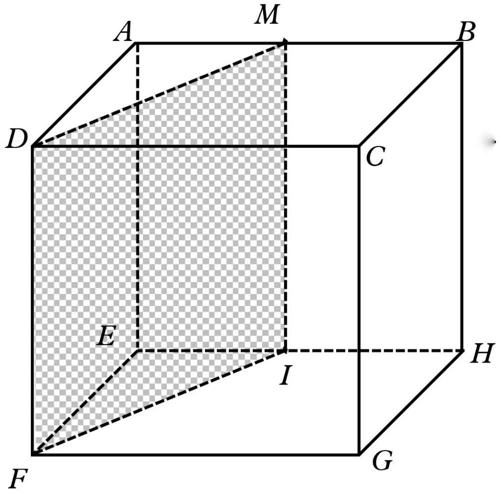
المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (7−1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (2−1)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعّب، النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ [✓ a] b



السبب:

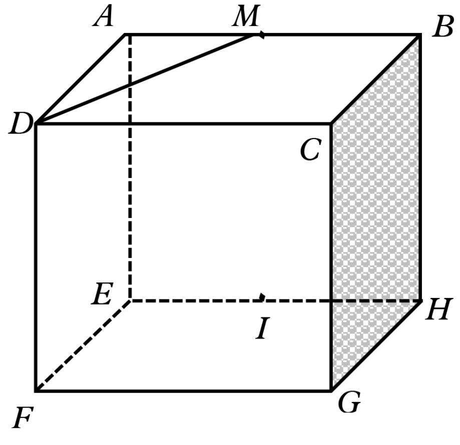
لأن وجه المكعب مربع الشكل والقطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين متقابلين توازي هذين الضلعين

، وبالتالي فإن $\overline{MI} // \overline{BH}$

وحيث $\overline{BH} \perp (EFGH)$

فأن $\overline{MI} \perp (EFGH)$

(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ [✓ b] b



السبب:

$\overline{AD} // \overline{BC}$ ، $\overline{MD}$ ليس عمودي على $\overline{AD}$

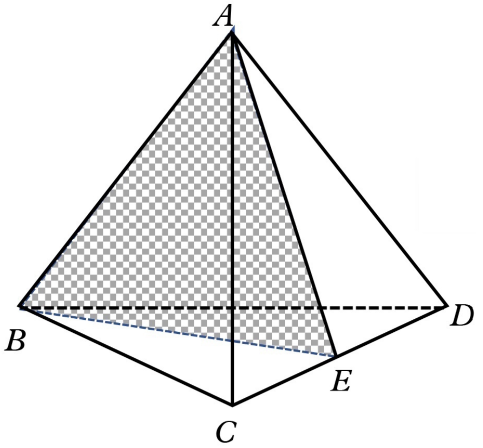
وبالتالي فإن $\overline{MD}$ ليس عمودياً على $\overline{BC}$

وحيث $\overline{MD} \subset (BCGH)$

فإن $\overline{MD}$ ليس عمودي على $(BCGH)$

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

[✓ a] b



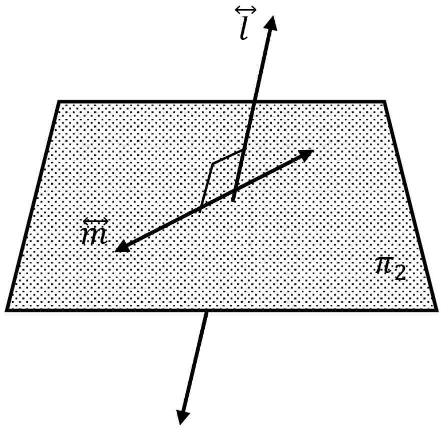
السبب:

إذا كان الهرم ثلاثي القاعدة وجميع أحرفه متطابقة فإن أي وجه من أوجهه يكون مثلث متطابق الأضلاع ، ويكون $\overleftrightarrow{CD} \perp (ABE)$ **لأن** ∴ E **منتصف** $\overline{CD}$

وبالتالي فإن $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ **لأن** $\overleftrightarrow{AB} \subset (ABE)$

(4) إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{m} \subset \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$

a [✓ b]



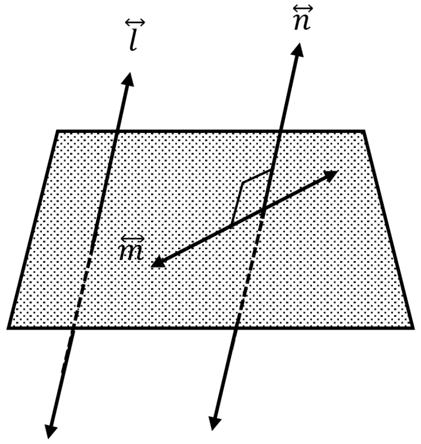
السبب:

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{l} \perp \pi . \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

π **ليست محتواه** $\overleftrightarrow{l}$

(5) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$

a [✓ b]



السبب:

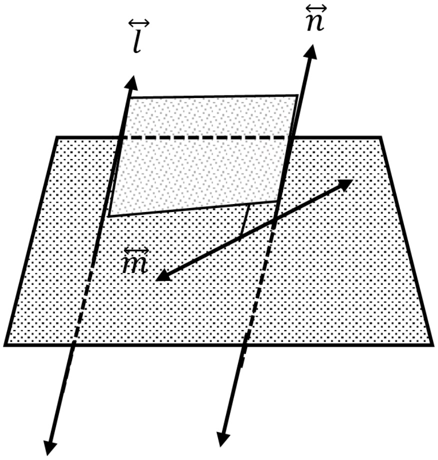
في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{m}$ $\overleftrightarrow{l}$ متخالفان $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$

$\overleftrightarrow{l}$ **ليست عموديا** $\overleftrightarrow{n}$

(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{n}$ متخالفان.

a [✓ b]

السبب:



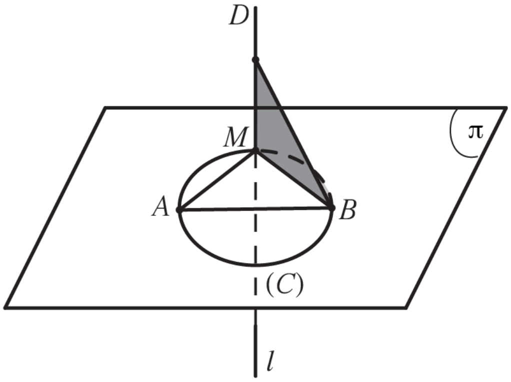
في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{m}$ $\overleftrightarrow{l}$ متخالفان $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$

فقد يكون $\overleftrightarrow{l}$. $\overleftrightarrow{n}$ يحويهما مستوي واحد

في التمارين (8–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) في الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:



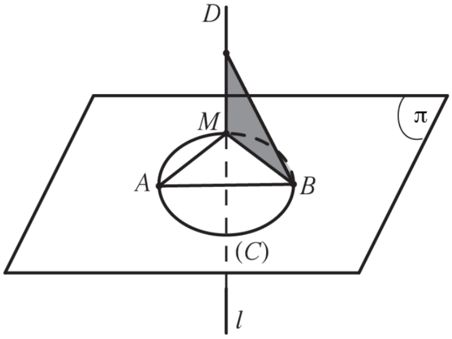
○ a $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

○ b $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

● c $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$

○ d $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$

السبب



$\because \overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$. $\overleftrightarrow{AM} \subseteq (AMB)$

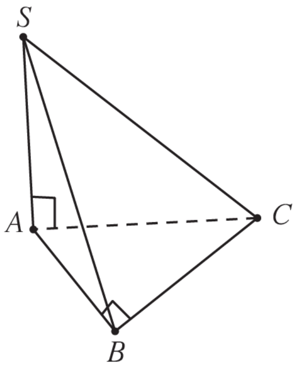
$\therefore \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{AM}$ ——————— (1)

$\because$ الزاوية المحيطية المرسومة علي قطر الدائرة تساوي 90°

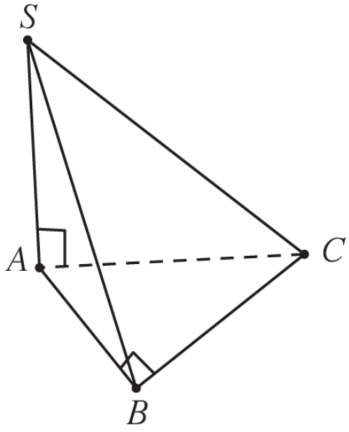
$\therefore \overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AM}$ ——————— (2)

من (1) ، (2) $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ نظرية

(8) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^{o}$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:



- (a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$
- [✓ (b)] $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$
- (c) المثلث SAB متطابق الضلعين.
- (d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$



$\because \overleftrightarrow{SA} \perp (ABC) . \overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$

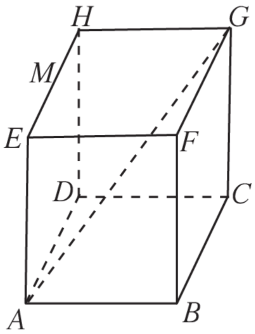
$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ——— (1)

∵ في المثلث ABC فيه $m(\hat{B}) = 90^{\circ}$

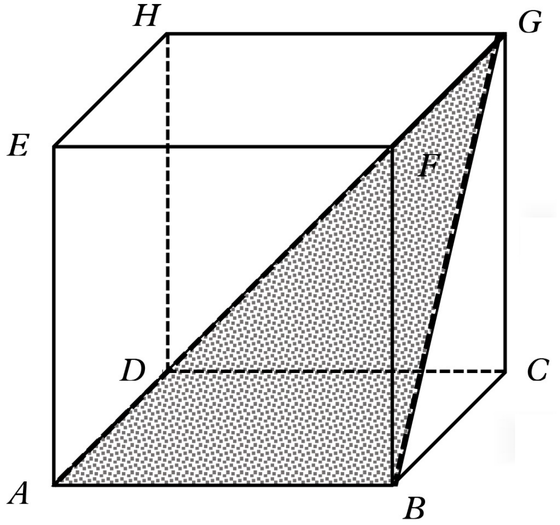
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ——— (2)

من (1) ، (2) $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$ نظرية

(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي:



- [✓ (b)] $3\sqrt{3}$ cm
- (a) $\sqrt{3}$ cm
- (d) 18 cm
- (c) 9 cm



السبب:

لديك الأن معلومة هامة :

في المكعب تكون النسبة بين

طول ضلع المكعب : طول قطر أحد الأوجه : طول القطر المكعب

= 1 : $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$

وحيث أن طول ضلع المكعب = 3 cm C

طول ضلع المكعب : طول قطر أحد الأوجه : طول القطر المكعب

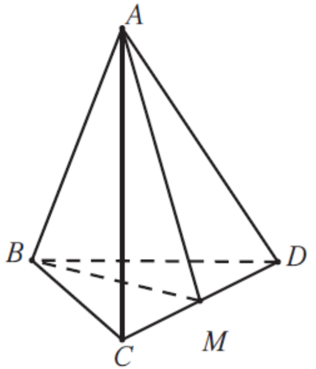
= 3 : $3\sqrt{2}$: $3\sqrt{3}$

تمرَّنْ
10–4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (1–4)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ [✓ a] b

السبب :

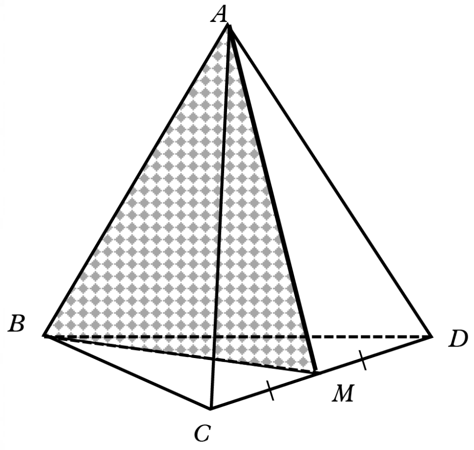
إذا كان الهرم ثلاثي القاعدة وجميع أوجهه متطابقة

أي أن يكون كل وجه من أوجه مثلث متطابق الأضلاع

ويكون : $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$

يكون : $\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (ABM)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$



(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC, \overleftrightarrow{DC}, ADC)$ هي $A\widehat{M}D$ a [✓ b]

السبب : **لأن حافة الزاوية الزوجية هي** : $\overleftrightarrow{CD}$

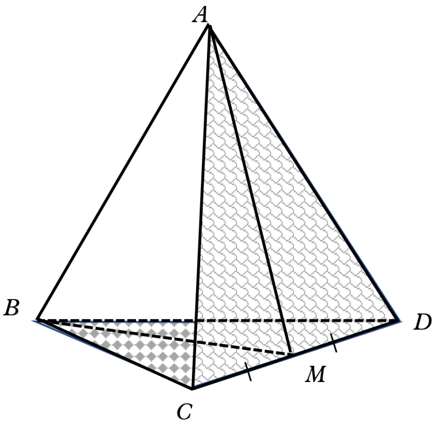
$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{AM} \subset (ACD)$

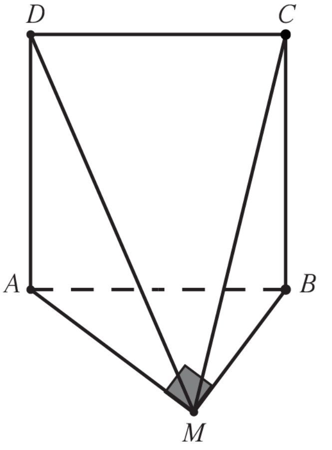
$\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{BM} \subset (BCD)$

وبالتالي فإن :

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$(BCD . \overleftrightarrow{DC} . ADC)$ **هي** $A\widehat{M}B$





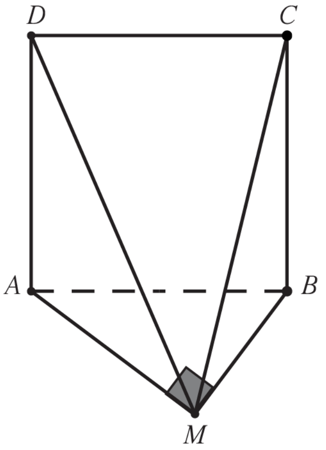
أسئلة التمرينين (4–3)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

فإن:

(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD)　　b　　[✓ a]



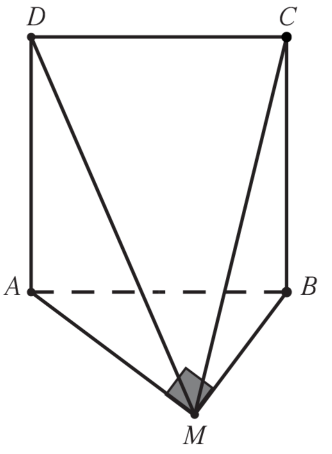
$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (AMB) \ . \overleftrightarrow{BM} \subset (AMB)$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ________________ **(1)**

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ________________ **(2)**

من (2) , (1)　　$\therefore \overleftrightarrow{BM} \perp (MAD)$　　نظرية

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB)　　b　　[✓ a]



$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (AMB) \ . \overleftrightarrow{BM} \subset (AMB)$

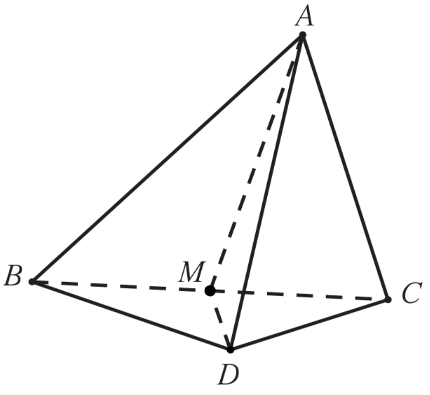
$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ________________ **(1)**

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ________________ **(2)**

من (2) , (1)　　$\therefore \overleftrightarrow{BM} \perp (MAD)$　　نظرية

(من خواص المربع)　$\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{AD}$　.　$\overleftrightarrow{AD} \perp (AMB)$

$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMB)$



في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمارين (7–5)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.

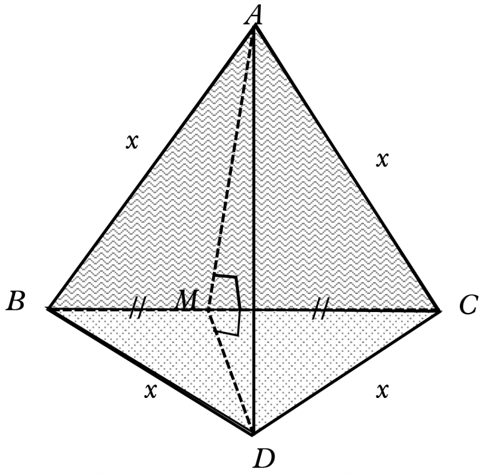
(5) الزاوية الزوجية $(BAC\ ,\ \overleftrightarrow{BC}\ ,\ BCD)$ هي:

[✓ a] $A\widehat{M}D$

b $B\widehat{M}C$

c $A\widehat{M}B$

d $B\widehat{A}M$



السبب: **لأن حافة الزاوية الزوجية هي :** $\overleftrightarrow{BC}$

$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$. $\overleftrightarrow{AM} \subset (ABC)$

$\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$. $\overleftrightarrow{DM} \subset (BCD)$

وبالتالي فإن :

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\big(BAC\ .\ \overleftrightarrow{BC}\ .\ BCD\big)$ **هي** $A\,\hat{M}\,D$

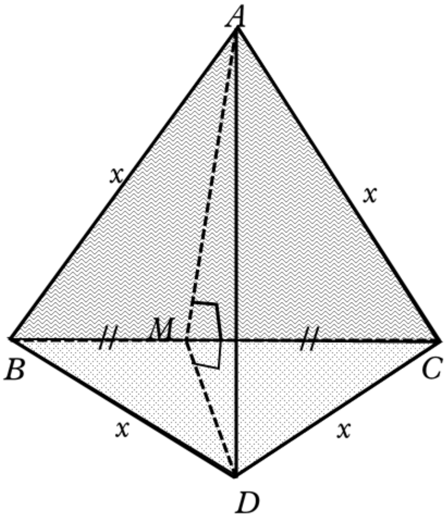
(6) إذا كان: $m(A\widehat{M}D) = 60^{\circ}$ فقيمة AD بدلالة x هي:

a $\frac{x}{2}$

b $\frac{x\sqrt{2}}{2}$

c $x\sqrt{3}$

[✓ d] $\frac{x\sqrt{3}}{2}$



السبب:

حيث أن $\Delta\ ABC$ **متطابق الأضلاع وطول ضلعه** x

وأيضا $\Delta\ DBC$ **متطابق الأضلاع وطول ضلعه** x

فإن $AM = MD$

$$AM = MD = AC\sin\big(A\hat{C}M\big) = x\ \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ x$$

من قانون جيب التمام في المثلث

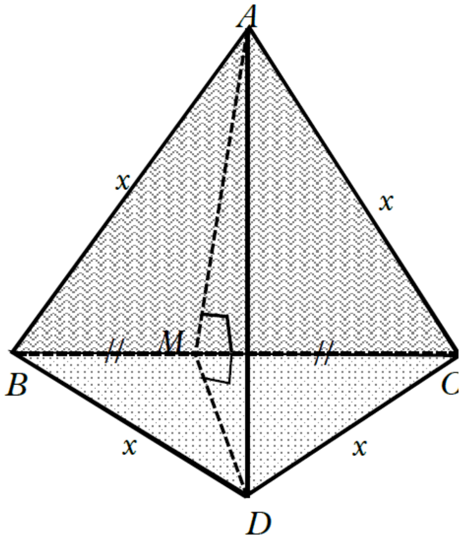
$$(AD)^2 = (AM)^2 + (MD)^2 - 2AM \cdot MD\ \cos\big(A\widehat{M}D\big)$$

$$(AD)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ x\right)^2 - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\ x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\ x\ \cos(60)$$

$$(AD)^2 = \frac{3x^2}{4} \qquad \Longrightarrow\ AD = \frac{\sqrt{3}}{2}\ x$$

(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ، فإنّ: $m(A\widehat{M}D)$ يساوي:

a 90° **b** 45° [✓ **c** 60°] **d** 30°



السبب:

حيث أن ΔABC **متطابق الأضلاع وطول ضلعه** x

وأيضا ΔDBC **متطابق الأضلاع وطول ضلعه** x

فإن $AM = MD$

$$AM = MD = AC\sin(A\hat{C}M) = x\ \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

من قانون جيب التمام في المثلث AMD

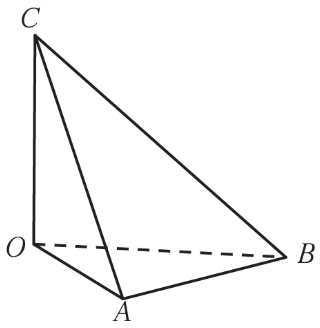
$$(AD)^2 = (AM)^2 + (MD)^2 - 2AM \cdot MD\ \cos(A\widehat{M}D)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x\ \cos(A\widehat{M}D)$$

$$\cos(A\widehat{M}D) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{1}{2}$$

$$m(A\widehat{M}D) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

أسئلة التمرينين (9–8) على الشكل المقابل.



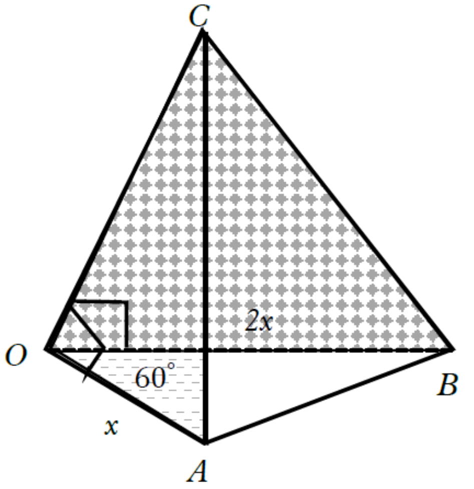
إذا كان OAB مثلث فيه:

$OA = x$ ، $OB = 2x$ ، $m(A\widehat{O}B) = 60^\circ$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

a x **b** $x\sqrt{2}$ [✓ **c** $x\sqrt{3}$] **d** $\frac{x}{2}$



السبب:

لإيجاد AB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث AOB

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2OA \cdot OB\ \cos(A\hat{O}B)$$

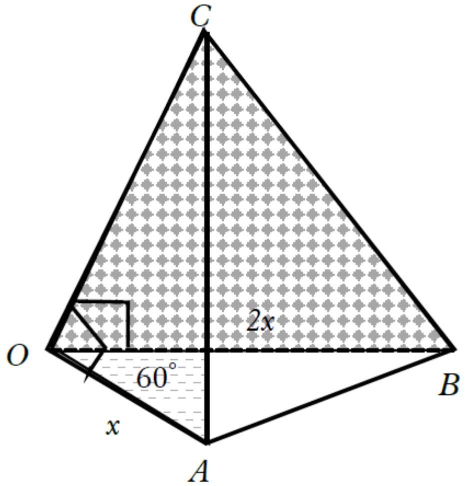
$$(AB)^2 = (x)^2 + (2x)^2 - 2\times x\times 2x\ \cos(60)$$

$$(AB)^2 = x^2 + 4\,x^2 - 4x^2 \times \frac{1}{2} = 3x^2$$

$$AB = \sqrt{3}\,x$$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC\,, \overleftrightarrow{OC}\,, BOC)$ هو:

(a) 30º　(b) 45º　[✓ (c) 60º]　(d) 90º



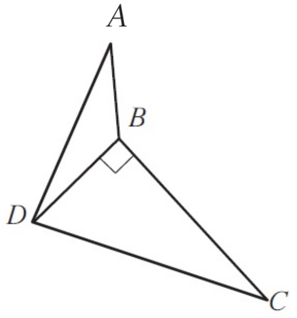
السبب:

$A\ \hat{O}\ B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(AOC\ .\overleftrightarrow{OC}\ .BOC)$

وبالتالي فإن قياس الزاوية الزوجية $(AOC\ .\overleftrightarrow{OC}\ .BOC)$ يساوي 60°

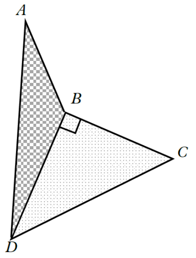
(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:



[✓ (b) $A\widehat{B}C$]　(a) $D\widehat{B}C$

(d) $A\widehat{D}C$　(c) $A\widehat{B}D$



لان حافة الزاوية الزوجية هي $\overleftrightarrow{BD}$

$\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

وبالتالي فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

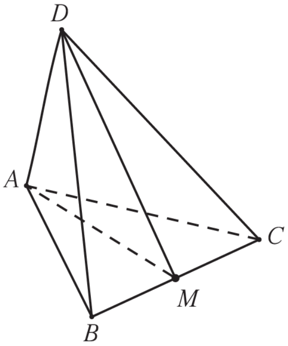
$\overleftrightarrow{BD}$ هي $A\ \hat{B}\ C$

تمرَّنْ
10−5

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة B تمارين موضوعية

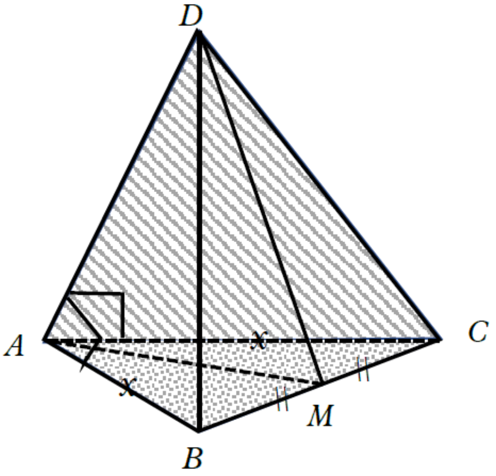


في التمارين (1−6)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمارين (1−5)، على الشكل المقابل.

إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع (ABC)، $AB = AC$، M منتصف $\overline{BC}$ فإن:

(1) $(ABC) \perp (DAC)$ b [✓ a]

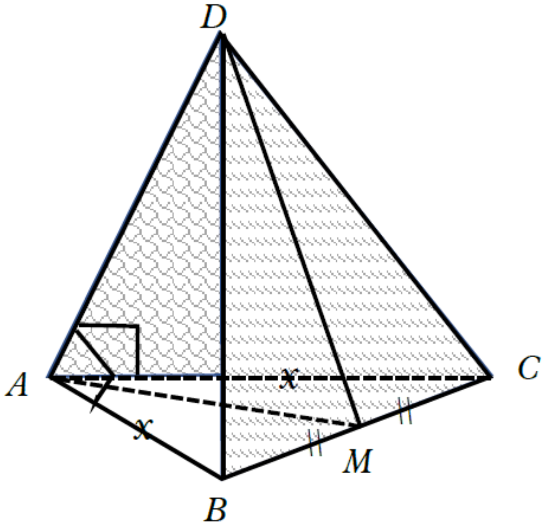


السبب:

$$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC) . \overleftrightarrow{AD} \subset (DAC)$$

$$\therefore (ABC) \perp (DAC)$$

(2) $(DBC) \perp (DAC)$ [✓ b] a

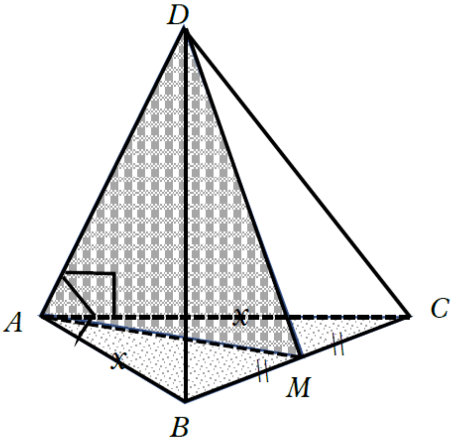


السبب:

$\overleftrightarrow{AD}$ ليس عموديا على (DBC)

وبالتالي فإن (DAC) . (DBC) غير متعامدان

(3) $(AMD) \perp (ABC)$ [✓ a] b

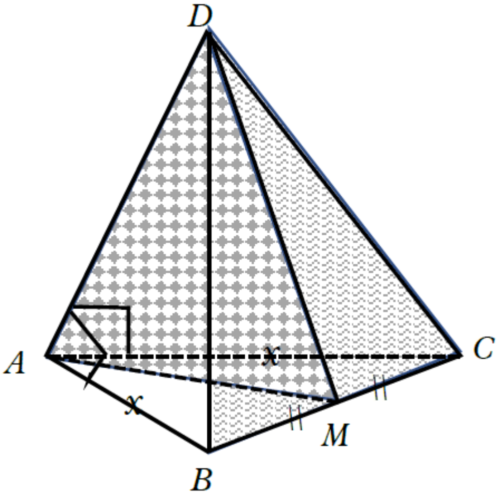


السبب:

$$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC) . \overleftrightarrow{AD} \subset (AMD)$$

$$\therefore (AMD) \perp (ABC)$$

(4) $(AMD) \perp (DBC)$ [✓ a] b



السبب:

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC) . \overleftrightarrow{BC} \subset (ABC)$

$\therefore (ABC) \perp (DAC)$

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ______ **(1)**

$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ______ **(2)**

من خواص المثلث المتطابق الضلعين M **منتصف** $\overline{BC}$

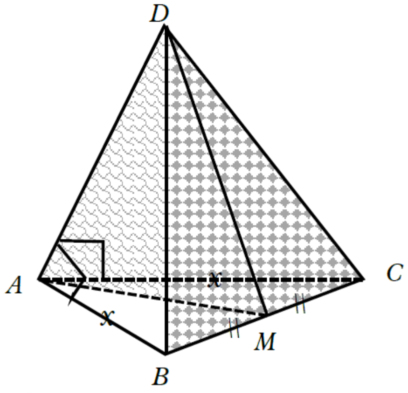
من (2) , (1)

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$

$\because \overleftrightarrow{BC} \perp (AMD) . \overleftrightarrow{BC} \subset (DBC)$

$\therefore (AMD) \perp (DBC)$

(5) $DC = DB$ [✓ a] b



السبب:

$\because (AMD) \perp (DBC)$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$

$\overleftrightarrow{DM} \subset (AMD)$

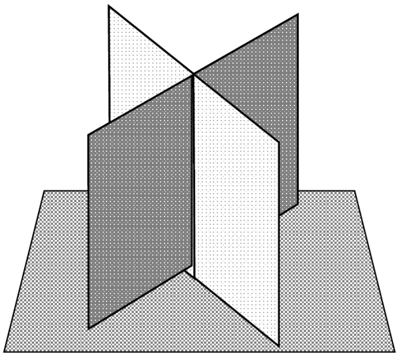
$\therefore \overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

وحيث أن M **منتصف** $\overline{BC}$ **فإن** $DC = DB$

(6) المستويان العمودان على ثالث متوازيان.

a [✓ b]

السبب:



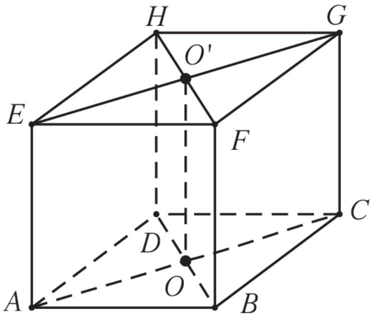
ليس من الضروري أن يكون متوازيان من المكن أن يكون متقاطعان

في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمرينين (7–8)، على الشكل المقابل حيث إن:

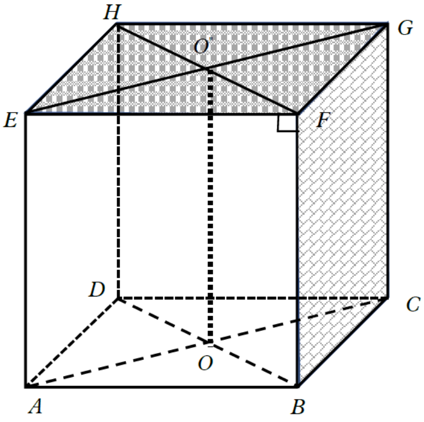
$ABCDEFGH$ شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل $ABCD$، O' مركز المستطيل $EFGH$



(7) $(EFGH)$، $(FGCB)$ هما:

[✓ a] متعامدان b متوازيان c منطبقان d ليس أيًّا مما سبق



من خواص شبة المكعب الزاوية الزوجية

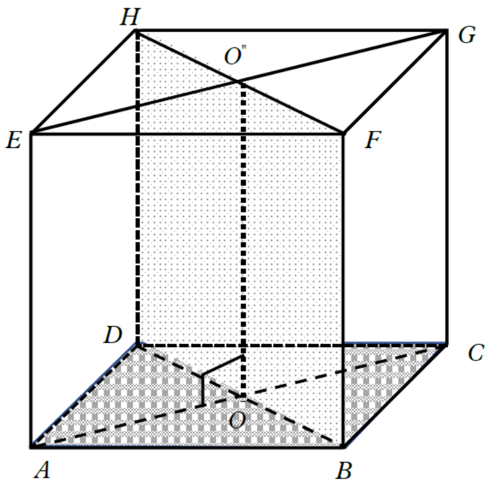
بين كل وجه من أوجه تساوي 90°

وبالتالي فإن

$(FGCB) \perp (EFGH)$

(8) $(DBFH)$، $(ABCD)$ هما:

a متوازيان b منطبقان [✓ c] متعامدان d ليس أيًّا مما سبق



السبب:

لأن الزاوية الزوجية يين $(ABCD)$

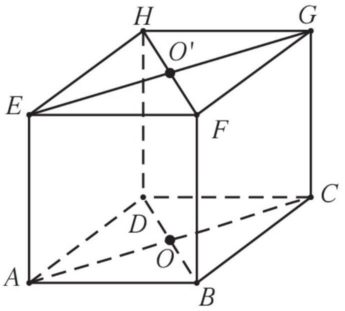
$(DBFH)$ تساوي 90°

وبالتالي فإن

$(ABCD) \perp (DBFH)$

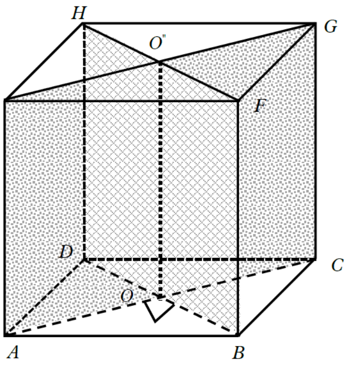
أسئلة التمرينين (10–9)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.

O مركز المربع $ABCD$، O' مركز المربع $EFGH$



(9) $(EACG)$، $(DHFB)$ هما:

- a منطبقان
- [✓ b] متعامدان
- c متوازيان
- d ليس أيًّا مما سبق



السبب:

حيث أن قطري المربع متعامدين فإن

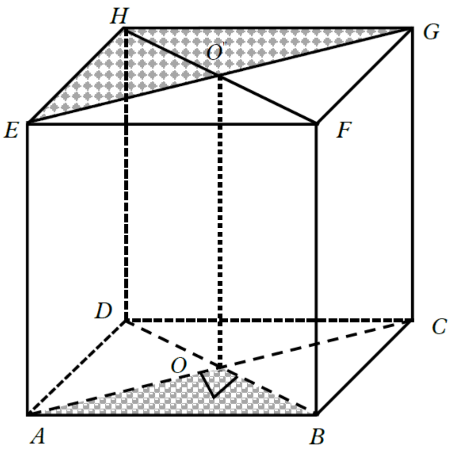
الزاوية الزوجية يين

$(EACG)$, $(DHFB)$ تساوي 90°

$(DHFB) \perp (EACG)$

(10) (HGE)، (OAB) هما:

- a متعامدان
- [✓ b] متوازيان
- c منطبقان
- d ليس أيًّا مما سبق



السبب:

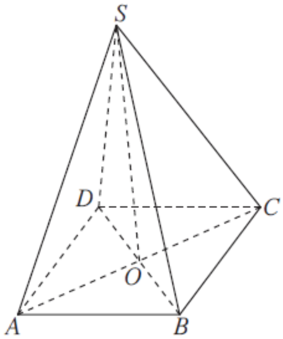
$(AOB) \subset (ABCD)$

$(EHG) \subset (EHGF)$

$(ABCD) // (EHGF)$

من خواص المكعب

$(AOB) // (EHG)$



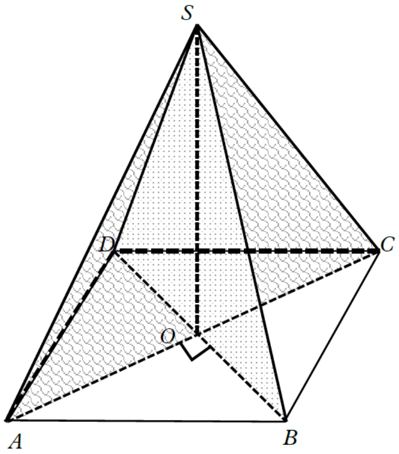
(11) إذا كان $ABCD$ مربع مركزه O، $\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$ فإن:

[✓ b] $(SAC) \perp (SBD)$

a $(SAB) \perp (SBC)$

d $(SAD) \perp (ABCD)$

c $(SAB) // (SCD)$



السبب

حيث أن قطر المربع متعامدين

$\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$ **فإن قياس الزاوية الزوجية بين**

$(OAB).(SOB)$ **تساوي** $90°$

وبالتالي $(SAC) \perp (SBD)$

(12) إذا كان: $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$ فإن:

a $\pi_1 // \pi_2$

[✓ b] $\pi_1 \perp \pi_2$

c $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$

d $\pi_1 = \pi_2$

السبب

حسب النظرية $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$ **فإن** $\pi_1 \perp \pi_2$

الوحدة

الحادية عشر

الجبر المتقطع

تمرّنْ
11–1

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) قيمة المقدار $10!$ هي 3 628 800 [✓ a] b

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن : $10! = 3628800$

(2) قيمة المقدار $5! \times 4!$ هي 360 a [✓ b]

السبب:

لأن باستخدام الآلة الحاسبة : نجد أن : $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$

(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو $4!$ [✓ a] b

السبب:

لان الشخص الأولي لدية أربعة فرص في الجلوس ، و الشخص الثاني لدية ثلاثة فرص في الجلوس ، الشخص الثاني لدية فرصتان في الجلوس ، الشخص الرابع لدية فرص واحده في الجلوس

وبالتالي يكون عدد طرق الجلوس = $4\times3\times2\times1 = 4!$

(4) قيمة المقدار $3 \times {}_5C_4$ هي 15 [✓ a] b

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة $3\times {}_5C_3 = 5\times 3 = 15$

(5) $(n-r)! = n! - r!$

ⓐ a [✓ b]

السبب :

لأن المضروب لا يمكن توزيعه $(n-r)! \neq n! - r!$

في التمارين (6–15)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

a $\frac{10}{21}$ b $\frac{1}{120}$ [✓ c] 120 d 1

السبب : **باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :**

$$\frac{10!}{7!\times 3!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 3\times 2\times 1} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$$

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

[✓ a] 75 600 b 7 560 c 2.5 d 210

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :

$${}_{10}C_6 \times {}_6P_4 = 120 \times 360 = 75600$$

(8) قيمة المقدار ${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4}$ هي:

a 18 b 5.184 [✓ c] 10 d 735

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :

$${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4} = \frac{\frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1}}{\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}} = 10$$

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

[✓ a] 95 040 b 475 200 c 392 d 11 404 800

السبب

إذا كان ترتيب المراكز مهم فإن عدد طرق اختيار 5 لأعبين من بين 12 لاعبا يساوي $_{12}P_{5}$ وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $_{12}P_{5} = 95040$

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

(a) 210 [✓ (b) 35] (c) 840 (d) 24

السبب:

حيث أن الاختيار من مجموعة فهذا يعني أن ترتيب العناصر غير مهم ذلك نحسب عدد التوافيق ، وبالتالي فأن عدد طرق اختيار 3 أعلام من 7 أعلام تساوي $_{7}C_{3}$ باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $_{7}C_{3} = 35$

(11) إذا كان هناك طريق واحدة تصل بين كل مدينتين. فما عدد الطرق التي تصل بين 8 مدن.

(a) 20 160 (b) 2 520 (c) 40 320 [✓ (d) 5 040]

السبب:

عدد الطرق التي تصل بين 8 مدن هي : $(8-1)\,! = 7! = 5040$

(12) في المخزن 6 بطاريات من ماركات مختلفة، 3 بطاريات جديدة و3 مستخدمة. بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار على الأقل بطارية واحدة جديدة من 3 بطاريات؟

(a) 1 [✓ (b) 19] (c) 9 (d) 6

السبب:

لآنه يمكن أخذ كل الخيارات الممكنة لـ 3 بطاريات من بين $(3+3=6)$ بطارية

ورفض اختيار 3 بطاريات من (البطاريات المستخدمة) فيكون

عدد اختيارات باستخدام الآلة الحاسبة هي : $_{6}C_{3} - (\,_{3}C_{3} \times \,_{3}C_{0}) = 20 - 1 = 19$

(13) بكم طريقة مختلفة يجلس أحمد ومحمد وعلي وجاسم وفهد بشرط تجاور محمد وأحمد؟

(a) $5!$

(b) $4!$

[✓ (c) $2! \times 4!$]

(d) $2! \times 5!$

السبب:

محمد	أحمد	علي	وجاسم	فهد
على	أحمد	محمد	أحمد	فهد
على	جاسم	أحمد	محمد	فهد
على	جاسم	فهد	أحمد	محمد

من الرسم أن هناك 4 **طرائق مختلفة لجلوس محمد واحمد متجاورين**
وعدد طرق جلوس محمد وأحمد تساوي $2!$
عدد طرق جلوس على وجاسم وفهد $3!$ **وبالتالي فإن إجمالي عدد طرق الجلوس تساوي** $4\,(2!)(3!) = (4!)\,(2!) = 48$

(14) إذا كان: $_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

(a) 6

[✓ (b) 5]

(c) 4

(d) 2

السبب:

$$_nP_3 = 60$$

$$n\,(n-1)\,(n-2) = 60$$

$$n\,(n-1)\,(n-2) = 5 \times 4 \times 3$$

$$n = 5$$

(15) مجموعة حلّ المعادلة: $_6C_r = 15$ هي:

(a) $\{2\}$

(b) $\{4\}$

[✓ (c) $\{2, 4\}$]

(d) $\{3\}$

السبب:

عندما $r = 2$ **فإن** $_6C_r = {}_6C_2 = 15$ (**مقبول**)

عندما $r = 3$ **فإن** $_6C_r = {}_6C_3 = 20$ (**مرفوض**)

عندما $r = 4$ **فإن** $_6C_r = {}_6C_4 = 15$ (**مقبول**)

تمرَّنْ
11−2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5−1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5+5c^4+10c^3+10c^2+5c+1$ [✓ a] b

السبب:

مفكوك

$$(c+1)^5 = {}_5C_0c^5 + {}_5C_1c^4 + {}_5C_2c^3 + {}_5C_3c^2 + {}_5C_4c + {}_5C_5c^0$$

$$(c+1)^5 = c^5 + 5c^4 + 10c^3 + 10c^2 + 5c + 1$$

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5 a [✓ b]

السبب:

إذا كان الحد $126C^4d^5$ **أحد مفكوك** $(c+d)^n$ **فإن** :

$$n-r=4\ldots\ldots\ldots(1)\ ,\ r=5\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

بالتعويض من (2) , (1) **فإن**

$$n-5=4 \Rightarrow n=9$$

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7 [✓ a] b

السبب:

معامل T_2 **يساوي** 7

$${}_nC_1 = 7 \Rightarrow n = 7$$

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$

a [✓ b]

السبب:

نوجد الحد الثاني في مفكوك $(x+3)^9$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_2 = T_{1+1} = 9\,C_1 \times x^{9-1} \times 3^1 \quad = 27\,x^9$$

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب.

a [✓ b]

السبب:

نوجد الحد السابع في مفكوك $(x-3)^7$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_7 = T_{6+1} = 7\,C_6 \times x^{7-6} \times (-3)^6 \quad = 27\,x$$

يكون معامل الحد السابع موجب لأن (-3) **مرفوعة لأس زوجي**

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

a $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

b $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

[✓ d] $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

السبب:

مفكوك

$$(a-b)^3 = {}_3C_0\, a^3 - {}_3C_1\, a^3 b + {}_5C_2\, c^2 b^2 - {}_3C_3\, b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

a $-21a^5b^2$

b $-7a^6b$

c $7a^6b$

[✓ d] $21a^5b^2$

السبب:

نوجد الحد الثالث في مفكوك $(a-b)^7$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_3 = T_{2+1} = 7\,C_2 \times (a)^{7-2} \times (-b)^2 \quad = 21\,a^5\,b^2$$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

[✓ b] الحد الثالث

a الحدّ الثاني

d الحد الخامس

c الحد الرابع

السبب:

مفكوك $(2a-3\,b)^6$

$$(2a-3\,b)^6 = {}_6C_0(2a)^6 + {}_6C_1(2a)^{6-1}(-3b)^1 + {}_6C_2(2a)^{6-2}(-3b)^2$$

$${}_6C_3(2a)^{6-3}(-3b)^3 + {}_6C_4(2a)^{6-4}(-3b)^4 + {}_6C_5(2a)^{6-5}(-3b)^5$$

$$+\,{}_6C_6(2a)^{6-6}(-3b)^6$$

$$(2a-3\,b)^6 = 64\,a^6 - 576a^5\,b + 2160\,a^4\,b^2 + \cdots$$

معامل الحد الثالث الذي معاملة *2160*

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

b 3 312

a 5 170

d 2 316

[✓ c] 4 320

السبب

نوجد الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_3 = T_{2+1} = 5\,C_2 \times (3c)^{5-2} \times (-4b)^2 \quad = 4320\,a^3\,b^2$$

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

a الرابعة

[✓ b] الخامسة

c السادسة

d التاسعة

السبب:

إذا كان الحد $126\,x^5\,y^4$ **أحد حدود مفكوك** $(x+y)^9$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$\text{n} = 9\ .\ 9 - r = 5\ \Rightarrow r\ = 9 - 5 = 4$$

وبالتالي فإن : $r = 4$ **وتكون رتبة الحد هي الرتبة الخامسة لأن**

$$T_5 = T_{4+1}$$

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

a T_3

[✓ b] T_6

c T_5

d T_8

السبب:

في مفكوك كثيرة الحدود $(3x+2y)^8$ **نجد** $n = 8$

في الحد الذي يحتوي على x^3y^5 **نلاحظ أن أس** y **يساوي** 5 **وبالتالي فإن** $r = 5$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$\therefore\ T_{5+1} = 8\,C_3 \times (3x)^{8-5} \times (2y)^5 = 8\,C_5 \times 3^3 \times 2^5\,x^3y^5$$

الحد السادس هو الذي يحتوي على x^3y^5 **أي الحد هو** T_6

تمرَّنْ
11–3

الاحتمال

Probability

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًّا، اختيار الدواليب عشوائيًّا هما حدثان مستقلان. [✓ a] b

السبب:

لأن وقوع أحدهما لا يوثر في وقوع الأخر ٠

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{12}{17}$, $P(n)=\frac{3}{8}$ إذًا $P(m\cap n)=\frac{9}{17}$ a [✓ b]

السبب:

حيث أن الحدثين n , m مستقلان فيكون

$$p\,(n\;\cap m\,) = p(n)\;\cdot p(m)\,) = \frac{2}{8} \times \frac{12}{17} = \frac{9}{34}$$

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ [✓ a] b

$S = \{1.2.3.4.5.6\}$ $\quad .n\,(s) = 6$

$A = \{\,4\,\}$, $B = \{\,2\,,4\,,6\,\}$

الحدث $A\;\cup B$ (**للحصول** 4 **أو عدد زوجي**)

$A\;\cup B = \{\,4\,\} \cup \{\,2\,.\,4.\,6\,\} = \{\,2.4.6\}$ $\qquad n\,(A \cup B) = 3$

$$p\,(A\;\cup B\,) = \frac{n\,(A\cup B)}{n\,(s)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًّا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$ [✓ a] b

السبب:

الحدث E : (أن يكون 3 من إجاباتك صحيحة)

وحيث أن الإختيار صح أو خطأ فنستخدم احتمال ذات الحدين ،

وتكون $K = 3\ \ .n = 5\ \ 1 - m = \frac{1}{2}\ .m = \frac{1}{2}$

$$\because P\ (E) = nC_k\, m^k\ \cdot\ (1-m)^{n-k}$$

$$\therefore P\ (E) = {}_5C_3\ \left(\frac{1}{2}\right)^3\ \cdot\ \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m) = \frac{1}{3}$، $P(n) = \frac{9}{10}$ إذاً $P(m \cap n)$ تساوي:

a $\frac{1}{3}$ b $\frac{25}{30}$

[✓ c] $\frac{3}{10}$ d $\frac{11}{30}$

السبب:

حيث أن m , n مستقلان فيكون

$$p\ (n\ \cap m\ ) =\ p(n)\ \cdot p(m)\ ) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{10}$$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t) = \frac{3}{5}$، $P(r) = \frac{1}{3}$ إذاً $P(t \cup r)$ تساوي:

a $\frac{1}{5}$ [✓ b] $\frac{14}{15}$

c $\frac{4}{15}$ d 0

السبب:

حيث أن الحدثين t , r متنافيان فيكون :

$$P\ (t\ \cup r\ ) = P(t) + P(r) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{14}{15}$$

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{1}{7}$، $P(r)=60\%$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

a 28%

b 42%

c $\frac{16}{35}$

[✓ d] $\frac{26}{35}$

السبب:

حيث أن الحدثين $r\,,t$ متنافيان فيكون :

$$P\ (t\ \cup r\ ) = P(t) + P(r) = \frac{1}{7} + \frac{3}{5} = \frac{26}{35}$$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

a $\frac{2}{3}$

[✓ b] $\frac{5}{6}$

c $\frac{1}{2}$

d 1

السبب:

$$S\ = \{\ 1.2.3.4.5.6\} \qquad .\,n\ (s) = 6$$

$$A = \{\ 2{,}4{,}6\ \} \qquad , \qquad B = \{\ 2\ ,3\ ,5\ \}$$

الحدث $A\ \cup B$ (للحصول عدد زوجي أو عدد أولي)

$$A\ \cup B = \{\ 2.4.6\ \ \} \cup\ \{\ 2\ .\ 3\ .\ 5\ \} = \{\ 2.3.4.5.6\} \quad n\ (A \cup B) = 5$$

$$p\ (A\ \cup B\ ) = \frac{n\ (A{\cup}B)}{n\ (s)} = \frac{5}{6}$$

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًّا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

a $\frac{1}{14}$

b $\frac{28}{15}$

c $\frac{2}{7}$

[✓ d] $\frac{15}{28}$

السبب: **بفرض أن S فضاء العينة فيكون :** $n\ (S) = {}_8C_2 = 28$

وبفرض الحدث B : (كرة زرقاء وكرة حمراء) فيكون

$$n\ (B) = {}_5C_1 \times {}_3C_1 = 5 \times 3 = 15$$

$$P\ (B) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث B}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة S}} = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{28}$$

(10) يتوزّع طلاب مدرستين B، A على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية:

الصف / المدرسة	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
A	37%	35%	28%
B	38%	34%	28%

اختير عشوائيًا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

[✓ a] 20.16%　　ⓑ 100%

ⓒ 0%　　ⓓ 79.84%

السبب:

بفرض أن الحدث E هو الحدث المطلوب فيكون احتمال هذا الحدث هو

$$P\ (E) = (37\% + 35\%) \times 28\%$$
$$= 0.2016$$
$$= 20.16\%$$

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة لا عيب فيها هو تقريبًا:

ⓐ 0.033　　ⓑ 5.9×10^{-4}

[✓ c] 4×10^{-4}　　ⓓ 2.955

الحدث E (أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة لاعيب فيها)

وتكون $K = 3\ .\ n = 8\ .\ 1 - n = 1 - 0.90 = 0.10 \quad .\ n = 0.90$

$$\because P\ (E) = nC_k\, m^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$\therefore P\ (E) = {}_8C_3\, (0.9)^3 \cdot (0.10)^{8-3} = 4\times10^{-4} = 0.0004$$