ثانوية سلمان الفارسي

قسم الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

المراجعة النهائية

ليلة الامتحان

تمارين متنوعة

M.ATA

(1 - 5) التكامل غير المحدد

أوجد: $\int \left(\frac{3x^2 - x}{x}\right)^2 dx$

الحل

$= \int \left(\frac{9x^4 - 6x^3 + x^2}{x^2}\right) dx = \int \left(\frac{9x^4}{x^2} - \frac{6x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right) dx$

$= \int (9x^2 - 6x + 1)\, dx = 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x + c$

$= 3x^3 - 3x^2 + x + c$

فكرة الحل: فك أقواس + توزيع بسط على مقام

أوجد: $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x+1} dx$

الحل

تحليل: mods3

$= \int \frac{(x+4)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} dx$

اختصار:

$= \int (x+4)\, dx$

تكامل:

$= \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$

أوجد: $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$

الحل

$= \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x} + 1)}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x} + 1)}} dx$

تذكر أن: تحليل

$(x+1) = (\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)$

$= \int (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)\, dx$

$= \int (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1)\, dx$

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + c$

$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + x + c$

(2 – 5) التكامل بالتعويض

نستخدم التكامل بالتعويض في حالة وجود قوس لايمكن فكه (دالة مضروب مشتقتها)

مثال (1)

أوجد:

$$\int \underbrace{(x^2+2x+5)}_{\text{دالة}}{}^3 \underbrace{(2x+2)dx}_{\text{مشتقة الدالة}}$$

الحل

إبدأ

$u = x^2+2x+5$

إشتقاق

$du = (2x+2)\,dx$

بالتعويض

$$I = \int u^3\, du$$

$$= \frac{1}{4}u^4 + c$$

$$= \frac{1}{4}(x^2+2x+5)^4 + c$$

$\boxed{u \text{ هي مابداخل القوس المرفوع لأس}}$

حاول أن تحل

أوجد:

$$\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\quad (2x-5)\,dx$$

الحل

$$I = \int (x^2-5x+2)^{\frac{1}{3}}\ (2x-5)\,dx$$ ← إعادة صياغة

إبدأ

$u = x^2-5x+2$

إشتقاق

$du = (2x-5)\,dx$

بالتعويض

$$= \int u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}(x^2-5x+2)^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-5x+2)^4} + c$$

$$\boxed{\int \underbrace{(\text{الدالة})}_{u}{}^{n}\ \underbrace{\text{مشتقة الدالة}\ dx}_{du}}$$

يفضل في بداية الحل التحويل من الصورة الجذرية إلى الأسية (إعادة صياغة)

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

الحل

$$I = \int (x^2+4x-1)^{\frac{1}{3}}\ (x+2)\,dx$$ ← اعادة صياغة

إبدأ

$u = x^2+4x-1$

إشتقاق

$du = (2x+4)\,dx$

عامل مشترك

$du = 2(x+2)\,dx$

$\frac{1}{2}du = (x+2)\,dx$

بالتعويض

$$= \int u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+4x-1)^4} + c$$

يفضل التخلص من الجذور والمقامات في بداية الحل (إعادة صياغة)

مثال (1)

أوجد: $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$

الحل

$I = \int (x^{-1}+4)^5 \cdot \underline{x^{-2}\,dx}$ ← اعادة صياغة

$u = \underline{x^{-1}+4}$

$du = -x^{-2}\,dx$

$-du = \underline{x^{-2}\,dx}$

$= -\int u^5\,du$

$= -\frac{1}{6}u^6 + C$

$= -\frac{1}{6}(x^{-1}+4)^6 + C$

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6 + C$

مثال (2)

أوجد: $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$

الحل

$I = \int \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^3}\,dx$

$= 5\int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3} \cdot \underline{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}$ ← اعادة صياغة

$u = \underline{x^{\frac{1}{2}}+2}$

$du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$2\,du = \underline{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}$

مضروب

$= 5\int u^{-3} \cdot 2\,du$

$= 10\int u^{-3}\,du$

$= 10 \cdot \frac{1}{-2} \cdot u^{-2} + C$

$= -5u^{-2} + C$

$= \frac{-5}{u^2} + C$

$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$

M.ATA

تستخدم هذه الطريقة في الحالة التالية

$\int x^{n}(x^{m}\pm a)^{k}\,dx \longrightarrow n \geq m$ (أس الx خارج القوس أكبر أو يساوي داخل القوس)

مثال (3)

أوجد: $\int x(x+1)^5\,dx$

الحل

$I = \int (x+1)^5 \cdot \boxed{x}\,dx$ ← اعادة صياغة

إبدأ

$u = x+1$

$du = dx$

$u = x+1$

$x+1 = u$

$\boxed{x} = u-1$

بالتعويض

$= \int u^5 (u-1)\,du$

$= \int (u^6 - u^5)\,du$

$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{6}u^6 + c$

$= \frac{1}{7}(x+1)^7 - \frac{1}{6}(x+1)^6 + c$

حاول أن تحل

أوجد: $\int x(2x-1)^3\,dx$

الحل

$I = \int (2x-1)^3 \cdot \boxed{x}\,dx$ ← اعادة صياغة

إبدأ

$u = 2x-1$

$du = 2\,dx$

$\frac{1}{2}du = dx$

$u = 2x-1$

$2x-1 = u$

$2x = u+1$

$\boxed{x} = \frac{1}{2}(u+1)$

$= \int u^3 \cdot \frac{1}{2}(u+1) \cdot \frac{1}{2}du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int u^3(u+1)\,du$

$= \frac{1}{4}\int (u^4 + u^3)\,du$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{4}u^4\right] + c$

$= \frac{1}{20}u^5 + \frac{1}{16}u^4 + c$

$= \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + c$

M.ATA

(3 – 5) تكامل الدوال المثلثية

فكرة الحل: تكامل بالتعويض على الصورة: $\int (\text{دالة مثلثية})^n \cdot \text{مشتقة الدالة المثلثية}\, dx$

مثال (3)

أوجد: $\int \cos^4 t \cdot \sin t\, dt$

الحل

$u = \cos t$

اشتقاق

$du = -\sin t\, dt$

$-du = \sin t\, dt$

$I = -\int u^4\, du$

$= -\frac{1}{5} u^5 + c$

$= -\frac{1}{5} (\cos t)^5 + c$

غالبا وليس دائما
تكون u هي الدالة المرفوعة لأس

مثال (3)

أوجد: $\int \sec^2 x \cdot \tan x\, dx$

الحل

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\, dx$

$I = \int \sec x \cdot \sec x \tan x\, dx$

$= \int u\, du$

$= \frac{1}{2} u^2 + c$

$= \frac{1}{2} (\sec x)^2 + c$

لاتنسى عيب فك
$\sec^2 \cdot \tan x$
$= \underbrace{\sec x}_{\text{الدالة}} \cdot \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{مشتقة الدالة}}$

حاول أن تحل

أوجد: $\int \csc^5 x \cot x\, dx$

الحل

$u = \csc x$

$du = -\csc x \cot x\, dx$

$-du = \csc x \cot x\, dx$

$I = \int \csc^4 x \cdot \csc x \cot x\, dx$

$= \int u^4 \cdot -du$

$= -\frac{1}{5} u^5 + c$

$= -\frac{1}{5} (\csc x)^5 + c$

(4 – 5) الدوال الأسية

فكرة الحل : التكامل بالتعويض $\int e^u \, du = e^u + c$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\,dx$

الحل

$I = \int e^{x^2-x+3} \cdot (2x-1)\,dx$

$= \int e^u \cdot du$

$= e^u + c$

$= e^{x^2-x+3} + c$

$u = x^2 - x + 3$

اشتقاق

$du = (2x-1)\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

الحل

$I = \int e^{x^3-6x} \cdot (x^2-2)\,dx$

$= \int e^u \cdot \frac{1}{3}\,du$

$= \frac{1}{3} e^u + c$

$= \frac{1}{3} e^{x^3-6x} + c$

$u = x^3 - 6x$

$du = (3x^2-6)\,dx$

$du = 3(x^2-2)\,dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2-2)\,dx$

عامل مشترك

M.ATA

(4 - 5) الدوال اللوغاريتمية

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx$

الحل

$u = x^2+3x+7$

$du = (2x+3)\,dx$

$I = \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|x^2+3x+7| + c$

ملحوظة
البسط مشتقة المقام

فكرة الحل : التكامل بالتعويض $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$

الحل

$u = x^2+2x+5$

$du = (2x+2)\,dx$

$du = 2(x+1)\,dx$

$\frac{1}{2}du = (x+1)\,dx$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + c$

عامل مشترك

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{x^2-5x+6}{x}\,dx$

الحل

$I = \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{6}{x}\right)dx$

$= \int \left(x - 5 + \frac{6}{x}\right)dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - 5x + 6\ln|x| + c$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln|x|$

فكرة الحل : توزيع البسط على المقام (المقام حد واحد)

(5 - 5) التكامل بالتجزئ

Integration by Parts Formula قاعدة التكامل بالتجزيء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال (1)

أوجد: $\int \overset{u}{x} \sin \overset{dv}{x}\, dx$

الحل

باقي المسألة — جزء من المسألة

استقاق $u = x$ $dv = \sin x\, dx$ تكامل

$du = dx$ $v = -\cos x$

المسألة — السهم الأول — السهم الثاني

قانون $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$I = x \cdot -\cos x - \int -\cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

يمكن تتبع الأسهم دون كتابة القانون

كراسة التمارين

أوجد: $\int x\cos(3x)\,dx$

الحل

$u = x$ $dv = \cos(3x)\,dx$

$du = dx$ $v = \frac{1}{3}\sin(3x)$

مقلوب معامل x

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = x \cdot \frac{1}{3}\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)\,dx$$
$$= \frac{1}{3} x \sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\,dx$$
$$= \frac{1}{3} x \sin(3x) - \frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

ضرب

$$I = \frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$$

M.ATA

فكرة الحل: تجزيء مرتين

مثال (5)

أوجد: $\int x^2 \cos x \, dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x\,dx$

$I = x^2 \cdot \sin x - 2\underbrace{\int x \sin x\,dx}_{I_1}$

تجزيء مرة أخرى

باستخدام التكامل بالتجزيء لايجاد:

$I_1 = \int x \cdot \sin x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$I_1 = x \cdot -\cos x - \int -\cos x\,dx$

$= -x \cdot \cos x + \int \cos x\,dx$

$I_1 = -x\cos x + \sin x + C_1$

بالتعويض عن I_1 في I

$I = x^2 \cdot \sin x - 2\left[-x\cos x + \sin x + C_1\right]$

$I = x^2 \cdot \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

لاحظ وركز:

$\int \cos x\,dx$ تحل بالتكامل المباشر

$\int x \cos x^2\,dx$ تحل بالتكامل بالتعويض

$\int x \cos x\,dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء

$\int x^2 \cos x\,dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء مرتين

هل اديت فروضك ؟؟

M.ATA

مثال (2)

أوجد:

a $\int x e^x \, dx$

الحل

$u = x \qquad dv = e^x \, dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$\int u \, dv = uv - \int u \, dv$$

$$I = x \cdot e^x - \int e^x \, dx$$

$$I = x \cdot e^x - e^x + C$$

تذكر:

$$\boxed{\int e^x \, dx = e^x + C}$$

مثال (2)

أوجد:

b $\int 3x e^{2x+1} \, dx$

الحل

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1} \, dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$I = 3x \cdot \frac{1}{2} e^{2x+1} - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} \cdot 3dx$$

$$I = \frac{3}{2} x \cdot e^{2x+1} - \frac{3}{2} \int e^{2x+1} \, dx$$

$$I = \frac{3}{2} x \cdot e^{2x+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$$

$$I = \frac{3}{2} x \cdot e^{2x+1} - \frac{3}{4} e^{2x+1} + C$$

تذكر: مقلوب

$$\boxed{\int e^{2x+1} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C}$$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int (x-3) e^{x-3} \, dx$

الحل

$u = (x-3) \qquad dv = e^{x-3} \, dx$

$du = dx \qquad v = e^{x-3}$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$I = (x-3) \cdot e^{x-3} - \int e^{x-3} \, dx$$

$$I = (x-3) \cdot e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

M.ATA

فكرة الحل: تجزيء مرتين

مثال (6)

أوجد: $\int x^2 e^x \, dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = e^x dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = e^x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = x^2 . e^x - \int e^x . 2x \, dx$$

$$I = x^2 . e^x - 2 \int x . e^x dx$$

ايجاد: $I_1 = \int x . e^x dx$

$u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$I_1 = x . e^x - \int e^x dx$$

$$I_1 = x . e^x - e^x + c_1$$

تعويض:

$$I = x^2 . e^x - 2 \left[x . e^x - e^x + c_1 \right]$$

$$I = x^2 e^x - 2x . e^x + 2e^x + c$$

لاحظ وركز:

$\int e^x dx$ تحل بالتكامل المباشر

$\int x e^{x^2} dx$ تحل بالتكامل بالتعويض

$\int x e^x dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء

$\int x^2 e^x dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء مرتين

لا تبحث عن الاخطاء بل ابحث عن الصواب

M.ATA

يستخدم التكامل بالتجزئ لحل هذا النوع من التمارين حيث يتم اختيار : $u = \ln x$ غالبا

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \ln x\, dx$

الحل

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln x . x - \int x . \frac{1}{x}\, dx$$

$$I = x . \ln x - \int dx$$

$$I = x . \ln x - x + C$$

غالبا وليس دائما
$u = \ln x$

مثال (4)

أوجد: $\int x \ln x\, dx$

الحل

$$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln x . \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 . \frac{1}{x}\, dx$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 . \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 . \ln x - \frac{1}{2} . \frac{1}{2}x^2 + C$$

ضرب

$$I = \frac{1}{2}x^2 . \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

لايوجد مستحيل

M.ATA

(6 – 5) التكامل باستخدام الكسور الجزئية

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

مثال (1)

لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-2x-15}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام:

$$x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$$

② نفرض أن:

$$f(x)=\frac{5x-1}{(x-5)(x+3)}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x+3)}$$

③ معادلة التعويض:

$$\boxed{5x-1=A(x+3)+B(x-5)}$$

④ بالتعويض عن $x=5$:

$$5(5)-1=A(5+3)+\cancel{B(5-5)}$$

shift solve $\quad A=3$

عن $x=-3$:

$$5(-3)-1=\cancel{A(-3+3)}+B(-3-5)$$

shift solve $\quad B=2$

⑤ الكسور الجزئية:

$$f(x)=\frac{3}{(x-5)}+\frac{2}{(x+3)}$$

⑥ التكامل:

$$\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{3}{(x-5)}+\frac{2}{(x+3)}\right)dx$$

$$=3\cdot\ln|x-5|+2\cdot\ln|x+3|+C$$

يمكن استخدام الحاسبة لايجاد قيمة A و B

shift solve

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

مثال (2)

أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

الحل

درجة البسط أصغر من درجة المقام

① تحليل المقام:

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$
$$= \overset{0}{x}\,(2\overset{\frac{1}{2}}{x}-1)(\overset{-2}{x}+2)$$

② نفرض أن:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(2x-1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

③ معادلة التعويض:

$$\boxed{x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)}$$

④ بالتعويض عن $x=0$:

$$(0)^2+2(0)-1 = A(2(0)-1)(0+2)$$
$$\boxed{A=\frac{1}{2}}$$

عن $x=\frac{1}{2}$:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+2\left(\tfrac{1}{2}\right)-1 = B\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}+2\right)$$
$$\boxed{B=\frac{1}{5}}$$

عن $x=-2$:

$$(-2)^2+2(-2)-1 = C(-2)(2(-2)-1)$$
$$\boxed{C=\frac{-1}{10}}$$

⑤ الكسور الجزئية:

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{(2x-1)}+\frac{-\frac{1}{10}}{(x+2)}$$

⑥ التكامل:

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{(2x-1)}+\frac{-\frac{1}{10}}{(x+2)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{10}}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

تذكر:

$\int\frac{x^2-3x}{x}\,dx$	$\int\frac{x^3-x}{x^4-2x^2}\,dx$	$\int\frac{x^2+5x+4}{x+1}\,dx$	$\int\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$
توزيع بسط على مقام	البسط مشتقة المقام	تحليل + اختصار	كسور جزئية

احسن استغلال وقتك

خذ وقتك للتمييز بين هذه الأنواع

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

مثال (3)

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام: $x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4)$

$= x\,(x-2)^2$

② نفرض أن: $f(x) = \frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

③ معادلة التعويض:

$$\boxed{-x^2+2x+4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}$$

④ بالتعويض عن $x=0$: $-(0)^2+2(0)+4 = A(0-2)^2$

$\boxed{A=1}$

$x=2$: $-(2)^2+2(2)+4 = C(2)$

$\boxed{C=2}$

$x=1$:

$-(1)^2+2(1)+4 = \overset{1}{\cancel{A}}(1-2)^2 + B(1)(1-2) + \overset{2}{\cancel{C}}(1)$

$\boxed{B=-2}$

⑤ الكسور الجزئية: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{-2}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$

$= \ln|x| - 2\ln|x-2| + 2\cdot\frac{-1}{(x-1)} + C$

$= \ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{2}{(x-1)} + C$

انار الله
دربك
ووفقك
لما يحب
ويرضاه

M.ATA

(5 - 7) التكامل المحدد

مثال (10)

أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx$

الحل

أولاً: $I = \int x \cdot e^{-x}\,dx$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\,dx$

$du = dx \qquad \xrightarrow{\int} \qquad v = -e^{-x}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = x \cdot -e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx$

$I = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx$

$I = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$

ثانياً: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx = \left[-x \cdot e^{-x} - e^{-x}\right]_{-2}^{0}$

تعويض

$= \left(-(0) \cdot e^{-(0)} - e^{-(0)}\right) - \left(-(-2) \cdot e^{-(-2)} - e^{-(-2)}\right)$

$= -1 - e^2 = -8.38$

يمكن التأكد من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة مباشرة

مثال (9)

أوجد:

b $\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$

الحل

أولاً: $I = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x}\,dx$ ← اعادة صياغة

$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (u-1) \cdot du$

$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$

$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

$u = x+1$

$du = dx$

$u = x+1$

$x + 1 = u$

$\boxed{x} = u - 1$

ثانياً: $\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{3}$

$= \left(\frac{2}{5}((3)+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}((3)+1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}((0)+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}((0)+1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{116}{15}$

القيمة المطلقة

مثال (3)

أوجد:

b $\int_1^3 |x+2|\,dx$

الحل

$$I = \int_1^3 (x+2)\,dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^3$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}(3)^2 + 2(3)\right) - \left(\tfrac{1}{2}(1)^2 + 2(1)\right)$$
$$= 8$$

$x + 2 = 0$

$x = -2 \notin (1, 3)$

$|x+2|$

$-x-2 \quad\quad x+2$

$-2 \quad 1 \quad 3$

لاحظ:
صفر المطلق لا ينتمي إلى الفترة المطلوبة
$-2 \notin (1, 3)$

أوجد:

b $\int_0^5 |x-3|\,dx$

الحل

$$I = \int_0^3 |x-3|\,dx + \int_3^5 |x-3|\,dx$$
$$= \int_0^3 (-x+3)\,dx + \int_3^5 (x-3)\,dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right]_0^3 + \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 3x\right]_3^5$$
$$= \left(\left(-\tfrac{1}{2}(3)^2 + 3(3)\right) - \left(-\tfrac{1}{2}(0)^2 + 3(0)\right)\right) + \left(\left(\tfrac{1}{2}(5)^2 - 3(5)\right) - \left(\tfrac{1}{2}(3)^2 - 3(3)\right)\right) = \frac{13}{2}$$

$x - 3 = 0$

$x = 3 \in (0, 5)$

$|x-3|$

$-x+3 \quad x-3$

$0 \quad 3 \quad 5$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int_{-3}^4 |2x-4|\,dx$

الحل

$$I = \int_{-3}^2 (-2x+4)\,dx + \int_2^4 (2x-4)\,dx$$
$$= \left[-2\cdot\tfrac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-3}^2 + \left[2\cdot\tfrac{1}{2}x^2 - 4x\right]_2^4$$
$$= \left[-x^2 + 4x\right]_{-3}^2 + \left[x^2 - 4x\right]_2^4$$
$$= \left(\left(-(2)^2 + 4(2)\right) - \left(-(-3)^2 + 4(-3)\right)\right) + \left(\left((4)^2 - 4(4)\right) - \left((2)^2 - 4(2)\right)\right) = 29$$

$2x - 4 = 0 \to 2x = 4$

$x = 2 \in (-3, 4)$

$|2x-4|$

$-2x+4 \quad 2x-4$

$-3 \quad 2 \quad 4$

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

M.ATA

يمكن تمييز هذا النوع إذا كان التكامل على الصورة : $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ (ثابت / متغير)

تذكر : مساحة الدائرة $= \pi r^2$

معادلة نصف دائرة

مثال (7)

أوجد:

a $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

الحل

نفرض : $y = \sqrt{4-x^2}$

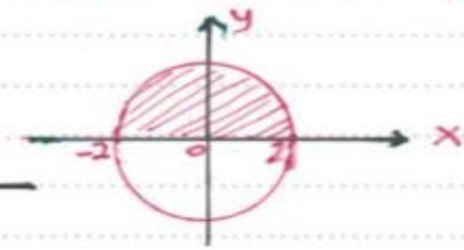
$y^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها : $r = \sqrt{4} = 2$

الدالة : $y = \sqrt{4-x^2}$

تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة



$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx =$ مساحة المنطقة المظللة

$=$ نصف مساحة الدائرة

$= \frac{1}{2}(\pi r^2)$

$= \frac{1}{2}\pi (2)^2$

$= 2\pi$

أوجد:

b $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx$

الحل

نفرض : $y = -\sqrt{9-x^2}$

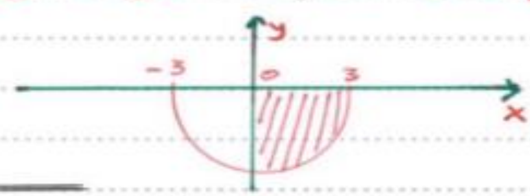
$y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 9$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها : $r = \sqrt{9} = 3$

الدالة : $y = -\sqrt{9-x^2}$

تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة



$\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx = -$ مساحة المنطقة المظللة

$= -$ ربع مساحة الدائرة

$= -\frac{1}{4}(\pi r^2)$

$= -\frac{1}{4}\pi (3)^2$

$= -\frac{9}{4}\pi$

$\boxed{\int_{-a}^{a} -\sqrt{a^2-x^2}\, dx = -\text{نصف مساحة الدائرة}}$

الناتج سالب

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

M.ATA

فترة واحدة [a,b] | دالة واحدة f (x)

مثال (2)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$f(x) = 0$

$x^2 - 3x = 0$

MOD53

إما $x = 0$ أو $x = 3$

0 | 3

2) فترات التكامل : $[0, 3]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_0^3 f(x)\,dx\right|$$
$$= \left|\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 3.\frac{1}{2}x^2\right]_0^3\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{3}(3)^3 - 3.\frac{1}{2}(3)^2\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 - 3.\frac{1}{2}(0)^2\right]\right| = 4.5$$

وحدة مربعة

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

الحل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات:

بوضع :

$f(x) = 0$

$x^2 + 5x + 4 = 0$

MOD53

إما $x = -4$ أو $x = -1$

-4 | -1

2) فترات التكامل : $[-4, -1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 + 5.\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-4}^{-1}\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{3}(-1)^3 + 5.\frac{1}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right] - \left[\frac{1}{3}(-4)^3 + 5.\frac{1}{2}(-4)^2 + 4(-4)\right]\right| = 4.5$$

وحدة مربعة

[a,b],[b,c] فترتين | **دالة واحدة f (x)**

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

ومحور السينات والمستقيمين $x = 4$, $x = -1$

الحل

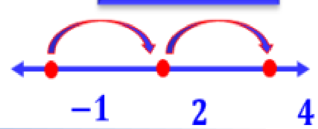
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

$f(x) = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$ MOD53

$x = 2$ $\quad 2 \in (-1,4)$

بوضع :



2) فترات التكامل : $[-1,2]$, $[2,4]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{4} f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{2} (x^2-4x+4)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{4} (x^2-4x+4)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \cancel{4}.\frac{1}{\cancel{2}}x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \cancel{4}.\frac{1}{\cancel{2}}x^2 + 4x\right]_{2}^{4}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2^3}{3} - 2(2)^2 + 4(2)\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - 2(-1)^2 + 4(-1)\right]\right| + \left|\left[\frac{4^3}{3} - 2(4)^2 + 4(4)\right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2(2)^2 + 4(2)\right]\right|$$

$$= \frac{35}{3}$$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:

$$A = \int_{-1}^{4} |x^2 - 4x + 4|\,dx = \frac{35}{3}$$

ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

لايوجد مستحيل

M.ATA

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 \,,\, \frac{3}{2}\right]$

الحـل

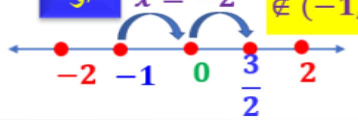
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$f(x) = 0$

$x^3 - 4x = 0$ MOD54

إما $x = 0 \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ أو $x = -2 \notin \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ أو $x = 2 \notin \left(-1, \frac{3}{2}\right)$



2) فترات التكامل : $[-1,0] \;,\; \left[0,\frac{3}{2}\right]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3-4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}}(x^3-4x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 4.\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 4.\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right|$$

$$= \left|\left[\cancel{\frac{0^4}{4} - \frac{4(0)^2}{2}}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{4(-1)^2}{2}\right]\right| + \left|\left[\frac{(\frac{3}{2})^4}{4} - \frac{4(\frac{3}{2})^2}{2}\right] - \left[\cancel{\frac{0^4}{4} - \frac{4(0)^2}{2}}\right]\right| = 4.98$$

وحدة مربعة

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} \,,\, \frac{\pi}{2}\right]$

الحـل

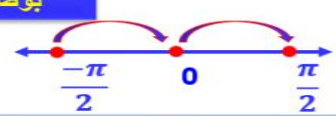
1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات :

بوضع :

$f(x) = 0$

$\sin x = 0$ Shift sin(0)

$x = 0 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



2) فترات التكامل : $\left[\frac{-\pi}{2},0\right] \;,\; \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\sin x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\right|$$

$$= \left|[-\cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right| + \left|[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|[-\cos 0] - \left[-\cos\frac{-\pi}{2}\right]\right| + \left|\left[-\cos\frac{\pi}{2}\right] - [-\cos 0]\right|$$

$$= |-1 - 0| + |0 - (-1)|$$

$= 2$ وحدة مربعة

الالة الحاسبة(راديان)

فترة واحدة [a,b]	دالتين f(x), g(x)

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ $y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$

الحل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$y_1 = y_2$$
$$-x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

MOD53

إما $x = 2$ أو $x = -1$

2) فترات التكامل : $[-1, 2]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx\right| = \left|\int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{2} (2 - x^2 + x)dx\right| = \left|\left[2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}\right|$$

$$= \left|\left[2(2) - \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[2(-1) - \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2\right]\right|$$

$$= \frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:
$A = \int_{-1}^{2} |2 - x^2 - (-x)|\ dx = \frac{9}{2}$
ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

مثال (7)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $g(x) = -x^2 + 9$ ، $f(x) = x^2 + 1$

الحل

1) نوجد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 1 = -x^2 + 9$$
$$x^2 + 1 + x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0$$

MOD53

إما $x = -2$ أو $x = 2$

2) فترات التكامل : $[-2, 2]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-2}^{2} (x^2 + 1 - (-x^2 + 9))dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)dx\right| = \left|\left[2.\frac{1}{3}x^3 - 8x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\left[2.\frac{1}{3}(2)^3 - 8(2)\right] - \left[\left[2.\frac{1}{3}(-2)^3 - 8(-2)\right)\right]\right|$$

$$= \frac{64}{3}$$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:
$A = \int_{-3}^{1} |x^2 + 1 - (-x^2 + 9)|\ dx = \frac{64}{3}$
ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

دالتين g , f غير متقاطعتين

مثال (5)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$
والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

الحل

1) $\therefore$ g , f دالتين غير متقاطعتين في الفترة $[0,3]$

2) فترات التكامل : $[0,3]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_0^3 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_0^3 (e^x - (-1 - x^2))\, dx\right|$$

$$= \left|\int_0^3 (e^x + 1 + x^2)\, dx\right| = \left|\left[e^x + x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^3\right|$$

$$= \left|\left[e^3 + 3 + \frac{1}{3}(3)^3\right] - \left[e^0 + 0 + \frac{1}{3}(0)^3\right]\right|$$

$$= \left|\left[e^3 + 12\right] - [1]\right|$$

$$= e^3 + 11$$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:
$A = \int_0^3 |e^x - (-1 - x^2)|\, dx = 31.08$
ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$
علمًا بأن: $f(x) > g(x)$, $\forall x \in [0, 1]$

الحل

1) $\because f(x) > g(x)\ \forall x \in [0,1]$

$\therefore$ g , f دالتين غير متقاطعتين في الفترة $[0,1]$

2) فترات التكامل : $[0,1]$

3) المساحة :

$$A = \left|\int_0^1 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2 + 2 - \sqrt[3]{x})\, dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (x^2 + 2 - x^{\frac{1}{3}})\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1) - \frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}}\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0) - \frac{3}{4}(0)^{\frac{4}{3}}\right]\right|$$

$$= \frac{19}{12}$$ وحدة مربعة

باستخدام الآلة الحاسبة:
$A = \int_0^1 |x^2 + 2 - (\sqrt[3]{x})|\, dx = \frac{19}{12}$
ملحوظة: المطلق داخل التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

ملحوظة : مسائل الحجوم تكون علي فترة واحدة فقط

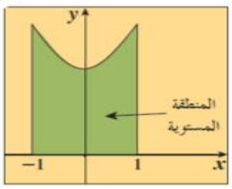
دالة واحدة f (x)

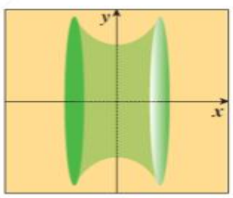
$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

مثال (1)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$.

الحل





شكل توضيحي

1) فترة التكامل : $[-1,1]$

2) الحجم :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^2+2)^2\, dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4+4x^2+4)\, dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + 4.\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-1}^{1}$$
$$= \pi \left(\left[\frac{1}{5}(1)^5 + 4.\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)\right] - \left[\frac{1}{5}(-1)^5 + 4.\frac{1}{3}(-1)^3 + 4(-1)\right]\right)$$

$= \frac{166}{15}\pi$ وحدة مكعبة

باستخدام الالة الحاسبة:
$A = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+2)^2\, dx = \frac{166}{15}\pi$
ملحوظة: مربع الدالة داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

حاول أن تحل

1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$.

الحل

1) فترة التكامل : $[1,5]$

2) الحجم :

$$V = \pi \int_1^5 (f(x))^2\, dx$$
$$= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2\, dx$$
$$= \pi \int_1^5 (x-1)\, dx$$
$$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^5$$
$$= \pi \left(\left[\frac{1}{2}(5)^2 - 5\right] - \left[\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right]\right)$$

$= 8\pi$ وحدة مكعبة

باستخدام الالة الحاسبة:
$A = \pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{x-1})^2\, dx = 8\pi$
ملحوظة: مربع الدالة داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

ملحوظة : مسائل الحجوم تكون علي فترة واحدة فقط

دالتين f(x), g(x)

$$V = \pi\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

$f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين

$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$: g

الحـل

1) الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$f(x) = g(x)$

$x^2 = \sqrt{x}$ بتربيع الطرفين $x^4 = x$

$x^4 - x = 0$ $\Rightarrow$ $x(x^3 - 1) = 0$ mod54

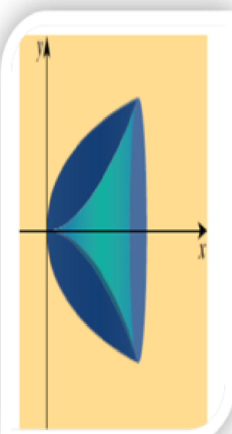
إما $x = 0$ أو $x = 1$

2) فترة التكامل : $[0, 1]$

3) القيمة الاختيارية: نأخذ قيمة اختيارية $x = 0.5 \in (0,1)$

$g(0.5) = \sqrt{0.5} \approx 0.71$ $\quad$ $f(0.5) = 0.5^2 = 0.25$

$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$



4) الحجم :

$$V = \pi\int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx = \pi\int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2]\ dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x - x^4)\ dx = \pi\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\left[\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{5}(1)^5\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{5}(0)^5\right]\right)$$

$$= \frac{3}{10}\pi$$ وحدة مكعبة

باستخدام الآلة الحاسبة:

$A = \pi\int_0^1 \left|(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right| dx = \frac{3}{10}\pi$

ملحوظة: القيمة المطلقة للفرق بين مربع كلا من الدالتين داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

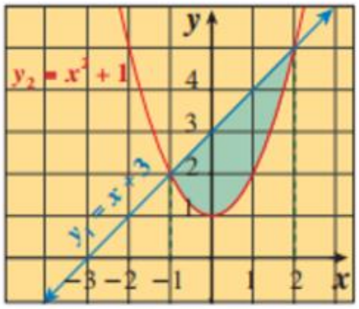
تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

نتعلم من الفشل اكتر من النجاح

حاول أن تحل

4 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3 \ , \ y_2 = x^2 + 1$

الحل



1) الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

بوضع :

$$y_1 = y_2$$

$$x + 3 = x^2 + 1 \Longrightarrow x^2 + 1 - x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{mod53}}$$ إما $x = -1$ أو $x = 2$

2) فترة التكامل : $[-1,2]$

3) القيمة الاختيارية: نأخذ قيمة اختيارية $x = 0 \in (-1,2)$

$$y_2(0) = 0 + 1 = 1 \qquad y_1(0) = 0 + 3 = 3$$

$$y_1 \geq y_2 \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

4) الحجم :

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(y_1)^2 - (y_2)^2] dx = \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2] \ dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} [x^2 + 6x + 9 - (x^4 + 2x^2 + 1)] dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 6.\frac{1}{2}x^2 + 9x - \frac{1}{5}x^5 - 2.\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(\left[\frac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 + 9(2) - \frac{1}{5}(2)^5 - 2.\frac{1}{3}(2)^3 - (2)\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + 3(-1)^2 + 9(-1) - \frac{1}{5}(-1)^5 - 2.\frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)\right]\right)$$

$$= \frac{117}{5}\pi$$ وحدة مكعبة

باستخدام الالة الحاسبة:

$$A = \pi \int_{-1}^{2} \left|(x+3)^2 - (x^2+1)^2\right| dx = \frac{117}{5}\pi$$

ملحوظة: القيمة المطلقة للفرق بين مربع كلا من الدالتين داخل التكامل و π خارج التكامل وحدود التكامل هي بداية ونهاية الفترة المعطاة او المستنتجة

تستخدم هذه الطريقة لحل الاسئلة الموضوعية

رايك في نفسك اهم من راي الاخريين فيك

M.ATA

(3 – 6) معادلة منحنى دالة

مثال (3)

$f'(x)$

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x , y)$ يساوي $3x^2 - 4x + 1$ ويمر بالنقطة $A(1 , 2)$

المطلوب

الحالة الاولى

الحـل

ميل المنحني :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$f(x) = 3.\frac{1}{3}x^3 - 4.\frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$$

الدالة تمر بالنقطة $A(1 , 2)$

$$f(1) = 2$$

$$(1)^3 - 2(1)^2 + 1 + C = 2$$

Shift solve

$$\boxed{C = 2}$$

معادلة المنحنى هي :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

M.ATA

مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) يساوي $\sqrt{5-4x}$
فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5, 3)$

المطلوب

الحـل

الحالة الثانية

ميل العمودي : $\sqrt{5-4x}$

ميل المماس : $\acute{f}(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{5-4x}}$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}dx = \int \frac{-1}{(5-4x)^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$f(x) = \int -(5-4x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$f(x) = -1 \times \frac{1}{-4} \times \frac{2}{1}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

الدالة تمر بالنقطة $A(-5, 3)$

$$f(-5) = 3$$

$$\frac{1}{2}(5-4(-5))^{\frac{1}{2}} + C = 3$$

Shift solve

$$\boxed{C = \frac{1}{2}}$$

معادلة المنحنى هي : $f(x) = \dfrac{1}{2}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}$

حاول أن تحل

5 إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x-1$
فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $B(1, 0)$

المطلوب

الحـل

الحالة الثانية

ميل العمودي : $\dfrac{-1}{f'(x)} = 2x-1$

ميل المماس : $\acute{f}(x) = \dfrac{-1}{2x-1}$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x-1}dx$$

$$f(x) = -1 \times \frac{1}{2} \times \ln|2x-1| + C$$

$$f(x) = -0.5\ln|2x-1| + C$$

الدالة تمر بالنقطة $B(1, 0)$

$$f(1) = 0$$

$$-0.5\ln|2(1)-1| + C = 0$$

Shift solve

$$\boxed{C = 0}$$

معادلة المنحنى هي : $f(x) = -0.5\ln|2x-1|$

(4 – 6) المعادلات التفاضلية

مثال (3)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$ ، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

الحالة الاولى

الحل

$$y' = 3x^2 - 1$$

الحل (تكامل مرة)

$$y = \int (3x^2 - 1)\, dx$$

$$y = 3.\frac{1}{3}x^3 - x + C$$

$$y = x^3 - x + C$$

$y = 2$ عند $x = 1$

SHIFT SOLVE

$$2 = (1)^3 - (1) + C$$

$$C = 2$$

حل المعادلة هو :

$$y = x^3 - x + 2$$

حاول أن تحل

7 حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

الحالة الاولى

الحل

$$y'' = -3x^2 + 6x$$

الحل (تكامل مرتين)

$$y' = \int (-3x^2 + 6x)\, dx$$

$$y' = -3.\frac{1}{3}x^3 + 6.\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y' = -x^3 + 3x^2 + C_1$$

$$y = \int (-x^3 + 3x^2 + C_1)\, dx$$

حل المعادلة هو :

$$y = \frac{-1}{4}x^4 + 3.\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$$

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

M.ATA

حاول أن تحل

6 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

الحالة الثانية

الحل

$$3y' - 2y = 4$$

$$3y' = 2y + 4$$ بالقسمة علي 3

$$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$$ بطرف y'

$$a = \frac{2}{3} \quad , b = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \div \frac{2}{3} = 2$$

$$y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$y = k\,e^{\frac{2}{3}x} - 2$$

$y = 3$ عند $x = 0$

$$3 = k\,e^{\frac{2}{3}(0)} - 2 \Rightarrow 3 + 2 = k\,e^{0} \Rightarrow k = 5$$

حل المعادلة هو :

$$y = 5\,e^{\frac{2}{3}x} - 2$$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

مثال (5) أوجد حلًا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

الحالة الثانية

الحل

$$y' = 4y$$ بطرف y'

$$a = 4 \quad , b = 0$$

$$y = k\,e^{ax}$$

$$y = k\,e^{4x}$$

$y = 2$ عند $x = 0$

$$2 = k\,e^{4(0)} \Rightarrow 2 = k$$

حل المعادلة هو :

$$y = 2\,e^{4x}$$

M.ATA

مثال (4)

حل المعادلة التفاضلية: a $y' - 2xy = 0$

الحالة الثالثة

الحل

بطرف y'

$$y' = 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

باخذ التكامل للطرفين

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

$$|y| = e^{x^2+c}$$

$$|y| = e^{x^2} . e^{c}$$

نضع $k = \pm e^c$

$$y = \pm e^{c} . e^{x^2}$$

حل المعادلة هو :

$$y = k\,e^{x^2}$$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

الحالة الثالثة

الحل

بطرف y'

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

باخذ التكامل للطرفين

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + c$$

$$|y| = e^{2\ln|x|+c}$$

$$|y| = e^{2\ln|x|} . e^{c}$$

نضع $k = \pm e^c$

$$y = \pm e^{c} . e^{2\ln|x|}$$

حل المعادلة هو :

$$y = k\,e^{2\ln|x|}$$

M.ATA

(1 - 7) القطع المكافئ

النوع الثاني
المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (1)

a أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(4,0)$

رأس وبؤرة

الحل

الرأس: $(0,0)$

البؤرة: $F(4,0) \in x\_axis$

$P = 4$

محور التماثل : محور السينات (x_axis)

المعادلة على الصورة : $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ : $y^2 = 4(4)x$

$y^2 = 16x$

حاول أن تحل

5 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$

رأس ودليل

الحل

الرأس: $(0,0)$

معادلة الدليل : $y = 1$

$P = -1$

محور التماثل : محور الصادات (y_axis)

المعادلة على الصورة : $x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ : $x^2 = 4(-1)y$

$x^2 = -4y$

النوع الثاني
المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (1)

b أوجد معادلة القطع المكافئ الذي: بؤرته $F(0,-3)$ ودليله المستقيم: $y = 3$

بؤرة ودليل

الحل

البؤرة: $F(0,-3) \in y\_axis$

معادلة الدليل : $y = 3$

$P = -3$

محور التماثل : محور الصادات (y_axis)

المعادلة على الصورة : $x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ : $x^2 = 4(-3)y$

$x^2 = -12y$

M.ATA

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (3)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1,2)$ وخط تماثله $x - axis$.

الحل

نقطة ومحور تماثل

الرأس: $(0,0)$

محور التماثل : محور السينات (x_axis)

المعادلة على الصورة : $y^2 = 4px$

بالتعويض عن $(\overset{x}{1},\overset{y}{2})$

$(2)^2 = 4p(1)$ Shift solve

$P = 1$

معادلة القطع المكافئ : $y^2 = 4(1)\,x$

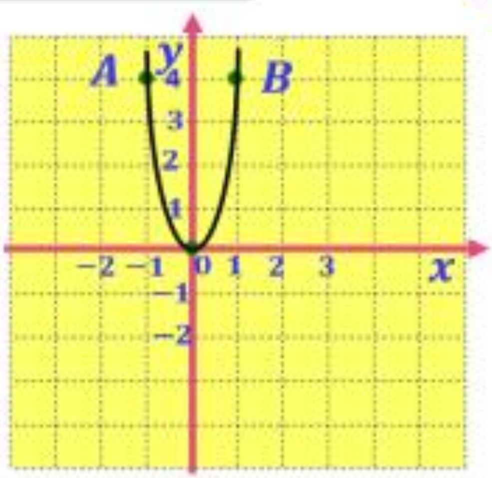
$y^2 = 4x$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $B(1,4)$ ، $A(-1,4)$

الحل

نقطتين



الرأس: $(0,0)$

القطع يمر بالنقطتين : $(-1,4), (1,4)$

من الشكل

محور التماثل : محور الصادات (y_axis)

المعادلة على الصورة : $x^2 = 4py$

بالتعويض عن $(\overset{x}{1},\overset{y}{4})$

$(1)^2 = 4p(4)$ Shift solve

$P = \frac{1}{16}$

معادلة القطع المكافئ : $x^2 = 4(\frac{1}{16})\,y$

$x^2 = \frac{1}{4}y$

M.ATA

النوع الاول

المعطيات : المعادلة
المطلوب : بعض العناصر

مثال (2)

أوجد البؤرة ومعادلة الدليل لقطع مكافئ ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $x^2 = -2y$

الحـل

معادلة القطع المكافئ : $x^2 = -2y$

المعادلة علي الصورة : $x^2 = 4py$

$4p = -2$

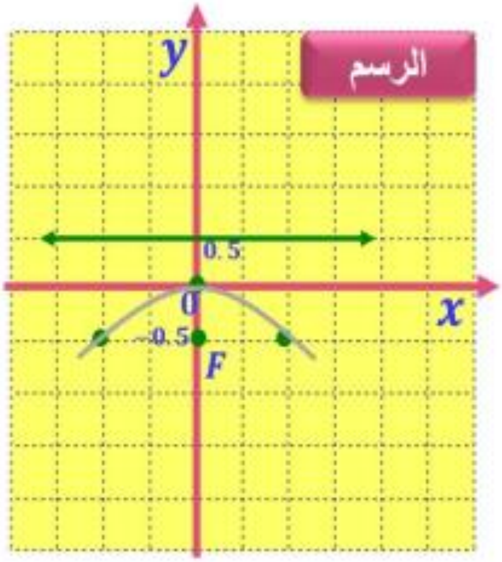
$p = \frac{-1}{2}$

محور التماثل : محور الصادات (y_axis)

البؤرة: $F(0, p) \rightarrow F\left(0, \frac{-1}{2}\right)$

معادلة الدليل: $y = -p \rightarrow y = \frac{1}{2}$

الرسم



P سالبة | معادلة القطع المكافئ سالبة | البؤرة سالبة

الفتحة لاسفل | معادلة الدليل موجبة

b المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$

الحـل

بالضرب في 3 مع التعديل للحصول علي

معادلة القطع المكافئ : $y^2 = 3x$

المعادلة علي الصورة : $y^2 = 4px$

$4p = 3$

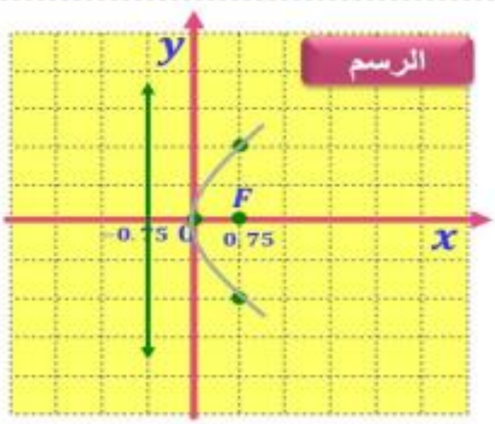
$p = \frac{3}{4}$

محور التماثل : محور السينات (x_axis)

البؤرة: $F(p, 0) \rightarrow F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = -p \rightarrow x = -\frac{3}{4}$

الرسم



P موجبة | معادلة القطع المكافئ موجبة | البؤرة موجبة

الفتحة لليمين | معادلة الدليل سالبة

النجاح ملك من يدفع ثمنه

(2 – 7) القطع الناقص

النوع الاول

المعطيات : المعادلة
المطلوب : بعض العناصر

مثال (1)

إذا كانت: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين والمسافة بين البؤرتين

e الاختلاف المركزي ثم ارسم شكلاً تقريبيًا للقطع.

الحل

$a > b$
$a > c$
a^2 مع المحور الأكبر

$16 > 10$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$

$b^2 = 10 \Rightarrow b = \sqrt{10}$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 16 - 10 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$

المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

البؤرتين: $F_1(\overset{c}{\sqrt{6}}, 0), F_2(\overset{-c}{-\sqrt{6}}, 0) \in x\_axis$

الرأسيين : $A_1(\overset{a}{4}, 0), A_2(\overset{-a}{-4}, 0) \in x\_axis$

طرفي المحور الأصغر: $B_1(0, \overset{b}{\sqrt{10}}), B_2(0, \overset{-b}{-\sqrt{10}}) \in y\_axis$

طول المحور الأكبر: $2a = 2 \times 4 = 8$

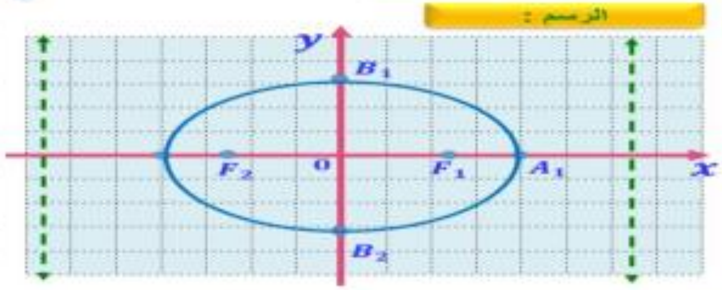
طول المحور الأصغر: $2b = 2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

البعد بين البؤرتين : $2c = 2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

معادلتي الدليلين : $x = \pm\frac{a^2}{c} \Rightarrow x = \pm\frac{16}{\sqrt{6}} = \pm\frac{8\sqrt{6}}{3}$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

الرسم :



لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

M.ATA

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_2(0,3)$, $F_1(0,-3)$ وطول محوره الأصغر 4، ثم ارسم شكلا تقريبيًا لهذا القطع.

الحل

البؤرتين: $F_1\,(0,3)\,,F_2\,(0,-3) \in y\_axis$

$c = 3$

طول المحور الأصغر: $2b = 4 \longrightarrow b = 2$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$9 = a^2 - 4 \longrightarrow a^2 = 13$

$a = \sqrt{13}$

المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

المعادلة على الصورة: $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

معادلة القطع الناقص: $\dfrac{y^2}{13} + \dfrac{x^2}{4} = 1$

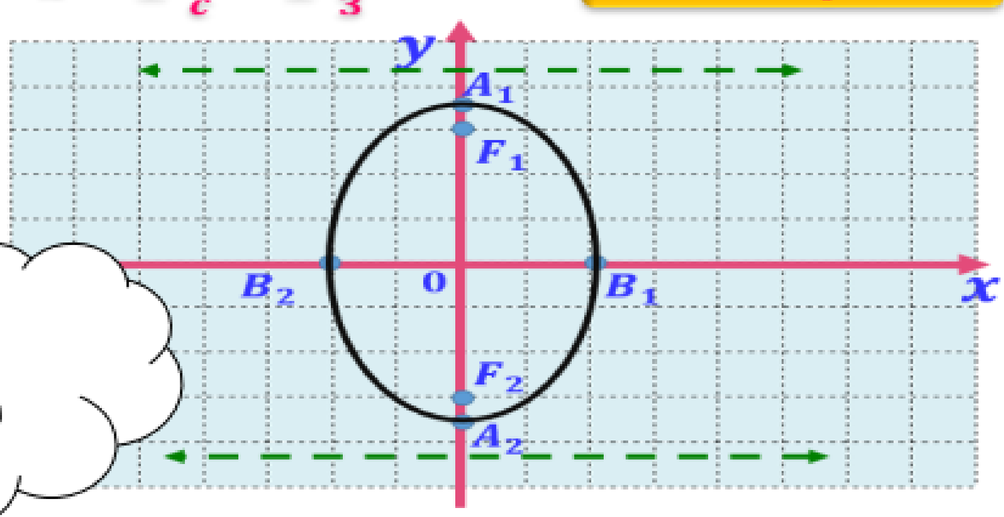
الرسم

البؤرتين: $F_1\,(0,3)\,,F_2\,(0,-3) \in y\_axis$

الرأسيين: $A_1\,(0,\sqrt{13})\,,A_2\,(0,-\sqrt{13}) \in y\_axis$

طرفي المحور الأصغر: $B_1\,(2,0)\,,B_2\,(-2,0) \in x\_axis$

معادلتي الدليلين: $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{13}{3}$



قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (4)

أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني وطوله 12 cm والمسافة بين البؤرتين 8 cm.

الحل

طول المحور الأكبر: $2a = 12 \Rightarrow a = 6$

المسافة بين البؤرتين: $2c = 8 \Rightarrow c = 4$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$16 = 36 - b^2 \Rightarrow b^2 = 20$$

$$b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

معادلة القطع الناقص : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm.

الحل

طول المحور الأكبر: $2a = 16 \Rightarrow a = 8$

المسافة بين البؤرتين: $2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$25 = 64 - b^2 \Rightarrow b^2 = 39$$

$$b = \sqrt{39}$$

المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

المعادلة علي الصورة: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

معادلة القطع الناقص : $\frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{39} = 1$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

M.ATA

القطع الزائد (3 – 7)

النوع الاول

المعطيات : المعادلة
المطلوب : بعض العناصر

مثال (1)

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد، أوجد:

- **a** رأسي القطع الزائد.
- **b** البؤرتين.
- **c** معادلتي دليلي القطع.
- **d** طول كل من المحورين. والمسافة بين البؤرتين
- **e** معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًا للقطع.
- **e** الاختلاف المركزي ثم ارسم شكلًا تخطيطيًا للقطع.

a^2 مع المحور القاطع(الأول)
b^2 مع المحور المرافق(الثاني)

الحل

بالقسمة على 144

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} \longrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \longrightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \longrightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9 = 25 \longrightarrow c = 5$$

المحور القاطع ينطبق على محور السينات

البؤرتين: $F_1(\overset{c}{5}, 0)\ ,\ F_2(\overset{-c}{-5}, 0) \in x\_axis$

الرأسيين : $A_1(\overset{a}{4}, 0)\ ,\ A_2(\overset{-a}{-4}, 0) \in x\_axis$

طرفي المحور المرافق: $B_1(0, \overset{b}{3})\ ,\ B_2(0, \overset{-b}{-3}) \in y\_axis$

طول المحور القاطع: $2a = 2 \times 4 = 8$

طول المحور المرافق : $2b = 2 \times 3 = 6$

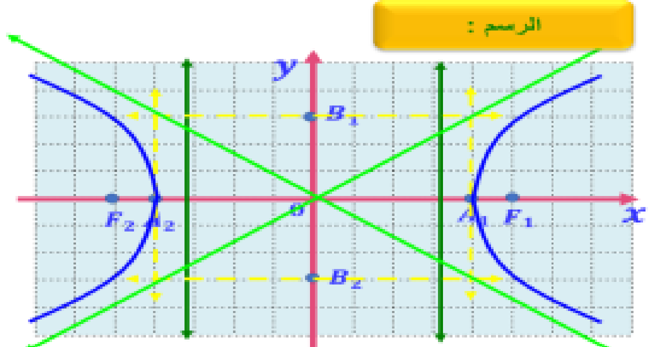
البعد بين البؤرتين : $2c = 2 \times 5 = 10$

معادلتي الدليلين : $x = \pm\frac{a^2}{c} \longrightarrow x = \pm\frac{16}{5}$

معادلتي الخطين المقاربين: $y = \pm\frac{b}{a}x \longrightarrow y = \pm\frac{3}{4}x$

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

الرسم :



رايك في نفسك اهم من راي الاخريين فيك

M.ATA

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(0,3)$ ، $F_1(0,-3)$ ورأساه $A_2(0,2)$ ، $A_1(0,-2)$
ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين وارسم شكلاً تقريبيًا للقطع.

الحل

البؤرتين:
$F_1(0,3), F_2(0,-3) \in y\_axis$
$c = 3$

الرأسيين :
$A_1(0,2), A_2(0,-2) \in y\_axis$
$a = 2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$9 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 5$$
$$b = \sqrt{5}$$

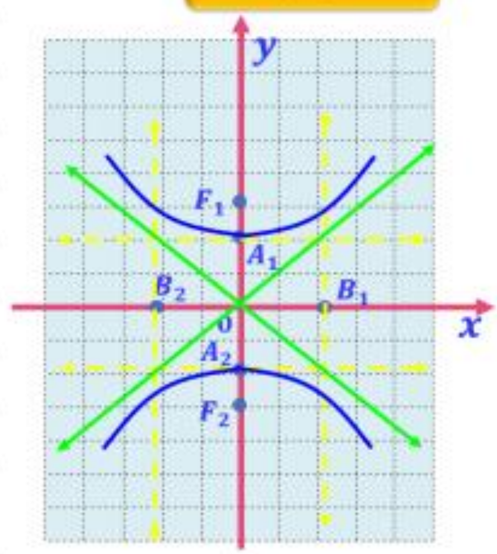
المحور القاطع ينطبق على محور الصادات

المعادلة على الصورة:
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

معادلة القطع الزائد:
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

معادلتي الخطين المقاربين:
$$y = \pm\frac{a}{b}x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$$

الرسم :



قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

M.ATA

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (3)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y=\frac{3}{5}x$

الحل

احد البؤرتين: $F(0,\sqrt{34}) \in y\_axis$

$c=\sqrt{34}$

المحور القاطع ينطبق على محور الصادات

معادلتي الخطين المقاربين:

$y=\pm\frac{a}{b}x \longrightarrow y=\pm\frac{3}{5}x$

$\frac{a}{b}=\frac{3}{5} \longrightarrow a=\frac{3}{5}b$ (1)

$c^2=a^2+b^2$

$(\sqrt{34})^2=(\frac{3}{5}b)^2+b^2 \longrightarrow 34=\frac{9}{25}b^2+b^2$

$34=\frac{34}{25}b^2 \longrightarrow b^2=25 \longrightarrow b=5$

باستخدام الحاسبة بطريقة
Shift solve
نعوض عن b^2 ب x
ويكون الناتج هو b^2

بالتعويض في 1

$a=\frac{3}{5}\times 5=3$

المعادلة علي الصورة: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

معادلة القطع الزائد : $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41},0)$ ومعادلة أحد خطية المقاربين $y=\frac{4}{5}x$

الحل

احد البؤرتين: $F(\sqrt{41},0) \in x\_axis$

$c=\sqrt{41}$

المحور القاطع ينطبق على محور السينات

معادلتي الخطين المقاربين:

$y=\pm\frac{b}{a}x \longrightarrow y=\pm\frac{4}{5}x$

$\frac{b}{a}=\frac{4}{5} \longrightarrow b=\frac{4}{5}a$ (1)

$c^2=a^2+b^2$

$(\sqrt{41})^2=a^2+(\frac{4}{5}a)^2 \longrightarrow 41=a^2+\frac{16}{25}a^2$

$41=\frac{41}{25}a^2 \longrightarrow a^2=25 \longrightarrow a=5$

باستخدام الحاسبة بطريقة
Shift solve
نعوض عن a^2 ب x
ويكون الناتج هو a^2

بالتعويض في 1

$b=\frac{4}{5}\times 5=4$

المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

معادلة القطع الزائد : $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

(4 - 7) الاختلاف المركزى

a إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا**

b إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا**

c إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا**

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (1)

a حدد نوع القطع الذي اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته: $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ثم أوجد معادلته.

الحل

$e = 1$

اذا القطع هو قطع مكافئ

البؤرة: $F\left(\frac{1}{2}, 0\right) \in x\_axis$

$P = \frac{1}{2}$

محور التماثل : محور السينات (x_axis)

المعادلة على الصورة : $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ : $y^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)x$

$y^2 = 2x$

حاول أن تحل

a حدد نوع القطع الذي اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته $F(-1,0)$ ثم أوجد معادلته

الحل

$e = 1$

اذا القطع هو قطع مكافئ

البؤرة: $F(-1, 0) \in x\_axis$

$P = -1$

محور التماثل : محور السينات (x_axis)

المعادلة على الصورة : $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ : $y^2 = 4(-1)x$

$y^2 = -4x$

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

M.ATA

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (1)

b حدد نوع القطع الذي اختلافه المركزي $\left(e=\frac{1}{2}\right)$ وإحدى بؤرتيه: $F(2,0)$ ثم أوجد معادلته.

الحل

القطع الناقص
$a > b, a > c$
a^2 مع المحور الأكبر
b^2 مع المحور الأصغر
المعادلة +
العلاقة الأساسية −

$e=\frac{1}{2}<1$

اذا القطع هو قطع ناقص

إحدى البؤرتين: $F(2,0) \in x\_axis$

$c=2$

الاختلاف المركزي : $e=\frac{c}{a} \rightarrow e=\frac{1}{2}$

$\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{2} \rightarrow a=4$

$c^2=a^2-b^2$

$4=16-b^2 \rightarrow b^2=12 \rightarrow b=2\sqrt{3}$

المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

معادلة القطع الناقص : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

لايوجد مستحيل

M.ATA

النوع الثاني

المعطيات : بعض العناصر
المطلوب : المعادلة

مثال (1)

c) حدد نوع القطع الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x = 1$ ثم أوجد معادلته.

الحل

$e = 2 > 1$

اذا القطع هو قطع زائد

الاختلاف المركزي : $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = 2$

$\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow c = 2a$ (1)

معادلتي الدليلين : $x = \pm\frac{a^2}{c} \Rightarrow x = \pm 1$

$\frac{a^2}{c} = 1 \Rightarrow a^2 = c$

$a^2 = 2a \Rightarrow a = 2$

بالتعويض في 1

$c = 2(2) = 4$

$c^2 = a^2 + b^2$

$16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

المحور القاطع ينطبق على محور السينات

المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

معادلة القطع الزائد : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

القطع الزائد
$c > a, c > b$
a^2 و المحور القاطع (الأول)
b^2 و المحور المرافق (الثاني)
المعادلة –
العلاقة الأساسية +

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

M.ATA