الوحده الثامنه

حساب المثلثات

دالة جيب التمام $y = a\cos bx \quad : a \neq 0$

دالة الجيب $y = a\sin bx \quad : a \neq 0$

$|a|$ سعة الداله الجيبيه

$|b|$ عدد الدورات في $[0, 2\pi]$

$\frac{2\pi}{|b|}$ يمثل دورة الداله

دالة الظل $y = a\tan bx \quad : a \neq 0$

ليس لها سعه

الدوره $\frac{\pi}{|b|}$ وتكرر نفسها في الفتره $\left(\frac{-\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b}\right)$

مجالها

$$R - \{x : x = \frac{\text{الدوره}}{2} + \text{الدوره} \times n \ , \ n \in \mathbb{Z}\}$$

التمدد / الإنكماش الرأسي وسعة الدالة الجيبية

سعة الدالة: $\frac{\max f - \min f}{2}$

$$f(x) = a \sin(bx - h) + k$$

$$f(x) = a \cos(bx - h) + k$$

السعة $|a|$

دورة الدالة $\frac{2\pi}{|b|}$ الإنكماش الأفقي $\frac{1}{|b|}$

الإزاحة الأفقية $\frac{h}{b}$ الى جهة اليمين عندما $h > 0$
الى جهة اليسار عندما $h < 0$

الإزاحة الرأسية K الى أعلى عندما $K > 0$
الى أسفل عندما $K < 0$

الإزاحة الرأسية $K = \frac{\max f + \min f}{2}$

التمدد

الرأسي	الأفقي
$\lvert a \rvert > 1$ تمدد	$\lvert b \rvert > 1$ انكماش
$\lvert a \rvert < 1$ انكماش	$\lvert b \rvert < 1$ تمدد
بمعامل $\lvert a \rvert$	بمعامل $\frac{1}{\lvert b \rvert}$

$$f(x) = a\,Sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + k$$
$$g(x) = a\,\cos\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + k$$

يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين f و g حيث
$\cos x$ ، $Sin\,x$
عن طريق التحويلات التاليه وبحسب الترتيب التالي

① التمدد الأفقي $\frac{1}{|b|}$

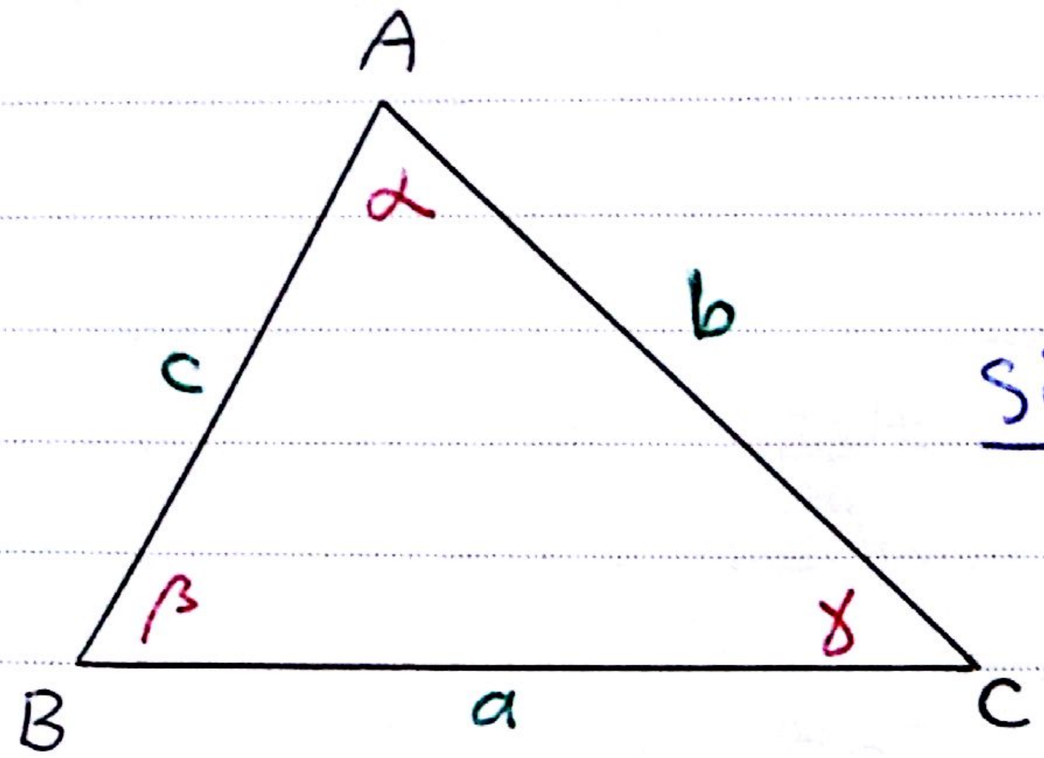
② الإزاحه الأفقيه $\frac{h}{b}$

③ التمدد الرأسي $|a|$

④ الإزاحه الرأسيه k

* السعه $|a|$

* الدوره $\frac{2\pi}{|b|}$



قانون الجيب:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

مساحة المثلث:

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$= \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

قاعدة هيرون

$$Area(ABC) = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

حيث $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$

التمثيل البياني للدوال المثلثية

P.46

① اوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي

ⓐ $y = -2\cos 5x$

$a = -2 \qquad b = 5$

السعة $= |-2| = 2$

الدورة :

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5}$$

ⓑ $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

$a = \frac{1}{2} \qquad b = -1$

السعة $= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$$

P.46

② اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ اذا كان

ⓐ $a = -2$ ، الدورة $\frac{\pi}{3}$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |b| = 6 \Leftrightarrow b = 6 \text{ , } b = -6$$

$y = -2\cos 6x$, $y = -2\cos(-6x)$

ⓑ $a = 0.25$ ، الدورة π

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = 2 \text{ ، } b = -2$$

$y = 0.25\cos 2x$ ، $y = 0.25\cos(-2x)$

ⓒ $y = \cos(\pi x)$ $\qquad$ $y = \cos(-\pi x)$

التمثيل البياني للدوال المثلثية

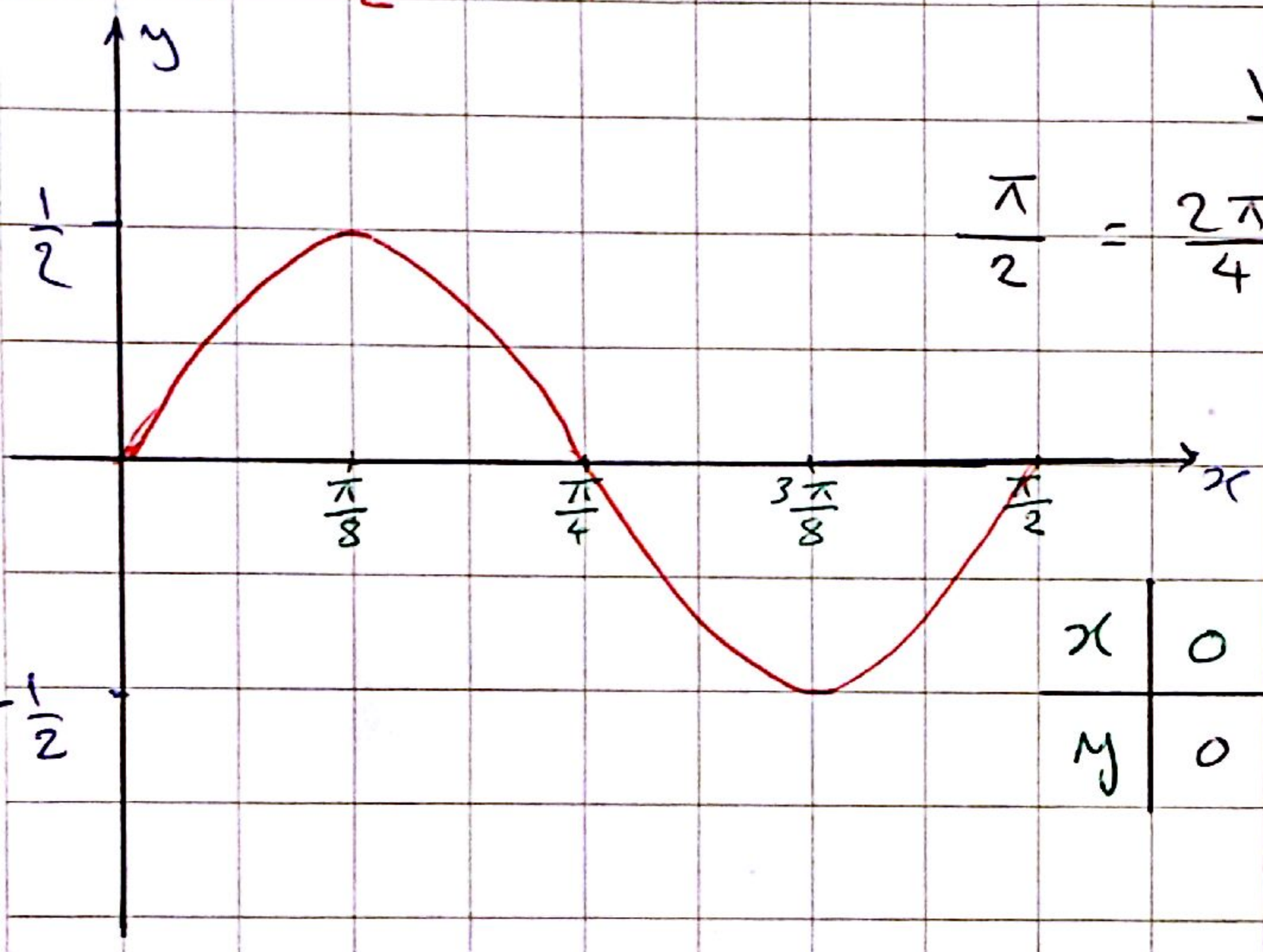
③ P48 اوجد السعة والدور لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانيا

(a) $y = \frac{1}{2}\sin 4x$

السعة $= |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

الدور $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{8}$ = الدور على 4

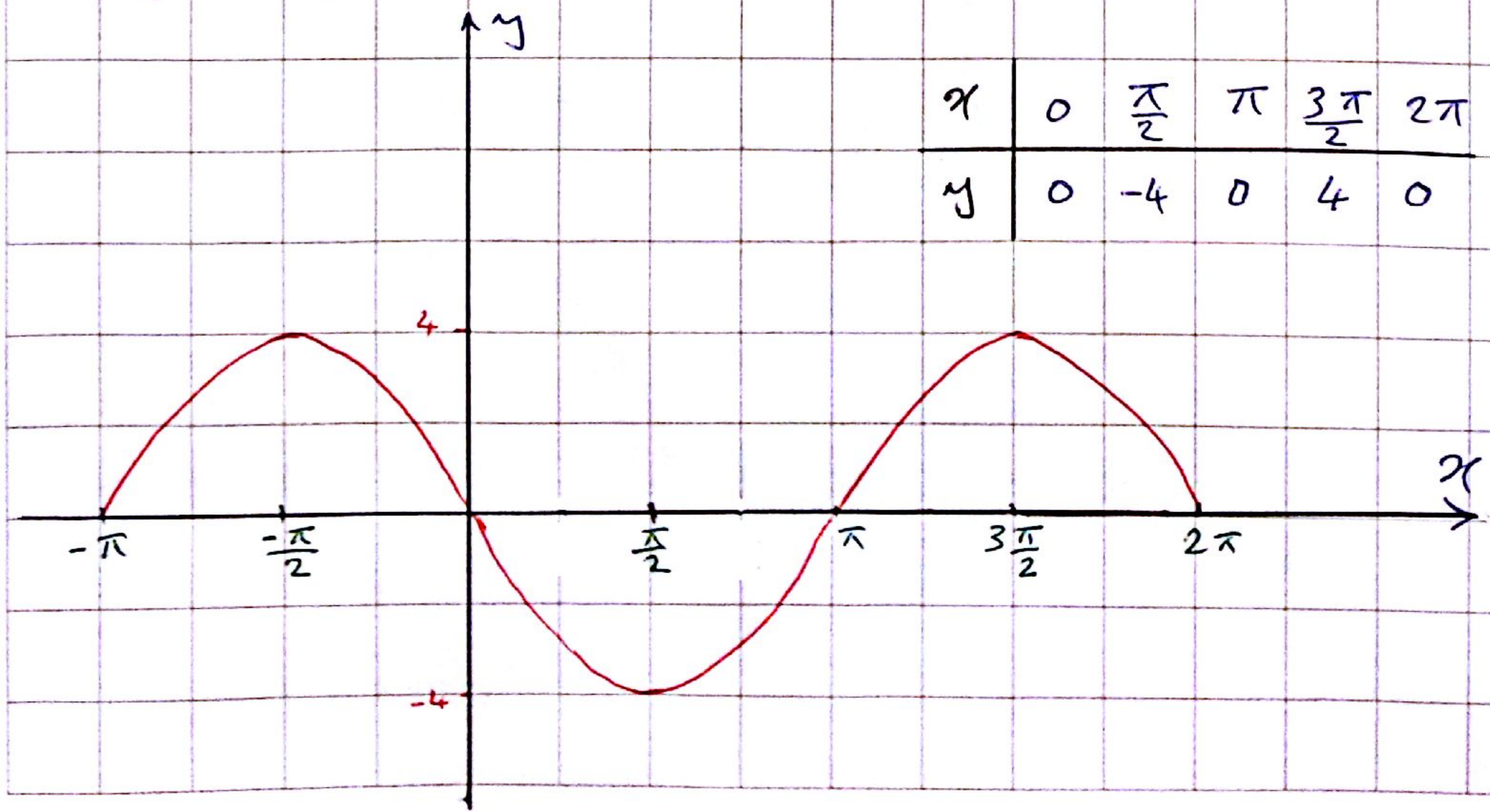


x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

(b) $y = -4\sin x \quad ; x \in [-\pi, 2\pi]$

السعة $= |-4| = 4$

الدور $= \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ ، $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$ = الدور على 4



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	-4	0	4	0

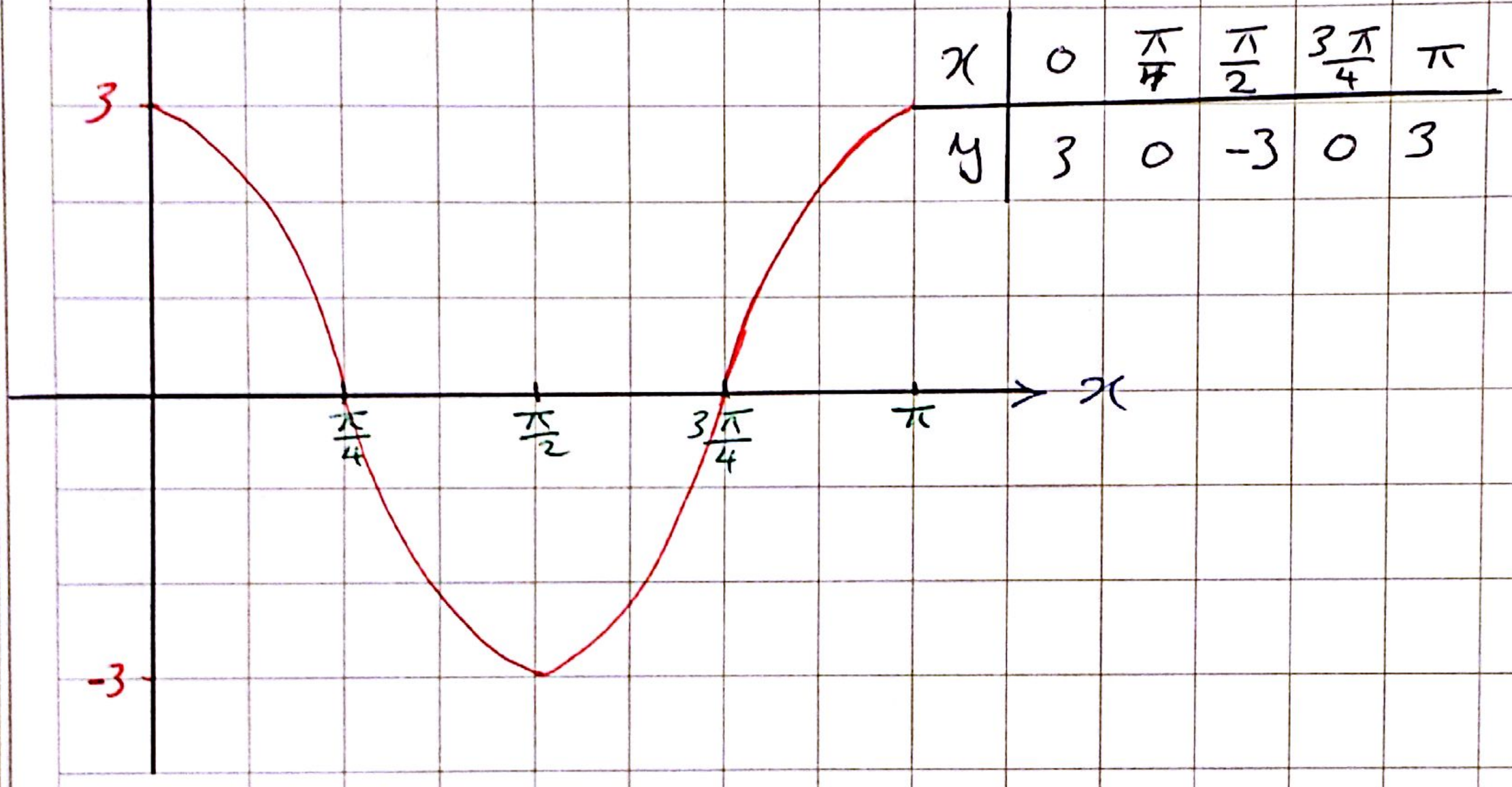
④ اوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانيا

(a) $y = 3\cos 2x$

السعة $= |3| = 3$

الدورة $= \frac{2\pi}{2} = \pi$ ، ربع الدورة $\frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	3	0	-3	0	3

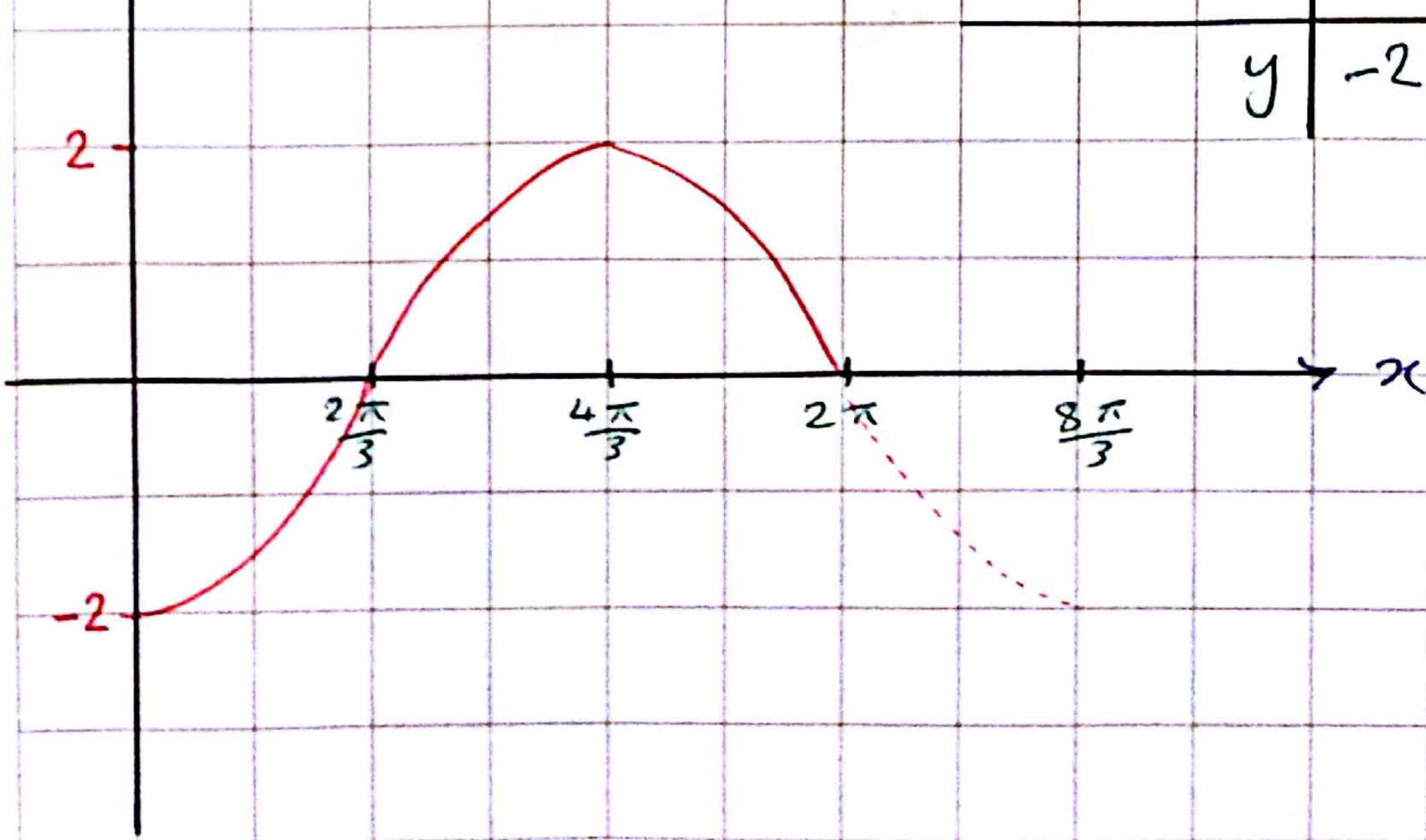


(b) $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$ ، $0 \le x < 2\pi$

السعة $= |-2| = 2$

الدورة $= \frac{2\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi}{3}$ ، ربع الدورة $= \frac{2\pi}{3}$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$
y	-2	0	2	0	-2

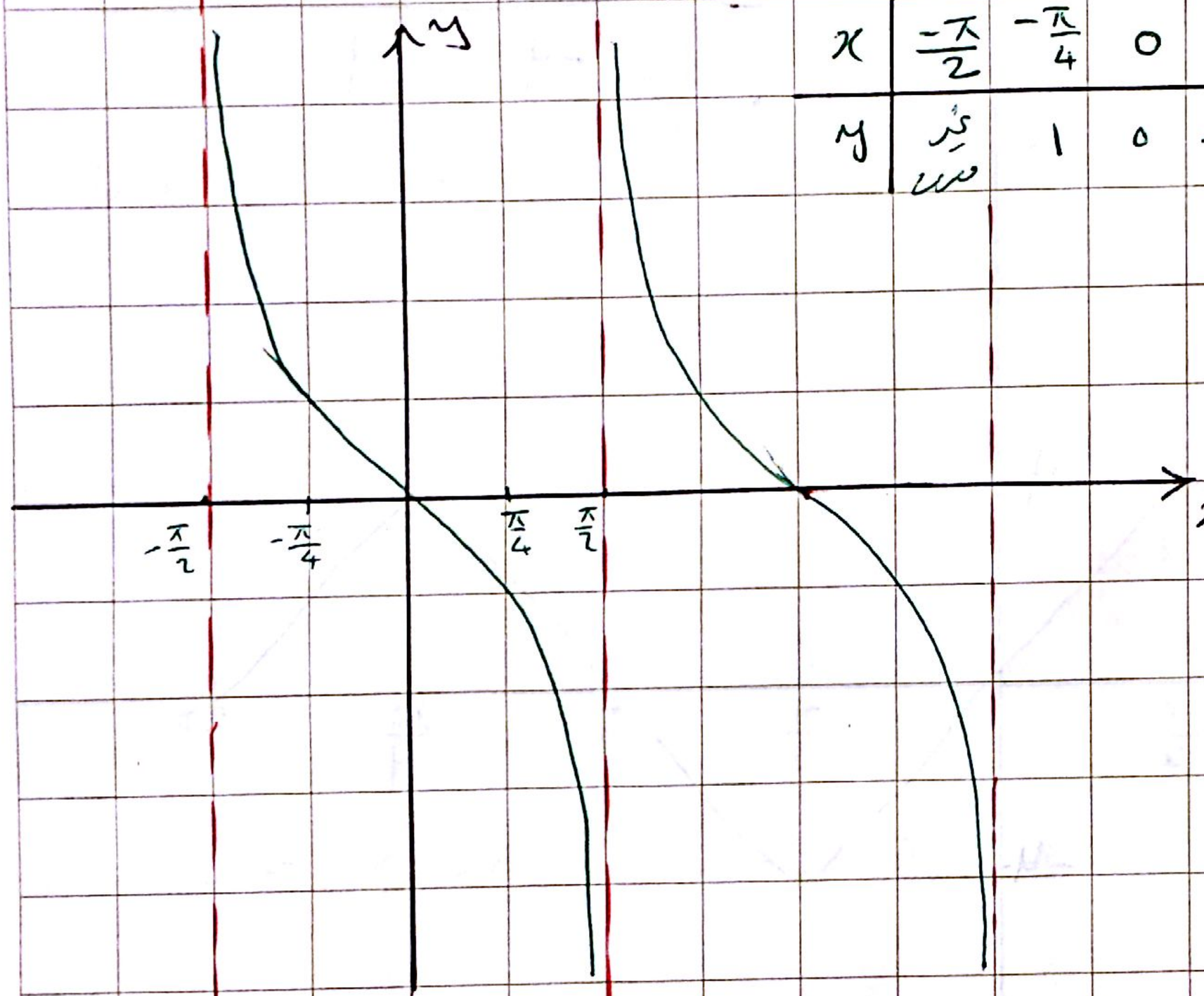


P.51 ⑤ اوجد الدوره لكل مما يلي ثم ارسم بيانيا

ⓐ $y = -\tan x$

الدوره $= \frac{\pi}{1} = \pi$ ربع الدوره $= \frac{\pi}{4}$

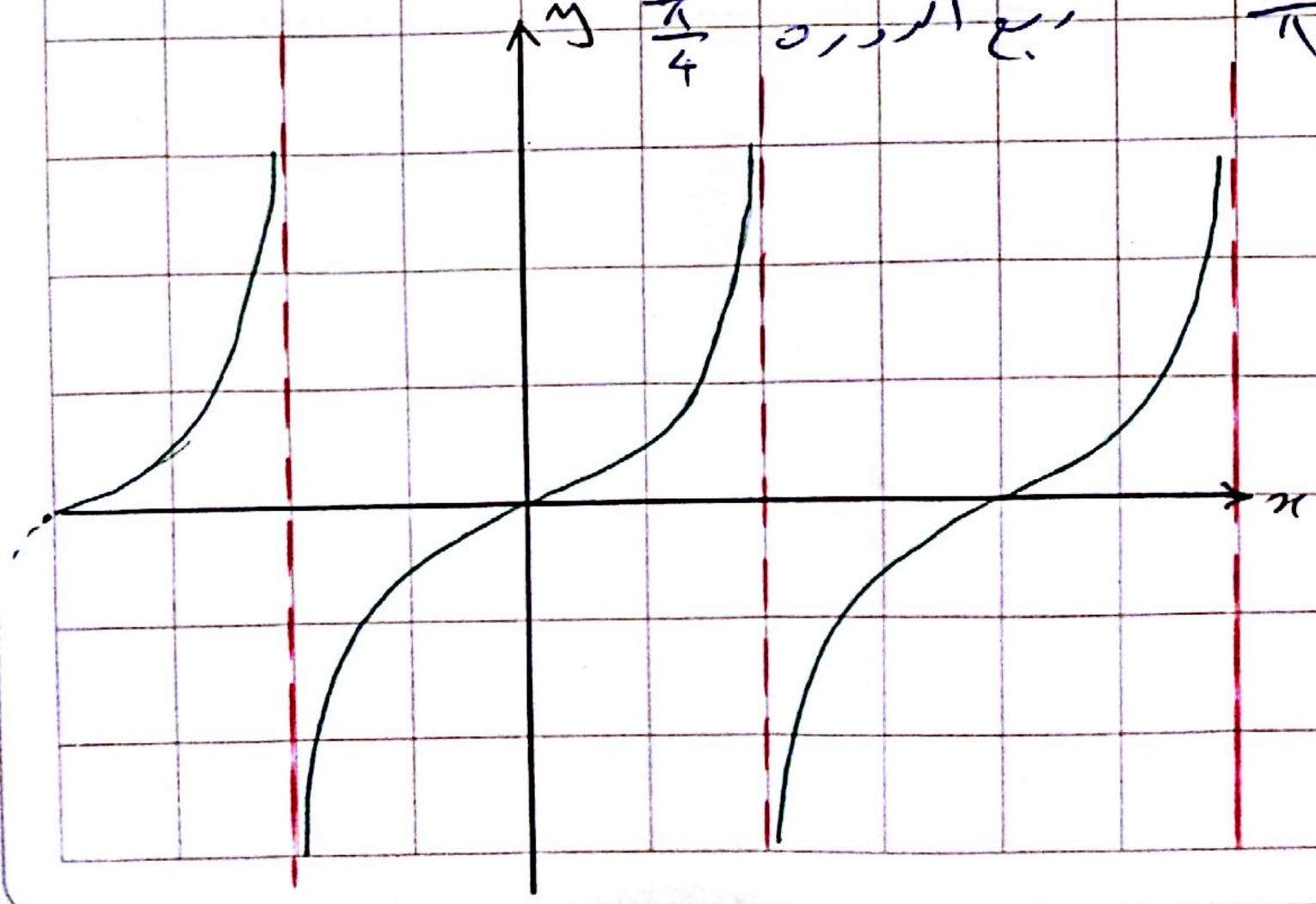
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	غير معرف	1	0	-1	غير معرف



ⓑ $y = \frac{1}{2}\tan x$

الدوره $= \frac{\pi}{1} = \pi$ ربع الدوره $= \frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	غير معرف	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	غير معرف



التمدد / الانكماش الرأسي

وسعة الدالة الجيبية

P.55 ① صف التمثيل البياني لكل من الدالتين

$y_1 = \sin x$ $\quad y_2 = \frac{1}{3}\sin x$

وسعة الدالة y_2 هو $|a| = |\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$

$\because a < 1$

∴ التمثيل البياني للدالة $y_2 = \frac{1}{3}\sin x$ هو انكماش رأسي للدالة $y_1 = \sin x$ بمعامل $\frac{1}{3}$

P.56 صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين

$y_1 = \cos x$

$y_2 = \cos(\frac{x}{2})$

y_1 دورة $= 2\pi$

y_2 دورة $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

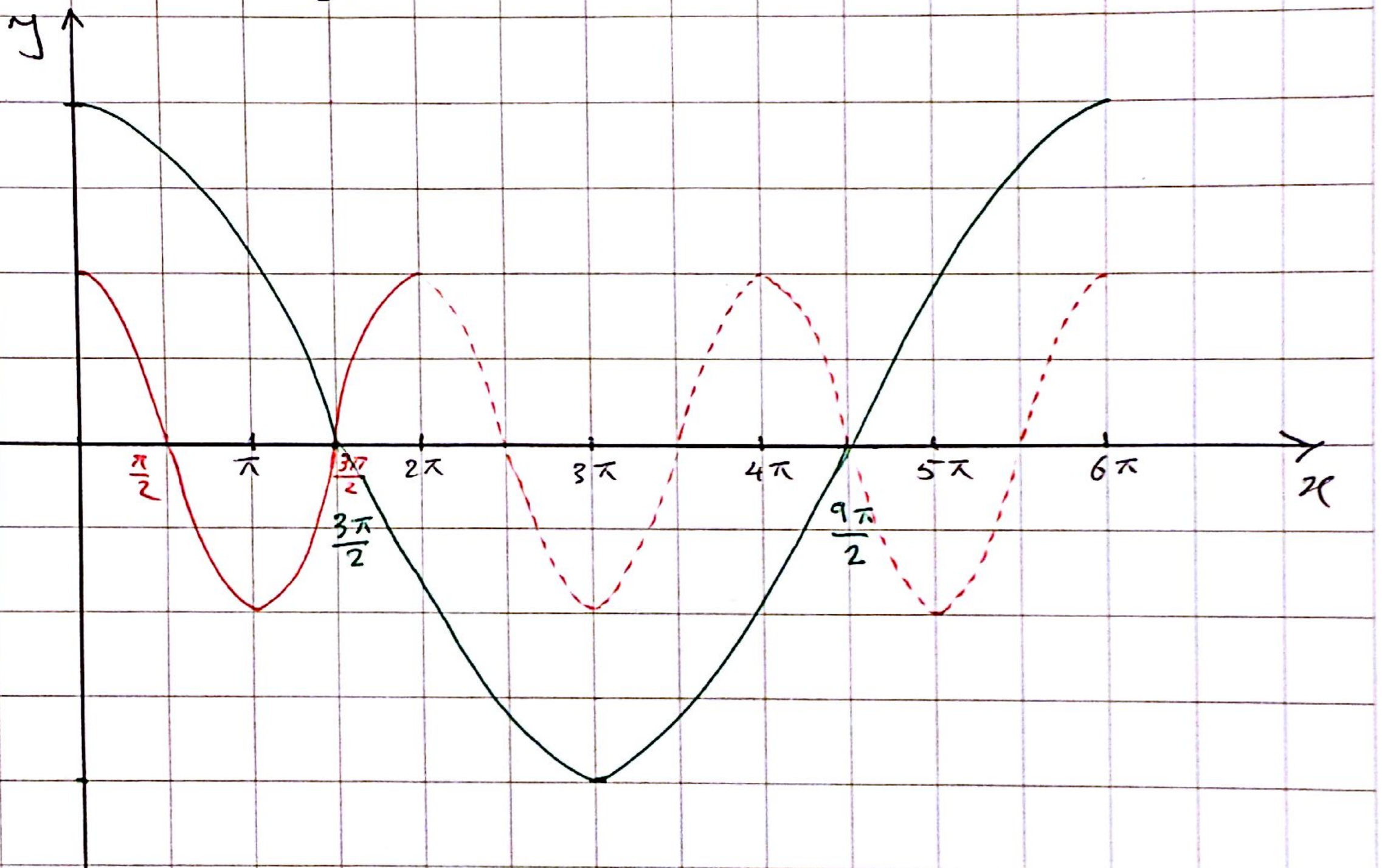
يمكن الحصول على بيان y_2 من بيان y_1 بتمدد أفقي بمعامل $= 4$

③ P56 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين

$y_1 = \cos x$ $\quad y_2 = 2\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

y_2 عدد $= 2$ $\quad y_1$ عدد $= 1$

y_2 دور $= \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$ $\quad y_1$ دور $= 2\pi$



y_2 هي تمدد أفقي لـ y_1 بمعامل: $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 3$

④ P.58 صف العلاقة بين التمثيل البياني للدالتين

(a) $y_1 = \cos x$ $\quad y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$y_2 = \cos\left(x - \left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{3\pi}{4}$ لجهة اليسار

(b) $y_1 = \sin 3x$ $\quad y_2 = \sin(3x - 7)$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة أفقية مقدارها 7 لجهة اليمين

الإزاحة الرأسية:

⑤ P59 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين

$y_1 = \frac{3}{4}\sin x \qquad y_2 = \frac{3}{4}\sin x + 2$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة رأسية بمقدار 2 نحو الأعلى

لذلك $K = 2$

⑥ P.61 وضح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين

عن طريقة التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

ⓐ $y = \cos(1 - x) + 2$

$y = 1\cos(-1(x - 1)) + 2$

$a = 1 \qquad b = -1 \qquad \frac{h}{b} = 1 \qquad K = 2$

∴ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة y من التمثيل البياني للدالة $\cos x$

عن طريقة تطبيق التحويلات التالية

① تمدد أفقي بمعامل $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{|-1|} = 1$

② إزاحة أفقية لليمين بمقدار 1

③ تمدد رأسي بمعامل $|a| = 1$

④ إزاحة رأسية لأعلى بمقدار $K = 2$

وتكون البداية $= |a| = |1| = 1$

دورة الدالة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ⓑ $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

$y = 2\sin\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{-3\pi}{4}\right)\right) - 1$

$a = 2 \qquad b = \frac{1}{3} \qquad \frac{h}{b} = \frac{-3\pi}{4} \qquad K = -1$

قانون الجيب

① حل المثلث ΔABC حيث P.64

$\alpha = 36^\circ$ ، $\beta = 48^\circ$ $\quad a = 8$ cm

$$\gamma = 180 - (36 + 48) = 96^\circ$$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36}{8} = \frac{\sin 48}{b} = \frac{\sin 96}{c}$$

$$b = \frac{8 \sin 48}{\sin 36} = 10.1 \text{ cm}$$

$$c = \frac{8 \sin 96}{\sin 36} = 13.5 \text{ cm}$$

P.66

② ΔABC ; $a = 7$ cm $\quad b = 6$ cm $\quad \alpha = 26.3^\circ$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin\beta}{6} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$\sin\beta = \frac{6 \sin 26.3}{7} = 0.37 \Rightarrow \beta = 22.32$ or $\beta = 157.6$ مرفوضة

$$\gamma = 180 - (26.3 + 22.32) = 131.38^\circ$$

$$c = \frac{7 \sin 131.38}{\sin 26.3} = 11.8 \text{ cm}$$

③ $\Delta(ABC)$ $a = 6\,cm$ $b = 7\,cm$ $\alpha = 30^\circ$ P.67

$$\frac{\sin 30}{6} = \frac{\sin\beta}{7} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

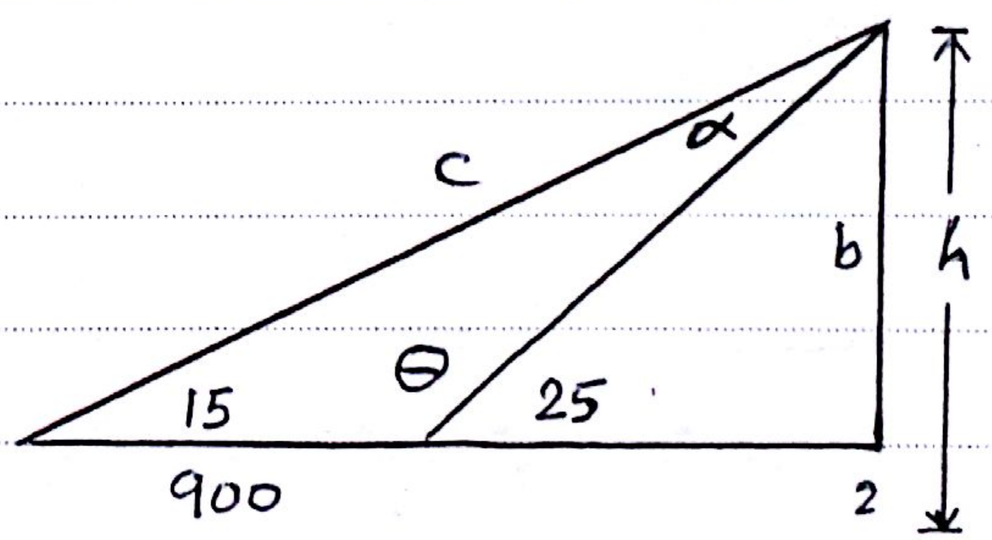
$$\sin\beta = \frac{7\sin 30}{6} = 0.58 \Rightarrow \beta_1 = 35.6 \quad \text{or} \quad \beta_2 = 144.3$$

اگر β_1	اگر β_2
$\gamma_1 = 180 - (30 + 35.6)$	$\gamma_2 = 180 - (30 + 144.3)$
$= 114.4$	$= 5.7$
$c_1 = \frac{6\sin 114.4}{\sin 30} = 10.9\,cm$	$c_2 = \frac{6\sin 5.7}{\sin 30} = 1.19\,cm$

④ P.68 در مثال (4) ارتفاع کبل اگر کان میاسی ازاویه $15^\circ, 25^\circ$

$$\theta = 180 - 25 = 155^\circ$$

$$\alpha = 180 - (15 + 155) = 10$$



$$\frac{\sin 10}{900} = \frac{\sin 155}{c} \Rightarrow$$

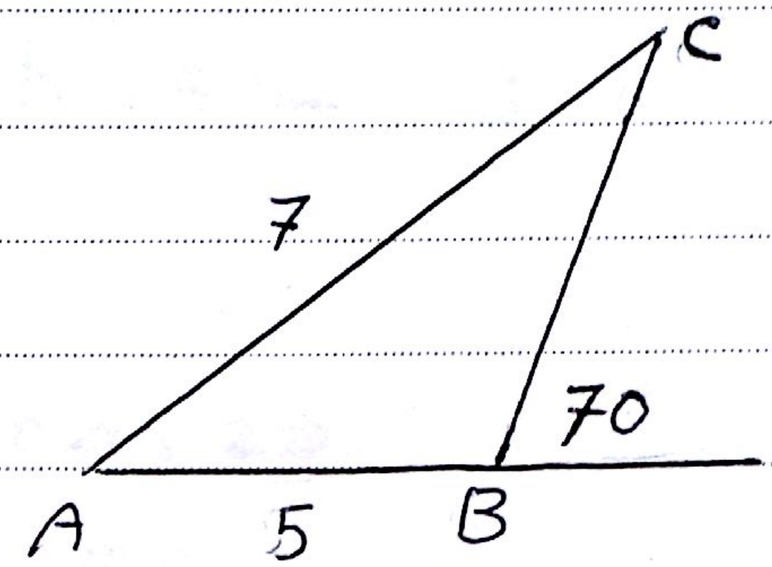
$$c = \frac{900\sin 155}{\sin 10} = 2190.3$$

$$\sin 15 = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 2190.3\sin 15$$

$$= 566.9$$

ارتفاع کبل $= 566.9 + 2 = 568.9\ m$

⑤ يمثل الشكل المار لسباحة البحوث اوجد مسافة السباحة P. 69



$$\beta = 180 - 70 = 110^\circ$$

$$\frac{\sin 110}{7} = \frac{\sin \gamma}{5}$$

$$\sin \gamma = \frac{5 \sin 110}{7} = 0.67$$

$$\gamma = 42.16^\circ$$

$$\therefore \alpha = 180 - (110 + 42.16) = 27.83$$

$$\frac{\sin 110}{7} = \frac{\sin 27.83}{a}$$

$$a = \frac{7 \sin 27.83}{\sin 110} = 3.5 \text{ k.m}$$

مسافة السباحة $= 5 + 3.5 + 7 = 15.5$ k.m

قانون جيب التمام

P.72

① $\Delta ABC \quad a = 11\,cm \quad b = 5\,cm \quad \gamma = 20^\circ$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$= (11)^2 + (5)^2 - 2(11)(5)\cos 20$$

$$= 42.63 \Longrightarrow c = 6.52$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + (6.52)^2 - 11^2}{2(5)(6.52)} =$$

$$= -0.81839$$

$$\alpha = 144.92^\circ$$

$$\beta = 180 - (20 + 144.92) = 15.08^\circ$$

P.72 ② في ΔABC حيث $a = 9\,cm \quad b = 7\,cm \quad c = 5\,cm$

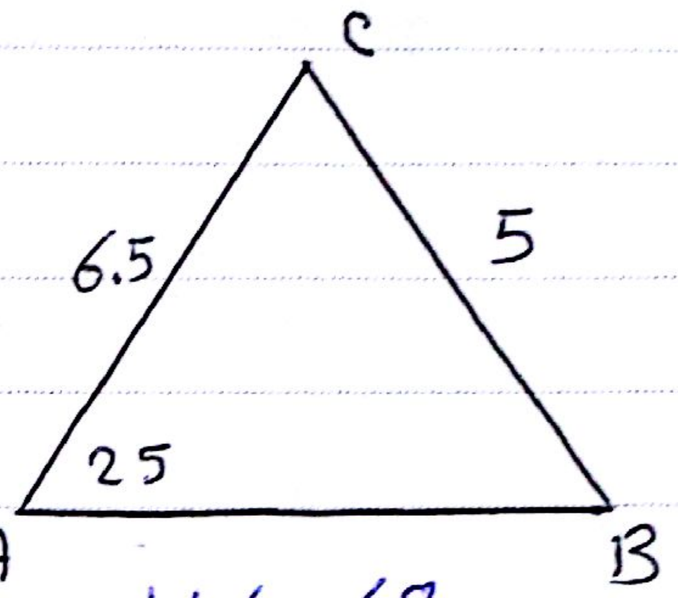
اوجد قياس الزاوية الأكبر

الزاوية الكبرى هي α

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 5^2 - 9^2}{2(7)(5)} = -0.1$$

$$\cos\alpha = -0.1 \Longrightarrow \alpha = 95.73^\circ$$

③ ΔABC $a = 5\,cm$ $b = 6.5\,cm$ $\alpha = 25^\circ$ P. 73



$$\frac{\sin 25}{5} = \frac{\sin \beta}{6.5}$$

$$\sin \beta = \frac{6.5 \sin 25}{5} = 0.54$$

$$\beta = 33.32 \quad \text{or} \quad \beta = 180 - 33.32 = 146.68$$

$$\gamma = 180 - (33.32 + 25)$$
$$= 121.67$$

$$\frac{\sin 25}{5} = \frac{\sin 121}{c}$$

$$c = \frac{5 \sin 121}{\sin 25} = 10.1\ cm$$

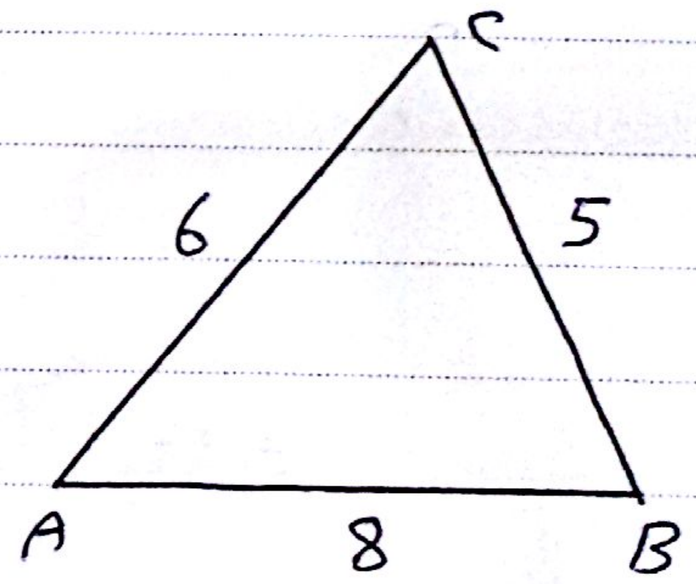
$$\gamma = 8.32$$

$$\frac{\sin 25}{5} = \frac{\sin 8.32}{c}$$

$$c = \frac{5 \sin 8.32}{\sin 25} = 1.7\ cm$$

مساحة المثلث

① P. 75 اوجد مساحة المثلث ABC حيث $a = 5cm$ $b = 6cm$ $c = 8cm$



$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 6^2 - 8^2}{2(5)(6)}$$

$$= -0.05$$

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - (-0.05)^2} = 0.998$$

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \gamma$$
$$= \frac{1}{2}(5)(6)(0.998 = 14.97\ cm^2$$

قاعدة هيرون

② P.75 اوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$a = 4cm \quad b = 4cm \quad c = 3cm$

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(4+4+3) = 5.5$$

$$Area = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{5.5(5.5-4)(5.5-4)(5.5-3)}$$

$$= 5.56$$

③ P.76 في المثال (3) هل يسع لمركب شراعه على شكل مثلث ابعاده 4m, 4m, 6m بالإستقال في السباحة؟

$$S = \frac{1}{2}(4+4+6) = 7$$

$$Area = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \sqrt{7(7-4)(7-4)(7-6)}$$

$$= 7.937$$

∴ هذا المركب لا يسع لهبالشركة لأن

$7.937 > 7.5$