وزارة التربيـــــة

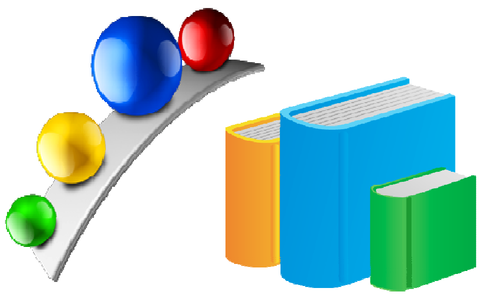
الإدارة العامة لمنطقة الجهراء التعليمية

التوجيه الفني للرياضيات

تمارين مراجعة

للصف الحادي عشر العلمي

الفصل الدراسي الثاني



موجه اول الرياضيات

أ / دلال مبارك الحجرف

وزارة التربية

الإدارة لمنطقة الجهراء التعليمية

ثانوية ثابت بن قيس للبنين

قسم الرياضيات

اوراق عمل الرياضيات

للصف الحادي عشر علمي الوحدة 7 ، 8 ،9

العام الدراسي

2019/2020

الفصل الدراسي الثاني

رئيس القسم

أ/ مرسي أحمد

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = -3 - 4i$

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z ، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m + ni)^2 = -3 - 4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & \dashrightarrow (1) \\ 2mn = -4 & \dashrightarrow (2) \end{cases}$$

تضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}\right)$$

$$m^2 + n^2 = 5 \qquad \dashrightarrow (3)$$

بجمع المعادلتين (3) , (1) نحصل على:

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

بالتعويض في (1) نحصل على: $\therefore\ n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$

$$\begin{cases} m = 1 \ , \ m = -1 \\ n = 2 \ , \ n = -2 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = -4$ نستنتج أن m , n لهما إشارتان مختلفتان

$\therefore\ m = 1 \ , \ n = -2$ أو $m = -1 \ , \ n = 2$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z = -3 - 4i$

هما: $w_1 = 1 - 2i \ , \ w_2 = -1 + 2i$

==

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $Z = 5 + 12i$

أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C

الحل : نحسب المميز Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$
$$= -144$$
$$= (-1) \times (12)^2$$
$$= i^2 \times (12)^2$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$$

مجموعة الحل = $\{ -2 - \frac{3}{2}i , -2 + \frac{3}{2}i \}$

===

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

أوجد الزوج المرتب (r, θ) للنقطة $D(3\sqrt{3}, 3)$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

الحل :

$$r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

نفرض أن α زاوية الاسناد

$$\therefore \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالتالي : $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ D تنتمي إلى الربع الأول $\longleftarrow$ $\because x > 0 , y > 0$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

وبالتالي : الاحداثيات القطبية هي $D\left(6 , \frac{\pi}{6}\right)$

أوجد الزوج المرتب $(r.\theta)$ لكل من نقطة مما يلي حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

$$(-2, 2)$$

إذا كان : $z_1 = -2 + 2i$ ، $z_2 = 1 - i$

(1) ضع z_1 في الصورة المثلثية

(2) حل المعادلة : $2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

الحل :

(1) $z_1 = -2 + 2i$

$x = -2$ ، $y = 2$

$r = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = |-1| = 1$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

$x < 0$ ، $y > 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني

$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

الصورة المثلثية هي : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(2) $2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

$2z + (\overline{-2 + 2i}) = 3i\,(1 - i)^2$

$2z + -2 - 2i = 3i\,(1 - 2i - 1)$

$2z + -2 - 2i = 3i\,(-2i)$

$2z + -2 - 2i = -6i^2$

$2z + -2 - 2i = 6$

$2z = 6 + 2 + 2i = 8 + 2i$

$z = 4 + i$

==

إذا كان $z_2 = 3 + 5i$ ، $z_1 = 2 - 7i$ فأوجد :

$z_2 - z_1$ 2) $\overline{(z_1 \cdot z_2)}$ 3) Z_1^{-1}

أوجد السعة و الدورة ثم ارسم بيان الدالة :

$$y = \frac{1}{2}\cos(-x) : \ x \in [-2\pi , 2\pi]$$

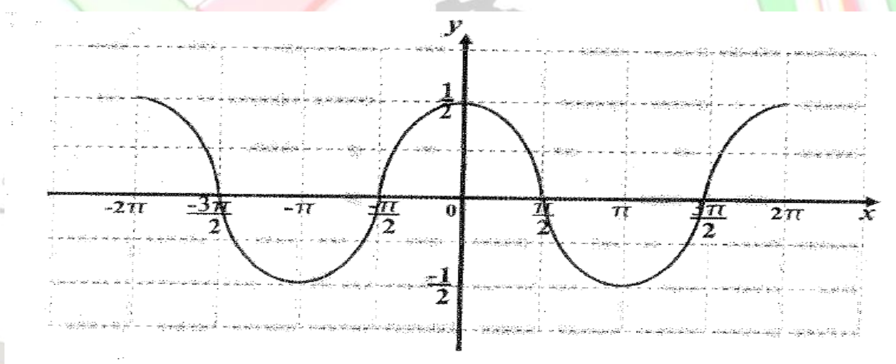
الحل :

السعة : $|a| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

∴ ربع الدورة : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\frac{1}{2}\cos(-x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



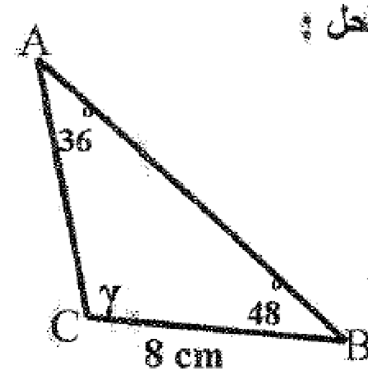
==

أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان كل من:

(a) $y = \frac{1}{2}\sin 4x$

حل المثلث ABC حيث ؛ $\alpha = 36^\circ$ ، $\beta = 48^\circ$ ، $a = 8\text{ cm}$

الحل :



$$\gamma = 180^\circ - (36^\circ + 48^\circ)$$
$$= 96^\circ$$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b}$$

$$b = \frac{8\sin 48^\circ}{\sin 36^\circ}$$

$$b \approx 10.11\text{ cm}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$$

$$c = \frac{8\sin 96^\circ}{\sin 36^\circ}$$

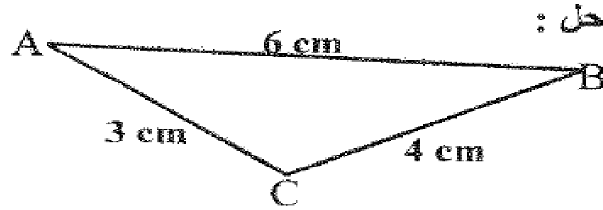
$$c \approx 13.54\text{ cm}$$

==

حل ΔABC حيث: $\alpha = 26.3^\circ$, $b = 6\text{ cm}$, $a = 7\text{ cm}$

حل المثلث ABC حيث $a = 4\text{ cm}$ ، $b = 3\text{ cm}$ ، $c = 6\text{ cm}$

الحل :



$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$$

$$= \frac{16 + 36 - 9}{2(4)(6)}$$

$$= \frac{43}{48}$$

$$\beta \approx 26.4^\circ$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{9 + 36 - 16}{2(3)(6)}$$

$$= \frac{29}{36}$$

$$\alpha \approx 36.3^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 26.4^\circ - 36.3^\circ$$

$$\approx 117.3^\circ$$

==

حل ΔABC حيث: $a = 11\text{ cm}\ ,\ b = 5\text{ cm}\ ,\ \gamma = 20^\circ$

أوجد مساحة المثلث ABC حيث

$a = 23$ cm ، $b = 19$ cm ، $c = 12$ cm مستخدماً قاعدة هيرون

الحل :

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$
$$= \frac{1}{2}(23+19+12)$$
$$= \frac{1}{2}(54)$$
$$= 27$$

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{27(27-23)(27-19)(27-12)}$$
$$= \sqrt{(27)(4)(8)(15)}$$
$$= \sqrt{12960}$$
$$= 36\sqrt{10} \quad \text{cm}^2$$

$$\text{Area} \approx 113.84 \text{ cm}^2$$

==

في ΔABC حيث: $a = 9\,\text{cm}$, $b = 7\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

أوجد مساحة المثلث ABC

إذا كان $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ، $\cos\beta = \frac{24}{25}$ حيث α ، β زاويتين حادتين

أوجد كلاً مما يلي :

$(1)\quad \cos(\alpha - \beta)$ $\qquad (2)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

الحل :

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2$$

$$\sin^2\beta = \frac{49}{625}$$

$$\sin\beta = \pm\frac{7}{25}$$

$\therefore\ \sin\beta = \frac{7}{25}$ β زاوية حادة

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25} \longrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{4}{5}$ α زاوية حادة

$$(1)\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{24}{25}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{7}{25}\right)$$

$$= \frac{117}{125}$$

$$(2)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$$

$$= \frac{24}{25}$$

==

اذا كان :

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \quad , \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$\cos\beta = \frac{12}{13} \quad , \quad \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$$

أوجد كلا مما يلي :

1) $\sin(\alpha + \beta)$ $\qquad$ **2)** $\cos\frac{\alpha}{2}$ $\qquad$ **3)** $\tan 2\beta$

حل المعادلة : $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

الحل :

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\sin\alpha = |\sin x|$$

$$= \left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin x < 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الثالث :

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \quad , \quad k \in z$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

عندما x تقع في الربع الرابع :

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi \quad , \quad k \in z$$

$$= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

==

حل المعادلة : $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}=2\csc^2 x$

الطرف الأيسر :

$$\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$$

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}+\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{\sin^2 x}=2\csc^2 x$$

= الطرف الأيمن

==

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

وزارة التربية

ثانوية صباح الناصر الصباح

قسم الرياضيات

الحادي عشر علمي الوحده العاشره والحادية عشر

رئيس القسم

أ/ ماهر حامد طه

مدير المدرسة

أ. منصور الظفيري

الموجه الفني

أ/ محمد بدر حاتم

الموجهه الاولى

أ. دلال مبارك الحجرف

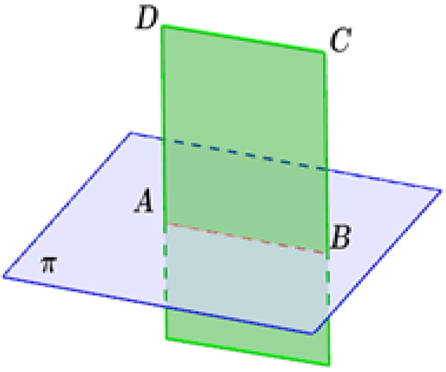
المستقيمات والمستويات في الفضاء

السؤال الاول

في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{AD} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{BC}$ $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

$AD = BC$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{CD} \mathbin{/\!/} \pi$



البرهان

$\because$ $\overleftrightarrow{AD} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$ يعينان مستويا وحيدا

و ليكن (ABCD) فيه

$AD = BC$ $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$

$\therefore$ **ABCD متوازي أضلاع**

و منه $\overleftrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{DC}$

(معطى) $\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

(نظرية) $\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \mathbin{/\!/} \pi$

****

تمرين(١)

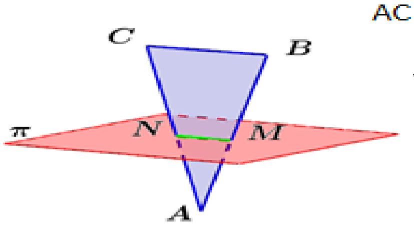
في الشكل المقابل :

المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AC}$

، M,N تنتميان إلى المستوى π

إثبت أن $\overleftrightarrow{CB} \mathbin{/\!/} \pi$

البرهان

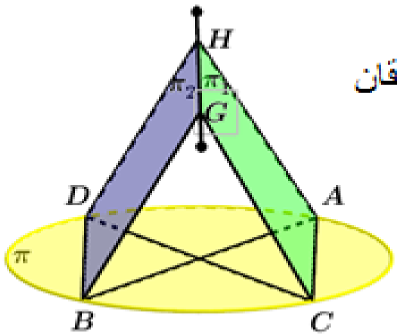


السؤال الثاني

في الشكل المقابل : $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π

$\overleftrightarrow{GH} = \pi_1 \cap \pi_2$ إثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

البرهان



$\because$ $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في الدائرة

$\therefore$ ينصف كل منهما الأخر و متطابقان

$\therefore$ الشكل $ACBD$ مستطيل

$\because$ $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi_1$ $\quad \overleftrightarrow{DB} \subset \pi_2$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

$\because$ $\overline{GH} \parallel \overline{AC}$ $\qquad \overleftrightarrow{AC} \subset \pi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

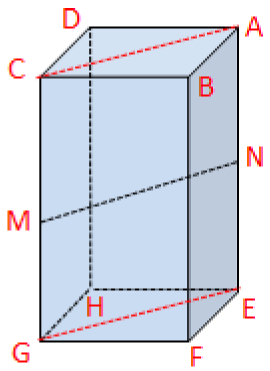
أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

****

تمرين

$ABCDEFGH$ شبه مكعب . M منتصف $\overline{CG}$ ، N منتصف $\overline{AE}$ ، أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overline{MN}$

البرهان

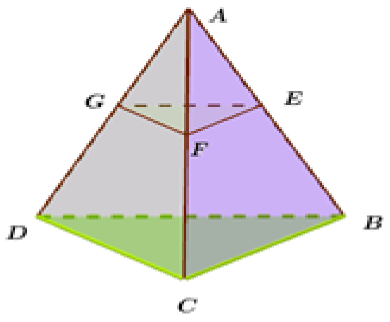


السؤال الثالث

في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي .

المستويان π_1 ، π_2 متوازيان إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ،

$FG = 6\ \text{cm}$ فأوجد DC



البرهان

$\because \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{AE}{AB+EB} = \frac{1}{1+3}$

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$

$\because \pi_1 \parallel \pi_2 , \quad ABD \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{DB}$

$ABD \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GE}$

$\therefore \overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{GE} \quad \therefore \frac{AG}{AD} = \frac{1}{4}$

و بالمثل يمكن إثبات أن $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{GF}$

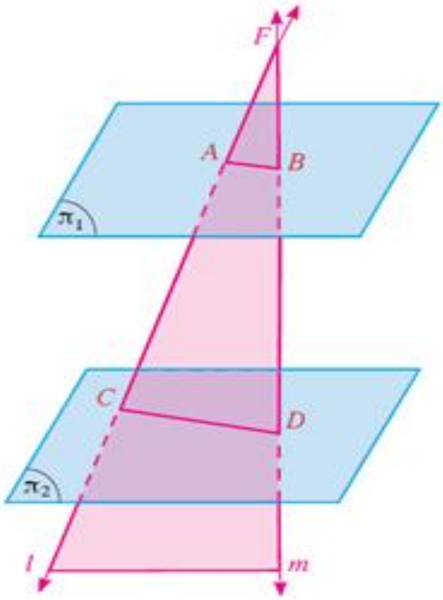
$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC}$

$\therefore \frac{GF}{DC} = \frac{1}{4} \quad \therefore \frac{6}{DC} = \frac{1}{4}$

$DC = 24\ \text{cm}$

****

تمرين



في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلاً من π_1 في A, B ، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\,\text{cm}$, $AC = 6\,\text{cm}$, $CD = 9\,\text{cm}$, $FB = 5\,\text{cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB

السؤال الرابع

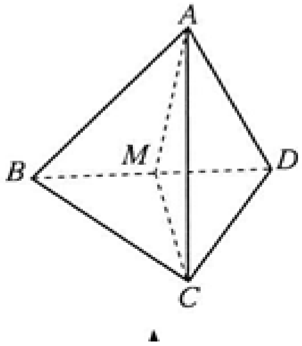
$ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ، $CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$



الحـــل :

a) BCD مثلث متطابق الضلعين في C

$\therefore \overleftrightarrow{CM} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (١)

بالمثل المثلث ABD مثلث متطابق الضلعين في A

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (٢)

من (١) ، (٢) نجد: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

b) $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$, $\overleftrightarrow{AC} \subset (AMC)$

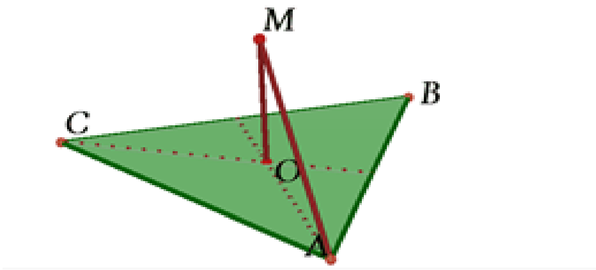
$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

****

تمرين ABC مثلث متطابق الأضلاع .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$

الحـــل :

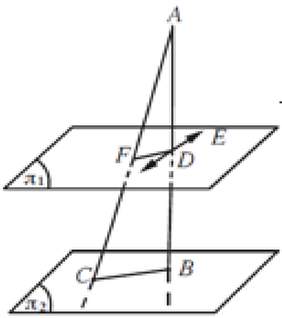


السؤال الخامس

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_1, π_2 ، $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \,/\!/\, \pi_2$



الحـــل :

ABC مثلث فيه D منتصف $\overline{AB}$ ، F منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{FD} \,/\!/\, \overleftrightarrow{BC}$

$\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FD}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ $\quad \therefore \pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

****

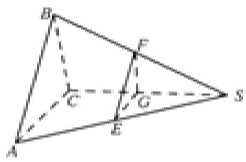
تمرين

في الشكل المقابل، $(ABC) \,/\!/\, (EFG)$, S نقطة خارج $(ABC),(EFG)$

بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

فإذا كان: $SB = 10\,\text{cm}$, $SC = 8\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$



الحـــل :

السؤال السادس

ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان:
$\overleftrightarrow{DA}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$
فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

الحـــل :

$\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB}, \quad \overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$

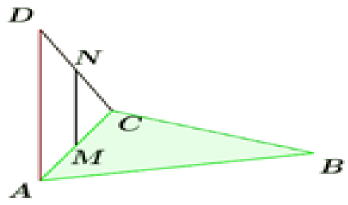
في المثلث ADC :

M منتصف $\overline{AC}$ ، N منتصف $\overline{DC}$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{DA}$

$\because \quad \overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

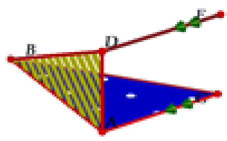


****

تمرين

في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A
رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} // \overleftrightarrow{CA}$
أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$

الحـــل :



السؤال السابع

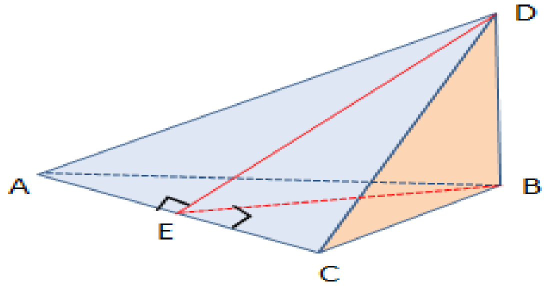
في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB=5cm\ ,\ AB=10cm\ ,\ m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{6}$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد : (a) $BE\ ,\ DE$

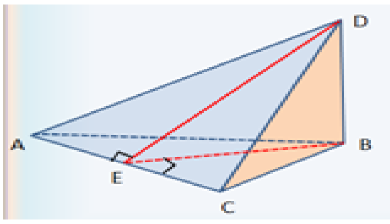
(b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $BAC\ ,\ DAC$



(a) المطلوب إيجاد $BE\ ,\ DE$

البرهان

$\because\ \overline{BE} \perp \overline{AC} \longrightarrow \therefore\ m(B\hat{E}A)=\frac{\pi}{2}$



$\because\ m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{6}$

AEB مثلث ثلاثيني - ستيني

$BE=\frac{1}{2}AB = 5\text{ cm}$

$\overleftrightarrow{DB} \perp (ABC)\ ,\ \overleftrightarrow{BE} \subset (ABC)$

$\therefore\ \overline{DB} \perp \overline{BE}$

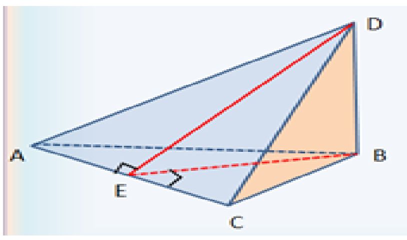
المثلث DBE قائم في $\hat{B}$ ، و متطابق الضلعين

$DE=\sqrt{2}\cdot BE = 5\sqrt{2}\text{ cm}$

(b) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $BAC,\ DAC$

البرهان

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين $BAC,\ DAC$



$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في المستوى BAC

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ في المستوى DAC

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين $BAC\ ,\ DAC$ هي $B\hat{E}D$

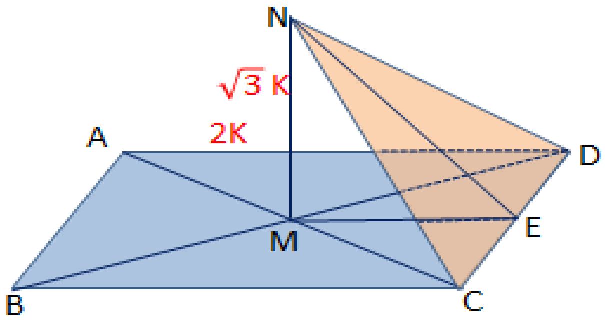
$\because$ المثلث DBE قائم الزاوية في $\hat{B}$ و متطابق الضلعين

$\because\ m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{4}$

قياس الزاوية الزوجية $=\frac{\pi}{4}$

تمرين

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه AD= 2K
أقيم $\overline{NM}$ عمودا على (ABCD) حيث N خارج مستواه بحيث
$MN = \sqrt{3}$ K أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD



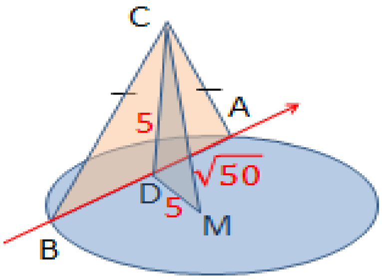
السؤال الثامن

في الشكل المقابل :

C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M ، D منتصف $\overline{AB}$ ، ABC مثلث فيه CA = CB . إذا كان $DM = DC = 5cm$, $MC = \boxed{\sqrt{50}}\,cm$

أثبت ان (a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

(b) مستوي الدائرة $\perp(ACB)$



المعطيات

$\overline{AB}$ وتر في الدائرة ، D منتصف $\overline{AB}$ ،

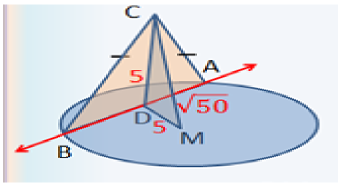
ABC مثلث فيه CA = CB ،

$DM = DC = 5cm$, $MC = \sqrt{50}\,cm$

المطلوب

(a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

(b) مستوى الدائرة $\perp(ACB)$



(a) $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

البرهان

في المثلث ABC متطابق الضلعين

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$

$\therefore$ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ⟶ (١)

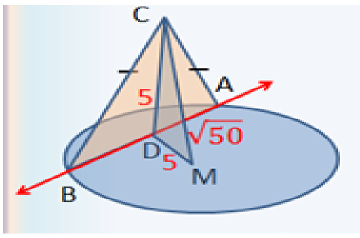
في مستوي الدائرة

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$ ، M مركز الدائرة

$\therefore$ $\overline{MD} \perp \overline{AB}$ ⟶ (٢)

من (1) , (2) نجد أن $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (CDM)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MC}$



(b) مستوي الدائرة $\perp(ACB)$

البرهان

$\because$ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ⟶ (١)

$(CM)^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$

$(CD)^2 + (DM)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$

$\because$ $\overline{CD} \perp \overline{DM}$ ⟶ (٢)

$\therefore$ المثلث CDM قائم الزاوية في D

من (1) , (2) نجد أن : $\overline{CD} \perp$ مستوى الدائرة

$\because$ $\overleftrightarrow{CD} \subset (ACB)$

$\therefore$ مستوي الدائرة $\perp(ACB)$

تمرين

في الشكل المقابل :

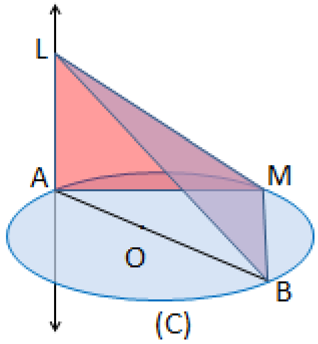
C دائرة مركزها O ، $\overline{AB}$ قطر فيها ، M نقطة تنتمي إلى الدائرة

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة

أثبت ان

a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b $(LBM) \perp (LAM)$



الوحدة الحادية عشر

السؤال الأول

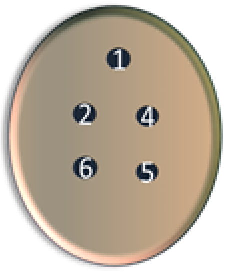
لتكن: $A = \{ 1 , 2 , 4 , 5 , 6 \}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر المجموعة A أوجد:

a عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها .



الحل:

r_1: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة الأحاد

r_2: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة العشرات

a الأعداد المطلوبة يمكن تكرار الأرقام فيها

$\therefore\ r_1 = 5 \ , r_2 = 5 \ , r_3 = 5$

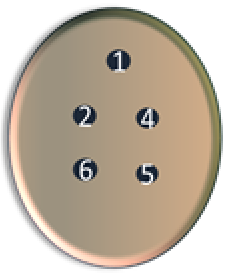
فيكون عدد الأعداد الممكن تكوينها هو

الأحاد	العشرات	المئات
5	5	5

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$A = \{1 , 2 , 4 , 5 , 6\}$

b عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.



الحل :

b

الأعداد المطلوبة مختلفة الأرقام

$\therefore\ r_1 = 5 \ , r_2 = 4 \ , r_3 = 3$

فيكون عدد الأعداد الممكن تكوينها هو

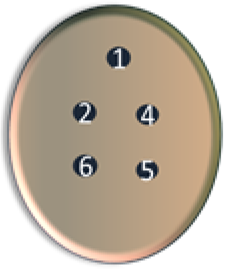
الأحاد	العشرات	المئات
3	4	5

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

تابع السؤال الاول

$A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$



c عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها .

المئات	العشرات	الأحاد
3	4	2

c الأعداد المطلوبة فردية ومختلفة

∴ الرقم في منزلة الآحاد فردي هو 1 أو 5

وبالتالي هناك طريقتان $r_1 = 2$

يبقى 4 طرق مختلفة للرقم في منزلة العشرات $r_2 = 4$

يبقى 3 طرق مختلفة للرقم في منزلة المئات $r_3 = 3$ ∴

فيكون عدد الأعداد الفردية المختلفة الممكن تكوينها هو

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 2 \times 4 \times 3 = 24$

****

تمرين

لتكن: $A = \{ 1 , 2 , 4 , 5 , 6 \}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر المجموعة A أوجد:

a عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الزوجية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها .

السؤال الثاني حل المعادلات التالية:

a $nP5 = 6 \times nP_4$, $n \geq 5$

الحل

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 6 \times n(n-1)(n-2)(n-3)$

$n \geq 5 \quad \therefore n(n-1)(n-2)(n-3) \neq 0$

$n\cancel{(n-1)(n-2)(n-3)}(n-4) = 6 \times n\cancel{(n-1)(n-2)(n-3)}$

$(n-4) = 6$

$\therefore n = 6 + 4$

$\therefore n = 10$

b $6P_r = 4 \times 6P_{r-1}$

الحل

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4 \times \frac{6!}{(6-(r-1))!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(6-r+1)!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(6-r+1)(6-r)!}$$

تضرب الطرفين $\frac{(6-r)!}{6!}$

$$1 = \frac{4}{(6-r+1)}$$

$\therefore 6 - r + 1 = 4$

$\therefore r = 3$

c $\frac{2nP_{n+2}}{(2nP_{n-1})} = 60$

$$\frac{\frac{(2n)!}{(2n-n-2)!}}{\frac{(2n)!}{(2n-n+1)!}} = 60$$

$$\frac{(2n)!}{(n-2)!} \times \frac{(n+1)!}{(2n)!} = 60$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 60$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 60$$

$(n+1)n(n-1) = 60$

$(n+1)n(n-1) = 5 \times 4 \times 3$

$\therefore n = 4$

تمرين

حل المعادلات التالية:

b $8P_r = 4 \times 8P_{r-1}$

a $np_7 = 12 \times nP_5$

السؤال الثالث

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي

a بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب ؟

b بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب ؟

c ماذا تلاحظ ؟

a

$$_{15}C_7 = \frac{15!}{7!\times(15-7)!}$$

$$= \frac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8!}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1\times8!}$$

$$= 6435$$

b

$$_{15}C_8 = \frac{15!}{8!\times(15-8)!}$$

$$= \frac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8!}{8!\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 6435$$

c

نلاحظ أن

$$_{15}C_8 = {}_{15}C_7$$

تمرين

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك .يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري.يمكنك اختيار ثلاثة طلاب أو أقل .بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تقترع؟

السؤال الرابع أوجد قيمة n في كل مما يلي :

a $_nC_3 = {_nC_4}$

$$\frac{nP_3}{3!} = \frac{nP_4}{4!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times 3!}$$

$$4\times n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$4\times n(n-1)(n-2) - n(n-1)(n-2)(n-3)=0$$

$$4-n+3=0$$
$$7-n=0$$
$$n=7$$

b $\frac{_nC_7}{_{(n-1)}C_6} = \frac{8}{7}$

$$\frac{\frac{(n)!}{7!(n-7)!}}{\frac{(n-1)!}{6!(n-6-1)!}} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{(n)(n-1)!}{(n-7)!\times 7\times 61} \times \frac{(n-7)!\times 6!}{(n-1)!} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{n}{7} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore n = 8$$

تمرين أوجد قيمة n في كل مما يلي :

a $_nC_2 = 105$

b $_nC_4 = {_nC_5}$

السؤال الخامس

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

الحل :

نكتب $(2x-3y^2)^{10}$ على الصورة $(2x+(-3y^2))^{10}$

الحدّ السابع هو:

$$T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$$

$$T_7 = {}_{10}C_6\,(2x)^4 \times (-3y^2)^6$$

$$= (210)(2^4)(-3)^6(x^4)(y^2)^6 \quad = 2\,449\,440\,x^4y^{12}$$

تمرين

2 في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

****

السؤال السادس

أوجد الحد الذي يحتوي على x^3y^4 في مفكوك $(2x+3y)^7$

الحل :

الحد الذي رتبته $r+1$ هو: $T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$

في مفكوك كثيرة الحدود $(2x+3y)^7$ ، $n=7$

∵ أس y يساوي 4 ∴ $r=4$

يصبح هذا الحد:

$$T_5 = {}_7C_4\,(2x)^3(3y)^4$$

$$= 35 \times (2)^3x^3(3)^4y^4$$

$$= 35 \times 8 \times 81 \times x^3y^4$$

$$= 22\,680\,x^3y^4$$

تمرين

3 أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

السؤال السابع

- في احدى الالات الحاسبة 4 بطاريات ، احتمال أن تخدم كل بطارية مدة علم كامل يساوي 90% .
- ما احتمال ان تخدم كل من البطاريات الاربع مدة علم ؟

- الحـــــــــل:

- ليكن
- نفرض الحدث A : «تخدم البطارية مدة عام كامل» $p(A) = m = 0.9$
- الحدث B : «لا تخدم البطارية مدة عام كامل» $p(B) = 1 - m = 1 - 0.9 = 0.1$
- والحدث E : «تخدم كل من البطاريات الاربع مدة عام كامل»
- نستخدم احتمال ذات الحدين $n = 4$ و $k = 4$

$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)$

$= {}_4$

- احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام يساوي 0.6561

تمرين

- خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي : عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة ، تفوز 40 % من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي مع راشد 3 بطاقات ، ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين ؟