تجميع أجابات مقالى بنك أسئله الرياضيات

عمل / أ . أحمد نصار

بند 5-1

1-

أوجد: $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

الحل

$= 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 - x + c \quad = x^3 - 2x^2 - x + c$

2-

أوجد: $\int (2x - 3)(x + 4)dx$

الحل

$= \int (2x^2 + 8x - 3x - 12)dx = \int (2x^2 + 5x - 12)\,dx$

$= 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 5 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 12x + c = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 12x + c$

3-

أوجد: $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1}dx$

الحل

تحليل : $= \int \frac{(x+4)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}\,dx$ mod 53

اختصار: $= \int (x+4)\,dx$

تكامل : $= \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$

4-

أوجد: $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

فكرة الحل: فك أقواس + توزيع بسط على مقام

الحل

$= \int \left(\frac{9x^4-6x^3+x^2}{x^2}\right) dx = \int \left(\frac{9x^4}{x^2} - \frac{6x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right) dx$

$= \int (9x^2 - 6x + 1)\, dx = 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x + c$

$= 3x^3 - 3x^2 + x + c$

5-

أوجد: $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

الحل

$= \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}} dx$

تذكر أن: تحليل

$(x+1) = (\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)$

$= \int (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)\, dx$

$= \int (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1)\, dx$

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + c$

$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + x + c$

6-

أوجد: $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x} dx$

الحل

عامل مشترك

$= \int \frac{\cancel{x}(x^3 - 27)}{\cancel{x}(x-3)} dx$

$= \int \frac{x^3 - 27}{x-3} dx$

$= \int \frac{\cancel{(x-3)}(x^2 + 3x + 9)}{\cancel{(x-3)}} dx$

$= \int (x^2 + 3x + 9) dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 9x + c$

$\boxed{\text{تذكر أن:} \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

7-

7 إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

الحل

$F(x) = \int (2x+5)\, dx$

$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 5x + c$

$F(x) = x^2 + 5x + c$

$\because F(-1) = 0$

$(-1)^2 + 5(-1) + c = 0$ shift solve

$c = 4$

$\therefore F(x) = x^2 + 5x + 4$

بند 2-5

1-

مثال (1)

أوجد:

$$\int (\overbrace{x^2+2x+5}^{\text{دالة}})^3 \overbrace{(2x+2)}^{\text{مشتقة الدالة}}dx$$

إبدأ

الحل

$u = x^2 + 2x + 5$

إشتقاق

$du = (2x+2)\,dx$

بالتعويض

$I = \int u^3\, du$

$= \frac{1}{4}u^4 + c$

$= \frac{1}{4}(x^2+2x+5)^4 + c$

u هى مابداخل القوس المرفوع لأس

2-

مثال (1)

أوجد:

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}dx$$

الحل

اعادة صياغة ←

$I = \int (x^{-1}+4)^5 \cdot x^{-2}\, dx$

$u = x^{-1} + 4$

$du = -x^{-2}\, dx$

$-du = x^{-2}\, dx$

$= -\int u^5\, du$

$= -\frac{1}{6}u^6 + c$

$= -\frac{1}{6}(x^{-1}+4)^6 + c$

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6 + c$

3-

$$\int (2+\sqrt{x})^{12}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int (2+\sqrt{x})^{12}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\frac{(2+\sqrt{x})^{13}}{13}+C = \frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13}+C$$

4-

حاول أن تحل

أوجد:

$$\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$$

الحل

$I = \int (3x+7)^{\frac{1}{5}}\,dx$ ← إعادة صياغة

ابدأ

$u = 3x+7$

إشتقاق

$du = 3\,dx$

$\frac{1}{3}du = dx$

بالتعويض

$= \int u^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{3}\,du$

$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}}\,du$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}} + C$

$= \frac{5}{18}(3x+7)^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{(3x+7)^{6}} + C$

5-

حاول أن تحل

2 أوجد:

$$\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

الحل

$I = 3\int \frac{(x^{\frac{1}{3}}-5)}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

$= 3\int (x^{\frac{1}{3}}-5)\cdot \underline{x^{-\frac{2}{3}}dx}$ ← اعادة صياغة

$u = \underline{x^{\frac{1}{3}}-5}$

$du = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$3\,du = \underline{x^{-\frac{2}{3}}dx}$

مضروب

$= 3\int u\cdot 3\,du$

$= 9\int u\,du$

$= 9\cdot\frac{1}{2}u^2 + C$

$= \frac{9}{2}(x^{\frac{1}{3}}-5)^2 + C$

$= \frac{9}{2}(\sqrt[3]{x}-5)^2 + C$

6-

حاول أن تحل

أوجد:

$$\int x(2x-1)^3dx$$

الحل

$I = \int \underline{(2x-1)^3}\cdot\boxed{x}\,\underline{dx}$ ← اعادة صياغة

إبدأ

$u = \underline{2x-1}$

$du = 2\,dx$

$\frac{1}{2}du = \underline{dx}$

$u = 2x-1$

$2x-1 = u$

$2x = u+1$

$\boxed{x} = \underline{\frac{1}{2}(u+1)}$

$= \int u^3\cdot\frac{1}{2}(u+1)\cdot\frac{1}{2}du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int u^3(u+1)\,du$

$= \frac{1}{4}\int (u^4+u^3)\,du$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{4}u^4\right] + C$

$= \frac{1}{20}u^5 + \frac{1}{16}u^4 + C$

$= \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + C$

7-

حاول أن تحل

أوجد: $\int x^5 \sqrt{3+x^2}\, dx$

الحل

$$I = \int (3+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^5\, dx$$

$$= \int (3+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x\, dx$$

$$= \int (3+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x^4} \cdot x\, dx \quad \leftarrow \text{إعادة صياغة}$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (u^2 - 6u + 9) \cdot \tfrac{1}{2}\, du$$

$$= \tfrac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} (u^2 - 6u + 9)\, du$$

$$= \tfrac{1}{2} \int (u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}})\, du$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - 6 \cdot \tfrac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + 9 \cdot \tfrac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \tfrac{1}{7} u^{\frac{7}{2}} - \tfrac{6}{5} u^{\frac{5}{2}} + 3u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}} - \tfrac{6}{5}(3+x^2)^{\frac{5}{2}} + 3(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \tfrac{1}{7}\sqrt{(3+x^2)^7} - \tfrac{6}{5}\sqrt{(3+x^2)^5} + 3\sqrt{(3+x^2)^3} + C$$

$u = 3 + x^2$

$du = 2x\, dx$

$\tfrac{1}{2} du = x\, dx$

$u = 3 + x^2$

$3 + x^2 = u$

$x^2 = u - 3$

بالتربيع

$x^4 = (u-3)^2$

$\boxed{x^4} = u^2 - 6u + 9$

شرح

$x^5 = x^2 \cdot x^2 \cdot x = x^4 \cdot x$

كما فى داخل القوس

نقوم بتربيع x^2 للحصول على x^4

فى خطوة جانبية لسهولة الحل

$u^{\frac{1}{2}} \cdot u^2 = u^{\frac{5}{2}}$

$u^{\frac{1}{2}} \cdot 6u = 6u^{\frac{3}{2}}$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

8-

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$$

الحل

$$I = \int (x^3+1)^{\frac{1}{3}} \cdot x^5\, dx$$

$$= \int (x^3+1)^{\frac{1}{3}} \cdot \boxed{x^3} \cdot x^2\, dx \quad \leftarrow \text{اعادة صياغة}$$

$$= \int u^{\frac{1}{3}} \cdot (u-1) \cdot \frac{1}{3}\, du$$

$$= \frac{1}{3} \int \left(u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}}\right) du$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{7} u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{7} u^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4} u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{7}(x^3+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}(x^3+1)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt[3]{(x^3+1)^7} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^3+1)^4} + C$$

ابدأ

$$u = x^3 + 1$$

$$du = 3x^2\, dx$$

$$\frac{1}{3} du = x^2\, dx$$

$$u = x^3 + 1$$

$$x^3 + 1 = u$$

$$\boxed{x^3} = u - 1$$

بند 5-3

1-

مثال (1)

أوجد: $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

الحل

$I = -\cos x + \tan x + c$

2-

مثال (1)

أوجد: $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

الحل

$I = \int (\csc x \cot x + \csc^2 x)\, dx = -\csc x - \cot x + c$

3-

مثال (1)

أوجد: $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

الحل

$I = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

4-

مثال (2)

أوجد: $\int x\csc^2(x^2-1)\,dx$

الحل

$I = \int \csc^2(x^2-1)\cdot x\,dx$

$= \int \csc^2 u \cdot \frac{1}{2}\,du$

$= \frac{1}{2}\cdot -\cot u + c$

$= -\frac{1}{2}\cot(x^2-1) + c$

$u = x^2-1$

استقاق

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}du = x\,dx$

5-

مثال (4)

أوجد: $\int \sin^5(x+1)\cdot\cos(x+1)\,dx$

الحل

$I = \int u^5\cdot du$

$= \frac{1}{6}u^6 + c$

$= \frac{1}{6}(\sin(x+1))^6 + c$

$u = \sin(x+1)$

$du = \cos(x+1)\,dx$

6-

$$\int x^3 \cdot \cos(x^4+5)\,dx$$

$$u = x^4 + 5$$

قاعدة التفاضل

$$du = 4x^3\,dx \Longrightarrow x^3\,dx = \frac{1}{4}du$$

بالتعويض

$$\int \cos(x^4+5)\cdot x^3\,dx = \frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin(x^4+5) + C$$

7-

مثال (4)

أوجد: $\int (1+\overset{u}{\cos x})^6 \sin x\,dx$

الحل

$u = 1 + \cos x$

اشتقاق

$du = -\sin x\,dx$

لا تنسى الإشارة

$-du = \sin x\,dx$

$I = -\int u^6 \cdot du$

يمكن وضع الإشارة داخل أو خارج التكامل

$= -\frac{1}{7}u^7 + C$

$= -\frac{1}{7}(1+\cos x)^7 + C$

8-

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

الحل

$I = \int \cos^{-3} x \cdot \sin x\,dx$

$= -\int u^{-3} \cdot du$

$= -\cdot \frac{1}{-2} u^{-2} + c$

$= \frac{1}{2} (\cos x)^{-2} + c$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$-du = \sin x\,dx$

9-

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sqrt{1 + \sin x}\,\cos x\,dx$

الحل

$I = \int (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos x\,dx$ ← اعادة صياغة

$= \int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3} (1 + \sin x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \sin x)^3} + c$

$u = 1 + \sin x$

اشتقاق

$du = \cos x\,dx$

10-

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$$

الحل

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sec^2 x\, dx$$ ← اعادة صياغة

$$= \int u^{-\frac{1}{2}} \cdot du$$

$$= 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2(1+\tan x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{(1+\tan x)} + C$$

$u = 1 + \tan x$

اشتقاق

$du = \sec^2 x\, dx$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x}$$

11-

$$\int \sec^3 x \tan x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x \cdot \sec x \cdot \tan x\, dx$$

بالتعويض

$$= \int u^2\, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

$u = \sec x$

$du = \sec x . \tan x\, dx$

بند 4-5

1-

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

الحل

$f'(x) = (\sqrt{x})' \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$

1-

$$g(x) = e^{x^3 - 4}$$

$$g'(x) = (x^3 - 4)' \cdot e^{x^3 - 4}$$

$$= 3x^2 \cdot e^{x^3 - 4}$$

2-

$$h(x) = e^{\cos x}$$

$$h'(x) = (\cos x)' \cdot e^{\cos x}$$

$$= -\sin x \; e^{\cos x}$$

3-

3 أوجد مشتقات كلّ من الدوال التالية:

$f(x) = \ln x^2$

الحل

$f'(x) = \frac{2}{x}$

4-

$h(x) = \ln \sqrt{x}$

الحل

$h(x) = \ln x^{\frac{1}{2}}$

$h'(x) = \frac{1}{2x}$

5-

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

الحل

$g(x) = \ln x^{-1}$

$g'(x) = \frac{-1}{x}$

6-

$k(x) = \ln(\cos x)$

الحل

$k'(x) = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

5-

④ أوجد :

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,dx$$

$u = 3x$

$du = 3\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}\,du = \frac{1}{3}e^{u} + c$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

6-

حاول أن تحل

4 أوجد:

$$\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\,dx$$

الحل

$$I = \int e^{x^2-x+3}\cdot(2x-1)\,dx$$

$$= \int e^{u}\cdot du$$

$$= e^{u} + c$$

$$= e^{x^2-x+3} + c$$

$u = x^2 - x + 3$

اشتقاق

$du = (2x-1)\,dx$

7-

$$\int \left(e^{3x} + \frac{4}{2x-1}\right) dx$$

$$= \int e^{3x}\, dx + \int \frac{4}{2x-1}\, dx$$

$$= I_1 + I_2$$

$I_1 \to u = 3x$

$du = 3\,dx$

$I_2 \to u = 2x-1$

$du = 2\,dx$

$$I_1 = \frac{1}{3}\int e^{3x} \cdot 3\,dx \;,\; I_2 = 2\int \frac{1}{2x-1} \cdot 2\,dx$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\int e^{u}\, du \;,\; I_2 = 2\int \frac{1}{u} \cdot du$$

$$I_1 = \frac{1}{3} e^{u} \;,\; I_2 = 2 \ln|u| + c$$

$$I_1 = \frac{1}{3} e^{3x} \;,\; I_2 = 2 \ln|2x-1| + c$$

$$\therefore \int \left(e^{3x} + \frac{4}{2x-1}\right) dx = \frac{1}{3} e^{3x} + 2\ln|2x-1| + c$$

8-

12 تعويض $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx =$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$2\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int e^{u}\, du$

$= 2e^{u} + C$

$= 2e^{\sqrt{x}} + C$

9-

كراسة التمارين

أوجد:

$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx$

الحل

$u = \frac{1}{x}$

$du = -\frac{1}{x^2}\, dx$

$-du = \frac{1}{x^2}\, dx$

$I = \int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx$

$= -\int e^{u} \cdot du$

$= -e^{u} + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$

10-

مثال (6)

أوجد: $\int \tan x \, dx$

الحل

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$u = \cos x$

اشتقاق

$du = -\sin x \, dx$

$-du = \sin x \, dx$

$$= -\int \frac{1}{u} \, du$$

$$= -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

$$= \ln|\sec x| + c$$

$$\boxed{(\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x} = \sec x}$$

11-

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5} \, dx$

الحل

$u = x^2 + 2x + 5$

$du = (2x+2) \, dx$

$du = 2(x+1) \, dx$

$\frac{1}{2} du = (x+1) \, dx$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| + c$$

بند 5-5

1-

كراسة التمارين

أوجد:

$\int x\sin(5x)\,dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \sin(5x)\,dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{5}\cos(5x)$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = x\cdot -\frac{1}{5}\cos(5x) - \int -\frac{1}{5}\cos(5x)\,dx$

$= -\frac{1}{5}\cdot x\cdot\cos(5x) + \frac{1}{5}\int\cos(5x)\,dx$

$= -\frac{1}{5}\cdot x\cdot\cos(5x) + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\sin(5x) + C$

مقلوب

$I = -\frac{1}{5}\cdot x\cdot\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + C$

2-

مثال (2)

أوجد:

b $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

الحل

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\,dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = 3x\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1} - \int\frac{1}{2}e^{2x+1}\cdot 3dx$

$I = \frac{3}{2}x\cdot e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\,dx$

$I = \frac{3}{2}x\cdot e^{2x+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$

$I = \frac{3}{2}x\cdot e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$

تذكر

مقلوب

$\boxed{\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C}$

3-

2 أوجد:

b $\int 4x e^{-5x}\,dx$

الحل

$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}\,dx$

$du = 4\,dx \qquad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = 4\cdot -\frac{1}{5}e^{-5x} - \int -\frac{1}{5}e^{-5x}\cdot 4\,dx$

$I = -\frac{4}{5}e^{-5x} + \frac{4}{5}\int e^{-5x}\,dx$

تذكر

$\boxed{\int e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C}$

$I = -\frac{4}{5}e^{-5x} + \frac{4}{5}\cdot -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$

$I = -\frac{4}{5}e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$

4-

أوجد: $\int (\ln(x))^2\, dx$

الحل

$u = (\ln x)^2 \qquad dv = dx$

$du = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx \qquad \int v = x$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$I = (\ln x)^2 \cdot x - \int x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$I = x \cdot (\ln x)^2 - 2 \int \ln x\, dx$

ايجاد: $I_1 = \int \ln x\, dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad \int v = x$

$I_1 = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$I_1 = x \cdot \ln x - \int dx$

$I_1 = x \cdot \ln x - x + C_1$

تعويض :

$I = x \cdot (\ln x)^2 - 2\left[x \cdot \ln x - x + C_1\right]$

$I = x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x + C$

5-

4 أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

الحل

تعويض: $t = x+1$

$I = \int t \ln t \, dt \quad \| \, dt = dx$

تجزئة:

$u = \ln t \qquad dv = t\,dt$

$du = \frac{1}{t} dt \qquad v = \frac{1}{2} t^2$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = \ln t \cdot \frac{1}{2} t^2 - \int \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{1}{t} dt$

$I = \frac{1}{2} t^2 \cdot \ln t - \frac{1}{2} \int t \, dt$

$I = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} t^2 + C$

$I = \frac{1}{2} (x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{4} (x+1)^2 + C$

6-

مثال (5)

أوجد: $\int x^2 \cos x \, dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 2x \, dx \qquad v = \sin x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$I = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x \, dx$

$I = x^2 \cdot \sin x - 2 \underbrace{\int x \sin x \, dx}_{I_1}$

تجزئة مرة أخرى

باستخدام التكامل بالتجزئ لايجاد:

$I_1 = \int x \cdot \sin x \, dx$

$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$I_1 = x \cdot -\cos x - \int -\cos x \, dx$

$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx$

$I_1 = -x \cos x + \sin x + c_1$

بالتعويض عن I_1 في I

$I = x^2 \cdot \sin x - 2\left[-x \cos x + \sin x + c_1\right]$

$I = x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$

لاحظ وركز :

$\int \cos x \, dx$ تحل بالتكامل المباشر

$\int x \cos x^2 \, dx$ تحل بالتكامل بالتعويض

$\int x \cos x \, dx$ تحل بالتكامل بالتجزئ

$\int x^2 \cos x \, dx$ تحل بالتكامل بالتجزئ مرتين

7-

أوجد: $\int x^2 e^x \, dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = e^x dx$

$du = 2x\,dx \qquad \int \quad v = e^x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$I = x^2 . e^x - \int e^x . 2x\,dx$

$I = x^2 . e^x - 2\int x . e^x dx$

ايجاد: $I_1 = \int x . e^x dx$

$u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = dx \qquad \int \quad v = e^x$

$I_1 = x . e^x - \int e^x dx$

$I_1 = x . e^x - e^x + c_1$

تعويض:

$I = x^2 . e^x - 2\left[x . e^x - e^x + c_1\right]$

$I = x^2 . e^x - 2x . e^x + 2e^x + c$

لاحظ وركز:

$\int e^x dx$ تحل بالتكامل المباشر

$\int x e^{x^2} dx$ تحل بالتكامل بالتعويض

$\int x e^x dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء

$\int x^2 e^x dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء مرتين

8-

أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

الحل

درجة البسط أصغر من درجة المقام

① تحليل المقام:

$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$
$= x(2x-1)(x+2)$

② نفرض أن:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

③ معادلة التعويض:

$$\boxed{x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)}$$

④ بالتعويض عن $x=0$:

$(0)^2+2(0)-1 = A(2(0)-1)(0+2)$

$\boxed{A=\frac{1}{2}}$

عن $x=\frac{1}{2}$:

$(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})-1 = B(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+2)$

$\boxed{B=\frac{1}{5}}$

عن $x=-2$:

$(-2)^2+2(-2)-1 = C(-2)(2(-2)-1)$

$\boxed{C=\frac{-1}{10}}$

⑤ الكسور الجزئية:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{(2x-1)} + \frac{-\frac{1}{10}}{(x+2)}$$

التكامل:

$$\int f(x)dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{(2x-1)} + \frac{-\frac{1}{10}}{(x+2)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

بند 5-6

1-

$$F(x)=\frac{5x-1}{x^2+2x-15}=\frac{A_1}{(x+5)}+\frac{A_2}{(x-3)}$$

$$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)=0 \Rightarrow$$

$$x=-5 \quad , \quad x=3$$

$$\therefore \quad 5x-1=A_1(x-3)+A_2(x+5)$$

بوضع $x=3 \Leftarrow$

$$15-1=A_2(3+5)$$

$$A_2=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$$

بوضع $x=-5 \Leftarrow$

$$-25-1=A_1(-5-3)$$

$$A_1=\frac{-26}{-8}=\frac{13}{4}$$

الكسور الجزئية $\Rightarrow \dfrac{5x-1}{x^2+2x-15}=\dfrac{(13/4)}{x+5}+\dfrac{(7/4)}{x-3}$

$$\int F(x)\,dx=\frac{13}{4}\int\frac{1}{x+5}\,dx+\frac{7}{4}\int\frac{1}{x-3}\,dx$$

$$=\frac{13}{4}\ln|x+5|+\frac{7}{4}\ln|x-3|+C$$

2-

أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

الحل

درجة البسط أصغر من درجة المقام

① تحليل المقام:

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$
$$= x(2x-1)(x+2)$$

② نفرض أن:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

③ معادلة التعويض:

$$\boxed{x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)}$$

④ بالتعويض عن $x=0$:

$$(0)^2+2(0)-1 = A(2(0)-1)(0+2)$$
$$\boxed{A=\frac{1}{2}}$$

عن $x=\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)-1 = B\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)$$
$$\boxed{B=\frac{1}{5}}$$

عن $x=-2$:

$$(-2)^2+2(-2)-1 = C(-2)(2(-2)-1)$$
$$\boxed{C=\frac{-1}{10}}$$

⑤ الكسور الجزئية:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{(2x-1)} + \frac{-\frac{1}{10}}{(x+2)}$$

التكامل:

$$\int f(x)dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{(2x-1)} + \frac{-\frac{1}{10}}{(x+2)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

3-

مثال (3)

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام: $x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4)$

$= x\,(x-2)^2$

② نفرض أن: $f(x)=\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$

③ معادلة التعويض:

$$\boxed{-x^2+2x+4 = A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx}$$

④ بالتعويض عن $x=0$:

$-(0)^2+2(0)+4 = A(0-2)^2$

$\boxed{A=1}$

$x=2$:

$-(2)^2+2(2)+4 = C(2)$

$\boxed{C=2}$

$x=1$:

$-(1)^2+2(1)+4 = \overset{1}{\cancel{A}}(1-2)^2+B(1)(1-2)+\overset{2}{\cancel{C}}(1)$

$\boxed{B=-2}$

⑤ الكسور الجزئية: $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$

$= \ln|x| - 2\ln|x-2| + 2\cdot\frac{-1}{(x-1)} + C$

$= \ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{2}{(x-1)} + C$

4-

مثال (4)

أوجد: $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام : $x^3+2x^2 = x^2(x+2)$

② نفرض أن : $f(x) = \frac{3+x+x^2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+2)}$

③ معادلة التعويض : $\boxed{3+x+x^2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2}$

④ بالتعويض عن $x = 0$: $3+(0)+(0)^2 = B(0+2)$

$\boxed{B = \frac{3}{2}}$

$x = -2$: $3+(-2)+(-2)^2 = C(-2)^2$

$\boxed{C = \frac{5}{4}}$

$x = 1$:

$3+(1)+(1)^2 = A(1)(1+2) + B(1+2) + C(1)^2$

$\boxed{A = \frac{-1}{4}}$

⑤ الكسور الجزئية : $f(x) = \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{5}{4}}{(x+2)}$

⑥ التكامل : $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{5}{4}}{(x+2)} \right) dx$

$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{x} + \frac{5}{4}\ln|x+2| + C$

5-

معلق

6-

معلق

7-

معلق

بند 7-5

1-

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$

الحل

$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos 2x}{2} + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

تعويض

$= \left(-\frac{1}{4}\cos 2(\frac{\pi}{2}) + \cot(\frac{\pi}{2})\right) - \left(-\frac{1}{4}\cos 2(\frac{\pi}{4}) + \cot(\frac{\pi}{4})\right)$

$= \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$

أوجد:

c $\int_{3}^{3}(-2x^3 + x^2)dx$

الحل

$= 0$

أوجد:

d $\int_{2}^{4}\frac{dx}{x-1}$

الحل

$= \left[\ln|x-1|\right]_{2}^{4}$

تعويض

$= \left(\ln|(4)-1|\right) - \left(\ln|(2)-1|\right)$

$= \ln|3| - \ln|1| = \ln|3| = 1.09$

2-

أوجد:

b $\int_1^3 |x+2|\,dx$

الحل

$x+2=0$

$x=-2 \notin (1,3)$

$|x+2|$

$-x-2$ | $x+2$; -2, 1, 3

$$I=\int_1^3 (x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^3$$

$$=\left(\frac{1}{2}(3)^2+2(3)\right)-\left(\frac{1}{2}(1)^2+2(1)\right)$$

$$=8$$

لاحظ:
صفر المطلق لا ينتمى إلى الفترة المطلوبة
$-2 \notin (1,3)$

3-

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int_{-3}^4 |2x-4|\,dx$

الحل

$2x-4=0 \rightarrow 2x=4$

$x=2 \in (-3,4)$

$|2x-4|$

$-2x+4$ | $2x-4$; -3, 2, 4

$$I=\int_{-3}^2 (-2x+4)\,dx \oplus \int_2^4 (2x-4)\,dx$$

$$=\left[-2\cdot\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-3}^2 \oplus \left[2\cdot\frac{1}{2}x^2-4x\right]_2^4$$

$$=\left[-x^2+4x\right]_{-3}^2 \oplus \left[x^2-4x\right]_2^4$$

$$=\left(\left(-(2)^2+4(2)\right)-\left(-(-3)^2+4(-3)\right)\right)\oplus\left(\left((4)^2-4(4)\right)-\left((2)^2-4(2)\right)\right)=29$$

4-

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(11) $\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)\,dx \le 0$

$f(x)=x^2+2x-8$ متصلة على $[-4,2]$

$$x^2+2x-8=0 \quad \Rightarrow (x-2)(x+4)=0$$
$$x=2, x=-4$$

$$x^2+2x-8 \le 0 \qquad \forall x \in [-4,-2]$$

$$\Rightarrow \int_{-4}^{2}\left(x^2+2x-8\right)dx \le 0$$

5-

كراسة التمارين

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)dx \geq \int_0^1 (4x - 5)dx$

الحل

نفرض : $f(x) = x^2 - 3x + 7$ دالة متصلة على R

$g(x) = 4x - 5$ دالة متصلة على R

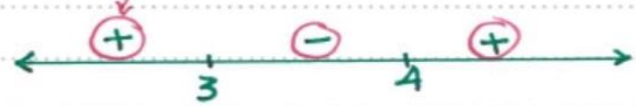
نوجد : $f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 7 - (4x - 5)$

$= x^2 - 3x + 7 - 4x + 5$

$= x^2 - 7x + 12$

نوجد : $x^2 - 7x + 12 = 0$ موجب

mod53 $x_1 = 3$ أو $x_2 = 4$



$\therefore f(x) - g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 3] \cup [4, \infty)$

$\therefore f(x) - g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$\therefore f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^1 g(x)\,dx$

$\therefore \int_0^1 (x^2 - 3x + 7)\,dx \geq \int_0^1 (4x - 5)\,dx$

6 & 7 -

حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\, dx$

الحل

نفرض: $y = \sqrt{25-x^2}$

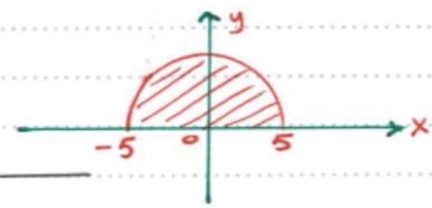
$y^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

هى معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها: $r = \sqrt{25} = 5$

الدالة: $y = \sqrt{25-x^2}$

تمثل معادلة النصف العلوى للدائرة



$\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\, dx =$ مساحة المنطقة المظللة

$=$ نصف مساحة الدائرة

$= \frac{1}{2}(\pi r^2)$

$= \frac{1}{2}\pi (5)^2$

$= \frac{25}{4}\pi$

b $\int_{0}^{4} -\sqrt{16-x^2}\, dx$

أوجد:

الحل

نفرض: $y = -\sqrt{16-x^2}$

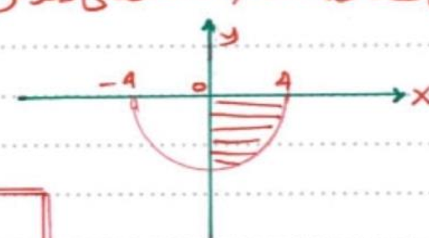
$y^2 = 16 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 16$

هى معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها: $r = \sqrt{16} = 4$

الدالة: $y = -\sqrt{16-x^2}$

تمثل معادلة النصف السفلى للدائرة



$\int_{0}^{4} -\sqrt{16-x^2}\, dx = -$ مساحة المنطقة المظللة

$= -$ ربع مساحة الدائرة

$= -\frac{1}{4}(\pi r^2)$

$= -\frac{1}{4}\pi (4)^2$

$= -4\pi$

$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx =$ نصف مساحة الدائرة

$\int_{-a}^{0} \sqrt{a^2-x^2}\, dx =$ ربع مساحة الدائرة

8-

حاول أن تحل

9 أوجد:

a $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

الحل

أولا:

$I=\int (x^2+2x+5)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+1)\,dx$ ← اعادة صياغة

$u=x^2+2x+5$

$du=(2x+2)\,dx$

$\frac{1}{2}du=(x+1)\,dx$

$=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,du$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{1}{3}(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}+C$

ثانيا:

$\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\,dx=\left[\frac{1}{3}(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$

تعويض

$=\left(\frac{1}{3}\left((1)^2+2(1)+5\right)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{3}\left((-1)^2+2(-1)+5\right)^{\frac{3}{2}}\right)$

$=7.54-\frac{8}{3}=4.87$

9-

حاول أن تحل

9 أوجد:

b $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

الحل

أولاً :

$I = \int (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x}\ dx$

$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (u+1) \cdot du$

$= \int (u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})\ du$

$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

$u = x-1$

$du = dx$

$u = x-1$

$x-1 = u$

$\boxed{x} = u+1$

ثانياً :

$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\ dx = \left[\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$

$= \left(\frac{2}{5}((5)-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}((5)-1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}((2)-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}((2)-1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{256}{15}$

10-

مثال (11)

أوجد: $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

الحل

أولا : $I = \int \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام : $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$

② نفرض أن : $f(x) = \frac{2x+8}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+3)}$

③ معادلة التعويض : $\boxed{2x+8 = A(x+3) + B(x+1)}$

④ بالتعويض عن $x=-1$: $2(-1)+8 = A(-1+3) + \cancel{B(-1+1)}$

$\boxed{A=3}$

عن $x=-3$: $2(-3)+8 = \cancel{A(-3+3)} + B(-3+1)$

$\boxed{B=-1}$

⑤ الكسور الجزئية : $f(x) = \frac{3}{(x+1)} + \frac{-1}{(x+3)}$

⑥ التكامل : $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{3}{(x+1)} + \frac{-1}{(x+3)}\right) dx$

$= 3\ln|x+1| - \ln|x+3| + C$

ثانياً : $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+8}\,dx = \left[3\ln|x+1| - \ln|x+3|\right]_1^5$

$= \left(3\ln|(5)+1| - \ln|(5)+3|\right) - \left(3\ln|(1)+1| - \ln|(1)+3|\right)$

$= 2.602$

يمكن التأكد من الناتج باستخدام الحاسبة مباشرة : $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx = 2.6$

الوحده السادسه

بند 1-6

1-

③ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة . $f : f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات

الحل

نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات

بوضع:

$$f(x) = 0$$
$$12 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 12$$
$$x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$
$$x = -2\sqrt{3} \text{ أو } x = 2\sqrt{3}$$

$$A = \left|\int_{2\sqrt{3}}^{-2\sqrt{3}} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{2\sqrt{3}}^{-2\sqrt{3}} (12 - x^2)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{2\sqrt{3}}^{-2\sqrt{3}}\right| = \left|\left(12(2\sqrt{3}) - \frac{(2\sqrt{3})^3}{3}\right) - \left(12(-2\sqrt{3}) - \frac{(-2\sqrt{3})^3}{3}\right)\right|$$

2-

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 \, , \, \frac{3}{2}\right]$

الحـل

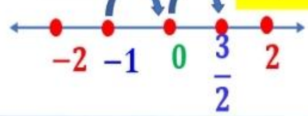
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$f(x) = 0$

$x^3 - 4x = 0$ MOD54

إما $x = 0 \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ أو $x = -2 \notin \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ أو $x = 2 \notin \left(-1, \frac{3}{2}\right)$



2) فترات التكامل : $[-1,0] \, , \, \left[0, \frac{3}{2}\right]$

3) المساحة :

$$A = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - 4x) \, dx \right| + \left| \int_{0}^{\frac{3}{2}} (x^3 - 4x) \, dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 4.\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - 4.\frac{1}{2}x^2 \right]_{0}^{\frac{3}{2}} \right|$$

$$= \left| \left[\cancel{\frac{0^4}{4} - \frac{4(0)^2}{2}} \right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{4(-1)^2}{2} \right] \right| + \left| \left[\frac{(\frac{3}{2})^4}{4} - \frac{4(\frac{3}{2})^2}{2} \right] - \left[\cancel{\frac{0^4}{4} - \frac{4(0)^2}{2}} \right] \right| = 4.98$$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x^3 - 4x| \, dx = 4.98$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

3-

⑥ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة . $f : f(x) = cos\,2x$ ومحور السينات في الفترة $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل

نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات

$$f(x) = 0$$
$$cos\,2x = 0$$
$$2x = \frac{\pi}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \,, n \in \mathbb{Z}$$

بوضع:

$$n = 0 \quad , x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$n = 1 \quad , x = \frac{9\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\therefore$ المنحنى يقطع محور السينات عند $x = \frac{\pi}{4}$ فتكون المساحة A كما يلي :

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\frac{1}{2}sin(\pi) - \frac{1}{2}sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ units square}$$

4-

مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f : f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة $g : g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 0$

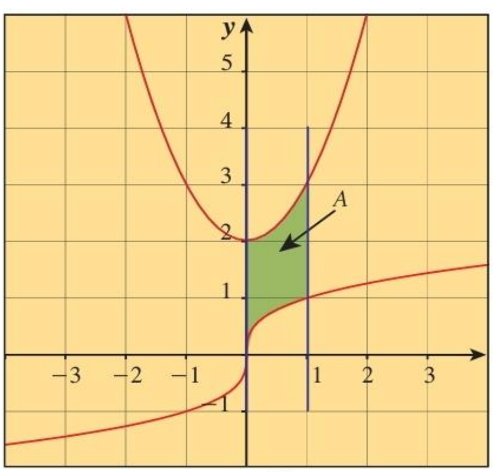
علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [0\,,1]$

الحل:

$$\because \quad f(x) > g(x) \ \forall \ x \in [0,1]$$

$\therefore$ مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$$
$$= \int_0^1 (x^2 + 2 - \sqrt[3]{x})dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{4}\right) - (0)$$
$$= \frac{19}{12} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$



شكل توضيحي

5-

(5)

$g(x) = -1 - x^2 \quad , \quad f(x) = e^x$

لا يوجد تقاطع (محطى)

$\therefore A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \right|$

$A = \left| \int_0^3 (e^x - (-1 - x^2))\,dx \right|$

$A = \left| \int_0^3 (e^x + 1 + x^2)\,dx \right|$

$= \left| \left[e^x + x + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 \right|$

$= \left| \left(e^3 + 3 + \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(e^0 + 0 + \frac{1}{3}(0)^3\right) \right|$

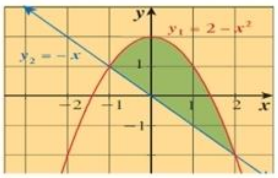
$= \left| e^3 + 12 - 1 \right|$

$= \left| e^3 + 11 \right| \simeq 31$ وحدة مربعة

6-

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ $y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$



الحـل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$y_1 = y_2$$

$$-x = 2 - x^2 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

MOD53

إما $x = 2$ أو $x = -1$

2) فترات التكامل : $[-1, 2]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{2}(y_1 - y_2)dx\right| = \left|\int_{-1}^{2}(2 - x^2 - (-x))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{2}(2 - x^2 + x)dx\right| = \left|\left[2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}\right|$$

$$= \left|\left[2(2) - \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[2(-1) - \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2\right]\right|$$

$$= \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A = \int_{-1}^{2}\left|2 - x^2 - (-x)\right| dx = \frac{9}{2}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

7-

حاول أن تحل

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$

الحـل

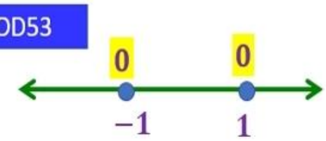
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow -2x^2 + 2 = x^2 - 1$$

$$x^2 - 1 + 2x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

MOD53



إما $x = -1$ أو $x = 1$

2) فترات التكامل : $[-1, 1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2 - (x^2 - 1))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{-1} (3x^2 - 3)dx\right| = \left|\left[\cancel{3}.\frac{1}{\cancel{3}}x^3 - 3x\right]_{-1}^{1}\right|$$

$$= \left|[(1)^3 - 3(1)] - [[(-1)^3 - 3(-1))]]\right|$$

$= 4$ وحدة مربعة

8-

(8) اوجد مساحة المنطقة المحدده بالمنحنيين :

$f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 8$ ، $x = 1$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x^3 = x$$

$$\Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = -1$$

وكل من هذه الأصفار لا ينتمي الى الفترة $(1 , 8)$

$$\therefore \quad A = \left| \int_1^8 x - \sqrt[3]{x} \; dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_1^8 \right| = \frac{81}{4} \text{ unit square}$$

9-

مثال (9)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

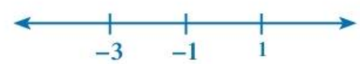
$f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = 3 - 3x^2$

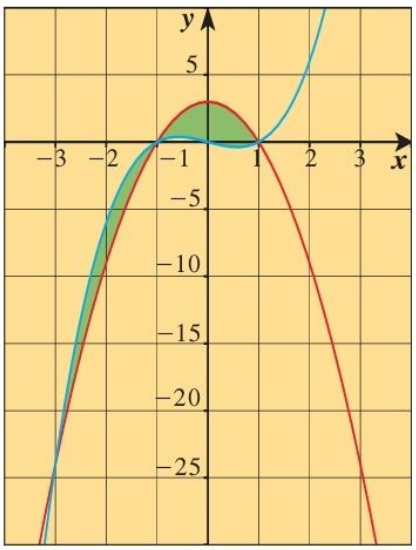
الحل:

لإيجاد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين:

نضع

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - x = 3 - 3x^2$$
$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$
$$x^2(x+3) - (x+3) = 0$$
$$(x^2 - 1)(x+3) = 0$$
$$(x-1)(x+1)(x+3) = 0$$
$$x = 1 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = -3$$





شكل توضيحي

فيكون التكامل على الفترتين $[-3, -1]$, $[-1, 1]$

وهو يعطي مساحة المنطقة A المحددة بالمنحنيين:

$$A = \left| \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)\, dx) \right| + \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)\, dx) \right|$$
$$= \left| \int_{-3}^{-1} (x^3 - x - 3 + 3x^2) dx \right| + \left| \int_{-1}^{1} (x^3 - x - 3 + 3x^2) dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3 \right]_{-3}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3 \right]_{-1}^{1} \right|$$
$$= \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{9}{2} + 9 - 27\right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 + 1\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1\right) \right|$$
$$= |+4| + |-4| = 8 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

10-

حاول أن تحل

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $g(x)=\frac{x}{2}$, $f(x)=\sqrt{x}$

والمستقيمين $x=9$, $x=0$

الحـل

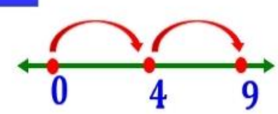
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$f(x)=g(x) \Longrightarrow \sqrt{x}=\frac{x}{2} \xrightarrow{\text{بتربيع الطرفين}} (\sqrt{x})^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\frac{x}{1}=\frac{x^2}{4} \Longrightarrow x^2=4x \Longrightarrow x^2-4x=0$$ MOD53

إما $x=0 \notin (0,9)$ أو $x=4 \in (0,9)$



2) فترات التكامل : $[0,4]$, $[4,9]$

3) المساحة :

$$A=\left|\int_0^4 (f(x)-g(x))\ dx\right| + \left|\int_4^9 (f(x)-g(x))\ dx\right|$$

$$A=\left|\int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}\right) dx\right|+\left|\int_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}\right) dx\right| = \left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^4\right| + \left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_4^9\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{4^2}{4}\right]-\left[\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}-\frac{0^2}{4}\right]\right| + \left|\left[\frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}-\frac{9^2}{4}\right]-\left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{4^2}{4}\right]\right|$$

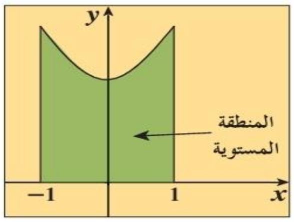
$= 4.917$ وحدة مربعة

بند 6-2

1-

مثال (1)

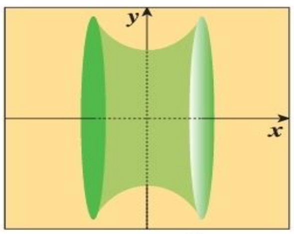
أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.



الحل:

حجم المجسم الناتج هو:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^2+2)^2 dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4+4x^2+4) dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^{1}$$
$$= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{4}{3} - 4 \right) \right]$$
$$= \frac{166}{15}\pi \quad \text{units cube}$$



شكل توضيحي

2-

حاول أن تحل

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0, h]$

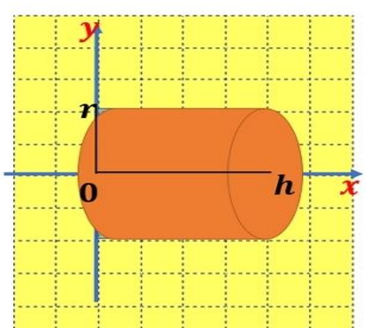
الحـل

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو أسطوانة طول نصف قطرها r وارتفاعها h

1) فترة التكامل : $[0, h]$

2) الحجم :

$$V = \pi \int_{0}^{h} (f(x))^2 \, dx$$
$$= \pi \int_{0}^{h} (r)^2 \, dx$$
$$= \pi \int_{0}^{h} r^2 \, dx$$
$$= \pi [r^2 x]_{0}^{h}$$
$$= \pi [r^2 h - r^2(0)]$$
$$= \pi r^2 h$$ وحدة مكعبة



3-

حاول أن تحل

3 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

الحـل

1) الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2 \xrightarrow{\text{بالضرب في } 2} x^2 + 2 = x + 4$$

$$x^2 + 2 - x - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{mod53}$$

إما $x = -1$ أو $x = 2$

2) فترة التكامل : $[-1,2]$

3) القيمة الاختيارية:

نأخذ قيمة اختيارية $x = 0 \in (-1,2)$

$$f(0) = 0 + 1 = 1 \qquad g(0) = 0 + 2 = 2$$

$$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1,2]$$

4) الحجم :

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx = \pi \int_{-1}^{2} [\left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^2] \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} [\frac{x^2}{4} + 2x + 4 - (\frac{x^4}{4} + x^2 + 1)] dx = \pi \left[\frac{1}{4} . \frac{1}{3} x^3 + 2 . \frac{1}{2} x^2 + 4x - \frac{1}{4} . \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 - x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{12}(2)^3 + (2)^2 + 4(2) - \frac{1}{20}(2)^5 - \frac{1}{3}(2)^3 - (2)\right] - \left[\frac{1}{12}(-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) - \frac{1}{20}(-1)^5 - \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)\right] \right)$$

$$= \frac{81}{10} \pi$$ وحدة مكعبة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \pi \int_{-1}^{2} \left| \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^2 \right| dx = \frac{81}{10} \pi$$

ملحوظة: القيمة المطلقة للفرق بين مربع كلا من الدالتين داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

4-

(5) $y_1 = \sec x \ , \ y_2 = \sqrt{2} \ , \ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

التقاطع

$$y_1 = y_2$$
$$\sec x = \sqrt{2}$$
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mp\frac{\pi}{4} \notin \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

قيمة اختيارية

$$x = 0 \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y_1(0) = \sec(0) = \frac{1}{\cos(0)} = 1$$
$$y_2(0) = \sqrt{2}$$

$$y_2 \ge y_1 \qquad \forall x \in \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (y_2^2 - y_1^2)\, dx$$
$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2 - \sec^2 x)\, dx$$
$$= \pi \left[2x - \tan x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \pi\left(\left(\frac{\pi}{2} - \tan\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{-\pi}{2} - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$
$$\simeq 3.586 \qquad (units)^3$$

5-

(6) $y_1 = x+1 \ , \ y_2 = x-1 \ , \ x = 1 \ , \ x = 4$

التقاطع

$$y_1 = y_2$$
$$x + 1 = x - 1$$
$$x - x = -1 - 1$$
$$0 = -2$$

مستحيل

لايوجد تقاطع

قيمة اختيارية

$$x = 2 \in [1,4]$$

$$y_1(2) = (2) + 1 = 3$$
$$y_2(2) = (2) - 1 = 1$$

$$y_1 \geq y_2 \qquad \forall x \in [1,4]$$

2

$$V = \pi \int_1^4 \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx$$

$$= \pi \int_1^4 (x+1)^2 - (x-1)^2) dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left(x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1\right) dx$$

$$= \pi \int_1^4 (4x)\, dx = \pi \left[2x^2\right]_1^4$$

$$= \pi \left(2(4)^2 - 2(1)^2\right)$$

$$= 30\pi \,(units)^3$$

بند 3-6

1-

حاول أن تحل

$f'(x)$

4 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

المطلوب

الحل

الحالة الاولي

ميل المنحني :

$$f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$$f(x) = \int (-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4)dx$$

$$f(x) = -8.\frac{1}{4}x^4 + 3.\frac{1}{3}x^3 - 2.\frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + C$$

الدالة تمر بالنقطة (5- , 1-)A

$$f(-1) = -5$$

$$-2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + C = -5$$

Shift solve

$$\boxed{C = 3}$$

معادلة المنحنى هي :

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 3$$

2-

مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5 , 3)$

المطلوب

الحالة الثانية

الحل

ميل العمودي : $\sqrt{5-4x}$

ميل المماس : $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{5-4x}}$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}\,dx = \int \frac{-1}{(5-4x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$f(x) = \int -(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$f(x) = -1 \times \frac{1}{-4} \times \frac{2}{1}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

الدالة تمر بالنقطة $A(-5 , 3)$

$$f(-5) = 3$$

$$\frac{1}{2}(5-4(-5))^{\frac{1}{2}} + C = 3$$

Shift solve

$$\boxed{C = \frac{1}{2}}$$

معادلة المنحنى هي :

$$f(x) = \frac{1}{2}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

3-

(8) إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) هو $2x+5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2,3)$

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x+5 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2x+5}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x+5}dx = \frac{-1}{2}\ln|2x+5| + c$$

$$B(-2,3) \Rightarrow 3 = \frac{-1}{2}\ln|1| + c \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-1}{2}\ln|2x+5| + 3$$

4-

(6) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{5}{2}\right)$

$$f'(x) = \cos 2x$$

$$f(x) = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$A\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) + c$$

$$\frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + c \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 3$$

5- معلق

بند 6-4

1-

(1)

$$y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$$

$$y = \int (8x^3 - 3x^2 + 4)\,dx$$

$$y = \frac{8x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 4x + c$$

$$\boxed{y = 2x^4 - x^3 + 4x + c}$$

نعوض بالنقطه المعطاة لأيجاد (c)

$$\therefore \quad 5 = 2(1)^4 - (1)^3 + 4(1) + c$$

$$5 = 2 - 1 + 4 + c$$

$$c = 0$$

$$\therefore \; y = 2x^4 - x^3 + 4x$$

معادله الدالة

2-

مثال (4) حل المعادلة التفاضلية:

a $y' - 2xy = 0$

الحالة الثالثة

الحل

y بطرف y'

$$y' = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

باخذ التكامل للطرفين

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

$$|y| = e^{x^2+c}$$

$$|y| = e^{x^2} . e^{c}$$

نضع $k = \pm e^{c}$

$$y = \pm e^{c} . e^{x^2}$$

حل المعادلة هو :

$$y = k\,e^{x^2}$$

3-

⑤ P. 90

أوجد حلاً للمعادلة $y' = -2y$

إذا كان $y = 3$ عندما $x = 0$

$y' = -2y \Rightarrow y = Ke^{-2x}$

بالتعويض عن x ، y نجد

$3 = Ke^{-2(0)} \Rightarrow 3 = K \times 1 \Rightarrow K = 3$

$\therefore y = 3e^{-2x}$

4-

⑥ P. 90

$3y' - 2y = 4 \Rightarrow 3y' = 2y + 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

$\Rightarrow y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ، $\frac{b}{a} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{2} = 2$

$\Rightarrow y = Ke^{\frac{2}{3}x} - 2 \xrightarrow{\text{بالتعويض}} 3 = Ke^{0} - 2 \Rightarrow 3 + 2 = Ke^{0}$

$K = 5$

$\therefore y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$

5-

(12) $2y' + y = 4$ التي تحقق $y = 2$ عند $x = 0$

$$y' = \frac{-1}{2}y + 2 \Rightarrow y = ke^{\left(-\frac{1}{2}x\right)} - \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = ke^{\left(-\frac{1}{2}x\right)} + 4$$

$$x = 0, y = 2 \Rightarrow \quad 2 = k + 4 \Rightarrow k = -2$$

$$\Rightarrow y = -2e^{\left(-\frac{1}{2}x\right)} + 4$$

6-

P. 91 7 حل المعادلة : $y'' = -3x^2 + 6x$

$$y' = \int(-3x^2 + 6x)\,dx$$

$$y' = -x^3 + 3x^2 + c_1$$

$$y = \int(-x^3 + 3x^2 + c_1)\,dx$$

$$y = -\frac{x^4}{4} + x^3 + c_1x + c_2$$
