أ/ أحمد نصار

١٢ع الفصل الدراسي الأول

مثال (2) صـ 17:

بفرض أن: $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$ ، $\lim_{x \to 1} f(x) = -2$

أوجد:

$(a)\ \lim_{x \to 1} (f(x) - g(x))$

$= \lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} g(x)$

$= -2 - 5$

$= -7$

$(b)\ \lim_{x \to 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x \to 1} 2f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x)}$

$= \frac{2 \lim_{x \to 1} f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x)}$

$= \frac{2(-2)}{5} = \frac{-4}{5} = -0.8$

$(c)\ \lim_{x \to 1} \frac{g(x) + 4}{f(x).g(x)}$

نهاية المقام $\neq 0$

$= \frac{\lim_{x \to 1} (g(x) + 4)}{\lim_{x \to 1} (f(x) \cdot g(x))}$

$= \frac{\lim_{x \to 1} g(x) + \lim_{x \to 1} 4}{\lim_{x \to 1} f(x) \cdot \lim_{x \to 1} g(x)}$

$= \frac{5 + 4}{-2 \cdot 5} = -\frac{9}{10}$

$= -0.9$

حاول أن تحل (2) صـ 17: بفرض أن $\lim_{x \to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$

$(a)\ \lim_{x \to 2} (f(x) + g(x))$

$= \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$

$= 7 + (-3)$

$= 4$

$(b)\ \lim_{x \to 2} (f(x).g(x))$

$= \lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x)$

$= 7 \cdot (-3)$

$= -21$

$(c)\ \lim_{x \to 2} \left(\frac{8f(x).g(x)}{f(x) + g(x)} \right)$

نهاية المقام:

$\lim_{x \to 2} (f(x) + g(x))$

$= \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$

$= 7 + (-3)$

$= 4$ ، $4 \neq 0$

$\frac{\lim_{x \to 2} 8(f(x)) \cdot \lim_{x \to 2} g(x)}{\lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)}$

$= \frac{8 \lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x)}{\lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)}$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot (-3)}{4}$

$= \frac{-168}{4} = -42$

الإجابات:

Hala Labeeb

H.L.

2021 - 2022

الصف الثاني عشر علمي

H.L.

مثال (3) صـ 18

فك الأقواس أولاً

أوجد : $(c)\ \lim_{x \to 3} (x^2(2-x))$

$\lim_{x \to 3} (2x^2 - x^3)$

$= 2(3)^2 - 3^3$

$= 2 \cdot 9 - 27$

$= 18 - 27$

$= -9$

$(a)\ \lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

$= (-1)^4 - 2(-1)^3 + 5$

$= 1 + 2 + 5$

$= 8$

$(b)\ \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

نظرية ٥

التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$g(x) = x + 2$

$g(2) = 2 + 2$

$= 4 \quad , \quad 4 \neq 0$

$\therefore \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

$= \dfrac{2^2 + 2(2) + 4}{2 + 2}$

$= \dfrac{4 + 4 + 4}{4}$

$= \dfrac{12}{4} = 3$

حاول أن تحل (3) صـ 18

(a) هل يمكن حل c في المثال (3) بطريقة أخرى ؟

(b) أوجد $(b)\ \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

$(1)\ \lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 17)$

$= 1^3 + 3(1)^2 - 17$

$= 1 + 3 - 17$

$= -13$

نظرية (٥)

التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$g(x) = x + 2$

$g(2) = 2 + 2$

$= 4 \quad , \quad 4 \neq 0$

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

$= \dfrac{2^2 + 5(2) + 6}{2 + 2}$

$= \dfrac{4 + 10 + 6}{4}$

$= \dfrac{20}{4}$

$= 5$

H.L.

مثال (4) صـ 19 : إذا كانت الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x<1 \\ 5 & x=1 \\ \frac{5}{x} & x>1 \end{cases}$$

جهة اليسار

جهة اليمين

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x+2)$$

$$= 3(1)+2 = \boxed{5}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{5}{x}$$

$$= \frac{5}{1} = \boxed{5}$$

$$\Rightarrow \because \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 5$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

حاول أن تحل (4) صـ 19 : إذا كانت الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3 & : x<2 \\ x-1 & : x>2 \end{cases}$$

جهة اليسار

جهة اليمين

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2-3)$$

$$= 2^2-3$$

$$= \boxed{1}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-1)$$

$$= 2-1$$

$$= \boxed{1}$$

$$\because \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

H.L.

مثال (7) صـ 21 : أوجد

(a) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

$= \left(\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x - 1)\right)^5$

$= \left((-1)^2 - 3(-1) - 1\right)^5$

$= (1 + 3 - 1)^5$

$= 3^5$

$= 243$

(b) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x - 3}$

$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 2} (x - 3)}$

$= \sqrt[3]{2 - 3}$

$= \sqrt[3]{-1}$

$= -1$

(c) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

حاول أن تحل (7) صـ 22 : أوجد

(a) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5}$

$\lim_{x \to 5} (x^2 - 5)$

$= 5^2 - 5 = 20$, $20 > 0$

$\therefore \lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5}$

$= \sqrt{\lim_{x \to 5} (x^2 - 5)}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(b) $\lim_{x \to 4} \left(x + \sqrt{x}\right)^4$

$\lim_{x \to 4} x = 4$, $4 > 0$

$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to 4} x}$

$= \sqrt{4} = 2$

$\therefore \lim_{x \to 4} (x + \sqrt{x})^4$

$= \left[\lim_{x \to 4} x + \lim_{x \to 4} \sqrt{x}\right]^4$

$= [4 + 2]^4 = 6^4 = 1296$

(c) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

$\lim_{x \to -1} (x - 2)$

$= -1 - 2 = -3$, $-3 \neq 0$

$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

$= \frac{\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{\lim_{x \to -1} (x - 2)}$

$= \frac{\sqrt[3]{\lim (x^3 - 4x + 5)}}{\lim_{x \to -1} (x - 2)}$

$= \frac{\sqrt[3]{(-1)^3 - 4(-1) + 5}}{-3} = \frac{-2}{3}$

c) التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x \to 3} (x - 2)$

$= 3 - 2$

$= \boxed{1}$, $1 \neq 0$

التحقق من أن نهاية ما تحت الجذر > 0

$\lim_{x \to 3} (3x^2 - 2)$

$= 3(3)^2 - 2$

$= 3 \cdot 9 - 2$

$= 27 - 2 = \boxed{25}$, $25 > 0$

$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

$= \frac{\lim_{x \to 3} \sqrt{3x^2 - 2}}{\lim_{x \to 3} x - 2}$

$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to 3} (3x^2 - 2)}}{\lim_{x \to 3} (x - 2)}$

$= \frac{\sqrt{25}}{1} = \frac{5}{1} = 5$

H.L.

مثال (8) صـ 22 : أوجد إن أمكن :

$$(a)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في البسط والمقام، نحصل على صيغة غير معينة.

حدودية ثلاثية

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}$$

عامل مشترك

$$= \frac{x+2}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x \to 1} x = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1}$$

$$= \frac{3}{1} = 3$$

$$(b)\ \lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ صفر في البسط والمقام، نحصل على صيغة غير معينة.

تحليل فرق بين مكعبين

$$\frac{(2+x)^3 - 8}{x}$$

الأول - الثاني مربع الأول مربع الثاني الأول × الثاني

$$= \frac{(2+x-2)(2+x)^2 + 2(2+x) + 2^2}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x}^{1}(4 + 4x + x^2 + 4 + 2x + 4)}{\cancel{x}_{1}}$$

$$= x^2 + 6x + 12$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x} = \lim_{x \to 0} (x^2 + 6x + 12)$$

$$= 0^2 + 6(0) + 12$$

$$= 12$$

H.L.

مثال (9) صـ 24 : أوجد إن أمكن :

(a) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

عند التعويض المباشر عن X بـ 2 في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة .

بضرب البسط والمقام في مرافق البسط :

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} \times \frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

عامل مشترك

$$= \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} \quad , x \neq 2$$

$$\lim_{x \to 2} 2x-3 = 2(2)-3 = 4-3 = 1 \quad , 1 > 0$$

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{2x-3}+1 = \lim_{x \to 2} \sqrt{2x-3} + \lim_{x \to 2} 1$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 2}(2x-3)} + \lim_{x \to 2} 1$$

$$= 1+1 = 2 \quad , \quad 2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن X بـ 1 في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة .

تحليل نرمه سيد كلعينه

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} =$$

$$\frac{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})}$$

$$= \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1 \quad , x \neq 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$= \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \to 1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x} + 1$$

$$= \sqrt[3]{1^2} + \sqrt{1} + 1$$

$$= \sqrt[3]{1} + 1 + 1$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3$$

التاريخ الهجري : التاريخ الميلادي :

مثال (10) صـ 25 : أوجد :

$$(a)\ \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1}$$

$$(b)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

الإجابات في الصفحات التالية

حاول أن تحل (10) صـ 26 : أوجد إن أمكن :

$$(a)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

$$(b)\ \lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$$

H.L.

a) عند التعويض عن X بـ 1- في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية لقسمة البسط على المقام :-

-1	1	6	2	-3
		-1	-5	3
	1	5	-3	0

$$\therefore \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1} = x^2+5x-3 \quad , \quad x \neq -1$$

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x^2+5x-3)$$

$$= (-1)^2 + 5(-1) - 3$$

$$= 1 - 5 - 3$$

$$= -7$$

H.L.

b)

عند التعويض المباشر عن X بـ 2- في البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة .

باستخدام القسمة التركيبية لقسمة البسط على المقام :

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	
-2	1	0	0	0	0	32
		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0

$$\therefore \frac{x^5+32}{x+2} = x^4-2x^3+4x^2-8x+16 \quad , x \neq -2$$

$$\therefore \lim_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

$$= (-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2-8(-2)+16$$

$$= 16+16+16+16+16$$

$$= 80$$

H.L.

a) عند التعويض المباشر عن X بـ 3 ، نحصل على صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية لقسمة البسط على المقام :

3	1	-2	-4	3
		3	3	-3
	1	1	-1	0

$$\therefore \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3} = x^2+x-1 \quad , x \neq 3$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x^2+x-1)$$

$$= 3^2+3-1$$

$$= 9+3-1$$

$$= 11$$

H.L.

b) عند التعويض المباشر عن x بـ 2 نحصل على صيغة غير معينة

باستخدام القسمة التركيبية لقسمة البسط على المقام :

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	
2	-1	0	1	0	1	22
		-2	-4	-6	-12	-22
	-1	-2	-3	-6	-11	0

$$\therefore \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = -x^4-2x^3-3x^2-6x-11 \quad , x \neq 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = \lim_{x\to 2}(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)$$

$$= -(2)^4-2(2)^3-3(2)^2-6(2)-11$$

$$= -16-16-12-12-11$$

$$= -67$$

H.L.

مثال (2) صـ 32 :

أوجد إن أمكن $\lim_{x \to 2} \frac{1}{|X-2|}$

$$\frac{1}{|x-2|} = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & : x > 2 \\ \frac{-1}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{|x-2|} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \left(-1 \cdot \frac{1}{x-2}\right)$$

$$\because \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\therefore \lim_{x \to 2^-} \left(-1 \cdot \frac{1}{x-2}\right) = \infty \quad (2)$$

من (1) ، (2)

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$$

حاول أن تحل (2) صـ 32 •

أوجد إن أمكن $\lim_{x \to -1} \frac{3}{|X+1|}$

$$\frac{3}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & : x > -1 \\ \frac{-3}{x+1} & : x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{3}{|x+1|} = \lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1} = \infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3}{|x+1|} = \lim_{x \to -1^-} \frac{-3}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \left(-3 \cdot \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\because \lim_{x \to -1^-} = \frac{3}{x+1} = -\infty$$

$$\therefore \lim_{x \to -1^-} \left(-3 \cdot \frac{1}{x+1}\right) = \infty \quad (2)$$

من (1) ، (2)

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{3}{|x+1|} = \infty$$

مثال (2) صـ 39 : إستخدم النظرية السابقة في حساب كل من :

درجة البسط = درجة المقام
$n = m$

$$(a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^3 + 4}{2x^3 + 5}$$

$$= \frac{-3}{2}$$

درجة البسط < درجة المقام
$n < m$

$$(b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 - x}$$

$$= 0$$

درجة البسط = درجة المقام

$$(c)\ \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 1}{-2x^4 + 7}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

حاول أن تحل (2) صـ 39 إستخدم النظرية السابقة في حساب كل من :

درجة البسط = درجة المقام
$n = m$

$$(a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

درجة البسط < درجة المقام
$n < m$

$$(b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{4x^3 - 2x + 3}$$

$$= 0$$

(1) مثال (3) صـ 39 : إذا كانت $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين $a، b$

(2) حاول أن تحل (3) صـ 40 : أوجد قيمة كل من الثابتين $a، b$ إذا كانت $\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

H.L.

(1)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3 \quad , \quad 3 \neq 0$$

∴ درجة حدودية البسط لابد أن تساوي درجة الدودية في المقام

(من الدرجة الأولى)

$$ax^2 = 0$$

$$\therefore a = 0$$

صفر

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{bx+3}{2x+5}$$

$$= \frac{b}{2}$$

$$\therefore \frac{b}{2} = 3$$

$$\therefore b = 2 \times 3$$

$$= 6$$

H.L.:

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1 \quad , -1 \neq 0$

∴ درجة حدودية البسط تساوي درجة حدودية المقام

(من الدرجة الأولى)

$\therefore \; ax^2 = 0$

$a = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{\underbrace{ax^2}_{\text{صفر}}+bx-3} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{bx-3}$

$= \dfrac{1}{b}$

$\therefore \; \dfrac{1}{b} = -1$

$\therefore \; b = -1$

H.L.

حاول أن تحل (1) صـ 43 :

(a) هل يمكن حل (c) في المثال (1) بطريقة أخرى ؟

(b) أوجد النهاية :

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x(2x-1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{2x-1}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2x-1}$

$= 1 \cdot \dfrac{1}{2(0)-1}$

$= 1 \cdot \dfrac{1}{-1}$

$= -1$

نهاية إتمام

$\lim\limits_{x \to 0} (2x-1)$

$= 2(0)-1$

$= -1 \quad , -1 \neq 0$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x \cos x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{3x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right)$

نهاية إتمام :

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x$

$= 1 \quad , 1 \neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 2x}{3x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x}$

$= \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{1}$

$= \dfrac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{\cos x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{\cos x - 1} \cdot \dfrac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x \sin x}{\cos^2 x - 1} \cdot \cos x + \right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x \sin x}{-\sin^2 x} \cdot \cos x + \right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{-\sin x} \cdot \cos x + 1\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{\sin x} \left(\lim\limits_{x \to 0} \cos x + \lim\limits_{x \to 0} 1\right)$

$= -1 \, (1+1)$

$= -1 \cdot 2$

$= -2$

مثال (2) صـ 44 : أوجد (يفضل إعطائه بعد نتيجة 2 ، 3)

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

$\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 \quad , 1 \neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x}$

$= 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{5 \tan x}{4x} - \dfrac{3 \sin x}{4x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 \tan x}{4x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \sin x}{4x}$

$= \dfrac{5}{4} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} - \dfrac{3}{4} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

$= \dfrac{5}{4} \times 1 - \dfrac{3}{4} \times 1$

$= \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2 \tan x}$

b $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \tan x + x^2 \cos x}{5x}$

الإجابات ⇓

H.L.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\sin x}}{2} \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2}$

$= \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} 2} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{3 \tan x + x^2 \cos x}{5x}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{3 \tan x}{5x} + \frac{x^2 \cos x}{5x} \right)$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{3 \tan x}{5x} + \frac{x}{5} \cdot \cos x \right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} + \lim_{x \to 0} \frac{x}{5} \cdot \cos x$

$= \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{0}{5} \cdot 1$

$= \frac{3}{5}$

H.L.

مثال (3) صـ 44 :

أوجد: $(b)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x \tan x}{3x} - \frac{2\cancel{x} \cos x}{3\cancel{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3} \cos x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} \cos x$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \times 1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$(a)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{5x + \sin x}{x}$

$$\frac{5x + \sin x}{x} = \frac{5x}{x} + \frac{\sin x}{x}$$

$$= 5 + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{5x + \sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(5 + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} 5 + \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 5 + 1 = 6$$

حاول أن تحل (3) صـ 45 : أوجد :

$(b)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3x \cos 4x}{5x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5} \cos x \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{5x} + \lim_{x \to 0} \frac{3}{5} \cos x$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot 1$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$$

$$= 1$$

$(a)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x \sin x}{3x^2} - \frac{x^2}{3x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$