الإدارة العامة لمنطقة الفروانية التعليمية

مدرسة مرشد سعد البذال الثانوية

قسم الرياضيات

ملخص قوانين الرياضيات لصف ١١ علمي

الفصل الدراسي الثاني ٢٠١٨ / ٢٠١٩

ملاحظة: القوانين لا تغنى عن الكتاب المدرسي

إعداد أ / محمد مصطفى أحمد

مدير المدرسة أ / صالح المطيري

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

القيمة المطلقة للعدد المركب $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

الإحداثيات الديكارتية

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

الإحداثيات القطبية $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z.

الدوال الجيبية

$y = a\sin bx$ دالة الجيب $y = a\cos bx$ دالة جيب التمام

1 تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.

2 $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$

3 $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

دالة الظل

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ : \ \cos x \neq 0$$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x , x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1 , 1]$	$[-1 , 1]$	$(-\infty , \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

قانون الجيب

في أي مثلث ABC :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

قانون جيب التمام

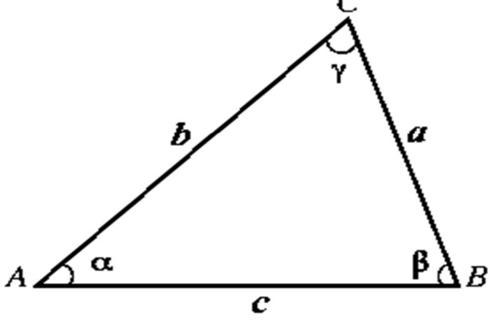
في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Law of Cosine



معلومة:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مساحة المثلث

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a , b , c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) =$ semiperimeter (نصف محيط المثلث)

المتطابقات المثلثية الأساسية

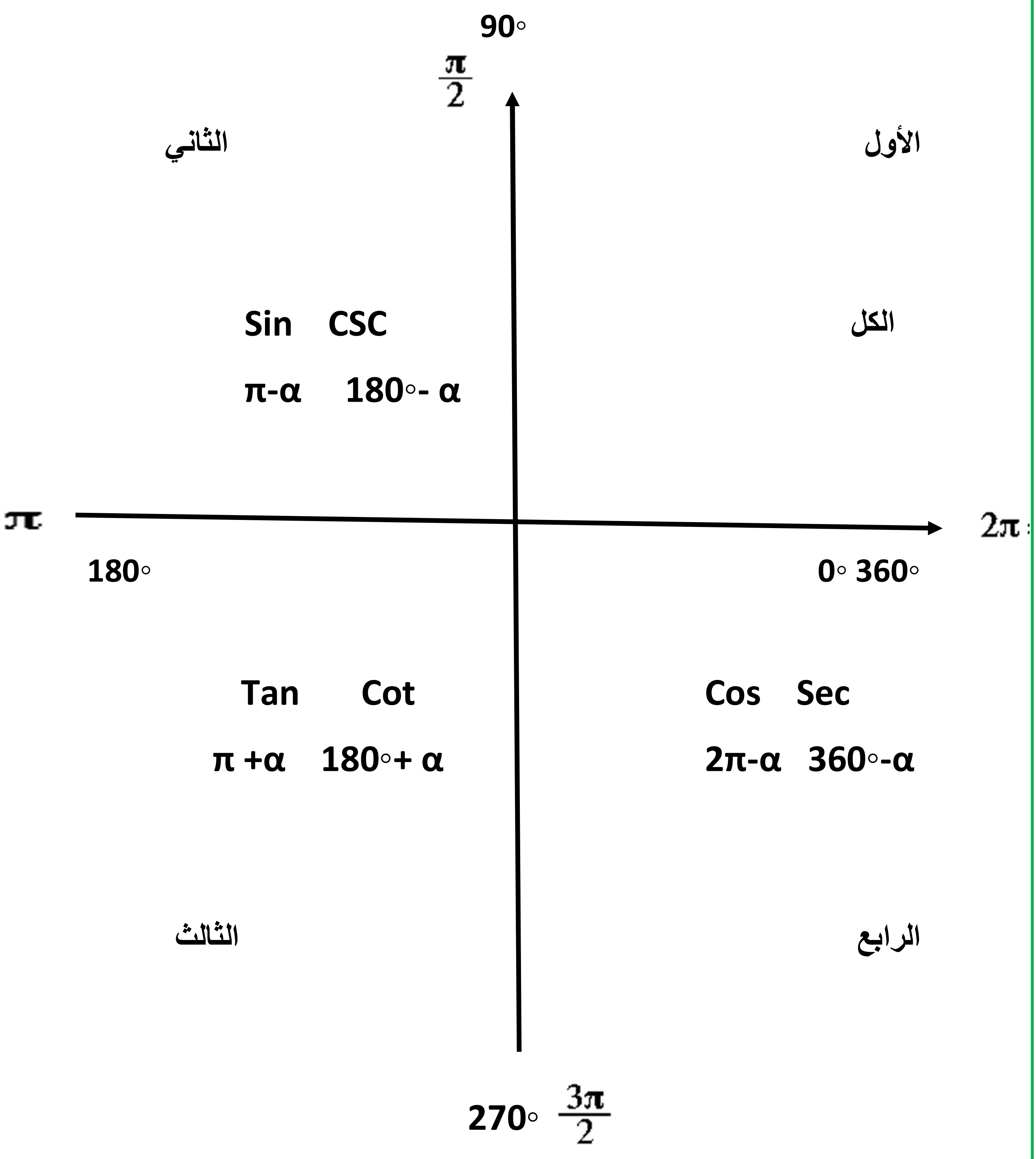
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Pythagorian Identities متطابقات فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

قاعدة الإشارات للنسب المثلثية



متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

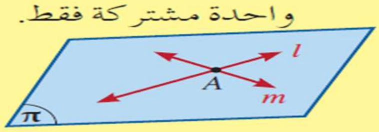
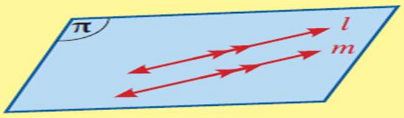
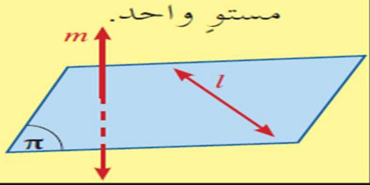
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

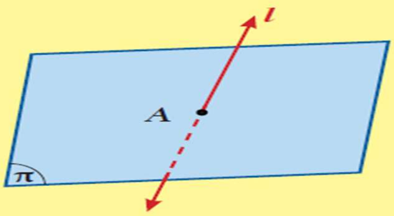
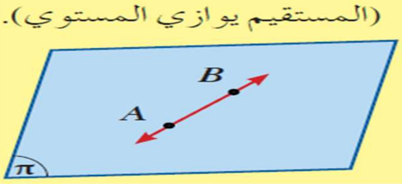
حالات تعيين المستوي في الفضاء

- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.

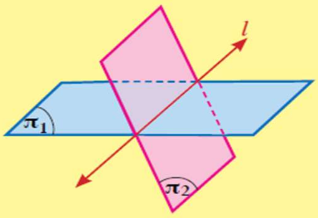
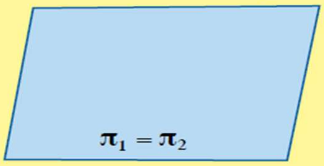
أوضاع المستقيمات في الفضاء

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ مستقيمان متقاطعان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متوازيان	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $m \not\subset \pi$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ مستقيمان متخالفان

أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء

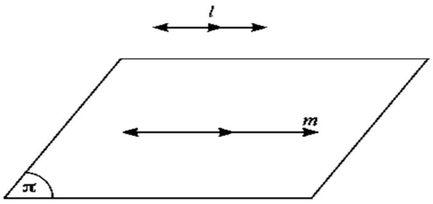
a صفر نقطة مشتركة:	b نقطة مشتركة واحدة:	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	المستقيم يقطع المستوي. 	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} // \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} // \pi$

أوضاع مستويين في الفضاء

a المستويان متقاطعان في مستقيم. 	**b** المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط). 	**c** المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

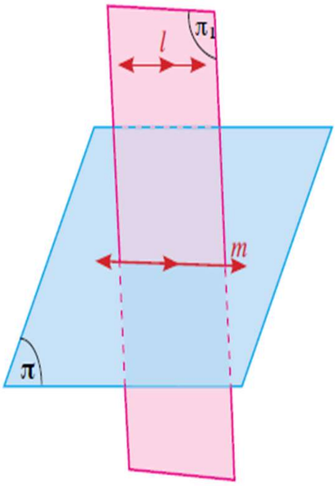
نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.



نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

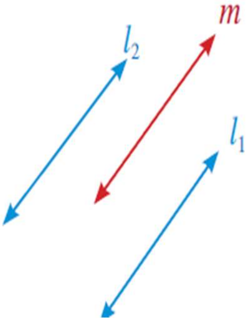


$\because \ \overleftrightarrow{l} \parallel \pi \ , \ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1 \ , \ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \ \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$

نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

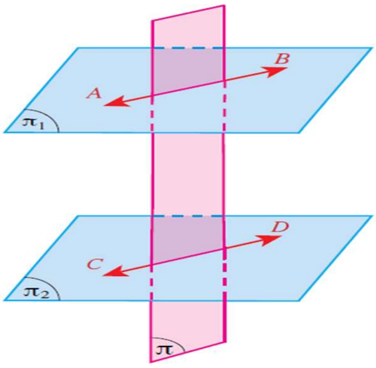


$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \ \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



إذا كان

$\pi_1 \parallel \pi_2$

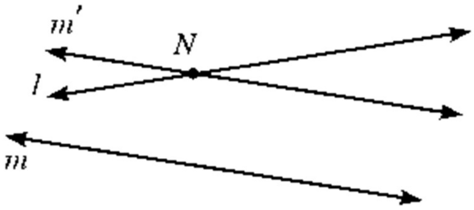
$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

فإن

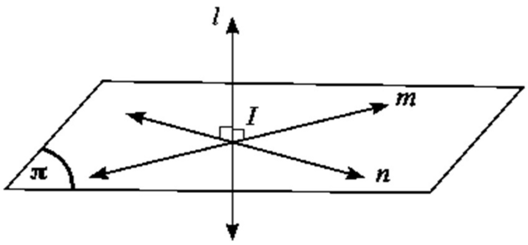
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

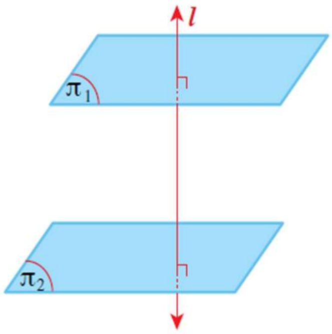


الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له وموازٍ للآخر.

نظرية (5)



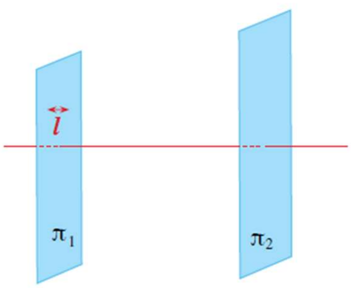
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًا على مستويهما.



نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

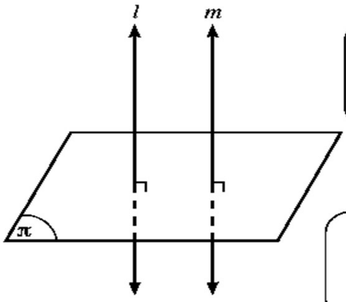
$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$



نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.

$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$



نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

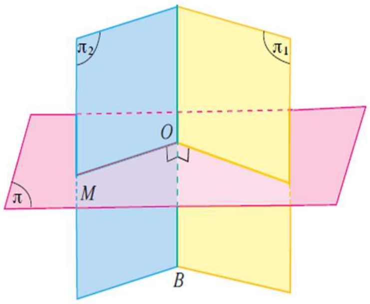
$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \ , \ \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًا على المستوي أيضًا.

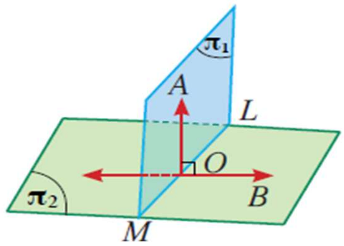
$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية)



تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.



نظرية (10)

إذا كان مستقيم عموديًا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًا على المستوي.

Law of Permutations قانون التباديل

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n,\ r \in \mathbb{Z}^+ \ , \ n \geq r$

قانون التوافيق Law of Combinations

$$_nC_r = \frac{nPr}{r!}$$

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n,\ r \in \mathbb{Z}^+\ ,\ n \geq r$

خواص أخرى للتوافيق

$_nC_m = {_nC_{n-m}}$

$_nC_m = {_{n-1}C_m} + {_{n-1}C_{m-1}}$

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {_nC_0}x^n + {_nC_1}x^{n-1}y + {_nC_2}x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {_nC_r}x^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {_nC_{n-1}}xy^{n-1} + {_nC_n}y^n$$

الحد العام في مفكوك ذات الحدين $T_{r+1} = {_nC_r} \cdot x^{n-r} \cdot y^r$

خواص الاحتمال لحدث ما

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

a) $0 \leq P(E) \leq 1$

b) إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

c) إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

d) مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة $= 1$

A، B حدثان فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A، B حدثان متنافيان $\Longleftrightarrow$ $P(A \cap B) = 0$

A، B حدثان مستقلان $\Longleftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A $\Longleftrightarrow$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

احتمال ذات الحدين   Binomial Probability

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E، H تحقق فقط k مرّة، فبالتالي:

$$\begin{aligned} P(E) &= {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k} \\ &= {}_nC_k \cdot m^k (1-m)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot m^k (1-m)^{n-k} \end{aligned}$$

بالنجاح والتوفيق بامتياز لجميع الطلبة