المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–9)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1) $\csc x - \csc x \cos^2 x$

$$= \csc x(1-\cos^2 x)$$
$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \sin^2 x$$
$$= \sin x$$

(2) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

$$= \tan^2 x \cdot \frac{1}{\sec^2 x}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}} \cdot \cancel{\cos^2 x}$$
$$= \sin^2 x$$

(3) $\dfrac{1+\tan^2 x}{\csc^2 x}$

$$= \frac{\sec^2 x}{\csc^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

(4) $\cos x \csc x + \sin x \sec x$

«باستخدام متطابقتي المقلوب ونواتج القسمة»

$$= \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$$
$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \csc x \cdot \sec x$$

(5) $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$

$$= \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$$
$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$ «متطابقة فيثاغورث»
$$= 1$$

(6) $\dfrac{1+\tan x}{1+\cot x}$

«باستخدام متطابقتي المقلوب ونواتج القسمة».

$$= \frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}$$
$$= \frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}$$
$$= \frac{(\cancel{\cos x + \sin x})}{\cos x} \times \frac{\sin x}{(\cancel{\sin x + \cos x})} = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$= \tan x$$

(7) $\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}$

$$= \frac{1+\sin x+1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x} = 2\sec^2 x$$ "متطابقة المقلوب"

---

(8) $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$$= \frac{\sin^2 x+(1-\cos x)^2}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x+1-2\cos x+\cos^2 x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$$ "متطابقة فيثاغورث"

$$= \frac{1+1-2\cos x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$$

$$= \frac{2-2\cos x}{(1-\cos x)\cdot\sin x}$$

$$= \frac{2\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{(1-\cos x)}\cdot\sin x} = \frac{2}{\sin x} = 2\csc x$$ "متطابقة المقلوب"

---

(9) $\frac{\tan x\csc x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\cos^2 x}$$ "متطابقة المقلوب"

$$= \frac{1}{\cos^3 x} = \sec^3 x$$

في التمارين (10–16)، بسّط المقادير إلى 1 أو −1

(10) $\frac{1}{\cot^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}$

$$= \tan^2 x-\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x-1}{\cos^2 x} = \frac{\cancel{1}-\cos^2 x-\cancel{1}}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x}{\cos^2 x} = -1$$

(11) $\dfrac{1}{\csc^2 x}+\dfrac{1}{\sec^2 x}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x$ «متطابقة المقلوب»

$= 1$ متطابقة فيثاغورث

(12) $\dfrac{\tan x \times \cos x}{\sin x}$

$= \dfrac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x}{\sin x}$ باستخدام متطابقة القسمة

$= \dfrac{\sin x}{\sin x} = 1$

(13) $\cot(-x)\tan(-x)$

$= (-\cot(x)) \cdot (-\tan x)$

$= \cot x \cdot \tan x$

$= \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$

(14) $\sec^2(-x) - \tan^2 x$

$= (\sec x)^2 - (\tan^2 x)$ «متطابقتي المقلوب والقسمة»

$= \sec^2 x - \tan^2 x$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1-(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1-1+\cos^2 x}{\cos^2 x}$

«متطابقة فيثاغورث»

$= \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$

(15) $\sin^2(-x)+\cos^2(-x)$

$= (-\sin x)^2 + (\cos x)^2$

$= \sin^2 x + \cos^2 x$

«متطابقة فيثاغورث»

$= 1$

(16) $\dfrac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ „باستخدام متطابقات فيثاغورث"

$= \dfrac{1 + \cancel{\tan^2 x} - \cancel{\tan^2 x}}{1}$

$= 1$

في التمارين (17–19)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

(17) $\sin^2 c + \sin^2 c \tan^2 c$

$= \sin^2 c\,(1 + \tan^2 c)$

$= \sin^2 c \cdot \sec^2 c$

$= \dfrac{\sin^2 c}{\cos^2 c} \quad = \tan^2 c$

---

(18) $1 - 2\sin x + (1 - \cos^2 x)$ „من متطابقة فيثاغورث"

$= 1 - 2\sin x + \sin^2 x$

$= \sin^2 x - 2\sin x + 1$

$= (\sin x - 1)^2$

---

(19) $\cos x - 2\sin^2 x + 1$

$= \cos x - 2(1 - \cos^2 x) + 1$ „من متطابقة فيثاغورث"

$= \cos x - 2 + 2\cos^2 x + 1$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$ „بالتحليل"

$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=\dfrac{\sin^2 x+\tan^2 x+\cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x)=\sec x$ — (a) (b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=(\sec^2 x+\csc^2 x)-(\tan^2 x+\cot^2 x)$ هي: $E(x)=2$ — (a) (b)

(3) المقدار: $E(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$ هو: $E(x)=1+\sin x$ — (a) (b)

(4) المقدار: $E(x)=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x)=\sec^2 x$ — (a) (b)

(5) المقدار: $E(x)=\csc x-\cos x\cot x$ هو: $E(x)=\cos x$ — (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) المقدار: $E(x)=\dfrac{\tan^2 x}{1-\sec^2 x}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x)=$

(a) 1 (b) -1

(c) $\tan^4 x$ (d) $-\tan^4 x$

(7) المقدار: $E(x)=\dfrac{1}{\sec x+1}-\dfrac{1}{\sec x-1}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x)=$

(a) $2\tan^2 x$ (b) $-2\tan^2 x$

(c) $2\cot^2 x$ (d) $-2\cot^2 x$

(8) تحليل المقدار: $E(x)=\cos^2 x+\dfrac{3}{\sec x}+2$ إلى عوامل هو: $E(x)=$

(a) $(1-\cos x)(2+\cos x)$ (b) $(1+\cos x)(2+\cos x)$

(c) $(1+\cos x)(2-\cos x)$ (d) $(1-\cos x)(2-\cos x)$

(9) الدالة $f(x)=\sqrt{\sec^2 x-1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x)=$

(a) $\tan x$ (b) $-\tan x$

(c) $\cot x$ (d) $|\tan x|$

(10) الدالة $f(x)=\sqrt{\csc^2 x-1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x)=$

(a) $|\cot x|$ (b) $\tan x$

(c) $-\cot x$ (d) $\cot x$

تمرّن
9–2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

$$\cos x(\tan x + \sin x \cot x) = \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \cancel{\sin x} \times \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}\right)$$

$$= \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \cos x\right)$$

$$= \cancel{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} + \cos x \times \cos x = \sin x + \cos^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(2) $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

$$(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \sin x \times \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \cancel{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\right)$$

$$= (\sin x) \times \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x\right)$$

$$= \cancel{\sin x} \times \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} + \sin x \times \sin x = \cos x + \sin^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(3) $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

$$(1 - \tan x)^2 = 1 - 2\tan x + \tan^2 x$$

$$= (1 + \tan^2 x) - 2\tan x$$

$$= \sec^2 x - 2\tan x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(4) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{\sin x} \times \frac{1}{\cos x} = \csc x \times \sec x$$

$$= \sec x \csc x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(5) $\tan x + \cot x + 2 = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

$$\tan x + \cot x + 2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(6) $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{(1+\cancel{\cos x}) + (1-\cancel{\cos x})}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2}{1-\cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x} = 2\csc^2 x$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \tan^2 x \div (\sec x + 1) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \div \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right)$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \div \left(\frac{1+\cos x}{\cos x}\right) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(\cancel{1+\cos x})}{\cos x \cdot \cancel{\cos x}} \times \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{(1+\cos x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\cos x}$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(8) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$

$$\cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \cos^2 x \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x \cot^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(9) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 1 \times (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(10) $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} = \dfrac{\sec x + 1}{\tan x}$

$$\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\tan x}{\sec x - 1} \times \frac{\sec x + 1}{\sec x + 1}$$

$$= \frac{\tan x \times (\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1} = \frac{\tan x (\sec x + 1)}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\sec x + 1}{\tan x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(11) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \times \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 1 + \sin^2 x}{1 + 2\sin x \cos x} = \frac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$$

(12) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{2(1+\cos x)}{\sin x}$

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{1-\cos^2 x+1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{2-2\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{2(1-\cos^2 x)}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{2\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{(1-\cos x)}\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{\sin x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(13) $\sin^2 x\cos^3 x=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$

$$\sin^2 x\cos^3 x=\sin^2 x\cos^2 x\cdot\cos x$$

$$=\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\cos x$$

$$=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(14) $\sin^3 x\cos^3 x=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$

$$\sin^3 x\cos^3 x=\sin^3 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x$$

$$=\sin^3 x(1-\sin^2 x)\cdot\cos x$$

$$=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المتطابقة: $3\sin x = \sin(3x)$ صحيحة.

(a) (b)

(2) المتطابقة: $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ صحيحة.

(a) (b)

(3) المتطابقة: $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ صحيحة.

(a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

(a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$ (b) $\sin x \sec^2 x$

(c) $\cos x \sec^2 x$ (d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x \cos x$ (b) 2

(c) -2 (d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$ (b) $\sec x \sin x$

(c) $\sec x \cos x$ (d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$ (b) $\cot^2 x$

(c) $\tan^2 x \sin^2 x$ (d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1 (b) -1

(c) 2 (d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$ (b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$ (d) $\tan x$

تمرّنْ
9–3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–8)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$

الحل

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$$\sin\alpha = |\sin x| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$\because \sin x < 0$ $\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الرابع

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2K\pi ,\ K \in Z$$

$$\therefore x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$$

عندما x تقع في الربع الثالث

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2K\pi ,\ K \in Z$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة:

$x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi$ ، $K \in Z$

---

(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$$\cos\alpha = |\cos x| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$\because \cos x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الرابع

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2K\pi ,\ K \in Z$$

$$x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$$

عندما x تقع في الربع الأول

$$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi ,\ K \in Z$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

(3) $2\cos x = -1$

الحل

$2\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\therefore \cos\alpha = |\cos x| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\boxed{\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}}$

$\because \cos x < 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما x تقع في الربع الثالث.

$x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2K\pi \text{ , } K \in Z$

$x = \frac{4\pi}{3} + 2K\pi$

عندما x تقع في الربع الثاني

$x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2K\pi \text{ , } K \in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{4\pi}{3} + 2K\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

(4) $\sqrt{3}\tan x = 1$

الحل

$\sqrt{3}\tan x = 1$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan\alpha = |\tan x| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because \tan x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث.

وبما أن الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore \tan(\pi + x) = \tan x$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{6} + K\pi$

حيث $K \in Z$

(5) $2\cos x \sin x - \cos x = 0$

الحل

$2\cos x \sin x - \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ أو $2\sin x - 1 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos x = 0$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2}$

أو $x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ و $K \in Z$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ و $K \in Z$

$\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\sin\alpha = |\sin x| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ $\because \sin x > 0$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما x تقع في الربع الاول

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$ و $K \in Z$

عندما x تقع في الربع الثاني

$x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2K\pi$ و $K \in Z$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة:

$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ أو

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

---

(6) $\tan x \sin^2 x = \tan x$

الحل

$\tan x \sin^2 x = \tan x \Rightarrow \tan x \sin^2 x - \tan x = 0$

$\tan x(\sin^2 x - 1) = 0$

$\tan x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\tan x = 0$ أو $\sin x = 1$ أو $\sin x = -1$

$\tan x = 0$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan\alpha = |\tan x| = 0$

$\therefore \alpha = 0$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

لان الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore x = K\pi$ و $K \in Z$

$\sin x = 1$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ و $K \in Z$

$\sin x = -1$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ و $K \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة:

$x = K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

(7) $\tan^2 x = 3$

الحل

$\tan^2 x = 3$

$\tan^2 x - 3 = 0$

$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3}) = 0$

$\tan x = \sqrt{3}$ أو $\tan x = -\sqrt{3}$

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α_1 هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan \alpha_1 = |\tan x| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

$\because \tan x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

$\because$ الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\tan(\pi + x) = \tan x$

$x = \frac{\pi}{3} + K\pi \;,\; K \in Z$

أو

$\tan x = -\sqrt{3}$

نفرض أن α_2 هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan \alpha_2 = |\tan x| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$

$\because \tan x < 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو في الربع الرابع

$\because$ الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore \tan(\pi - x) = \tan(2\pi - x)$

$\therefore x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + K\pi \;,\; K \in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + K\pi$

حل المعادلة: $x = \frac{2\pi}{3} + K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{3} + K\pi$

حيث $K \in Z$

(8) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

الحل

$4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x - 1)^2 = 0$

$2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\cos\alpha = |\cos x| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}}$

$\because \cos x > 0$ $\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الرابع

$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2K\pi ,\ K \in Z$

$x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi$

عندما x تقع في الربع الأول

$x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi ,\ K \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

في التمارين (9–11)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(9) $\sin 2x = 1$

الحل

$\sin 2x = 1$

$0 \leq x < 2\pi$

$0 \leq 2x < 4\pi$

$\therefore$ $2x$ تقع في دورتين

$\because \sin 2x = 1$

$\therefore$ $2x$ زاوية ربعية

$2x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + K\pi$

$K = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

$K = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + \pi \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

$K = 2$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \Longrightarrow x = \frac{9\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة :

$x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$

(10) $2\cos 3x = 1$

الحل

$$0 \leq x < 2\pi$$

$$0 \leq 3x < 6\pi$$

$\therefore$ $3x$ تقع في 3 دورات

$$2\cos 3x = 1$$

$$\therefore \cos 3x = \frac{1}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية $3x$

$$\cos\alpha = |\cos 3x| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}}$$

$\because \cos 3x > 0$ $\therefore$ $3x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $3x$ تقع في الربع الأول:

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}K\pi}$$

$K=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}$ و $\frac{\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{9}$ و $\frac{7\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{13\pi}{9}$ و $\frac{13\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}(3\pi) = \frac{19\pi}{9}$ و $\frac{19\pi}{9} \notin [0, 2\pi)$

عندما $3x$ تقع في الربع الرابع:

$$3x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2K\pi \Rightarrow 3x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi$$

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}K\pi}$$

$K=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9}$ و $\frac{5\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{9}$ و $\frac{11\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{17\pi}{9}$ و $\frac{17\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=3 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}(3\pi) = \frac{23}{9}\pi$ و $\frac{23\pi}{9} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة:

$x = \frac{\pi}{9}$ و $x = \frac{7\pi}{9}$ و $x = \frac{13\pi}{9}$

أو $x = \frac{5\pi}{9}$ و $\frac{11\pi}{9}$ و $\frac{17\pi}{9}$

(11) $\tan 2x = 1$

الحل

$0 \leq x < 2\pi$

$0 \leq 2\pi < 4\pi$

∴ $2x$ تقع في دورتين

$\tan 2x = 1$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية $2x$

$\tan\alpha = |\tan 2x| = |1| = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

∵ $\tan 2x > 0$ ∴ $2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

∵ الدالة $\tan 2x$ دالة دورية ودورتها π $\boxed{\tan 2x = \tan(2x+\pi)}$

$2x = \frac{\pi}{4} + K\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}K\pi}$

$K=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$ ، $\frac{\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$ ، $\frac{5\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$ ، $\frac{9\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(3\pi) = \frac{13\pi}{8}$ ، $\frac{13\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=4 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(4\pi) = \frac{17\pi}{8}$ ، $\frac{17\pi}{8} \notin [0, 2\pi)$

∴ حل المعادلة:

$x = \frac{\pi}{8}$ ، $x = \frac{5\pi}{8}$ ، $x = \frac{9\pi}{8}$ ، $x = \frac{13\pi}{8}$

في التمارين (12–14)، حلّ المعادلات التالية:

(12) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

الحل

$\sin^2 x - 2\sin x = 0$

$\sin x(\sin x - 2) = 0$

$\sin x = 0$ أو $\sin x = 2$

$\sin x = 0$

∴ x زاوية ربعية.

$x = 0$ أو $x = \pi$

$x = 2K\pi$ ، $K \in Z$

أو $x = \pi + 2K\pi$ ، $K \in Z$

أو

$\sin x = 2$

$y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$2 \notin [-1, 1]$

∴ $\sin x = 2$ ليس لها حل

∴ حل المعادلة

$x = 2K\pi$ ، $K \in Z$

أو $x = \pi + 2\pi\pi$

(13) $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

الحل

$2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $\sin x + 2 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = -2$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\sin\alpha = |\sin x| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \because \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما x تقع في الربع الأول

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi, K \in Z$

عندما x تقع في الربع الثاني

$x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2K\pi, K \in Z$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$

$\sin x = -2$

$y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$-2 \notin [-1, 1]$

$\sin x = -2$ ليس لها حل

$\therefore$ حل المعادلة :

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$

أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$ حيث $K \in Z$

(14) $\tan^2 x \cos x + 5\cos x = 0$

الحل

$\tan^2 x \cos x + 5\cos x = 0$

$\cos x(\tan^2 x + 5) = 0$

$\cos x = 0$ أو $\tan^2 x + 5 = 0$

$\tan^2 x = -5$

$\cos x = 0$ أو $\tan^2 x = -5$

ليس لها حل

$\therefore$ x زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi, K \in Z$

أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi, K \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة :

$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ حيث $K \in Z$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

في التمارين (11−6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول
(b) الأول أو الثالث
(c) الثالث
(d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
(b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$
(d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.
(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.
(c) $\frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.
(d) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي:

(a) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\right\}$
(b) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$
(c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right\}$
(d) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$