

تمرّن

9-4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-3)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15^\circ$

(2) $\tan 135^\circ$

(3) $\cos 75^\circ$

1] $\sin 15^\circ$

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

$$\therefore \sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2] $\tan 135^\circ$

$$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$$

$$\therefore \tan 135^\circ = \frac{\tan 180^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 180^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{0 - 1}{1 + 0}$$

$$= -1$$

$$\boxed{3} \cos 75^\circ$$

$$75 = 30 + 45$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos 75^\circ &= \cos (30^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$(4) \text{ إذا كان } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \sin \gamma = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{-8}{17}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$(a) \text{ أوجد: } \sin(\beta + \gamma)$$

$$(b) \text{ أوجد: } \cos(\beta - \gamma)$$

$$(c) \text{ أوجد: } \tan(\gamma + \beta)$$

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\therefore \cos^2 \gamma = \frac{9}{25}$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{3}{5}$$

$$\therefore 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos \gamma = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\sin^2 \beta + \left(\frac{-8}{17}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \beta = \frac{225}{789}$$

$$\sin \beta = \pm \frac{15}{17}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{15}{17}$$

$$\begin{aligned} \boxed{a} \sin(\beta + \gamma) &= \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma \\ &= \frac{15}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{-8}{17} \times \frac{4}{5} = \frac{13}{85} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(\beta - \gamma) &= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \\ &= \frac{8}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{15}{17} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{36}{85} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tan(\delta + \beta) &= \frac{\tan \delta + \tan \beta}{1 - \tan \delta \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{4}{3} + \frac{-15}{8}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{-15}{8}} \\ &= \frac{-13}{84} \end{aligned}$$

$$\tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\tan \beta = \frac{-15}{8}$$

في التمارين (5-10)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

$$(5) \sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$$

$$(6) \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5}$$

$$(7) \frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$$

$$(8) \cos \frac{\pi}{7} \cos x + \sin \frac{\pi}{7} \sin x$$

$$(9) \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$$

$$(10) \frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$$

$$\begin{aligned} \text{5) } \sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ \\ = \sin(42^\circ - 17^\circ) = \sin 25^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6) } \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5} \\ = \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{7\pi}{10} \end{aligned}$$

$$\text{7) } \frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ} = \tan(19^\circ + 47^\circ) = \tan 66^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{8)} \quad & \cos \frac{\pi}{7} \cos x + \sin \frac{\pi}{7} \sin x \\ & = \cos \left(\frac{\pi}{7} - x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{9)} \quad & \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x \\ & = \sin (3x - x) = \sin 2x \end{aligned}$$

$$\text{10)} \quad \frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x} = \tan (2y + 3x)$$

$$(11) \text{ اختصر: } \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} \\ & = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} \\ & = \frac{\sin (3x - x)}{\sin x \cos x} \\ & = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = \end{aligned}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

a b

(1) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

a b

(2) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(3) $\cos \left(h + \frac{\pi}{2} \right) = -\cos h$

a b

(4) $\tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

a b

في التمارين (5-11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\tan \frac{7\pi}{12}$ تساوي:

a $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

b $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

c $2+\sqrt{3}$

d $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

a $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

b $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

c $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

d $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a $1 + \tan h$

b $\frac{1 - \tan h}{1 + \tan h}$

c $\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$

d $1 - \tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

b $\sqrt{2}(\cos x + \sin x)$

c $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$

d $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

(9) $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ$ تساوي:

a $\cos 112^\circ$

b $\cos 76^\circ$

c $\sin 112^\circ$

d $\sin 76^\circ$

(10) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{3}$ تساوي:

a $\cos \frac{4\pi}{21}$

b $\sin \frac{4\pi}{21}$

c $\cos \frac{10\pi}{21}$

d $\sin \frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{3}}$ تساوي:

a $\tan \frac{2\pi}{15}$

b $\tan \frac{8\pi}{15}$

c $\tan\left(-\frac{8\pi}{15}\right)$

d $\tan\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$



متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double-Angle and Half-Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

$$\begin{aligned} (1) \sin 2x + \cos x &= 2 \sin x \cos x + \cos x \\ &= \cos x (2 \sin x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sin 2x + \cos 2x &= 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 2 \cos x (\sin x + \cos x) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \cos 3x &= \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos x (2 \cos^2 x - 1) - \sin x (2 \sin x \cos x) \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \cos 4x &= \cos(2(2x)) \\
 &= 1 - 2 \sin^2 2x \\
 &= 1 - 2(2 \sin x \cos x)^2 \\
 &= 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x \\
 &= 1 - 8 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \\
 &= 1 - 8 \sin^2 x + 8 \sin^4 x
 \end{aligned}$$

في التمارين (5-7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$(5) 2 \csc 2x = \csc^2 x \tan x$$

$$(6) \sin 3x = (\sin x)(4 \cos^2 x - 1)$$

$$(7) \cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\begin{aligned}
 (5) 2 \csc 2x &= \frac{2}{\sin 2x} \\
 &= \frac{2}{2 \sin x \cos x} \\
 &= \frac{1}{\sin x \cos x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \csc^2 x \tan x &= \frac{\tan x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}
 \end{aligned}$$

∴ الطرفان متساويان

الحل :-

حل آخر :-

$$\begin{aligned}
 2 \csc 2x &= \frac{2}{\sin 2x} \\
 &= \frac{2}{2 \sin x \cos x} \\
 &= \frac{1}{\sin x \cos x} \times \frac{\sin x}{\sin x} \quad ; \sin x \neq 0 \\
 &= \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \csc^2 x \cdot \tan x
 \end{aligned}$$

∴ الطرفان متساويان

$$\begin{aligned}
 (6) \sin 3x &= \sin(x + 2x) \\
 &= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\
 &= \sin x (2 \cos^2 x - 1) + \cos x (2 \sin x \cos x) \\
 &= 2 \sin x \cos^2 x - \sin x + 2 \sin x \cos^2 x
 \end{aligned}$$

وزارة التربية _ منطقة الجهراء التعليمية _ التوجيه الفني للرياضيات _ مدرسة ثانوية الجهراء بنات _ ورشة الصف الحادي عشر علمي

$$= 4 \sin x \cos^2 x - \sin x$$

$$= \sin x (4 \cos^2 x - 1)$$

$$(7) \cos 4x = \cos 2(2x)$$

$$= 1 - 2 \sin^2 2x$$

$$= 1 - 2(2 \sin x \cos x)^2$$

$$= 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

في التمارين (8-10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15^\circ$

(9) $\tan 195^\circ$

(10) $\cos 75^\circ$

الحل :-

$$(8) \sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

15° تقع في الربع الأول $\therefore \sin 15^\circ > 0$

$$\approx 0.2598$$

$$(9) \tan 195^\circ = \tan\left(\frac{390^\circ}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 390^\circ}{1 + \cos 390^\circ}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} \approx \pm 0.2679$$

195° تقع في الربع الثالث $\therefore \tan 195^\circ > 0$

$$= 0.2679$$

$$(10) \cos 75^\circ = \cos \frac{150^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 150^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\approx \pm 0.2598$$

75° تقع في الربع الأول

$$\approx 0.2598$$

(11) اختصر كلاً من التعابير التالية:

(a) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

(b) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(c) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

a) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + 2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ المثلث

(b) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$
 $\therefore \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$
 $2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$
 $\therefore \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$
 $\therefore \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$

(c) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
 $\therefore \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$
 $\therefore 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$
 $\therefore \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$
 $\therefore 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$
 بالعويض
 $\therefore \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2}$

حل آخر:-

$\therefore \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
 $\therefore \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

(12) إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin \frac{x}{2}$

المطلوب :- متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{144}{169}$$
$$= \frac{25}{169}$$

$$\therefore \cos x = \pm \frac{5}{13}$$

$$\therefore \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\therefore \cos x = \frac{5}{13}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$
$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{5}{13}}{2}}$$

$$= \pm 0.5547$$

$$\therefore \sin \frac{x}{2} = 0.5547$$

$$270 < x < 360$$

$$135 < \frac{x}{2} < 180$$

$\therefore \frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \sin \frac{x}{2} > 0$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

a b

(2) $\sin 4x = -4 \cos x \sin^3 x + 4 \cos^3 x \sin x$

a b

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

a b

(4) $\cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1$

a b

(5) $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

a b

في التمارين (6-10)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\sin 3x + \cos 2x$ تساوي:

a $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

b $3 \cos^2 x \sin x - \sin^2 x + \cos^2 x$

c $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x - \sin^2 x + \cos^2 x$

d $3 \sin^2 x \cos x - \sin^3 x + \cos^2 x$

(7) $2 \cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

a $\frac{1 + \cos x}{2}$

b $1 + \cos x$

c $1 + \cos 2x$

d $\frac{1 - \cos 2x}{2}$

(8) $\sin 3x$ تساوي:

a $\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$

b $3 \sin x - \sin^3 x$

c $(3 - 2 \sin^2 x)(\sin x)$

d $3 \sin x - 4 \sin^3 x$

(9) باستخدام متطابقات نصف الزاوية نجد أن $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

a $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

b $\sqrt{2} - 1$

c $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

d $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

(10) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos \theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos \frac{\theta}{2}$ يساوي:

a $\frac{2}{5}$

b $\frac{-2}{5}$

c $\frac{-3}{5}$

d $\frac{3}{5}$

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (1-3)، حوّل المقادير إلى \sin و \cos . اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

(1) $\tan x + \cot x$

(2) $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

(3) $\frac{\sec y}{\cos y} - \frac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

1] $\tan x + \cot x$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

2] $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

$$= \sin x \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \cos x - \sin x$$

3] $\frac{\sec y}{\cos y} - \frac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

$$= \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 y}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = 1$$

في التمارين (4-8)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$(4) \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2 \sec x$$

$$(5) \frac{1 - 3 \cos x - 4 \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x}$$

$$(6) \sqrt{1 - \cos x} \times \sqrt{1 + \cos x} = \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(7) \frac{2 \sin x \times \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$$

$$(8) \frac{1 + 2 \sin x \times \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$$

$$[4] \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2 \sec x$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \frac{\cos (1 - \sin x) + \cos (1 + \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{\cos x - \cos x \sin x + \cos x + \cos x \sin x}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2}{\cos x} = 2 \sec x \end{aligned}$$

$$[5] \frac{1 - 3 \cos x - 4 \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - 3 \cos x - 4 \cos^2 x}{\sin^2 x} &= \frac{1 - 3 \cos x - 3 \cos^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x - 3 \cos x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{3 \cos x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\
 &= 1 - \frac{3 \cos x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
 &= 1 - \frac{3 \cos x}{1 - \cos x} \\
 &= \frac{1 - \cos x - 3 \cos x}{1 - \cos x} \\
 &= \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x}
 \end{aligned}$$

حل آخر

$$\begin{aligned}
 \text{الطرف الأول} &= \frac{(1 - 4 \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
 &= \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x} \\
 &= \text{الطرف الثاني}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{6} \quad \sqrt{1 - \cos x} \times \sqrt{1 + \cos x} = \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 - \cos x} \times \sqrt{1 + \cos x} &= \sqrt{1 - \cos^2 x} \\
 &= \sqrt{\sin^2 x} \\
 &= \sin x
 \end{aligned}$$

$$\boxed{7} \quad \frac{2 \sin x \times \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \sin x \times \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} &= \frac{2 \sin x \times \cos x}{\cancel{\sin^2 x} + \cos^2 x + \cos^2 x - \cancel{\sin^2 x}} \\
 &= \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x
 \end{aligned}$$

$$8) \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$$

ب) 13)

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} \\ &= \sin x + \cos x \end{aligned}$$

في التمارين (9-13)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(9) $\tan \frac{5\pi}{12}$

(10) $\sin \frac{-\pi}{12}$

(11) $\cos(x-y) - \cos(x+y)$

(12) $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$

(13) $\sin(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x)$

9) $\tan \frac{5\pi}{12}$

$$= \tan 75^\circ$$

$$= \tan(30^\circ + 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1} = 2 + \sqrt{3}$$

ط أ ح ز

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

$$\boxed{10} \sin -\frac{\pi}{12}$$

$$= -\sin \frac{\pi}{12}$$

$$= -\sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= -[\sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30]$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\boxed{11} \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$= \cos x \cos y + \sin x \sin y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$= 2 \sin x \sin y$$

$$\boxed{12} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right)$$

$$= \sin x - \cos x$$

$$\begin{aligned} \boxed{13} \quad & \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ &= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) \\ &= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin x \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \sin x \\ &= \sin x \end{aligned}$$

(14) (a) أوجد ناتج: $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(2) $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$ ، إذا كان $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$ ، إذا كان $\cos x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$$\boxed{14} \quad (a) \quad \frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \boxed{1} \quad & \cos \frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{15} \quad \therefore \sin x - \cos x = \frac{1}{5}$$

$$\therefore (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$$

$$1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$$

$$1 - \frac{1}{25} = 2\sin x \cos x$$

$$\therefore \sin 2x = \frac{24}{25}$$

$$\boxed{16} \cos x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right)^2 - 1$$

$$= 2 \left(\frac{2 + 6 + 4\sqrt{3}}{4} \right) - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

محمد العبدالله