الوحدة الثانية

الإشتقاق

① أوجد ميل المماس للقطع المكافئ P.78

$y = (x-2)^2 + 2$

عند النقطة $A(1,3)$

ميل القاطع

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h-2)^2 + 2 - 3}{h}$$

$$= \frac{(h-1)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 - 2h + 1 - 1}{h} = \frac{h^2 - 2h}{h}$$

$$= \frac{h(h-2)}{h} = h - 2$$

نهاية ميل القاطع

$$\lim_{h \to 0} h - 2 = -2$$

∴ ميل المماس للقطع المكافئ عند A

$m = -2$

المشتقة

P.80 ① باستخدام التعريف اوجد مشتقة الدالة f

$f(x) = 3x^2$: $x = -2$ عند

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$ «اسروجبت»

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(-2+h)^2 - 3(-2)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(4 - 4h + h^2) - 12}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12 - 12h - 3h^2 - 12}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3\cancel{h}^{1}(4+h)}{\cancel{h}_{1}} = \lim_{h \to 0} -3(4+h)$$

$$= -3(4+0) = -12 \Rightarrow f'(-2) = -12$$

P.81 ② اوجد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$: $x = b$

باستخدام تعريف المشتقة البديل

$$f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{b}}{x - b}$$ «سروجبت»

$$= \lim_{x \to b} \frac{\frac{b - x}{x \cdot b}}{x - b} = \lim_{x \to b} \frac{\overset{-1}{\cancel{(b - x)}}}{x \cdot b \underset{1}{\cancel{(x - b)}}}$$

$$= \lim_{x \to b} \frac{-1}{x \cdot b} = \frac{-1}{b^2}$$

$$\therefore f'(b) = \frac{-1}{b^2}$$

$f(x)=|x-2|$ لتكن ③ P.82

ابحث قابلية الإشتقاق للدالة f عند $x=2$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$$f(x)=|x-2| = \begin{cases} x-2 & ; x>2 \\ 2-x & ; x\leq 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2+h-2-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2-(2+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-1) = -1$$

$\therefore f'_+(2) \neq f'_-(2)$

$\therefore$ $f'(2)$ ليست موجودة

أي أن الدالة f ليس لها مشتقة عند $x=2$

2 مكرر

④ بين أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x=-1$ P. 83

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & : x\le -1\\[2mm] \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2} & : x>-1\end{cases}$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$ «إن وجدت»

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{-1}\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}(-1-1)=-1$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{-1}\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{\frac{x+1}{x}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\therefore\quad f'_+(-1)=f'_-(-1)=-1$$

P. 84 ⑤ اوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة

$f(x) = x^2 + 2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{+2} - \cancel{x^2} \cancel{-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h$$

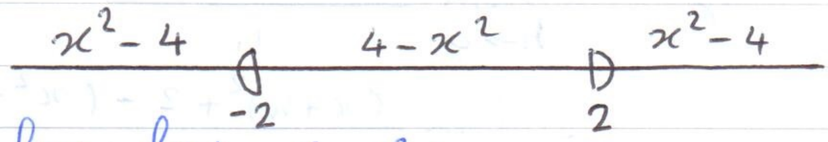
$$= 2x$$

$$\therefore f'(x) = 2x$$

* ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$

$x=-2$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : x\le -2 \;,\; x\ge 2 \\ 4-x^2 & : -2<x<2 \end{cases}$$



$$f'_{+}(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4-0}{x-2}$$ المطلوب

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2^+} x+2=4$$

$$f'_{-}(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{4-x^2-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=-4$$

$\therefore\ f'_{-}(2)\neq f'_{+}(2)\quad \therefore\ f'(2)$ غير موجوده

$$f'_{+}(-2)=\lim_{x\to -2^+}\frac{4-x^2-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{-\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=4$$

$$f'_{-}(-2)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=-4$$

$\therefore\ f'_{-}(-2)\neq f'_{+}(-2)$

$\therefore$ غير موجودة $f'(-2)$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام تعريف المشتقة للدالة *

$y = \frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{h(x+h)x} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}^{-1}}{\cancel{h}(x^2+xh)} = \frac{-1}{x^2}$$

---

⑥ ابحث قابلية الإشتقاق للدالة f عند $x=2$ P.86

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : \quad x \leq 2 \\ 3x - 2 & : \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2^2 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x-2) = 3(2) - 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 4) = 0$$

$$\because \lim_{x \to 2^+} \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f غير قابلة للإشتقاق عند $x=2$

$$f(2) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x=2$ $\therefore$ f غير قابلة للإشتقاق عند $x=2$

⑦ P. 87 بين ان الدالة f متصلة ، غير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & : x > -\frac{1}{3} \\ 5x+1 & : x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

دراسة الاتصال عند $x = -\frac{1}{3}$

$$f(-\tfrac{1}{3}) = 5(\tfrac{-1}{3}) + 1 = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} (-x-1) = -(-\tfrac{1}{3}) - 1 = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} (5x+1) = \frac{-2}{3}$$

$$\because \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} f(x) = \frac{-2}{3}$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{-1}{3}} f(x) = \frac{-2}{3} = f(\tfrac{-1}{3})$$

$\therefore$ f متصلة عند $x = \frac{-1}{3}$

دراسة قابلية الاشتقاق عند $x = \frac{-1}{3}$

$$f'_-(\tfrac{-1}{3}) = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} \frac{f(x) - f(\frac{-1}{3})}{x - (-\frac{1}{3})} = \frac{5x+1 - \frac{-2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} \frac{5x + \frac{5}{3}}{x + \frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} \frac{5(x + \frac{1}{3})}{(x + \frac{1}{3})} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^-} 5 = 5$$

$$f'_+(\tfrac{-1}{3}) = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{f(x) - f(\frac{-1}{3})}{x - (-\frac{1}{3})} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{-x-1-(\frac{-2}{3})}{x + \frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{-x-1+\frac{2}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{-x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} = \lim_{x \to \frac{-1}{3}^+} \frac{-(x + \frac{1}{3})}{x + \frac{1}{3}} = -1$$

$$\because f'_-(-\tfrac{1}{3}) \neq f'_+(-\tfrac{1}{3})$$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

* ادرس اتصال الدالة f عند $x=1$
وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+1} & ; x\le 1\\[2mm] -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & ; x>1\end{cases}$$

* دراسة الاتصال عند $x=1$

$$f(1)=\frac{1+1}{1^2+1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{2}(x)+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(1)+\frac{3}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{1+1}{1^2+1}=1$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$

* دراسة الاشتقاق عند $x=1$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{2}(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to 1^+}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x+1}{x^2+1}-1}{x-1}=\lim\frac{\frac{x+1-x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x\cancel{(x-1)}}{(x^2+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{-1}{2}$$

$$\because f'_-(1)=f'_+(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند $x=1$

اي ان f متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x=1$

P.88 ادرس اتصال الدالة f عند $x=1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1} & : x \le 1 \\ 2x-1 & : x>1 \end{cases}$$

* دراسة الإتصال عند $x=1$

$$f(1) = \frac{2}{1^2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x-1 = 2(1)-1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$

* دراسة الإشتقاق عند $x=1$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{2}{x^2+1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{2-x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = -2$$

$$\therefore f'_+(1) \ne f'_-(1)$$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

بالرغم من أن f متصلة عند $x=1$

P. 89 ⑨ اوجد إن امكن $f'(-1)$ للدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & ; x \leq -1 \\ x^2-x-2 & ; x > -1 \end{cases}$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+x-((-1)^2+(-1))}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} x = -1$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

$$= \lim \frac{x^2-x-2-0}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$$

$$= \lim_{x \to -1^+} (x-2) = -1-2 = -3$$

$$\therefore f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$$

$\therefore$ $f'(-1)$ غير موجودة

قواعد الإشتقاق

① تدريب P. 90

$f(x)=5 \longrightarrow f'(x)=0$

$f(x)=e^2 \longrightarrow f'(x)=0$

$f(x)=\pi^{15} \longrightarrow f'(x)=0$

② تدريب P. 91

$f(x)=x^4 \longrightarrow f'(x)=4x^3$

$g(x)=x^{10} \longrightarrow f'(x)=10x^9$

$h(x)=x^{12} \longrightarrow f'(x)=12x^{11}$

① P. 92 اوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث:

$y=5x^3-4x^2+6$

$\frac{dy}{dx}=15x^2-12x$

② P. 93

ⓐ $f(x)=(x^2+1)(x^3+3)$

$=x^5+3x^2+x^3+3$

$f'(x)=5x^4+6x+3x^2$

ⓑ $f(x)=(2x+1)(3x-2)$

$=6x^2-x-2 \longrightarrow f'(x)=12x-1$

$f(x)=4x^2(x+6)$

$=4x^3+24x^2 \longrightarrow f'(x)=12x^2+48x$

$f(x)=(x^3-4)^2$

$=x^6-8x^3+16 \longrightarrow f'(x)=6x^5-24x^2$

③ P.95 اوجد مشتقة

$$f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$$

$$f'(x) = \frac{(2x^3+5)(8x+2) - (4x^2+2x)(6x^2)}{(2x^3+5)^2}$$

$$= \frac{16x^4+4x^3+40x+10-24x^4-12x^3}{2(x^3+5)^2}$$

$$= \frac{-8x^4-8x^3+40x+10}{(2x^3+5)^2}$$

---

④ P.96 اوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى f عند النقطة $(1,0)$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{1(x+2)-1(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

ميل المماس $= f'(1) = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{1}{3} \Longrightarrow$ ميل الناظم $= -3$

معادلة خط التماس

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x-1)$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

معادلة الناظم

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - 0 = -3(x-1)$$

$$y = -3x + 3$$

---

⑤ P.96 اوجد $f'(x)$ حيث

$$f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$$

$$f'(x) = \frac{-4(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{-8x-8}{(x^2+2x+5)^2}$$

(6) اوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=-1$ حيث P. 98

$$y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$$

$$= \frac{3x^2}{8x^2} + \frac{7}{8}x^{-2} = \frac{3}{8} + \frac{7}{8}x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{7}{8}(-2x^{-3}) = \frac{-7}{4}x^{-3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = \frac{-7}{4}(-1)^{-3} = \frac{7}{4}$$

(7) اوجد مشتقة الدالة f : P. 98

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

(8) يتحرك جسيم على محور السينات ويعطى موقعه بالدالة P.

$$x = 2t^3 + 3t^2 - 36t + 40$$

(1) $x(3) - x(0) = 2(3)^3 + 3(3)^2 - 36(3) + 40 - (0+0-0+40)$

$=$

(2) $\frac{dx}{dt} = 6t^2 + 6t - 36$

(3) $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=9} = 6(9)^2 + 6(9) - 36 = 504$

⑧ اوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية: P. 99

ⓐ $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x \le 2 \\ 4x-3 & : x > 2 \end{cases}$

$$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{4x-3-5}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4x-8}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+1-5}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2^-} x+2 = 2+2 = 4$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) = 4$$

$$\therefore f'(2) = 4$$

اذن

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ 4 & : x = 2 \\ 4 & : x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x < 2 \\ 4 & : x \ge 2 \end{cases}$$

مجال f' هو R

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x<1 \\ 2\sqrt{x} & : x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2\sqrt{1} = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} x+1 = 1+1 = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$f'_+(1) \neq f'_-(1) \Rightarrow \therefore f'(1)$ غير موجوده

$\therefore f$ غير قابله للاشتقاق عند $x=1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{غير موجوده} & : x=1 \\ 2(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) & : x>1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{غير موجوده} & : x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & : x>1 \end{cases}$$

مشتقات الدوال المثلثية

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x.\tan x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x.\cot x$$

$$\sec^2 = 1+\tan^2 x \qquad \csc^2 x = 1+\cot^2 x$$

P. 101 ① أوجد المشتقات للدوال المثلثية :

ⓐ $h(x) = \cos^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\cos x . \cos x) = \cos x . \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x . \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos x(-\sin x) + \cos x(-\sin x)$$

$$= -2\cos x \sin x$$

ⓑ $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{1.\cos x - x(-\sin x)}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{x\sin x}{\cos x}$$

$$= 1 + x\tan x$$

ⓒ $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \cos x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x\cos x + \cancel{\cos^2 x} - \cancel{\cos^2 x} + \sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2\sin x.\cos x}{1 + 2\sin x.\cos x}$$

P. 102 ② اوجد مشتقات الدوال التالية

ⓐ $f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$

$$f'(x) = \frac{\tan x(\sec^2 x) - (1+\tan x)\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

ⓑ $g(x) = \sec x + \csc x$

$$g'(x) = \sec x \cdot \tan x - \csc x \cot x$$

ⓒ $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

$$h'(x) = \frac{\sec x \cdot \tan x \csc x - \sec x(-\csc x \cdot \cot x)}{\csc^2 x}$$

$$= \frac{\sec x \cdot \csc x(\tan x + \cot x)}{\csc^2 x}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \cot x)}{\csc x}$$

P. 102 ③ اوجد معادلة المستقيم العمودي عند النقطة $(\frac{\pi}{3}, 2)$

$$y = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x$$

$$y'(\tfrac{\pi}{3}) = \sec\tfrac{\pi}{3} \cdot \tan\tfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

$\therefore$ ميل المماس $m = 2\sqrt{3}$ ، وعليه ميل العمودي $m_1 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$

وتكون معادلة العمودي

$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + 1.7$$

قاعدة السلسلة

① P. 104

مثال (1):

ⓐ $f(x) = 3x^2+1$ ، $g(x) = x^{10}$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{10})$$

$$= 3(x^{10})^2+1 = 3x^{20}+1$$

$$(f\circ g)'(x) = 3(20)x^{19} = 60x^{19}$$

ⓑ $f(x) = -2x^3+4$ ، $g(x) = x^{13}$

اوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(x)$

$f'(x) = -6x^2$ ، $f'(g(x)) = -6(x^{13})^2$
$= -6x^{26}$

$g'(x) = 13x^{12}$

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= -6x^{26}\cdot 13x^{12}$$
$$= -78x^{38}$$

② P. 105 اوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2+4)-2x(x^2-4)}{x^2+4}$ ، $g(1) = \sqrt{1} = 1$

$$f'(g(1)) = f'(1) = \frac{2(1)(1^2+4)-2(1)(1^2-4)}{1^2+4} = \frac{16}{5}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$(f\circ g)'(1) = f'(g(1))\times g'(1)$$
$$= \frac{16}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{8}{5}$$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل ③ P.105

$y = u^2 + 4u - 3$ ، $u = 2x^3 + x$

$\frac{dy}{du} = 2u + 4$ ، $\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u+4)(6x^2+1)$

$= (2(2x^3+x)+4)(6x^2+1)$

$= (4x^3+2x+4)(6x^2+1)$

$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$

اوجد مشتقة y بالنسبة الى المتغير x ④ P.106

$y = \sin(x^2+x)$

$y = \sin u$ ، $u = x^2 + x$

$\frac{dy}{du} = \cos u$ $\frac{du}{dx} = 2x + 1$

$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2+x) \cdot (2x+1)$

باستخدام قاعدة السلسلة اوجد مشتقة الدالة: ⑤ P.106

$f(x) = \cos^5 x$

نفرض: $g(x) = \cos x$ ، $h(x) = x^5$

$\therefore f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = (\cos x)^5 = \cos^5 x$

$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$h'(x) = 5x^4$ ، $h'(g(x)) = 5(\cos x)^4$

$g'(x) = -\sin x$

$f'(x) = (h \circ g)'(x) = 5(\cos x)^4(-\sin x)$

$= -5\cos^4 x \cdot \sin x$

P.107 ⑥ اوجد y' : $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$

$$y = (2x^4-3x^2+4)^{\frac{3}{4}}$$

$$y' = \frac{3}{4}(2x^4-3x^2+4)^{-\frac{1}{4}} \cdot (8x^3-6x)$$

$$= \frac{3(8x^3-6x)}{4\sqrt[4]{2x^4-3x^2+4}}$$

P.107 ⑦ بين ان ميل المماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائماً

يكون موجباً عندما $x \neq -\frac{1}{2}$

$$y = (-2x-1)^{-3}$$

ميل المماس $= y' = -3(-2x-1)^{-4}(-2)$; $x \neq -\frac{1}{2}$

$$= \frac{6}{(-2x-1)^4}$$ «مقدار موجب دوماً»

المشتقات ذات الرتب العليا

P.109 ① اوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة

$$y = 4x^5 - 5x^3 + 7$$

$$y' = 20x^4 - 15x^2$$

$$y'' = 80x^3 - 30x$$

$$y''' = 240x^2 - 30$$

P.109 ② بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$ حيث

$y = \cos x$

$y' = -\sin x$ ، $y'' = -\cos x$ ، $y''' = \sin x$ ، $y^{(4)} = \cos x$

$\therefore\ y^{(4)} + y'' = \cos x + (-\cos x) = 0$

P.110 ③ اوجد y''

$y = \frac{1}{\sin x} = \csc x$

$y' = -\csc x \cdot \cot x$

$y'' = (-\csc x)'(\cot x) + (-\csc x)(\cot x)'$

$= (\csc x \cot x)(\cot x) + (-\csc x)(-\csc x)$

$= \csc x \cot^2 x + \csc^2 x$

$= \frac{1}{\sin x} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin x}{\sin^3 x}$

P.112 ④ لتكن $y^2 = x^2 - 2x$ أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

$2yy' = 2x - 2$

$y' = \frac{2x-2}{2y}$

$y' = \frac{x-1}{y}$

الإشتقاق الضمني

P. 112 ⑤ اوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته عند النقطة (1،1)

$$x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$$

بالإشتقاق الضمني

$$2x - 2yy' + y'x + y = 0$$

$$-2yy' + y'x = -y - 2x$$

$$y'(-2y + x) = -y - 2x$$

$$y' = \frac{-y - 2x}{-2y + x}$$

$$\text{ميل المماس} = y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-1 - 2(1)}{-2(1) + 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

P. 113 ⑥ اوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته عند النقطة (2،2)

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2y - 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y - 2x) = 2y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$$

∴ ميل المماس عند النقطة (2 ، 2) = 1

(7) P. 114 اوجد y' ثم اوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند (1،1)

$$y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$$

$$2yy' + \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}y' + 2x = 0$$

$$y'(2y + \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

ميل المماس $= y'\Big|_{(1,1)} = \dfrac{-2(1)}{2(1) + \frac{1}{2(1)}} = \dfrac{-4}{5}$

(8) P. 114 اذا كانت $y = x\sin x$ فاثبت أن

$$y''' + y' + 2\sin x = 0$$

$$y' = \sin x + x\cos x$$

$$y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$$

$$y''' = -2\sin x - \sin x - x\cos x$$

$$= -3\sin x - x\cos x$$

$$LHS = -3\sin x - x\cos x + \sin x + x\cos x + 2\sin x$$

$$= -3\sin x - x\cos x + 3\sin x + x\cos x$$

$$= 0$$

P. 115 (9) لتكن $f(x)=\frac{1}{1-x}$ أثبت أن

$$f'''(x)=\frac{3!}{(1+x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{-(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-(-2)(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{-(2)(-3)(1-x)^2}{(1-x)^6}=\frac{6}{(1-x)^4}$$

$$=\frac{3!}{(1-x)^4}$$

P.116 مسألة إضافية

$$S(t)=9t^3-7t+3$$

(a) المسافة المقطوعة $= S(3)=9(3)^3-7(3)+3=225\ m$

(b) دالة السرعة $= S'(t)=27t^2-7$

(c) متوسط السرعة $=\frac{S(3)-S(0)}{3-0}=\frac{225-3}{3-0}=74\ m/s$

السرعة اللحظية $= S'(3)=27(3)^2-7=236\ m/s$