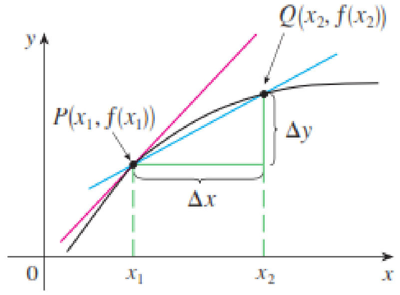
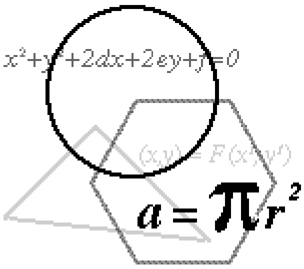
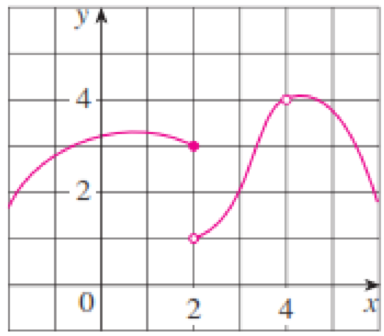
الصف الثاني عشر علمي

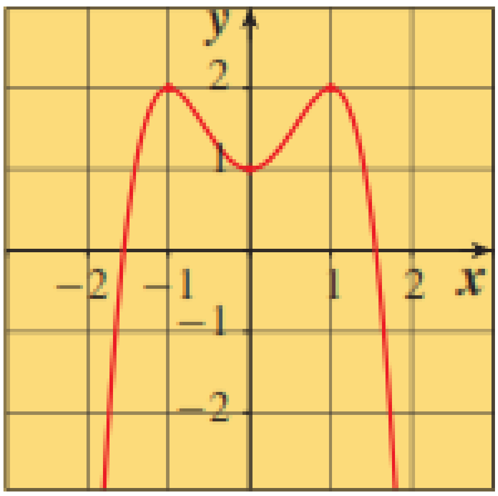


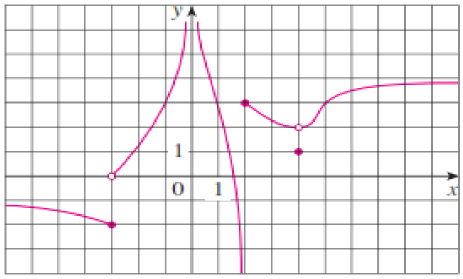




الرياضيات

الفصل الدراسي الأول





العام الدراسي

٢٠٢١ \ ٢٠٢٢ م

إعداد رئيس القسم الأستاذ :

أ . محمود حامد العلو

الموجه الفني: أ. مفيد بستاني

مدير المدرسة: د. محمد العصيمي

أسم الطالب: ....، الصف: ١٢ع/ ....

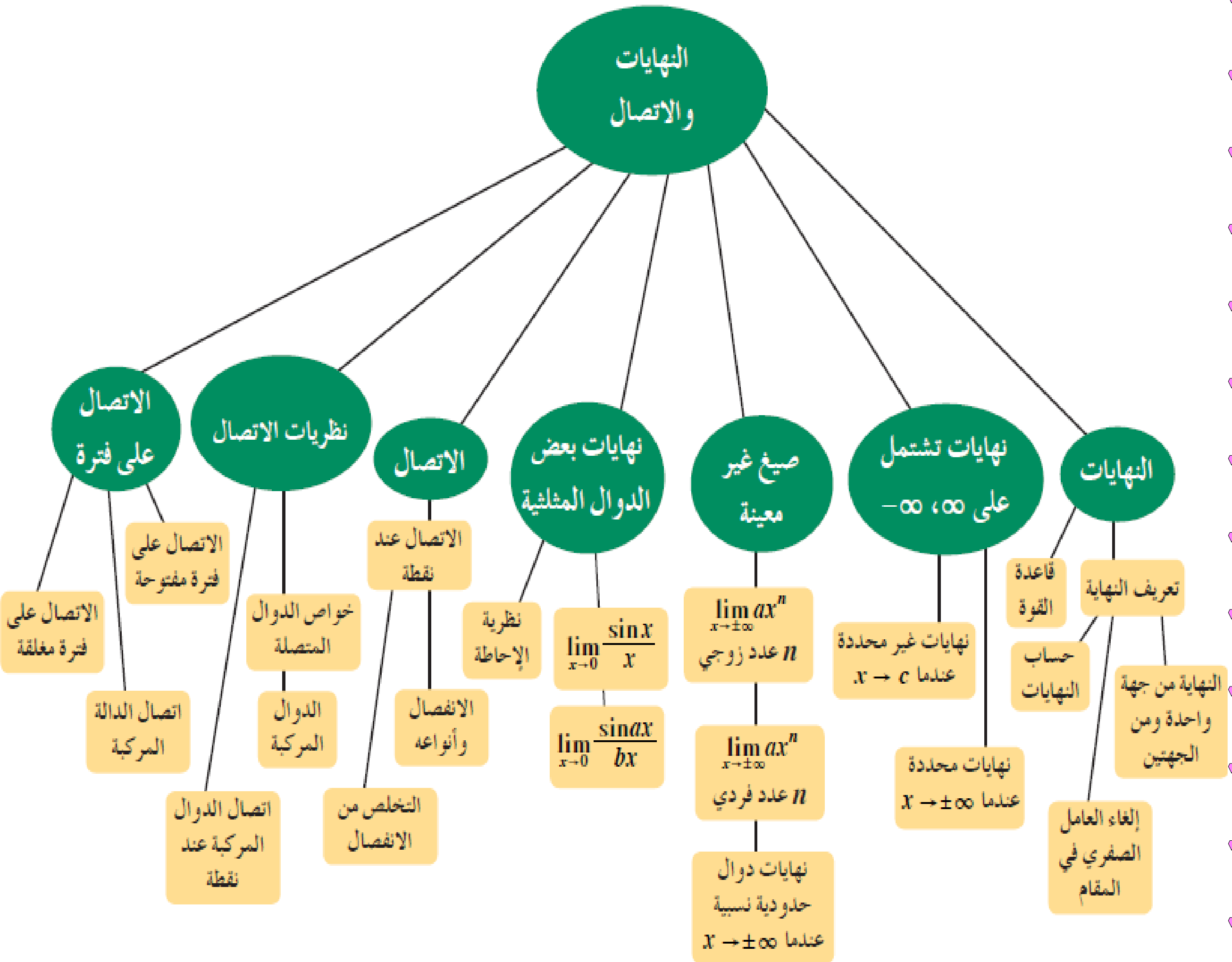
الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

الوحدة الاولى

النهايات والاتصال

Limits and Continuity



النهايات	نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞	صيغ غير معينة	نهايات بعض الدوال المثلثية	الاتصال	نظريات الاتصال	الاتصال على فترة
1–1	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6	1–7

رئيس القسم: محمود حامد العلو

أوراق متابعة الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

تمارين متابعة للنهايات

تعريف (١):

لتكن x كمية متغيرة، c عدد ثابت

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب

تعريف النهاية:

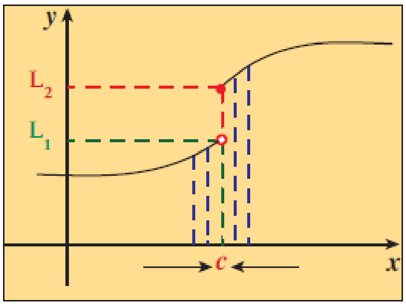
إذا كان L ، c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية فإن:

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ **The limit of $f(x)$ as x approaches c equals L**

تعني أن: عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن $f(x)$ تقترب باطراد من L.

ملاحظة١: إن حقيقة وجود نهاية عندما $x \to c$ لا تعتمد على كون الدالة معرفة او غير معرفة عند c

النهاية من جهة اليسار:



إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_1 عندما تؤول x إلى العدد c من جهة اليسار

فإننا نكتب: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L_1$

النهاية من جهة اليمين:

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_2 عندما تؤول x إلى العدد c من جهة اليمين

فإننا نكتب: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L_2$

$$L_1 \neq L_2$$
$$\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$$

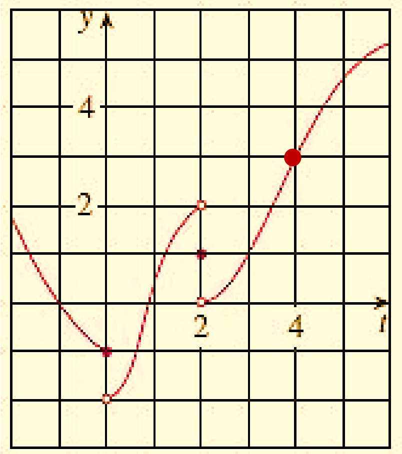
نظرية1:

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c **إذا وفقط إذا** كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = L$

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

تمرين1 :



الشكل المجاور يمثل بيان الدالة: $f: [-2.6] \to R$ اوجد ما يلي:

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$

2) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

4) $f(0) =$

5) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

6) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

7) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

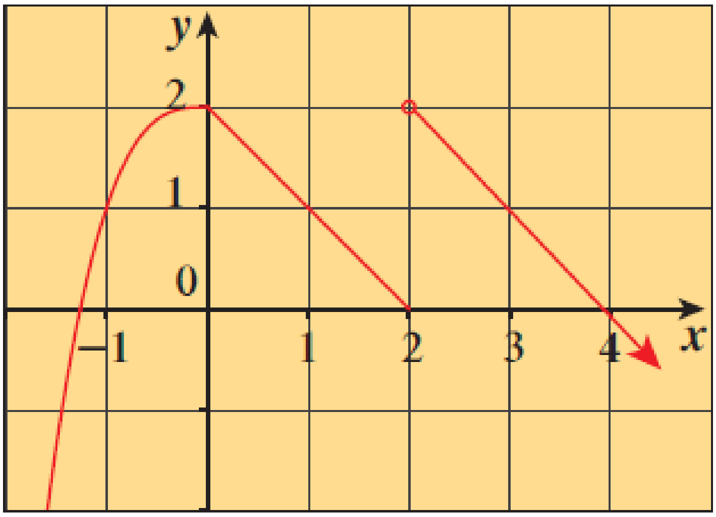
8) $f(2) =$

9) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$

10) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) =$

11) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$

حاول أن تحل صفحة 16



1 يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

b $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

d $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

....

....

....

....

....

....

....

نظرية2: إذا كان k عدداً ثابتاً، c عددا حقيقياً فإن: $\lim\limits_{x\to c} k = k$

نظرية3: إذا كانت: $f(x) = x$، حيث c عددا حقيقياً فإن: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} x = c$

نظرية4: (قواعد حساب النهايات):

إذا كان k, c, M, L أعداد حقيقية، $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ فإن :

a) قاعدة الجمع (الفرق) : $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \pm M$

b) قاعدة الضرب: $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

c) قاعدة الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x\to c}\big(kf(x)\big) = k \cdot \lim\limits_{x\to c} f(x) = k \cdot L$

d) قاعدة ناتج القسمة: $\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}\ , M \neq 0$

حاول أن تحل | صفحة 17

2 بفرض أنّ: $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 2}\big(f(x) + g(x)\big)$

b $\lim\limits_{x\to 2}\big(f(x) \cdot g(x)\big)$

c $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{8\, f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

نظرية5: (قواعد حساب النهايات):

a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ دالة كثيرة الحدود، حيث c عددا حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

b) إذا كانت $g(x)$ ، $f(x)$ كثيرتي حدود، c عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \qquad , \; g(c) \neq 0$$

مثال (3) صفحة 18:

أوجد:

$a)\ \lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

$b)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـصـف	الـحـصــة	الـتـاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (3) صفحة 18:

أوجد:

a) $\lim_{x\to 1}(x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$

c) $\lim_{x\to 3}(x^2(2 - x))$

حاول أن تحل (4) صفحة 19:

لتكن الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$$

أوجد (إن أمكن): $\lim_{x \to 2} f(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (5) صفحة 19:

لتكن الدالة:

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : x \leq 1 \end{cases}$$

أوجد (إن أمكن): $\lim_{x \to 1} g(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

نظرية6: (قاعدة القوة): إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة فإن :

$$a)\ \lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$$

$$b)\ \lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

في حالة n عدداً زوجياً يشترط أن يكون $c > 0$

$$c)\ \lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

في حالة n عدداً زوجياً يشترط أن يكون $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$

حاول أن تحل (7) صفحة 22:

$a)\ \lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x^2-5}\right)$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\right)^4$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـصـف	الحصـة	الـتـاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (8) صفحة 23:

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

b) $\lim_{x\to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

الـصف	الحصـة	الـتـاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

تابع حاول أن تحل (8) صفحة 23:

c) $\lim_{x\to 5}\dfrac{|x+2|-7}{x^2-25}$

إعداد الأستاذ: محمود حامد العلو

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

مثال (9) صفحة 24:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}\ -1}{x-2}$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

حاول أن تحل (10) صفحة 26:

أوجد:

$$a)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}\right)$$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}\right)$$

اليــوم	الـتـاريـخ	الحصــة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

تمارين متابعة للنهايات تشتمل على $\pm\infty$

تعريف (١):

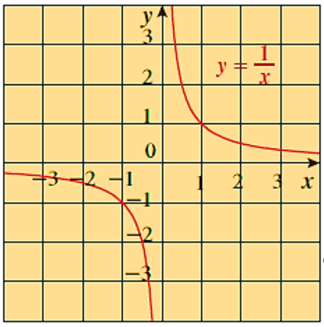
لتكن f دالة معرفة في الفترة $(a.\infty)$ فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞ .

تعريف (2):

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(-\infty.b)$ فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.



نظرية7:

$$f: f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \ . \ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$$

نظرية8:

$$f: f(x) = \frac{k}{x^n} \ . \ n \in Z^+ \ . \ k \in R \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{x} = 0$$

ملاحظات:

1) تبقى قواعد حساب النهايات (نظرية 4) وقاعدة القوة (نظرية 6) صحيحة عند ايجاد $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

2) تبقى نظرية 2 أيضاً صحيحة أي أن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k = k$

مثال (1) صفحة 29:

أوجد:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+4}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{x^2+25}\right)$$

تابع مثال (1) صفحة 29:

أوجد:

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^3}{5-7x^3}\right)$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (2) صفحة 33:

أوجد:

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{3}{|x+1|}\right)$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

كراسة التمارين (*) صفحة 13:

أوجد:

$$1)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)$$

كراسة التمارين (*) صفحة 13:

أوجد:

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$$

الصــف	الحصــة	الــتاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

تمـاريـن مـتـابـعـة لـلـنهـايـات تـشـتمل على صيـغ غيـر معـينة

لتكن: $a \in \mathbb{R}^*$. $n \in Z^+$. $f(x) = ax^n$:

1) إذا كان n عدد زوجي فإن:

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : \quad a > 0 \\ \infty & : \quad a < 0 \end{cases} \quad ، \quad \lim_{x\to\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

ملاحظات هامة جداً:

إذا كانت: $a_n \in \mathbb{R}^*$. $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

فإن $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$

لا يجوز تطبيق هذه القاعدة عندما تؤول x إلى عدد حقيقي c

حاول أن تحل (1) صفحة 37:

أوجد:

$$\lim_{x\to\infty}(-3x^2 + 2x + 4)$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

نظرية11:

إذا كانت كل من g . f دالة حدودية حيث

$$f(x) = a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^{m} + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$ فإن:

$$a)\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad : \quad n < m$$

$$b)\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \qquad : \quad n = m$$

تستخدم في الأسئلة الموضوعية فقط

$$c)\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \qquad : \quad n > m$$

مثال (2) صفحة 39:

أوجد:

$$c)\quad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^4-1}{7-2x^4}\right)$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصــة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

حاول أن تحل (2) صفحة 39:

استخدم النظرية السابقة في حساب:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}\right)$$

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{4x^3-2x+3}\right)$$

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

مثال (3) صفحة 39:

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}\right)=3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (3) صفحة 40:

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{ax^2+bx-3}\right)=-1$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

مثال (4) صفحة 40:

أوجد: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}\right)$

إعداد الأستاذ: محمود حامد العلو

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصــة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

حاول أن تحل (4) صفحة 41:

أوجد:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}\right)$$

تمارين متابعة لنهايات بعض الدوال المثلثية

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad . \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad . \quad \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

نظرية12: إذا كانت x بالراديان

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتائج:

إذا كان a, b عددين حقيقيين، $a.b \neq 0$ فإن:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ أو $\lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

مثال (1) صفحة 43:

أوجد:

$b)$ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x-3}{\cos x}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (1) صفحة 43:

أوجد:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2x^2-x}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x\cos x}\right)$$

تابع حاول أن تحل (1) صفحة 43:

أوجد: $c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ \sin x}{\cos x - 1}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (1) صفحة 43:

أوجد: $c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (2) صفحة 44:

أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2\tan x}\right)$

$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\tan x+\ x^2\cos x}{5x}\right)$

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

مثال (3) صفحة 44:

أوجد:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x+\sin x}{x}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}\right)$$

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

تمارين متابعة الاتصال عند نقطة

تعريف (٨): "الاتصال عند نقطة"

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

أي أن: $$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

نتائج:

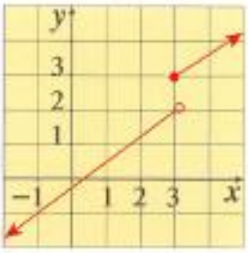
١) تكون الدالة متصلة من جهة **اليسار** عند $x = c$: إذا كان $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

٢) تكون الدالة متصلة من جهة **اليمين** عند $x = c$: إذا كان $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

٣) تكون الدالة متصلة عند $x = c$ **إذا وفقط إذا** كانت متصلة من **اليسار** ومن **اليمين** عند $x = c$

تدريب

1

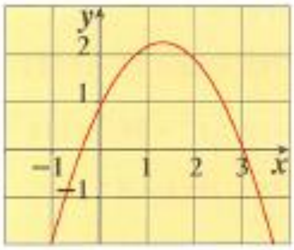


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

2

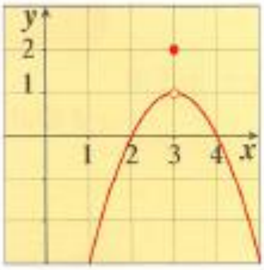


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

3

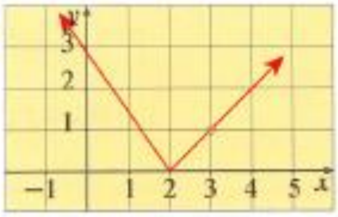


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

4



$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

مثال (1) صفحة 49:

لتكن:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : \ x \geq 1 \\ 5x - 1 & : \ x < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة عند $x = 1$

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

مثال (2) صفحة 50:

لتكن:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : \; x > 3 \\ 7 & : \; x \leq 3 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة عند $x = 3$

....

....

....

كراسة التمارين (8) صفحة 19:

لتكن:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{|x|} & : \; x \neq 0 \\ -3 & : \; x = 0 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة عند $x = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (3) صفحة 51:

لتكن:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة عند $x=-1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمـاريـن متـابـعـة نـظريـات الاتـصـال عـنـد نـقـطـة

نظرية ١٤ : إذا كانت $f.g$ دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

الطرح : $2)\ f - g$ الجمع : $1)\ f + g$

الضرب : $4)\ f \cdot g$ الضرب في ثابت : $c \in R$. $3)\ c.f$

القسمة : $g(c) \neq 0$ $5)\ \frac{f}{g}$

دوال متصلة:

١) الدالة الثابتة: $k \in R$. $f(x) = k$ متصلة عند كل عدد $c \in R$.

٢) الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل عدد $c \in R$.

٣) الدالة الحدودية النسبية متصلة عند كل عدد حقيقي في مجالها $c \in D$.

٤) دالة المطلق $f(x) = |x|$ متصلة عند كل عدد $c \in R$.

٥) الدوال المثلثية متصلة عند كل عدد حقيقي في مجالها $c \in D$.

٦) **الدالة الجذرية** $y = \sqrt[n]{x}$:

a) متصلة عند كل عدد $c \in R^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب.

b) متصلة عند كل عدد $c \in R$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من ١.

نظرية ١٥

٧) **الدالة الجذرية** $g(x) = \sqrt{f(x)}$: **إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = c$ وكانت** $f(c) > 0$

فإن الدالة: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x = c$

حاول أن تحل (1) صفحة 55:

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

$a)\ f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|\ , c = 3$

$b)\ f(x) = \frac{\tan x}{x+1}\ , c = \frac{\pi}{4}$

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصــة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

مثال (2) صفحة 55:

ابحث اتصال الدالة $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$:

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (3) صفحة 56:

ابحث اتصال الدالة كل من الدالتين عند $x = -2$:

$a)\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

$b)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصـة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

الدالة المركبة:

إذا كانت كل من g , f دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

نظرية١٦ : إذا كانت f دالة متصلة عند $x = c$ ، و g متصلة عند $f(c)$.

فإن الدالة المركبة $g \circ f$ هي دوال متصلة عند $x = c$

ملاحظة: $(g \circ f)(c) \neq (f \circ g)(c)$ إلا في بعض الحالات الخاصة

مثال (4) صفحة 58:

الدالتين f , g معرفتان على R كما يلي: $f(x) = 1 + x \quad , \quad g(x) = x^2 + 1$ أوجد :

$a)\ (gof)(x) \quad , \quad b)\ (gof)(2) \quad , \quad c)\ (fog)(x) \quad , \quad d)\ (fog)(2)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

حاول أن تحل (5) صفحة 59:

الدالتين f, g معرفتان على R كما يلي: $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, $g(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$ أوجد :

$a)\ (fog)(x)$ $b)\ (gof)(\sqrt{3})$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـصـف	الحصـة	الـتـاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (6) صفحة 59:

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة gof عند $x = -2$.

اليــوم	الـتـاريـخ	الحصــة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

تـمـاريـن مـتـابـعـة الاتـصـال عـلـى فـتـرة

تعريف (٩): "الاتصال على فترة مفتوحة"

لتكن الدالة $\boldsymbol{f}$ معرّفة على الفترة $(\boldsymbol{a.b})$ فإننا نقول إن الدالة $\boldsymbol{f}$ متصلة على الفترة المفتوحة $(\boldsymbol{a,b})$ إذا كانت $\boldsymbol{f}$ متصلة عند كل $\boldsymbol{x}$ تنتمي إلى الفترة $(\boldsymbol{a.b})$

تعريف (١٠): "الاتصال على فترة مغلقة"

لتكن الدالة $\boldsymbol{f}$ معرّفة على الفترة $[\boldsymbol{a.b}]$ فإننا نقول إن الدالة $\boldsymbol{f}$ متصلة على الفترة المغلقة $[\boldsymbol{a.b}]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

١) الدالة $\boldsymbol{f}$ متصلة على الفترة المفتوحة $(\boldsymbol{a.b})$

٢) الدالة $\boldsymbol{f}$ متصلة عند $\boldsymbol{x} = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

٣) الدالة $\boldsymbol{f}$ متصلة عند $\boldsymbol{x} = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$

حاول أن تحل (1) صفحة 62:

ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1, 5]$ حيث.

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : \quad x=1 \\ \frac{x^2+1}{x} & : \quad 1<x<5 \\ \frac{26}{5} & : \quad x=5 \end{cases}$$

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

حاول أن تحل (2) صفحة 63:

ابحث اتصال الدالة f على الفترة المبينة:

$b)\ f(x)=\frac{x}{x^2-1}\ ,[\,0\,,2\,]$

$a)\ f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}\ ,[\,0\,,3\,]$

مثال (3) صفحة 63:

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : x\le -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x>-1 \end{cases}$$

مثال (4) صفحة 63:

لتكن الدالة f متصلة على R .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ ax + b & : x > 0 \end{cases}$$

أوجد قيمة الثابتين a , b .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (5) صفحة 66:

لتكن الدالة: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$. أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصالها على الفترة $[6 , 10]$

حاول أن تحل (7) صفحة 67:

لتكن الدالة: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$. ادرس اتصال الدالة على R .

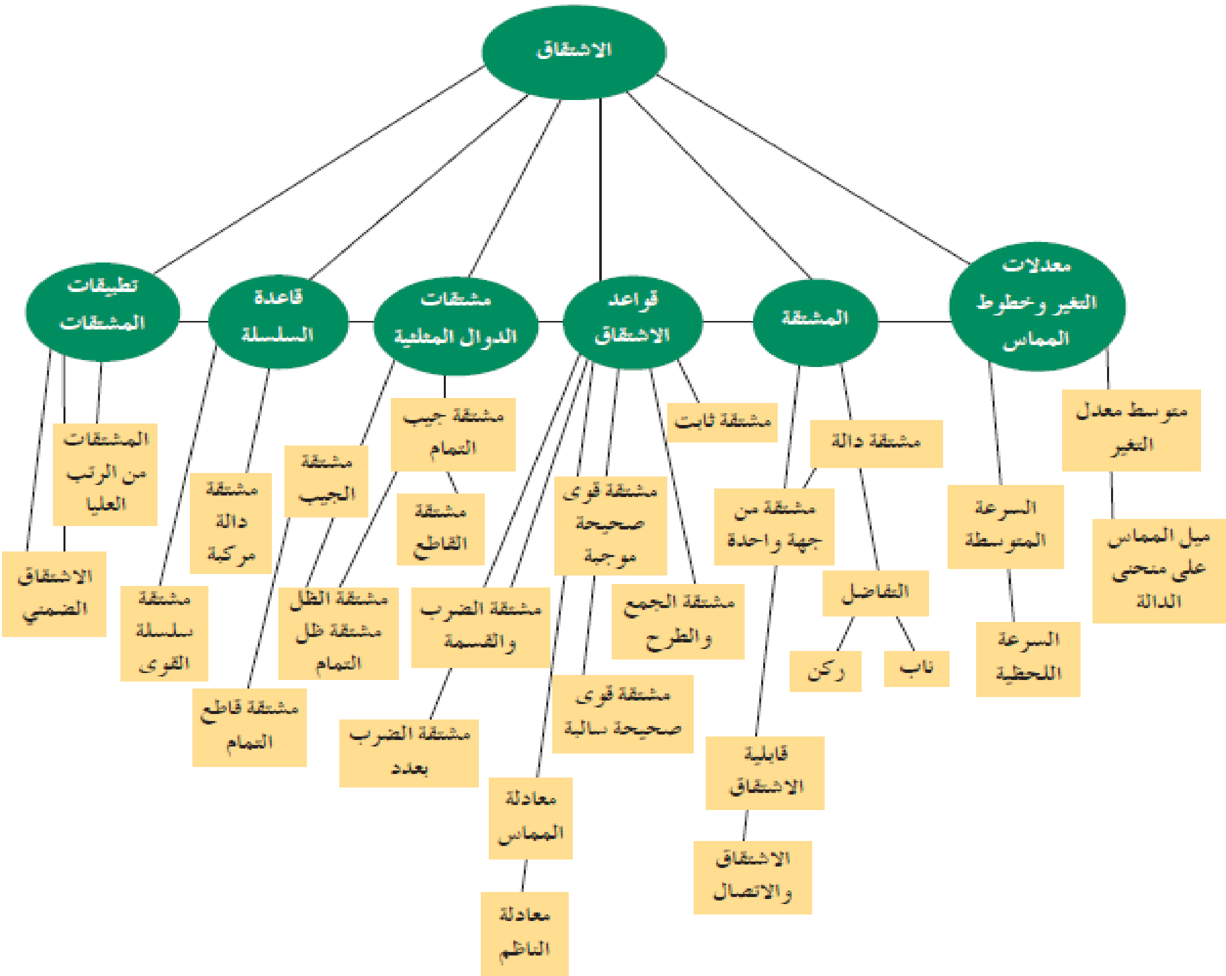
الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

الوحدة الثانية

الاشتقاق

The Derivatives



المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني	قاعدة السلسلة	مشتقات الدوال المثلثة	قواعد الاشتقاق	المشتقة	معدلات التغير وخطوط المماس
2–6	2–5	2–4	2–3	2–2	2–1

رئيس القسم: محمود حامد العلو

أوراق متابعة الوحدة الثانية (الاشتقاق)

تمارين متابعة معدلات التغير وخطوط المماس

متوسط معدل التغير للدالة y بين نقطتين $(x_1 . f(x_1)) . (x_2 . f(x_2))$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a . f(a))$:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال (1) صفحة 77:

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ: $y = x^2$. عند النقطة $p \ (2 , 4)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـصـف	الحصــة	الـتـاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (1) صفحة 78:

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ: $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A\ (1\ ,3)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمارين متابعة المشتقة عند نقطة

تعريف: "مشتقة الدالة عند نقطة"

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (1) صفحة 80:

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$. عند $x = 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

تعريف بديل:

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (2) صفحة 80:

باستخدام التعريف البديل، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$. عند $x = a$ **حيث** $a > 0$.

المشتقّة من جهة واحدة

مشتقة الدالة f من اليمين ويرمز لها "إن وجدت" بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مشتقة الدالة f من اليسار ويرمز لها "إن وجدت" بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال (3) صفحة 81:

بيّن أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 0$ ، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \ x \le 0 \\ 2x & : \ x > 0 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال (5) صفحة 83:

لتكن الدالة: $f(x) = x^3$ ، أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

نظرية: "الاشتقاق والاتصال"

إذا كانت الدالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متّصلة عند هذه النقطة "عكس النظرية ليس صحيح دائماً".

حاول أن تحل (6) صفحة 86:

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : x\le 2 \\ 3x-2 & : x>2 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تـمـاريـن مـتـابـعـة قـواعـد الاشـتـقـاق

قواعد الاشتقاق:

1) $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = 0 \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n.x^{n-1} \quad ; \quad n \in Q^* \;.\; x \neq 0$

3) $[k\,f(x)]' = k\,f'(x)$

4) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

5) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

6) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad ; \quad g(x) \neq 0$

حاول أن تحل (1) صفحة 92:

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ ، حيث: $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (2) صفحة 93:

أوجد $f'(x)$:

$b)\ f(x) = (2x+1)(3x-2)$ $\qquad$ $a)\ f(x) = (x^2+1)(x^3+3)$

$d)\ f(x) = (x^3-4)^2$ $\qquad$ $c)\ f(x) = 4x^2(x+6)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (3) صفحة 95:

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم):

- ميل المماس عند a هو $m = f'(a)$
- معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند a: $y - f(x) = f'(a)(x-a)$
- معادلة الناظم لمنحنى الدالة f عند a: $y - f(x) = \frac{1}{f'(a)}(x-a)$
- إذا كان للدالة f مماس أفقي عند a فإن: $f'(a) = 0$

الـصـف	الحصــة	الـتـاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

مثال (4) صفحة 95:

أوجد معادلة المماس و معادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة: $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$.

الـصـف	الحصــة	الـتـاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (5) صفحة 96:

أوجد $f'(x)$ حيث: $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (6) صفحة 98:

لتكن : $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصـة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

حاول أن تحل (7) صفحة 98:

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$.

....

....

....

مثال (8) صفحة 98:

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : x \leq 1 \\ 2x + 1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول ان تحل (8) صفحة 99:

لتكن الدالة f : $\quad a)\ f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x \le 2 \\ 4x-3 & : x > 2 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن:

تابع حاول ان تحل (8) صفحة 99:

لتكن الدالة f : $b)\ f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x<1 \\ 2\sqrt{x} & : x\geq 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

تمارين متابعة مشتقات الدوال المثلثية

$(\sin x)' = \cos x$. $(\sec x)' = \sec u \ \tan x$

$(\cos x)' = -\sin x$. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\tan x)' = sec^2 x$. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

حاول أن تحل (1) صفحة 101:

أوجد المشتقات للدوال التالية:

$a)\ h(x) = cos^2 x$ $\quad b)\ g(x) = \frac{x}{\cos x}$ $\quad c)\ y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (2) صفحة 102:

أوجد المشتقات للدوال التالية:

$a)\ f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$ $b)\ g(x) = \sec x + \csc x$ $c)\ h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصـة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

مثال (3) صفحة 103:

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = tan\, x$ عند النقطة $p(\frac{\pi}{4}, 1)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (3) صفحة 103:

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = sec\, x$ عند النقطة $F(\frac{\pi}{3}, 2)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

تمارين متابعة قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة (التسلسل) $(f\circ g)'(x)=[f(g(x))]'=f'(g(x)).g'(x)$

- صورة أخرى لقاعدة السلسلة: $u=g(x)$. $y=f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

- قاعدة سلسلة القوى: $\frac{d}{dx}(f(x))^n=n(f(x))^{n-1}.f'(x)$

حاول أن تحل (1) صفحة 104:

إذا كان: $g(x)=x^{10}$. $f(x)=3x^2+1$. فأوجد:

a) $(f\circ g)'(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصــة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

تابع حاول أن تحل (1) صفحة 104:

لتكن $g(x) = x^{13}$. $f(x) = -2x^3 + 4$. أوجد باستخدام قاعدة السلسلة:

$a)\ (g \circ f)'(0)$ $\qquad$ $b)\ (f \circ g)'(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (2) صفحة 105:

لتكن: $g(x)=\sqrt{x}$. $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$. أوجد باستخدام قاعدة السلسلة: $(f\circ g)'(1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (3) صفحة 105:

لتكن: $u=2x^3+x$. $y=u^2+4u-3$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (6) صفحة 107:

لتكن: $y = \sqrt[3]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$. أوجد: y'

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (7) صفحة 107:

أوجد ميل مماس المنحنى: $y = sin^5 x$. عند $x = \frac{\pi}{3}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمارين متابعة المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

حاول أن تحل (1) صفحة 109:

إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$. فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (2) صفحة 109:

لتكن الدالة: $y = \cos x$. بين ان: $y^{(4)} + y'' = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـصف	الحصــة	الـتـاريـخ	الـيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (3) صفحة 110:

أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (7) صفحة 113:

للمنحنى الذي معادلته: $2\sqrt{y} + y = x$. أوجد y' . ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3 , 1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (8) صفحة 114:

إذا كانت: $y = \sqrt{1-2x}$. فأثبت ان: $y\,y'' + (y')^2 = 0$

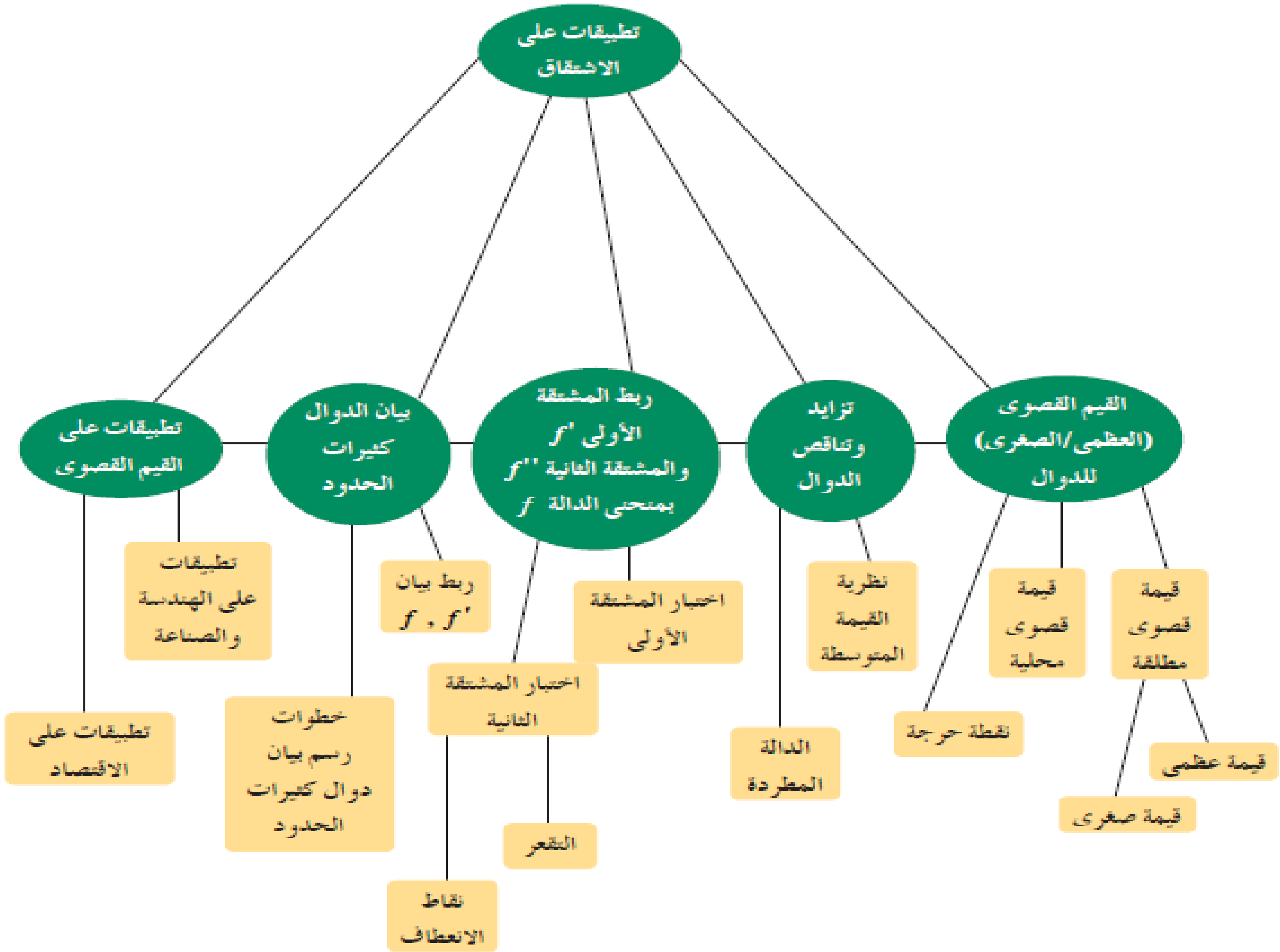
الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

الوحدة الثالثة

تطبيقات على الاشتقاق

Applications on Differentiation



القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال	تزايد وتناقص الدوال	ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f	رسم بيان دوال كثيرات الحدود	تطبيقات على القيم القصوى
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

رئيس القسم: محمود حامد العلو

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

أوراق متابعة الوحدة الثالثة (تطبيقات على الاشتقاق)

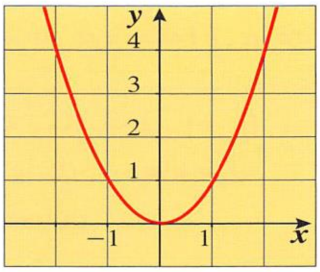
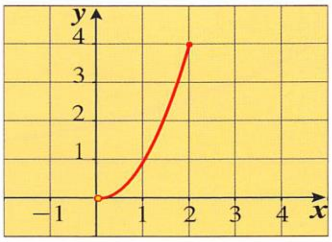
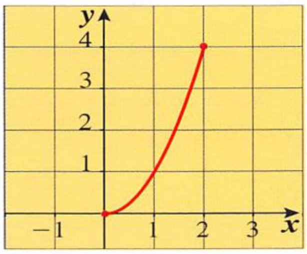
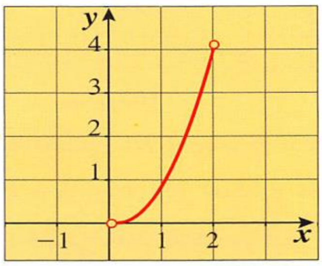
تمارين متابعة القيم القصوى للدوال

مثال (1) صفحة 123:

لتكن الدالة: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانها عندما:

(a) $D = (-\infty , \infty)$ (b) $D = (0 , 2]$ (c) $D = [0 , 2]$ (d) $D = (0 , 2)$

الحل:

	القيم القصوى المطلقة للدالة f على D	المجال D	بيان الدالة: $f(x) = x^2$
a	لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$	$(-\infty , \infty)$	$y = x^2$ 
b	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة.	$(0 , 2]$	$y = x^2$ 
c	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$	$[0 , 2]$	$y = x^2$ 
d	لا توجد قيم قصوى مطلقة.	$(0 , 2)$	$y = x^2$ 

إعداد الأستاذ: محمود حامد العلو

تعريف "القيم القصوى المحلية":

لتكن $\left(c.f(c)\right)$ نقطة داخلية للدالة f ، D فترة مفتوحة تحوي c تكون $f(c)$:

a) قيمة عظمى محلية عند c عندما: $f(c) \geq f(x) \quad . \quad \forall x \in D$

b) قيمة صغرى محلية عند c عندما: $f(c) \leq f(x) \quad . \quad \forall x \in D$

تعريف "النقطة الحرجة":

النقطة الداخليّة للدالّة f $\left(c.f(c)\right)$ تسمى **نقطة حرجة** عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة،

مثال (2) صفحة 125:

أوجد النقاط الحرجة للدالة: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة على فترة مغلقة $[a.b]$

١) إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = b$. $x = a$

٢) إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة $(a.b)$ إن وجدت.

٣) أكبر قيمة للدالة في الخطوتين ٢، ١ هي قيمة عظمى مطلقة في $[a.b]$ وأصغر قيمة للدلة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a.b]$

مثال (3) صفحة 128:

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$. في الفترة $[\,0\,,3\,]$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

مثال (4) صفحة 129:

أوجد القيم العظمى و الصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. في الفترة $[-2, 3]$

تـمـاريـن مـتـابـعـة تـزايـد وتـنـاقـص الـدوال

نظرية:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b):

١) إذا كانت: $f'(x) > 0 , \forall x \in (a, b)$، فإن الدالة f تتزايد على (a, b)

٢) إذا كانت: $f'(x) < 0 , \forall x \in (a, b)$، فإن الدالة f تتناقص على (a, b)

٣) إذا كانت: $f'(x) = 0 , \forall x \in (a, b)$، فإن الدالة f ثابتة على (a, b)

حاول أن تحل (3) صفحة 135:

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصــة	الــصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

حاول أن تحل (4) صفحة 136:

اذا كانت الدالة $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x}$. حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $\boldsymbol{f}$.

تمارين متابعة ربط المشتقة الأولى والمشتقة الثانية بمنحنى الدالة

اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية:

نظرية:

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة:

١) إذا كانت إشارة المشتقة f' تتغير من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة **عظمى** محلية عند c.

٢) إذا كانت إشارة المشتقة f' تتغير من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة **صغرى** محلية عند c.

٣) إذا لم تتغير إشارة المشتقة f' عند $x = c$ ، فإن f **لا يكون** لها قيم قصوى محلية عند c.

الصف	الحصة	التاريخ	اليوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (1) صفحة 140:

اذا كانت الدالة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ أوجد كلا مما يلي:

a) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

b) الفترات التي تكون الدالة f متزايد أو متناقصه عليها.

c) القيم القصوى المحليّة.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

اختبار التقعر:

a) إذا كانت I $\forall\, x \in I$, $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعراً للأعلى على I

b) إذا كانت $\forall\, x \in I$, $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعراً للأسفل على I

تعريف نقطة الانعطاف:

تسمى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متصلة عند c ، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

حاول أن تحل (3) صفحة 144:

أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الدالة: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

نظرية:

a) إذا كانت $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$ ، فإن تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$

b) إذا كانت $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$ ، فإن تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

مثال (4) صفحة 146:

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تـمـاريـن مـتـابـعـة رسـم بـيـان دوال كـثـيـرات الـحـدود

خطوات دراسة تغير دالة ورسم بيانها

١) عيّن مجال الدالة.

٢) أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة.

٣) عيّن النقاط الحرجة للدالة.

٤) كوّن جدولًا لدراسة إشارة المشتقة الأولى وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

٥) كوّن جدولًا لدراسة إشارة المشتقة الثانية وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.

٦) أوجد نقاطًا إضافية لتساعد في الرسم "نقاط التقاطع مع المحاور إن لم تكن موجودة".

٧) ارسم بيان الدالة مستخدماً نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

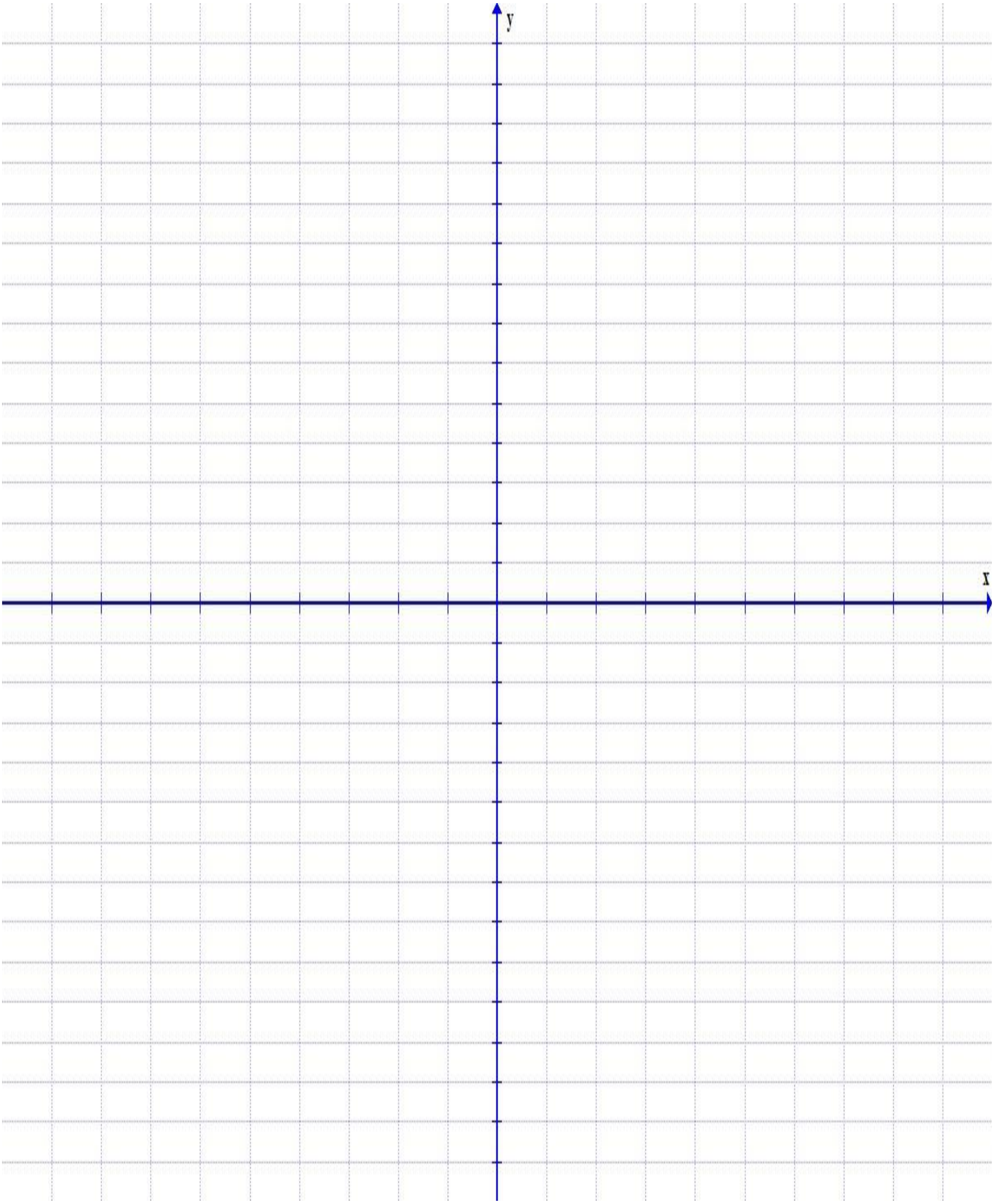
الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصــة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

حاول أن تحل (1) صفحة 149:

ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

تابع حاول أن تحل (1) صفحة 149:



الـصـف	الحصــة	الــتـاريـخ	الــيـوم
١٢ع /		/ / ٢٠٢١م	....
....			الموضوع

حاول أن تحل (2) صفحة 150:

ادرس تغير الدالة $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

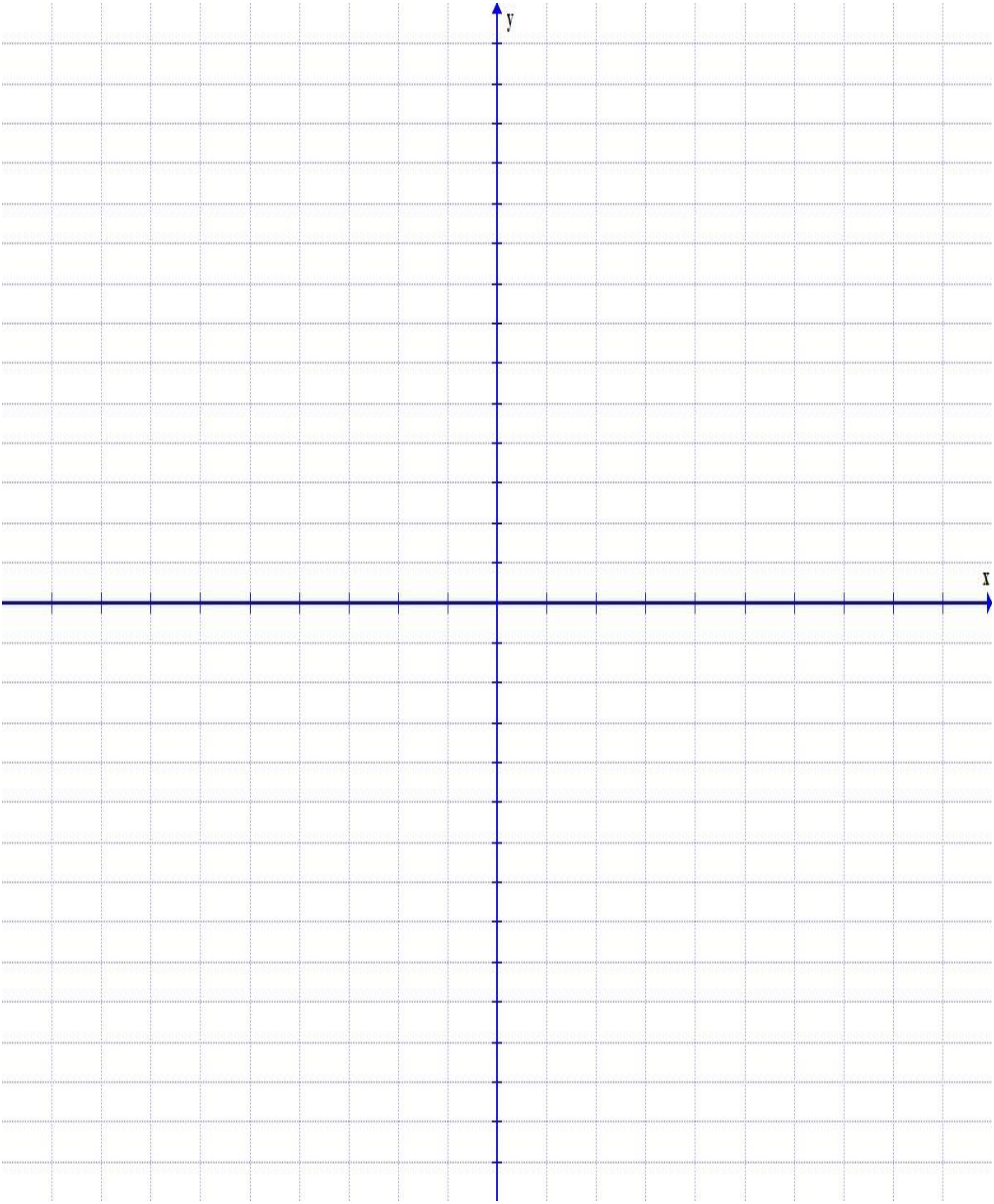
....

....

....

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

تابع حاول أن تحل (2) صفحة 150:



اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

تمارين متابعة تطبيقات على القيم القصوى

حاول أن تحل (1) صفحة 156:

أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

اليوم	التاريخ	الحصة	الصف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

كراسة التمارين (2) صفحة 63:

ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي $6\ cm$؟ وما أبعاده؟

الـيـوم	الـتـاريـخ	الحصـة	الـصـف
....	/ / ٢٠٢١م		١٢ع /
الموضوع	....		

كراسة التمارين (3) صفحة 63:

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ cm$. واحد منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمت بحمد الله