الوحدة السابعة : الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية: هي العدد الذي مربعه (-1) و يرمز إليه بالرمز i: $i=\sqrt{-1}, i^2=-1$

الأعداد التخيلية : لأي عدد حقيقي موجب m ، $\sqrt{-m}=\sqrt{m}i$

تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b\in\mathbb{R}^*$ إعداداً تخيلية .

العدد المركب : هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a,b عددان حقيقيان ، i الوحد التخيلية .

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z=a+bi$ (الصورة الجبرية للعدد المركب)

الجزء الحقيقي (a) — الجزء التخيلي (b)

تساوي عددين مركبين :

$$z_1=a_1+b_1i \ , z_2=a_2+b_2i$$

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow a_1=a_2 \ , b_1=b_2$$

مثال(1) : أوجد قيم كل من $x,y\in\mathbb{R}$ في كل مما يأتي:

❶ $2x+3yi=-14+9i$

---

❷ $14i^2-3i=2x+(y+5)i$

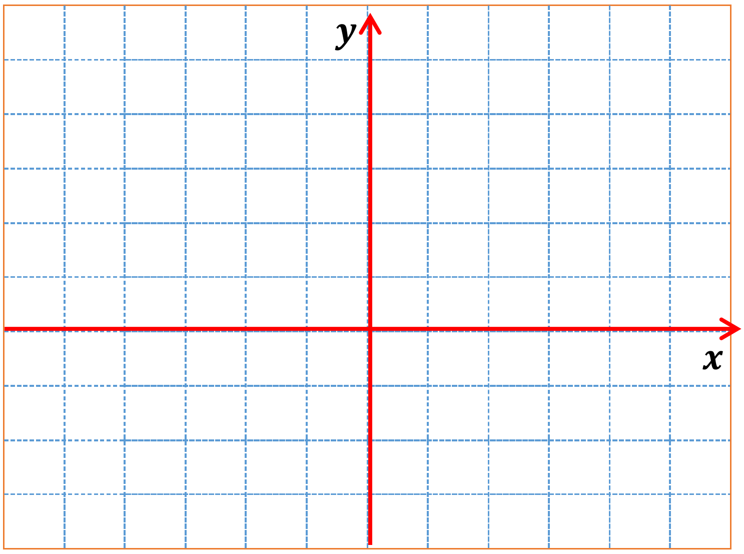
محمد جبر الخوالدة M.J.K

التمثيل البياني لعدد مركب

الصورة الجبرية $z = a + bi \longleftrightarrow M(a, b)$ الصورة الديكارتية

مثال (2) : مثل كلاً مما يلي في المستوي المركب :

(a) $z_1 = -2 + 3i$ (b) $z_2 = -4$ (c) $z_3 = -i$ (d) $z_4 = 2(2 + i)$



مثال (3) : اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $K(7,0), H(1,-2), N(-4,1)$

النقطة $K(7,0)$ **تمثل العدد المركب :** ------------------------------

النقطة $H(1,-2)$ **تمثل العدد المركب :** ------------------------------

النقطة $N(-4,1)$ **تمثل العدد المركب :** ------------------------------

****

العمليات على الأعداد المركبة

$z_1 = a_1 + b_1 i \quad , z_2 = a_2 + b_2 i$

أولاً جمع و طرح الأعداد المركبة

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

ثانياً ضرب الأعداد المركبة

❶ $cz_1 = ca_1 + cb_1 i \quad , c \in \mathbb{R}$

❷ $z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

ثالثاً قوى العدد المركب

$i^{4p} = 1 \quad , i^{4p+1} = i \quad , i^{4p+2} = -1 \quad , i^{4p+3} = -i \quad , \quad p \in \mathbb{N}$

رابعاً مرافق العدد المركب و خواصه

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو : $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

✩ $z_1 . \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$	✩ $z_1 - \overline{z_1} = 2b_1 i$	✩ $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
✩ $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$	✩ $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$	✩ $\overline{z_1 \mp z_2} = \overline{z_1} \mp \overline{z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

مثال (4): إذا كان : $z_1 = 2 + i \ , z_2 = -3 + 4i$ فأوجد :

❶ $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

❷ $\overline{z_1} . \overline{z_2}$

❸ $z_1 - \overline{z_2}$

❹ ${z_2}^{-1}$

مثال(5): إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد : $z^{27} \ , \ z^{12}$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

مثال (6): إذا كان $z_2 = -\sqrt{3} + 2i \quad , \quad z_1 = \sqrt{3} + i$ فأوجد :

❶ $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$ ❷ $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}$ ❸ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$

الإحداثيات القطبية و الصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب : إذا كان $z = a + bi$ فإن : $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (1) : أوجد :

❶ $|5 + 12i|$ ❷ $|2 - 2i|$ ❸ $|2i|$

****

التحويل من الإحداثيات القطبية (r, θ) إلى الإحداثيات الديكارتية (x, y):

$$x = r\cos\theta \quad , y = r\sin\theta$$

مثال(2): حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية :

❶ $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ❷ $(2, 270^\circ)$ ❸ $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

محمد جبر الخوالده M.J.K

التحويل من الإحداثيات الديكارتية (x, y) إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) :

☆ نوجد قيمة r باستخدام القانون $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

☆ نوجد قياس زاوية الإسناد α : باستخدام : $\tan \alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

☆ نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية θ من إشارة كل من x, y

☆ نوجد الزاوية θ اعتماداً على :

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0, y > 0 \quad \text{الربع الأول} \\ \pi - \alpha & : x < 0, y > 0 \quad \text{الربع الثاني} \\ \pi + \alpha & : x < 0, y < 0 \quad \text{الربع الثالث} \\ 2\pi - \alpha & : x > 0, y < 0 \quad \text{الربع الرابع} \end{cases}$$

مثال(3) : أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية :

❸ $\left(-2, -2\sqrt{3}\right)$ ❷ $(0,4)$ ❶ $(-2,5)$

محمد جبر الخوالدة M.J.K

الصورة المثلثية :

الصورة المثلثية — الصورة الجبرية

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \longleftrightarrow z = a + bi$$

مثال(4) : ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية :

❶ $z_1 = 2 + 2i$ ❷ $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ ❸ $z_3 = -1 - i$

محمد جبر الخوالده M.J.K

مثال(5) : ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$:

❶ $z_1 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

❷ $z_2 = 2\left(sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

محمد جبر الخوالدة
M.J.K

مثال(6) : ضع كلاً مما يلي في الصورة الجبرية :

❶ $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ ❷ $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ❸ $\sqrt{3}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$

محمد جبر الخوالده
M.J.K

حل المعادلات

حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$:

مثال(1) : أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية في مجموعة الأعداد المركبة :

❶ $3z - 1 + i = 5 - 2i$

❷ $z + 2\bar{z} = 4 + i$

محمد جبر الخوالدة
M.J.K

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$:

مثال(2) : أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية في مجموعة الأعداد المركبة :

❶ $16x^2 - 64 = 0$

❷ $z^2 - 2z + 4 = 0$

❸ $z + \frac{4}{z} = 2$

مثال (3) : لتكن المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$

a) أثبت أن العدد المركب $z_1 = 2 + 4i$ **هو جذر لهذه المعادلة.**

b) أوجد الجذر الثاني.

محمد جبر الخوالده
M.J.K

الجذر التربيعي لعدد مركب

مثال (4) : أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب : $z = 3 + 4i$

محمد جبر الخوالدة
M.J.K

مثال (5) **: أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب :** $z = -7 - 24i$