الوحدة الدراسية الخامسة (التكامل) بند (5- 1) التكامل الغير محدد

الرمز $\int$ يعبّر عن **علامة التكامل**, الدالة f هي **الدالة المكاملة** في التكامل, x**متغير التكامل**.أي أنّ: $\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}$

وتقرأ: التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x هو $F(x) + C$

حيث $F(x) + C$ هي مجموعة كل المشتقات العكسية F.

الثابت C هو **ثابت التكامل** وهو **ثابت اختياري**, وعندما نحصل على $F(x) + C$ نقول إنّنا كاملنا f أو **أوجدنا التكامل** f.

قواعد التكامل غير المحدد — Rules of Indefinite Integral

1- $\int k\ dx = kx + C$ k عدد ثابت

2- $\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. $n \in Q - \{-1\}$ قاعدة القوى

خواص التكامل غير المحدد — Properties of Indefinite Integral

1- $\int k\ f(x)dx = k\ \int f(x)dx\ .k \neq 0$ خاصية الضرب بعدد ثابت

2- $\int [\ f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ خاصية الجمع والطرح

ملاحظات:

a- $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

b- $\int (f(x) + k)dx = \int f(x)dx + \int kdx$

أحسب:

1) $- \int \left(3x^2 - 4x - 1\right) dx$

2) $- \int (2x-3)(x+4)\,dx$

3) $- \int \frac{x^2+5x+4}{x+1}\,dx$

4) $- \int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

$$5)\; -\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$$

$$6)\; -\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}\,dx$$

7) إذا كان $F(X)=\int(2x+5)dx$ و $F(-1)=0$ فأوجد $F(X)$

البنود من (1 – 3) ظلل a إذا كانت العبارة صحيحة وظلل b إذا كانت خاطئة

1 $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ (a) (b)

2 $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$ (a) (b)

3 إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + x$, $f(2) = 1$ ، فإن: $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ (a) (b)

البنود من (4 – 7) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

4 $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\, dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$

(d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

---

5 $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx =$

(a) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

(b) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

(c) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(d) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

---

6 $\int \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + 2\right)^2 dx =$

(a) $x^2 + C$

(b) $2x + C$

(c) $\frac{x^2}{2} + 2x + C$

(d) $\frac{1}{3}x^3 + C$

---

7 $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx =$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}} + 5\right) + C$

(b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}\left(x^{-\frac{2}{3}} + 5\right) + C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}} + 5\right) + C$

(d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + 5\right) + C$

الوحدة الدراسية الخامسة (التكامل) بند (5- 1) التكامل الغير محدد

قاعدة التكامل بالتعويض

Rule of Integration by Substitution

إذا كانت F هي المشتقة العكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ فإن:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

أوجــــد :

1) $-\int (x^2 + 2x + 5)^3 (2x + 2)dx$

2) - $\int \frac{\left(\frac{1}{x} + 4\right)^5}{x^2} dx$

3) - $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}dx$

4) - $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$

5) - $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

6) - $\int x(2x-1)^3\,dx$ أوجد:

7) - $\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$ أوجد:

8) – $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}\,dx$

البنود من (1 – 3) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة

1 $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4}+C$ (a) (b)

2 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2}+C$ (a) (b)

3 $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5\,dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6+C$ (a) (b)

البنود من (4 – 7) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

4 $\int x(x^2+2)^7\,dx =$

(a) $\frac{1}{16}(x^2+2)^8+C$ (b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8+C$

(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6+C$ (d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6+C$

4

5 $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$

5

(a) $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$ (b) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$

6

(c) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$ (d) $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$

6 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

(a) $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$ (b) $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

(c) $2(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$ (d) $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

7 $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}\,dx =$

(a) $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13}+C$ (b) $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13}+C$

(c) $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13}+C$ (d) $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11}+C$

الوحدة الدراسية الخامسة (التكامل) بند (5- 3) تكامل الدوال المثلثية

تكامل غير المحدد للدوال المثلثية

$$1-\int \sin x \; dx = -\cos x + C$$

$$2-\int \sin kx \, dx = -\frac{-\cos kx}{k} + C$$

$$3-\int \cos kx \, dx = \sin x + C$$

$$4-\int \cos kx \; dx = \frac{\sin kx}{k} + C$$

$$5-\int sec^2 x \; dx = \tan x + C$$

$$6-\int csc^2 x \; dx = -\cot x + C$$

$$7-\int \sec \; x . \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$8-\int \csc x . \cot x \; dx = -\csc x + C$$

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

1 $\int (\sin x + \sec^2 x) dx$

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

❷ $\int \csc x(\cot x+\csc x)dx$

❸ $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

❹ $\int x\csc^2(x^2-1)dx$

❺ $\int \sin^5(x+1)\cdot\cos(x+1)\,dx$

❻ $\int x^3 \cdot \cos(x^4+5)\,dx$

❼ $\int (1+\cos x)^6 \sin x\, dx$

❽ $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$

❾ $\int \sqrt{1+\sin x}\, \cos x\, dx$

10 $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

11 $\int \sec^3 x \tan x \, dx$

البنود من (1 – 2) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة

1 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$ (a) (b)

2 $(F'(x) = \sec x \ \tan x \ , \ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ (a) (b)

البنود من (3 – 8) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

3 الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$

(b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$

(d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

4 $\int \csc(5x)\cot(5x)\,dx =$

ⓐ $\frac{1}{5}\csc(5x)+C$

ⓑ $\csc(5x)+C$

ⓒ $\frac{1}{5}\cot(5x)+C$

ⓓ $-\frac{1}{5}\csc(5x)+C$

---

5 إذاكانت $y_{\theta=0}=-3$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ فإنّ y تساوي:

ⓐ $-\cos\theta$

ⓑ $2-\cos\theta$

ⓒ $-2-\cos\theta$

ⓓ $4-\cos\theta$

---

6 $\int \sec^5 x\tan x\,dx =$

ⓐ $\frac{5}{3}\sec^5 x+C$

ⓑ $\frac{1}{5}\sec^6 x+C$

ⓒ $\frac{1}{5}\sec^5 x+C$

ⓓ $-\frac{5}{3}\sec^5 x+C$

---

7 $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}\,dx =$

ⓐ $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$

ⓑ $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$

ⓒ $-2\sqrt{2+\cot x}+C$

ⓓ $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}}+C$

---

8 $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}\,dx =$

ⓐ $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x)+C$

ⓑ $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x)+C$

ⓒ $-\cos^{-4}(4x)+C$

ⓓ $\cos^{-4}(4x)+C$

الوحدة الدراسية الخامسة (التكامل) بند (5- 4) تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

اشتقاق الدوال الأسية

قاعدة (1) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن: $\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

قاعدة (2) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن : $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

قاعدة (3) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن: $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}\left(g(x)\right) = \frac{g\prime(x)}{g(x)}$

قاعدة (4) $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتيمية

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{du}e^u = e^u \frac{du}{dx} = u'e^u$	$\int u'e^u dx = e^u + c$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{d}{du}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} du = \ln\lvert u\rvert + c$

لاحظ أن: $\int \frac{x'(x)dx}{g(x)} = \ln\lvert g(x)\rvert + c$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

❶ $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

❶ $g(x) = e^{x^3-4}$

❷ $h(x) = e^{\cos x}$

❸ $f(x) = \ln x^2$

❹ $h(x) = \ln \sqrt{x}$

❺ $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

❻ $k(x) = \ln(\cos x)$

❺ $\int e^{3x}dx$

❻ $\int(2x-1)e^{x^2-x+3}dx$

❼ $\int\left(e^{3x}+\frac{4}{2x-1}\right)dx$

❽ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

9 $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

10 أوجد: $\int \tan x \, dx$

11 $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$

البنود من (1 – 6) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة

1 إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ (a) (b)

2 إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ (a) (b)

3 إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ (a) (b)

4 إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ (a) (b)

5 $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{\ln x}{2} + C$ (a) (b)

6 $\int \frac{1}{3x+1} dx = \ln(3x+1) + C$ (a) (b)

البنود من (7 – 10) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

7 إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) e^{-5x} (b) $-e^{-5x}$

(c) $-5e^{-5x}$ (d) $5e^{-5x}$

8 إذا كانت $y = x^2e^x - x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $e^x(x^2+x-1)$ (b) $e^x(x^2-x)$

(c) $2x\,e^x - e^x$ (d) $e^x(x^2+2x+1)$

9 إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{\ln x}{x}$ (b) $\frac{2\ln x}{x}$

(c) $\frac{x\ln x}{2}$ (d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

10 إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$

(c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

الوحدة الدراسية الخامسة (التكامل) بند (5 -5) التكامل بالتجزيء

قاعدة التكامل بالتجزيء Integration by Parts Formula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

أوجد كلاً مما يلي

1. $\int x\sin(5x)\,dx$

2. $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

3. $\int 4x\,e^{-5x}\,dx$

❹ $\int (\ln(x))^2\,dx$

❺ $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

❻ $\int x^2 \cos x\,dx$

7 $\int x^2 e^x \, dx$

8 $\int e^x \sin x \, dx$

البنود من (1 – 3) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة

1 $\int x \sin(\pi x)\, dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ (a) (b)

2 $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + e^{-x} + C$ (a) (b)

3 $\int x \sec^2 x \, dx = x \tan x - \ln\left|\sec x\right| + C$ (a) (b)

البنود من (4 – 5) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

4 $\int (2x+1)\sin x \, dx$

- (a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
- (b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
- (c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$
- (d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

---

5 $\int x^2 \ln(x) \, dx =$

- (a) $\frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$
- (b) $\frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$
- (c) $\frac{1}{3}x^3 \ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$
- (d) $-\frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

الوحدة الدراسية الخامسة (التكامل) بند (6 - 5) التكامل باستخدام الكسور الجزئية

1 أوجد الكسور الجزئية للدالة: $f(x) = \frac{5x-1}{x^2 + 2x - 15}$

ثم أوجد $\int f(x) dx$

2 أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

3 أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$

❹ أوجد: $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

❺ أوجد: $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$

6 أوجد: $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 25}{x^2 - 6x + 8}\, dx$

7 $\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx$

البند التالي ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1 $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) (b)

البنود من (2 – 3) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

2 $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

(a) $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$

(b) $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$

(c) $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$

(d) $\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

---

3 الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$

(b) $\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$

(c) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

(d) $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

الوحدة الدراسية الخامسة (التكامل) بند (7 - 5) التكامل المحدد

Properties of the Definite Integral خواص التكامل المحدد

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I , $k \in R$, $a , b , c \in I$ فإن :

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

4) $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: كان إذا $k = 1$ فإن : $\int_a^b dx = b - a$

1 أوجد:

1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$

2) $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$

3) $\int_3^3 (-2x^3 + x^2)dx$

2 أوجد:

$$\int_{1}^{3} |x+2|\,dx$$

3 $\int_{-3}^{4} |2x-4|\,dx$

❹ دون حساب قيمة التكامل أثبت أن : $\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)\,dx \le 0$

❺ دون حساب قيمة التكامل أثبت أن : $\int_{0}^{1}(x^2-3x+7)dx \ge \int_{0}^{1}(4x-5)dx$

أوجد كلاً مما يلي :

❻ $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

❼ $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx$

7 $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

9 $\int_{2}^{5} x\sqrt{x-1}\,dx$

10 أوجد: $\int_{1}^{5} \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

البنود من (1 -3) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة

1. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ (a) (b)

2. $\int_{2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx - \int_{5}^{2} f(x)\,dx = 0$ (a) (b)

3. $\int_{2}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{2} g(x)\,dx = 0$ (a) (b)

البنود من (4 – 5) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

4. إذا كان: $\int_{3}^{-1} g(x)\,dx = 2$, $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3} (2f(x)+3g(x)+1)\,dx$ تساوي:

(a) 18 (b) -6 (c) 6 (d) 12

---

5. لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}^+$

الوحدة الدراسية السادسة (تطبيقات على التكامل) بند (1 - 6) المساحات في المستوى

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحى f ومحور السينات في الفترة $[\,a\,,b\,]$

إذا كانت: $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [\,a\,,b\,]$

فإن: $A = \int_a^b f(x)dx$

إذا كانت: $f(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in [\,a\,,b\,]$

فإن: $A = -\int_a^b f(x)dx$

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[\,a\,,b\,]$, $c \in (\;,b\,)$ حيث $f(c) = 0$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[\,a\,,b\,]$ هي:

$$A = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[\,a\,,b\,]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من g , متصلتين على الفترة $[\,a\,,b\,]$, حيث

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in [\,a\,,b\,]$$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنيي الدالتين $f\,,g$ والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة, فإن حدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع

$$A = \left|\int_a^b (y_1 - y_2)dx\right| = \left|\int_a^b (y_2 - y_1)dx\right|$$

1 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات.

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 \, , \, \frac{3}{2}\right]$$

3

$$f(x) = \cos 2x \;,\; \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

4 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \;,\; \forall x \in [0,1]$

5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

6 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ

$y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $g(x) = x^2 - 1 \quad , \quad f(x) = -2x^2 + 2$

8 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = \sqrt[3]{x} \quad , \quad f(x) = x$ ،
والمستقيمين $x = 5 \quad , \quad x = 2$.

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = 3 - 3x^2$

10 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$g(x) = \frac{x}{2} \quad , \quad f(x) = \sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 9 \quad , \quad x = 0$

البنود من (1 -5) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1 مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=b$, $x=a$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$

(a) (b)

2 مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=4-x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$

(a) (b)

3 إذا كانت: $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\le 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$

(a) (b)

4 إذا كان منحنى الدالة f : $f(x)=x^2-2x-3$ يقطع محور السينات عند $x=-1$ ، $x=3$.

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A=\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

(a) (b)

5 مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=|x|$ ومحور السينات.

في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة

(a) (b)

البنود من (6 – 8) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

6 مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) 9π units^2

(b) 6π units^2

(c) 3π units^2

(d) $\frac{9}{2}\pi$ units^2

---

7 مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة g : $g(x)=(x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)\,dx$

(b) $-2\int_0^2 g(x)\,dx$

(c) $\int_0^4 g(x)\,dx$

(d) $-2\int_2^4 g(x)\,dx$

---

8 مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x)=2$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=-\sqrt{x}$ والمستقيمين $x=0$ ، $x=4$ هي:

(a) 20 units^2

(b) $\frac{8}{3}$ units^2

(c) $\frac{40}{3}$ units^2

(d) 8 units^2

الوحدة الدراسية السادسة (تطبيقات على التكامل) بند (2 - 6) حجوم الأجسام الدورانية

إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين

$x = a$, $x = b$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين f, g والمستقيمين $x = a$, $x = b$ دورة كاملة حول محور السينات, بحيث f , g لها الإشارة نفسها $[a, b]$,

فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

حيث: $f(x) \geq g(x) \geq 0$ أو $f(x) \leq g(x) \leq 0$

1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.

2

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0 , h]$

3 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

4 أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات المحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

$$y = \sec x \;,\; y = \sqrt{2} \;,\; -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$$

5 أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات المحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

$$y = x + 1 \;,\; y = x - 1 \;,\; x = 1 \;,\; x = 4$$

البنود من (1 -5) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1 حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V = \pi\int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx$

(a) (b)

2 حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V = \pi\int_0^4 4x dx - \pi\int_0^1 4x dx$

(a) (b)

3 حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ هو: $V = \pi\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)dx$

(a) (b)

4 حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 8$ و $x = 0$ يساوي حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة h : $h(x) = -8$, $x = 0$

(a) (b)

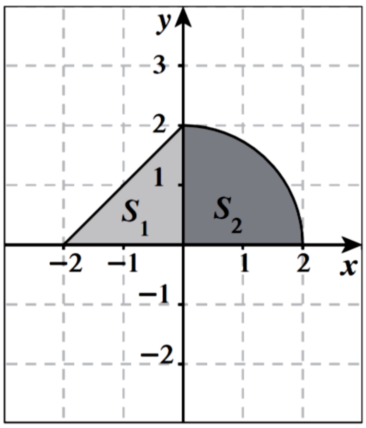
البنود من (5 – 8) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

5 حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 6π (b) 18 (c) 18π (d) 81π

---

6 المنطقة المظللة $S = S_1 \cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.



حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4 + 2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) 8π

7 حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = -\sqrt{4 - x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

ⓐ 4π ⓑ 6π ⓒ $\frac{16}{3}\pi$ ⓓ $\frac{32}{3}\pi$

---

8 حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات $x = 0$, $y = -2$ ومنحنى الدالة f : $f(x) = -\sqrt{x}$ بالوحدات المكعبة هو:

ⓐ 4π ⓑ 16π ⓒ 8π ⓓ 2π

الوحدة الدراسية السادسة (تطبيقات على التكامل) بند (3 - 6) معادلة المنحنى

1 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

2 إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) يساوي $\sqrt{5-4x}$
فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5, 3)$

3

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x+5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2, 3)$

4 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{5}{2}\right)$

5 لتكن: $f''(x) = 5x - 2$ فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2\ ,\ -2)$ نقطة حرجة للدالة.

البنود من (1 -2) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1 منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x\,,y)$ هو: $-\sqrt{x}+x$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلتة: $f(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x^2+\frac{2}{3}$

(a) (b)

2 لتكن $A(1,3)$ نقطة على منحنى الدالة f : $f'(x)=3x^2-12x+9$ فإن معادلة الدالة f هي $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

(a) (b)

البنود من (3 – 4) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة :

3 معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة $(x\,,y)$ هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ (b) $\ln|3-x|+3$ (c) $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ (d) $3-\ln|3-x|$

4 معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة $(x\,,y)$ هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

(a) $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ (b) $x^2-2\sqrt{x^3}$ (c) $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ (d) $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

الوحدة الدراسية السادسة (تطبيقات على التكامل) بند (6 - 4) المعادلات التفاضلية

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

حل المعادلات التفاضلية هو إيجاد دوال تحقق مع مشتقاتها هذه المعادلات.

وسنقتصر في دراستنا على حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

1 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

2 حل المعادلات التفاضلية التالية: $y' - 2xy = 0$

3 أوجد حلًا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

4 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

5 $2y' + y = 4$ التي تحقق $y = 2$ عند $x = 0$

❻ حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

البنود من (1 -2) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1 المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (b) (a)

2 إذا كان $y = 1$ عند $x = 0$ و $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (b) (a)

البنود من (3 – 6) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

3 المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y'' + x)^2}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

(c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

4 حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

(a) $y = x^2 + 3$

(b) $y = x^2 - 3$

(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$

(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

5 إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$

(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2$

(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1 x$

6 حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$

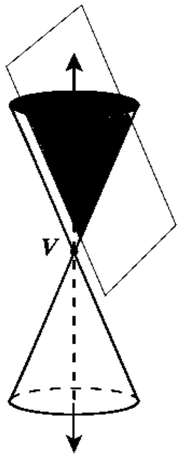
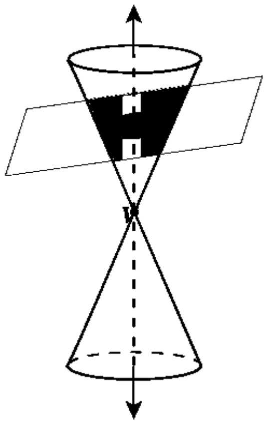
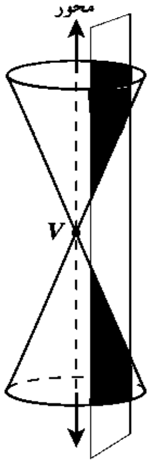
(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

(c) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$

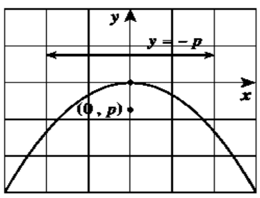
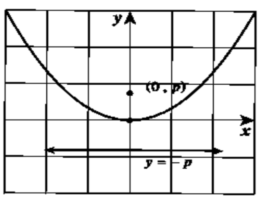
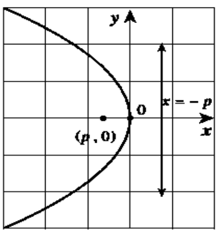
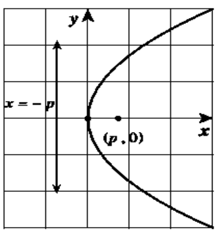
(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$

الوحدة الدراسية السابعة (القطوع المخروطية) بند (1 - 7) القطع المكافيء

ويوضح الجدول التالي وضعية المستوى بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور.

الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ لراسم ولا يحويه	المستوى ليس عموديًّا على المحور وليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ للمحور ولا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0,0)$

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y-axis)$		محور السينات $(x-axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\|p\|$			
المسافة من الرأس إلى الدليل	$\|p\|$			
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

1 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

a رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(4,0)$

b بؤرته $F(0,-3)$ ودليله المستقيم: $y = 3$

---

2 أوجد البؤرة ومعادلة الدليل لقطع مكافئ ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي:

المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$

3 أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$

b المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

4 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين

$A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ، $B(2, 3)$

5 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -3$

6 تُستخدم ميكروفونات مكافئة على جانبي ملعب لالتقاط الأصوات من داخل الملعب.
إذا كان قد تولد ميكروفون مكافئ من تدوير قطع مكافئ معادلته: $y^2 = 15x$ ،
فحدّد موضع البؤرة (جهاز الاستقبال الإلكتروني) لهذا القطع المكافئ.

البنود من (1 -2) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1 معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-4,0)$ ودليله $x=4$ هي: $y^2=-16x$ (a) (b)

2 $y^2=\frac{1}{2}x$ هي معادلة قطع مكافئ، بؤرته $\left(0,\frac{-3}{2}\right)$ (a) (b)

البنود من (3 – 8) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

3 المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(-5,0)$ هي:

(a) $x^2=20y$ (b) $y^2=20x$ (c) $x^2=-20y$ (d) $y^2=-20x$

4 المعادلة التي تمثل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل هي:

(a) $y^2=\frac{-1}{2}x$ (b) $y^2=\frac{1}{2}x$ (c) $x^2=\frac{-1}{2}y$ (d) $x^2=\frac{1}{2}y$

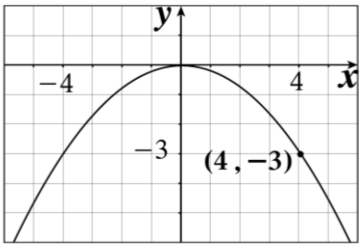
5 النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2=4py$ هي:

(a) $(1,1)$ (b) $(1,0)$ (c) $(0,1)$ (d) $(0,0)$

6 المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2),B(-5,2)$ هي:

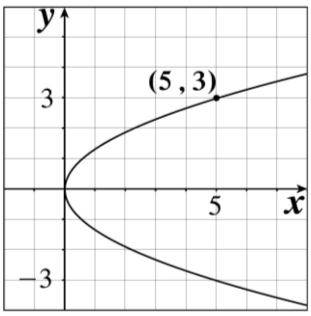
(a) $y^2=-\frac{4}{5}x$ (b) $x^2=-\frac{4}{5}y$ (c) $y^2=\frac{4}{5}x$ (d) $x^2=\frac{4}{5}y$

7 معادلة دليل القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:



(a) $y=\frac{4}{3}$ (b) $y=\frac{9}{20}$ (c) $y=-\frac{1}{12}$ (d) $y=-\frac{4}{3}$

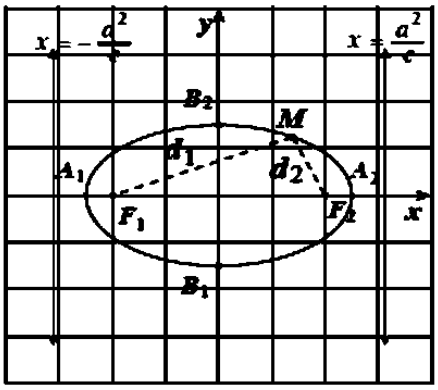
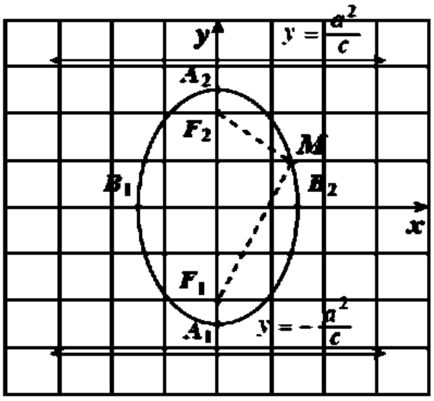
8 معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:



(a) $x^2=-\frac{25}{3}y$ (b) $y^2=\frac{9}{5}x$ (c) $x^2=\frac{25}{3}y$ (d) $y^2=\frac{5}{9}x$

الوحدة الدراسية السابعة (القطوع المخروطية) بند (2 - 7) القطع الناقص

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

المعادلة	$a > b > 0$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$a > b > 0$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2=b^2+c^2$	
معادلتا الدليلين	$x=-\frac{a^2}{c}$, $x=\frac{a^2}{c}$	$y=-\frac{a^2}{c}$, $y=\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

1 لكل معادلة من معادلات القطع الناقص التالية أوجد: رأسي القطع – طرفي المحور الأصغر – البؤرتين – معادلتي دليلي القطع – طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لكل قطع.

(1) $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

(2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

2 أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_2(0,3)$, $F_1(0,-3)$ وطول محوره الأصغر 4، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

3 أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2+16y^2-400=0$

4 أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $F(2,0)$ ويمر بالنقطة $A(2,1)$.

5 أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوره الأصغر أفقي طوله 10 cm ويمر بالنقطة $A(2,2\sqrt{6})$.

6 يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات، من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8,0)$ ، $A_2(8,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0,3.5)$؛ فأوجد إحداثيات البؤرتين.

البنود من (1 -3) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1 رأسي القطع للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ هما: $(-9,0)$، $(9,0)$ — (a) (b)

2 النقطة $(\sqrt{33},0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ — (a) (b)

3 طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ يساوي 10 units — (a) (b)

البنود من (4 – 7) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

4 النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص الذي معادلته $4x^2+9y^2=36$ هما:

(a) $(\pm 2,0)$ (b) $(\pm 3,0)$

(c) $(0,\pm 2)$ (d) $(0,\pm 3)$

---

5 معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7,0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0,\pm 6)$ هي:

(a) $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{36}=1$ (b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{85}=1$

(c) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ (d) $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49}=1$

---

6 معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الأكبر 9 units وطول محوره الأصغر 4 units هي:

(a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (b) $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$

(c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (d) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20.25}=1$

---

7 النقطة $A(-10,0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. مجموع المسافتين AF_1+AF_2 حيث F_1 , F_2 هما البؤرتان يساوي:

(a) 10 units (b) 12 units

(c) 14 units (d) 20 units

---

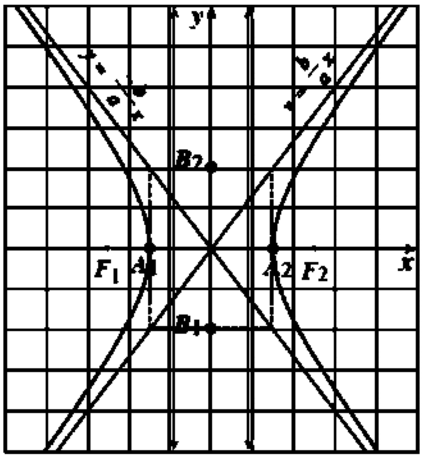
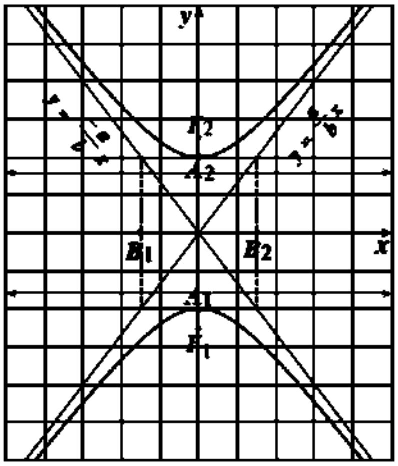
8 طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ يساوي:

(a) 12 units (b) $2\sqrt{41}$ units

(c) 16 units (d) 20 units

الوحدة الدراسية السابعة (القطوع المخروطية) بند (3 - 7) القطع الزائد

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

1

إذا كانت: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد أوجد:

a- رأسي القطع الزائد.

b- البؤرتين.

c- معادلتي دليلي القطع.

d- طول كل من المحورين.

e- معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلاً تخطيطياً للقطع .

3

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه : $F_1(0,-3), F_2(0,3)$ ورأساه $A_1(0,-2), A_2(0,2)$

, ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًّا للقطع.

5 أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه $A_2\left(\frac{2}{3},0\right)$ ويمر بالنقطة $(1,1)$.

6 أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(2,1)$, $B(4,3)$ ومحوره الأساسي جزء من محور السينات.

7 أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\ ,\ 0)$ وإحدى بؤرتيه $F_1(0,-\sqrt{5})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين $y = 2x$.

البنود من (1 -4) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1 $x^2 - y^2 = 4$ هي معادلة قطع زائد. (a) (b)

2 الخطّان المقاربان للقطع الزائد الذي معادلته $x^2 - y^2 = 12$ هما متعامدان. (a) (b)

3 إحداثيات بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{18} = 1$ هما: $(0,3)$, $(0,-3)$. (a) (b)

4 نقطتا طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1$ هما: $B_1(1,0)$, $B_2(-1,0)$. (a) (b)

البنود من (5 – 8) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

5 معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0,\pm 3)$ وطول محوره القاطع 4 هي:

(a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (b) $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

(c) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ (d) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

---

6 إذا كانت معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$؛ فيمرّ أحد الخطين المقاربين له في النقطة:

(a) $\left(2,\ 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ (b) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\ 2\right)$

(c) $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}},\ 2\right)$ (d) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\ 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

---

7 معادلة القطع الزائد الذي نقطتي تقاطعه مع المحور السيني هما $(\pm 6,0)$ هي:

(a) $y^2 - x^2 = 36$ (b) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{49} = 1$

(c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$ (d) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

---

8 البعد بين بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته: $50y^2 - 25x^2 - 100 = 0$ بوحدة الطول يساوي:

(a) $\sqrt{6}$ (b) $2\sqrt{6}$

(c) 6 (d) $2\sqrt{2}$

---

9 نقطتا تقاطع القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$ مع محور السينات هما:

(a) $(\pm 7,0)$ (b) $(\pm 5,0)$

(c) $(0,\pm 5)$ (d) ليس أيًّا مما سبق

الوحدة الدراسية السابعة (القطوع المخروطية) بند (4 - 7) الاختلاف المركزي

تعريف:

القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوي الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا. هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e

إذا $e = 1$ **يكون القطع المخروطي قطعًا مكافئًا** (Parabola)

إذا $e < 1$ **يكون القطع المخروطي قطعًا ناقصًا** (Ellipse)

إذا $e > 1$ **يكون القطع المخروطي قطعًا زائدًا** (Hyperbola)

$$e = \frac{c}{a}$$

1 **حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.**

a- **اختلافه المركزي** $(e = 1)$ **وبؤرته:** $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b- **اختلافه المركزي** $\left(e = \frac{1}{2}\right)$ **وإحدى بؤرتيه:** $F(2, 0)$

c- **اختلافه المركزي** $(e = 2)$ **ومعادلة أحد دليليه:** $x = 1$

2

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

a- $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b- $x^2-25y^2=1$

3 **أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.**

4 لتكن M نقطة متغيرة على قطع زائد حيث بؤرتيه $F_1(155,0)$, $F_2(-155,0)$

أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان $|MF_1 - MF_2| = 80$

5 اكتب معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e = \frac{5}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0\ ,\ -5)$

البنود من (1 -4) ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت خاطئة :

1. إذا كانت $e < 1$، فإن القطع هو قطع ناقص. (a) (b)

2. إذا $a = 6$ ، $b = 9$ في القطع الزائد فإنّ $c = 3\sqrt{13}$ (a) (b)

3. لأيّ معادلة قطع مكافئ فإنّ $e = 1$ (a) (b)

4. المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$ ينطبق على محور الصادات. (a) (b)

البنود من (5 – 8) ظلل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة

5. إذا كانت $a = 7$ ، $c = 2\sqrt{10}$ ، فإن معادلة القطع المخروطي الناتج هي:

(a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$

(b) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$

(c) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

(d) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$

6. أيّ معادلة مما يلي تمثل قطعًا زائدًا معادلة أحد دليليه $y = \frac{25}{7}$؟

(a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$

(b) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = 1$

(c) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$

(d) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{24} = 1$

7. إذا كانت معادلة أحد المقاربين $y = \frac{-7}{5}x$ والاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{74}}{5}$

فمعادلة القطع الزائد هي:

(a) $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{5} = 1$

(b) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 1$

(c) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$

(d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$

8. الاختلاف المركزي للمعادلة $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هو:

(a) $\frac{\sqrt{11}}{6}$

(b) $\frac{\sqrt{11}}{5}$

(c) $\frac{36}{25}$

(d) $\frac{25}{36}$

9. لأيّ قطع ناقص يكون:

(a) $a > c$

(b) $a < c$

(c) $a = ec$

(d) $a = c$