تمرّنْ
7–1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$ $=4i$

(2) $\sqrt{-15}$ $=\sqrt{15}\,i$

(3) $3\sqrt{-9}$ $=9i$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$ $=-5i$

في التمارين (5–8)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3}$ $=2+\sqrt{3}\,i$

(6) $\sqrt{-1}+2$ $=2+i$

(7) $\dfrac{-\sqrt{-50}-2}{6}$ $=\frac{-1}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{6}i$

(8) $\dfrac{\sqrt{-8}+8}{2}$ $=4+\sqrt{2}\,i$

في التمرينين (9–11)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x+3yi=-14+9i$ $x=-7,\ y=3$

(10) $3x+19i=16-8yi$ $x=\frac{16}{3},\ y=\frac{-19}{8}$

(11) $14i^2-3i=2x+(y+5)i$ $x=-7,\ y=-8$

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1=-2+3i$ (b) $z_2=-4$ (c) $z_3=-i$ (d) $z_4=2(2+i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ $4+5i$

(b) $M(-4,-2)$ $-4-2i$

(c) $N(-2,6)$ $-2+6i$

(d) $P(0,-3)$ $=-3i$

في التمارين (14–23)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2+4i)+(4-i)$ $=6+3i$

(15) $6-(8+3i)$ $=-2-3i$

(16) $(4+\sqrt{-9})+(6-\sqrt{-49})$ $=10-4i$

(17) $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$ $=11-5i$

(18) $(-2i)(5i)$ $=10$

(19) $(4i)(-9i)^2$ $=-324i$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$ $=7-i$

(21) $(-6-5i)(1+3i)$ $=9-23i$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$ $=-27+8i$

(23) $i(-6i)^3$ $=-216$

$Z=-i$ ، $Z^{12}=1$ $Z^{27}=i$

(24) إذا كان $z=\dfrac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{12} , z^{27}

(25) إذا كان $z_1=2+i$, $z_2=-3+4i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2 = 1-\frac{4}{3}i$ (b) $z_1 \cdot z_2 = -10+5i$ (c) z_1^3 (d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = -2+11i$

(e) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$ $5+3i$ (f) $z_1 \cdot \bar{z}_2$ $-2-11i$

(26) إذا كان $z=\dfrac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\bar{z}$ $= -\sqrt{3}-i$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ (b) $5i$ (c) $3i-4$ $-\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$

$-\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i$ $\frac{-1}{5}i$

(28) إذا كان $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{3}+2i$ فأوجد: $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\dfrac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = -\dfrac{5}{7}-\dfrac{\sqrt{3}}{7}i$ ، $\dfrac{Z_1}{Z_2} = -\dfrac{5}{7}+\dfrac{\sqrt{3}}{7}i$ ، $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = -\dfrac{1}{7}-\dfrac{3\sqrt{3}}{7}i$

(29) **تفكير ناقد:** أوجد العلاقة بين x , y عندما يكون $(x+yi)^2$ عددًا تخيّليًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ — (a) ● (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z=3+4i$ هو: $\bar{z}=-3-4i$ — (a) (b) ●

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=3-2i$ هو: $-z=3+2i$ — (a) (b) ●

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ — (a) ● (b)

في التمارين (14–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

ⓐ $-15+6i$ ⓑ $6+15i$ ⓒ $6-15i$ ⓓ $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

ⓐ $x=5\ ,\ y=-2$ ⓑ $x=-5\ ,\ y=-2$ ⓒ $x=-5\ ,\ y=2$ ⓓ $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

ⓐ $\dfrac{1}{10}+\dfrac{17}{10}i$ ⓑ $\dfrac{-1}{10}-\dfrac{17}{10}i$ ⓒ $\dfrac{-1}{10}+\dfrac{17}{10}i$ ⓓ $\dfrac{1}{10}-\dfrac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

ⓐ $(5,\ 1)$ ⓑ $(-5,\ -1)$ ⓒ $(5,\ -1)$ ⓓ $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

ⓐ $18+17i$ ⓑ $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

ⓒ $6+17i$ ⓓ 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

ⓐ $z=-3+4i$ ⓑ $z=5+4i$ ⓒ $z=-3$ ⓓ $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

ⓐ $z=14+13i$ ⓑ $z=14-13i$ ⓒ $z=2-11i$ ⓓ $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\dfrac{i}{i+2}$ هي:

ⓐ $z=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$ ⓑ $z=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$

ⓒ $z=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$ ⓓ $z=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

ⓐ $-i$ ⓑ i ⓒ 1 ⓓ -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

ⓐ $\mathbb{Z}^+$ ⓑ $\{0,2,4,6,...\}$ ⓒ $\{1,3,5,...\}$ ⓓ $\{2,4,6,...\}$

تمرّنْ
7–2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5+12i|$ $=13$ (b) $|2-2i|$ $=\sqrt{8}$ (c) $|2i|$ $=2$

في التمارين (2–7)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ $= 1+\sqrt{3}i$

(3) $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ $= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$ $\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} i$

(5) $(2, \pi)$ $= -2$

(6) $(2, 270°)$ $-2i$

(7) $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

في التمارين (8–13)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$ $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

(9) $(-2, 5)$ $(\sqrt{29}, 111.8)$

(10) $(-3, 0)$ $(3, \pi)$

(11) $(0, 4)$ $(4, 90)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})$ $\left(4, \frac{4\pi}{3}\right)$

(13) $(3\sqrt{3}, -3)$ $\left(6, \frac{11\pi}{6}\right)$

في التمارين (14–21)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(15) $2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(16) $-2+2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(17) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(18) $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

(19) $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(20) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$

(21) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 1\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

في التمارين (22–28)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(23) $8(\cos 30° - i\sin(-150°))$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

(25) $2(\cos 45° + i\sin 405°)$

Subject: كراسة التمارين / /

P.12 التمارين (22-28) اكتب في الصورة المثلثية

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 5\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

$= 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(23) $8(\cos 30 - i\sin(-150))$ $\quad \sin(-150) = -\sin 30$

$= 8(\cos 30 - i(-\sin 30)) = 8(\cos 30 + i\sin 30)$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(25) $2(\cos 45 + i\sin 405) = 2(\cos 45 + i\sin 45)$

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$= 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$-\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{7\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}$

(27) $5(\cos(-60) + i\sin(-60)) = 5(\cos 60 - i\sin 60)$

$= 5(\cos 300 + i\sin 300)$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right) =$

$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6}$

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6}$

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(27) $5\left(\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\right)$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (33–29)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-i$

(30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1-i$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

(32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{2}i$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$ $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$ — (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135^\circ)$ هي: $B(-1,1)$ — (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ — (a) (b)

(4) العدد المركب: $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ — (a) (b)

(6) السعة الأساسية للعدد $z=\cos 30^\circ+i\cos 240^\circ$ هي 330° — (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2,2\sqrt{3})$ (b) $A(-2,2\sqrt{3})$ (c) $A(-2,-2\sqrt{3})$ (d) $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

a $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

b $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

c $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

d $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

a $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

b $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

c $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

d $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

a $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

b $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

c $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

d $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

$i^{2n+2}(1+i^6)$

a 1

b 0

c -1

d i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

a $35 - 12i$

b $35 + 12i$

c $81 - 12i$

d $81 + 12i$

حل المعادلات

الجبر ده A تمارين مقاليه P.15

① $3z - 1 + i = 5 - 2i$

$3z = 5 + 1 - 2i - i$

$3z = 6 - 3i$

$z = 2 - i$

② $z + 2\bar{z} = 4 + i$ $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

$a + bi + 2(a - bi) = 4 + i$

$a + 2a + bi - 2bi = 4 + i$

$3a - bi = 4 + i$

$3a = 4$ $-b = 1$

$a = \frac{4}{3}$ $b = -1$ $\Rightarrow$ $z = \frac{4}{3} - i$

③ $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

$2z = 5 - 6i$

$z = \frac{5}{2} - 3i$

④ $z + 3(1+i)z - 8(2-i) = 0$ $z = a + bi$

$[1 + (3 + 3i)](a + bi) - 16 + 8i = 0$

$(4 + 3i)(a + bi) = 16 - 8i$

$$z = \frac{16 - 8i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i}$$

$$z = \frac{8}{5} - \frac{16}{5} i$$

Subject: / /

اوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية

(5) $16x^2+64=0$

$16x^2=-64$

$x^2=\frac{-64}{16} \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\mp 2i$

مجموعة الحل $=\{2i ، -2i\}$

(6) $x^2-5x+7=0$

$a=1 \qquad b=-5 \qquad c=7$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(7)=-3$

$x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\mp\sqrt{-3}}{2(1)}=\frac{5\mp\sqrt{3}i}{2}$

مجموعة الحل $=\left\{\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i ، \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(7) $x^2+6x+25=0$

مجموعة الحل $=\{-3-4i ، -3+4i\}$

(8) $Z^2-2Z+4=0$

مجموعة الحل $=\{1-\sqrt{3}i ، 1+\sqrt{3}i\}$

(9) $Z+\frac{4}{Z}=2$

$Z^2+4=2Z \Rightarrow Z^2-2Z+4=0$

مجموعة الحل $\{1-\sqrt{3}i ، 1+\sqrt{3}i\}$

(15) لتكن المعادلة $Z^2+Z+2=0$ بدون حل المعادلة
اثبت أن $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة ثم اوجد الجذر الثاني

$$\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)+2=$$

$$=\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+2=$$

$$\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i+\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i+2=0$$

$\therefore$ $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة
ويكون الجذر الثاني $\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

ونلاحظ:

$$Z_1+Z_2=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}=\frac{-2}{2}=-1=\frac{b}{a}$$

$$Z_1\cdot Z_2=\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)$$

$$=\frac{(-1+\sqrt{7}i)(-1-\sqrt{7}i)}{4}$$

$$=\frac{(-1)^2+(\sqrt{7})^2}{4}$$

$$=\frac{1+7}{4}=2=\frac{c}{a}$$

Subject: / /

(11) اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z=-3+4i$

نفرض أن $m+ni$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2=Z \Rightarrow (m+ni)^2=-3+4i$$
$$m^2-n^2+2mni=-3+4i$$

بالمطابقة

$$m^2-n^2=-3 \quad \dots (1)$$
$$2mn=4 \quad \dots (2)$$
$$|w|^2=|Z| \Rightarrow (\sqrt{m^2+n^2})^2=\sqrt{(3)^2+(4)^2}$$
$$m^2+n^2=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}$$
$$m^2+n^2=5 \quad \dots (3)$$

بجمع (1) , (3)

$$2m^2=2 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow$$

$m=1$ or $m=-1$

بالتعويض في (2) نجد

$2mn=4$	$2mn=4$
$2(1)n=4$	$2(-1)n=4$
$n=2$	$n=-2$

∴ الجذرين التربيعيين

$1+2i$, $-1-2i$

نلاحظ أن احد هذين الجذرين نظير جمعي للآخر

Subject:

(12) اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 5 + 12i$

نفرض أن $w = a + bi$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (a+bi)^2 = 5 + 12i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

بالمطابقة

$$a^2 - b^2 = 5 \quad \text{---} \; (1)$$

$$2ab = 12 \quad \text{---} \; (2)$$

$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow (\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{5^2+12^2}$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$a^2 + b^2 = 13 \quad \text{---} \; (3)$$

بجمع (3) , (1)

$$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$a = 3 \quad \text{or} \quad a = -3$$

بالتعويض في (2)

$$2ab = 12 \qquad\qquad 2ab = 12$$

$$2(3)b = 12 \qquad\qquad 2(-3)b = 12$$

$$b = 2 \qquad\qquad b = -2$$

∴ الجذرين التربيعيين

$$3 + 2i \qquad\qquad -3 - 2i$$

ونلاحظ أن هذين الجذرين احدهما النظير الجمعي للآخر

(14) حل المعادلة $(2+i)Z^2 = 22-19i$

$$Z^2 = \frac{22-19i}{2+i} = 5-12i$$

بفرض أن $Z = a+bi$ فيكون

$$(a+bi)^2 = 5-12i$$

$$a^2-b^2+2abi = 5-12i$$

بالمطابقة

$$a^2-b^2 = 5 \quad \text{----} \quad (1)$$

$$2ab = -12 \quad \text{----} \quad (2)$$

$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow \left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2}$$

$$a^2+b^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$$

$$a^2+b^2 = 13 \quad \text{----} \quad (3)$$

بجمع (1) ، (3) نجد

$$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$$

$a = 3$ or $a = -3$

بالتعويض في (2)

$2ab = -12$	$2ab = -12$
$2(3)b = -12$	$2(-3)b = -12$
$b = -2$	$b = 2$

إذن $Z_1 = 3-2i$ $\quad Z_2 = -3+2i$

∴ مجموعة حل المعادلة $\{3-2i \text{ ، } -3+2i\}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$ — a b

(2) حل المعادلة: $2z+\overline{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$ — a b

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i, 2+i\}$ — a b

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ — a b

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=16+30i$ هما: $z_1=5+3i,\ z_2=-5-3i$ — a b

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$ — a b

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z-5+6i=-3\overline{z}$ هو:

a) $z=1+6i$ b) $z=-1+6i$ c) $z=1-6i$ d) $z=-1-6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+20=0$ هي:

a) $\{2-4i, -2-4i\}$ b) $\{-2+4i, -2-4i\}$

c) $\{2-4i, -2+4i\}$ d) $\{2-4i, 2+4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=33-56i$ هما:

a) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=7+4i \end{cases}$ b) $\begin{cases} z_1=7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

c) $\begin{cases} z_1=7+4i \\ z_2=7-4i \end{cases}$ d) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3-4i)z=5-2i$ هو:

a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}i$ b) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}i$ c) $\frac{23}{25}+\frac{14}{25}i$ d) $\frac{23}{25}-\frac{14}{25}i$

اختبار الوحدة السابعة

بسط كلا من التعابير التالية

① $4\sqrt{-9}-2=-2+12i$

② $(4-i)+(5-9i)=9-10i$

③ $(-3+2i)-(6+i)=-9+i$

④ $(2+3i)(8-5i)=(16+15)+(-10+24)i=31+14i$

⑤ المعكوس الجمعي للعدد $3-7i$ هو $-3+7i$

المعكوس الضربي للعدد $3-7i$ هو

$$\frac{1}{3-7i}=\frac{3+7i}{3^2+7^2}=\frac{3}{58}+\frac{7}{58}i$$

⑥ اوجد القيمة المطلقة للعدد $7-2i$

$$|7-2i|=\sqrt{7^2+(-2)^2}=\sqrt{53}$$

⑦ اوجد

ⓐ $-3i^{77}=-3i$ ⓑ $i^{50}=-1$

ⓒ $(-2+3i)^2=4-12i-9=-5-12i$

⑧ اوجد مجموعة حل المعادلة $2x^2+10=0$

$x^2=-5$

$x=\sqrt{5}i$, $x=-\sqrt{5}i$

مجموعة الحل $=\{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$

Subject: .... / /

(9) اكتب العدد $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصورة الجبرية أولاً

الى الصورة المثلثية :

$$\frac{1+3i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(3+6)+(-2+9)i}{9+4} = \frac{9}{13} + \frac{7}{13}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{9}{13}\right)^2 + \left(\frac{7}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{13}$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{\frac{7}{13}}{\frac{9}{13}}\right| = \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha = 37^\circ\, 52'\, 30''$$

θ تقع في الربع الأول $\Rightarrow \theta = \alpha = 37^\circ\, 52'\, 30''$

$\therefore$ الصورة المثلثية :

$$Z = \frac{\sqrt{130}}{13}\left(\cos 37^\circ\, 52'\, 30'' + i \sin 37^\circ 52'\, 30''\right)$$

(10) اوجد مجموعة حل المعادلة $\frac{Z+1}{Z-1} = 2i$

$$2i(Z-1) = Z+1$$

$$2iZ - 2i = Z+1$$

$$2iZ - Z = 1+2i$$

$$Z(2i-1) = 1+2i \Rightarrow Z = \frac{1+2i}{-1+2i}$$

$$Z = \frac{1+2i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{(-1+4)+(-2-2)i}{1+4} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

(11) اوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

$$\frac{3-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{(3-1)+(-3+-1)i}{1+1} = \frac{2}{2} + \frac{-4}{2}i$$

$$= 1-2i$$

$$\overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} = 1+2i$$

(12) حل المعادلة

$$2z^2 - 6z + 5 = 0$$

$a = 2 \qquad b = -6 \qquad c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(2)(5) = -4$$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{-4}}{2\times 2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{-4}}{2\times 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i ، \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

(13) اكتب الأعداد التالية بالصورة المثلثية

(a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i\sin 0)$

(b) $-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

(c) $2\sqrt{3} + 6i = 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(14) اكتب العدد $Z = -3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$
في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية

$$Z = 3(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$= 3(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3}))$$

$$= 3(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$$

(15) اكتب العدد $Z = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ بالصورة الجبرية

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{6}$ $\qquad$ $= \frac{1}{2}$

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

(16) اوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8 + 6i$

الجذرين التربيعيين :

$1 + 3i$ ، $-1 - 3i$

(17) (a) اثبت ان $-2 + \frac{3}{2}i$ هو احد جذري المعادلة $4Z^2 + 16Z + 25 = 0$

(b) اوجد الجذر الآخر

$$4(-2 + \frac{3}{2}i)^2 + 16(-2 + \frac{3}{2}i) + 25 =$$

$$= 4(\frac{7}{4} - 6i) + 16(-2 + \frac{3}{2}i) + 25$$

$$= 7 - 24i + -32 + 24i + 25 = 0$$

الجذر الآخر $-2 - \frac{3}{2}i$