ثانوية سلمان الفارسي

قسم الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسى الاول

الوحدة الاولي(النهايات والاتصال)

نسخة غير محلولة

M.ATA

مخطط ذهني للنهايات

في حالة $x \to c$

أولا التعويض المباشر

فينتج احد الحالات التالية

$\dfrac{\text{عدد}}{\text{عدد} \neq \text{صفر}}$

خطوات حل حساب نهاية دالة دالة نسبية

1/ إعادة تعريف المطلق (ان وجد)

2/ التحقق ان نهاية ما تحت الجذر التربيعي اكبر من الصفر (ان وجد)

3/ حساب نهاية الجذر التربيعي او التكعيبي (ان وجد)

4/ التحقق ان نهاية المقام لاتساوي صفر (ان وجد)

5/ توزيع النهاية بسطا ومقاما (تبعا للنظريات)

6/ التعويض

7/ حساب النهاية

$\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

صيغة غير معينة (أنواع مختلفة لاختصار العامل الصفري)

1/ التحليل

2/ القسمة التركيبية

3/ إعادة تعريف المطلق

4/ الضرب في المرافق

5/ توحيد المقامات

6/ الدوال المثلثية

بعد الاختصار نستخدم الخطوات السابق ذكرها في الحالة الاولي

$\dfrac{\text{عدد}}{|\text{صفر}|}$

نستخدم نظرية 10,9

$$\frac{\text{عدد موجب}}{|\text{صفر}|} = \infty$$

$$\frac{\text{عدد سالب}}{|\text{صفر}|} = -\infty$$

في حالة $x \to \pm\infty$

نهاية حدودية

$$\lim_{x\to\pm\infty} (2x^2 - 3x + 1) = \infty$$

ملاحظات ص 52 (سؤال موضوعي)

نهاية حدودية نسبية

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2x} = \frac{1}{3}$$

نظرية 11 (سؤال موضوعي)

نهاية دالة نسبية

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + 5}$$

نظرية 7,8 (سؤال مقالي مشهور)

مخطط ذهني للاتصال

أولا : اتصال دالة عند نقطة باستخدام التعريف

1. دراسة اتصال دالة فرعية عند نقطة

ثانيا : اتصال دالة عند نقطة باستخدام نظريات الاتصال

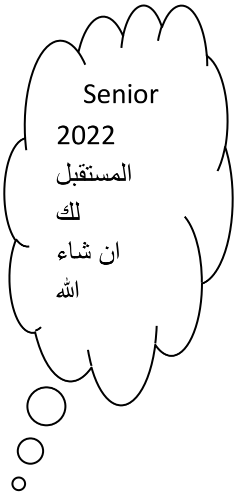
1. دراسة اتصال حاصل جمع او طرح او ضرب او قسمة دالتين كل منهما متصلة عند نقطة
2. دراسة اتصال دالة الجذر التربيعي عند نقطة
3. دراسة اتصال $(f \circ g)(x)$ عند $x = c$
4. دراسة اتصال دالة المطلق عند نقطة

ثالثا : اتصال دالة علي فترة

1. دراسة اتصال دالة فرعية علي $[a, b]$
2. دراسة اتصال دالة فرعية علي مجالها
3. اوجد قيمة كلا من a,b
4. دراسة اتصال دالة الجذر التربيعي علي (فترة او مجالها)
5. دراسة اتصال دالة الجذر التكعيبي علي R

بالتوفيق ان شاء الله

(1 – 1) النهايات



1 الفترة (2 , 12) تمثل جوارا للعدد .... وفق للمعيار ....

الفترة (5- , 1) تمثل جوارا للعدد .... وفق للمعيار ....

الفترة (9- , 2-) تمثل جوارا للعدد .... وفق للمعيار ....

الفترة التي تمثل جوارا للعدد 5 وفقاً للمعيار 3 هي ....

الفترة التي تمثل جوارا للعدد 7- وفقاً للمعيار 5 هي ....

نظرية (1)

يفرض أن L , c عددين حقيقيين

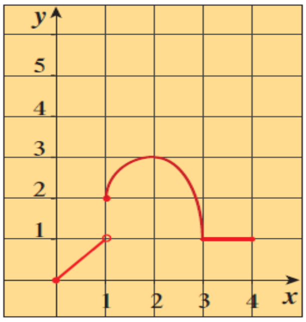
يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$

تدريب (1)

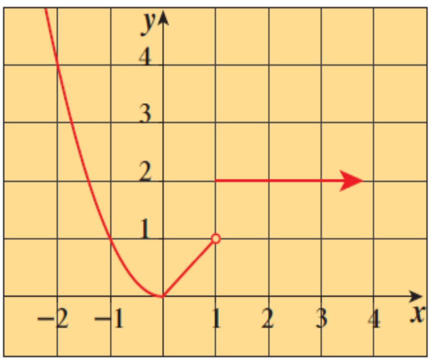
الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

أكمل ما يلي:



1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ldots$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ldots$
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ldots$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\ldots$
5. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ldots$
6. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ldots$
7. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\ldots$
8. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\ldots$
9. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\ldots$
10. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ldots$
11. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\ldots$

مثال (1)



الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f.

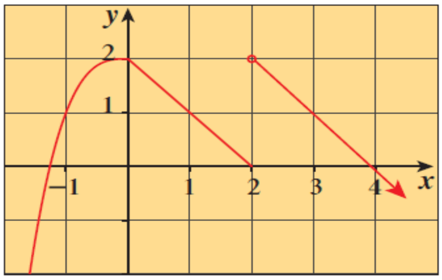
أوجد إن أمكن:

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

حاول أن تحل (1)

1 يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:



a $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

b $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

c $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

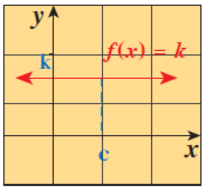
d $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

****

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x)=k$ وكان c , k عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

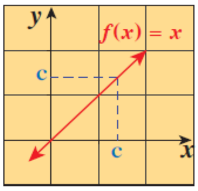


شكل (2)

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x)=x$ وكان c عددًا حقيقيًّا فإن:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$



شكل (3)

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ فإن:

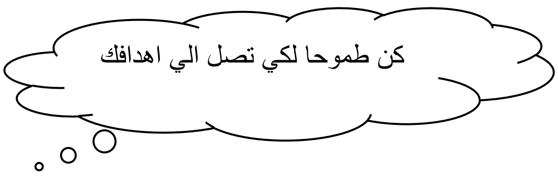
a قاعدة الجمع: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L+M$

b قاعدة الطرح: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L-M$

c قاعدة الضرب: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L\cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot \lim\limits_{x\to c} f(x) = k\cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\ M \neq 0$



مثال (2)

بفرض أنّ: $\lim_{x\to1} g(x) = 5$, $\lim_{x\to1} f(x) = -2$

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to1}(f(x)-g(x))$

ⓑ $\lim_{x\to1}\frac{2f(x)}{g(x)}$

ⓒ $\lim_{x\to1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)}$

حاول أن تحل (2)

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to2} g(x) = -3$, $\lim_{x\to2} f(x) = 7$

أوجد:

ⓐ $\lim_{x\to2}(f(x)+g(x))$

ⓑ $\lim_{x\to2}(f(x)\cdot g(x))$

ⓒ $\lim_{x\to2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبيّة
Polynomial and Rational Functions

a إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

b إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , \quad g(c) \neq 0$$

مثال (3)

اوجد ان امكن:

$$\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$$

....

....

....

....

....

....

$$\lim_{x \to 3} (x^2 (2 - x))$$

....

....

....

....

....

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

حاول أن تحل (3)

اوجد ان امكن:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

حاول أن تحل (4)

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 2} f(x)$

مثال (5)

إذا كانت الدالة g :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leqslant 0 \\ 1 - 2x & x > 0 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 0} g(x)$

هل اديت فروضك ؟؟

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x<1 \\ 5 & x=1 \\ \dfrac{5}{x} & x>1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (5)

إذا كانت الدالة g:

$$g(x) = \begin{cases} x^3+x & x>1 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & x\leqslant 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

كراسة التمارين

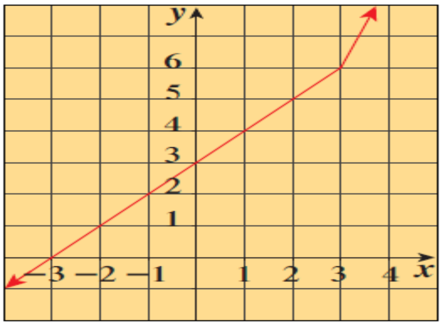
لتكن الدالّة f:
$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4\,, & -1\le x<1\\ 2\,, & 1\le x<2\\ x\,, & 2\le x<4\end{cases}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ $(c)\ \lim_{x\to 3} f(x)$

بالسؤال يتعلم الانسان

مثال (6)



لتكن: $f(x) = |x - 3| + 2x$ الممثلة بالشكل.

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ ؟

لايوجد مستحيل

حاول أن تحل (6)

تستطيع
ان تفعلها
مهما
كانت

لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

نظرية (6)

بفرض أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a) $\lim_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$

b) $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$)

c) $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$)

مثال / حاول أن تحل (7)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}(x^2-3)^7$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3}$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1}\sqrt[3]{x^3-4x+5}$$

الفرق بين الاغبياء والاذكياء،الاغبياء يملكون حلما ، الاذكياء يملكون هدفا

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 9} =$$

لا تفكر بالاهداف التي تناسب قدراتك

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{3x^2 - 2} =$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 7} =$$

فكر بالقدرات التي تناسب اهدافك مثل التركيز في الدراسة

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 4} (x + \sqrt{x})^4$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$$

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$$

حلل ما يلي :

$x^2 + x - 2 =$

$x^2 + 3x + 2 =$

$x^2 + 7x =$

$x^2 + x =$

$x^2 - 1 =$

$x^2 - 4 =$

$x^3 - 8 =$

$x^3 + 27 =$

$(\cdots\cdots)^2 - 9 = [(\cdots\cdots) - 3]\,[(\cdots\cdots) + 3]$

$(x + 4)^2 - 9 =$

كل
اغنياء
العالم
كانوا
فقراء
ولكن
لديهم
طموح

$(\cdots\cdots)^3 + 8 = [(\cdots\cdots) + 2]\,[(\cdots\cdots)^2 - 2(\cdots\cdots) + 4]$

$(\cdots\cdots)^3 - 27 = [(\cdots\cdots) - 3]\,[(\cdots\cdots)^2 + 3(\cdots\cdots) + 9]$

$(2 + x)^3 + 8 =$

$x - 1 = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

$x - 1 = [\sqrt[3]{x} - 1][(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1]$

كن طموح وحقق اهدافك

مثال (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} =$$

انار الله
دربك
ووفقك
لما يحب
ويرضاه

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} =$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4+x)^2-16}{x}=$$

النجاح
ملك من
يدفع
ثمنه

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}=$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x}=$$

مثال (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=$$

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

مثال (10) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}=$$

مثال (10) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2}=$$

قد تتعثر احيانا
وتسقط احيانا اخري
انهض وواصل الطريق

حاول أن تحل (10)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}=$$

حاول أن تحل (10)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}=$$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

حاول أن تحل (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}=$$

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

مثال (8)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1} =$$

قيل لنابليون بونابرت يوما ان جبال
الاب شاهقة تمنع تقدمك ، فقال يجب
ان تزول من الارض

مثال (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=$$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

حاول أن تحل (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=$$

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

حاول أن تحل (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} =$$

كراسة التمارين

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$$

من لا يشكر الناس لا يشكرالله

اشكر ثلاث اشخاص غدا

مثال (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt[3]{9x}-3}=$$

قد تكون افضل الطرق اصعبها لكن عليك دائما اتباعها

مثال (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} =$$

كراسة التمارين

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} =$$

الحكمة هي ان تعرف ما الذي يجب ان تفعله

حاول أن تحل (9)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt[3]{x - 1}} =$$

المهارة ان تعرف كيف تفعله

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=$$

كراسة التمارين

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{x^2-4}\right)=$$

النجاح ان تفعله

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=$$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

(2 ـ 1) نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞

نظرية (9)

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to c^-} f(x)=\infty\right)$$

$$\lim_{x\to c} f(x)=-\infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to c^-} f(x)=-\infty\right)$$

نظرية (10)

إذا كان n عدد صحيح زوجي موجب فإن:

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{(x-c)^n}=\infty$$

إذا كان n عدد صحيح فردي موجب فإن:

1. $\lim_{x\to c^+} \frac{1}{(x-c)^n}=\infty$
2. $\lim_{x\to c^-} \frac{1}{(x-c)^n}=-\infty$

حيث $c\in\mathbb{R}$

مثال (2) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|}=$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (2)

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -1} \frac{3}{|x+1|} =$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to -2} \frac{-7}{|x+2|} =$$

تعود على العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{(x-3)^2}}=$$

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$\lim_{1^{+}}\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}=$$

الفاشلون
ينحنون
للعقبات ،
الابطال
يجعلون
العقبات
تنحني
لهم

(2 – 1) نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞

نظرية (7)

لتكن f: $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

نظرية (8)

لتكن f : $k\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $f(x)=\frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0\quad,\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0$$

فمثلاً: $\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x^3}=0\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^4}=0\ ,\ ...$

تبقى النظريات (c , a (6), (4), (2) صحيحة عند إيجاد $\lim_{x\to\infty}f(x)$ وكذلك عند إيجاد $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

مثال (1) أوجد إن أمكن

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+4}=$$

....

....

....

....

....

....

مثال (1)

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25}=$$

....

....

....

....

....

نتعلم من الفشل اكثر من النجاح

مثال (1)

أوجد إن أمكن

$$c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3}{5-7x^3} =$$

حاول أن تحل (1)

أوجد إن أمكن

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+4} =$$

ثق بنفسك ، فانت تعرف اكثر مما تعتقد

$$b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2+9} =$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5} =$$

(3 – 1) صيغ غير معينة

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \quad , \quad a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

أحيانًا نحتاج لحساب نهاية دالة على الصورة: $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

حيث: $\lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية: $\frac{-\infty}{-\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

ونسميها صيغ غير معينة.

كذلك إذا حسبنا $\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ وحصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$

فهي تسمى أيضًا صيغة غير معينة.

مثال (1) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1) =$$

....

....

....

....

حاول أن تحل (1) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to \infty} (-3x^2 + 2x - 4) =$$

....

....

....

....

....

....

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$ فإن:

a $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \ : \ n = m$

b $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ : \ n < m$

ملاحظة: تبقى النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

مثال (2) أوجد إن أمكن

$$(a) \lim_{x\to\infty} \frac{4-3x^3}{2x^3+5} =$$

$$(b) \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x-1}{3x^4-x} =$$

$$(c) \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4} =$$

حاول أن تحل (1) أوجد إن أمكن

$$(a) \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^3+5x+1}{6x^2-x+1} =$$

$$(b) \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{4x^3-2x+3} =$$

مثال (3)

اذا كان

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5}=3$$

فاوجد قيمة كل من الثابيتين b ، a

حاول أن تحل (3)

اذا كان

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3}=-1$$

فاوجد قيمة كل من الثابيتين b ، a

ساصير يوما ما اريد

مثال (4)

أوجد إن أمكن

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}=$$

الجميع يفكر في تغيير العالم ،لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

حاول أن تحل (4)

أوجد إن أمكن

$$b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x+1} =$$

حاول أن تحل (4)

أوجد إن أمكن

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}} =$

ابدا بنفسك

كراسة التمارين

أوجد إن أمكن

$$d)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}=$$

تستطيع ان تفعلها

(4 – 1) نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12)

حيث x بالراديان ، $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة (1)

إذا كان b ، a عددين حقيقيين، $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \tan x = 0$$

يمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية.

نتيجة (2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a , b \in \mathbb{R}^*$ فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

Senior 2022
ان شاء الله

مثال (1)

أوجد:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}=$$

كراسة التمارين

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\cos x}=$$

كراسة التمارين

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}=$$

رايك في نفسك اهم من راي الاخريين فيك

مثال (1)

أوجد:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}=$$

حاول أن تحل (1)

أوجد:

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}=$$

حاول أن تحل (1)

أوجد:

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x}=$$

نحن من نصنع مصائرنا

كراسة التمارين

أوجد:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 7x}=$$

كراسة التمارين

أوجد:

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 2x}=$$

حاول أن تحل (2)

أوجد:

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\tan x}=$$

كراسة التمارين

أوجد:

$$d)\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}=$$

قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

مثال (2)

أوجد : -

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x-3\sin x}{4x}=$$

حاول أن تحل (2)

أوجد : -

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x+x^{2}\cos x}{5x}=$$

مثال (3)

أوجد : -

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin x}{x}=$$

ابتسم للحياة

حاول أن تحل (3)

أوجد : -

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - x^2}{3x^2} =$$

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال (3)

أوجد : -

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x - 2x\cos x}{3x} =$$

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (3)

أوجد : -

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x} =$$

....

....

....

....

....

....

....

لا يأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس

مثال (1)

أوجد : -

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (1)

أوجد : -

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}=$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

هل اديت فروضك ؟؟

كراسة التمارين

أوجد : -

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=$$

كراسة التمارين

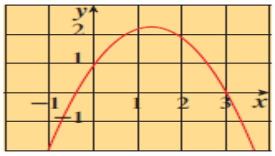
أوجد : -

$$d)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=$$

الامال العظيمة تصنع الاشخاص العظماء

(5 – 1) الإتصال

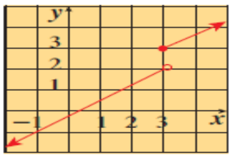
تدريب



$\lim_{x\to3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

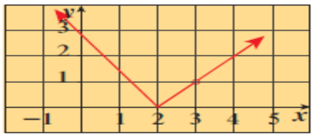
ماذا تلاحظ؟



$\lim_{x\to3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

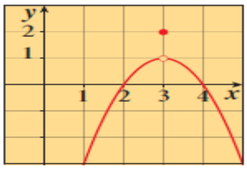
ماذا تلاحظ؟



$\lim_{x\to3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟



$\lim_{x\to3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x=c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f معرفة عند $x=c$ أي $f(c)$ موجودة.
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x=c$.

مثال (1)

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : x\geq 1 \\ 5x-1 & : x<1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل (1)

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \ x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : \ x>0 \end{cases}$$

ابحث اتصال f عند $x=0$

مثال (2)

لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : \ x>3 \\ 7 & : \ x\le 3 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

حاول أن تحل (2)

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : \ x < 2 \\ 1 & : \ x = 2 \\ x^2+1 & : \ x > 2 \end{cases}$$

مثال (3)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{|x-2|} & : \ x\neq 2\\ 1 & : \ x=2\end{cases}$$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

حاول أن تحل (2)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

وفقك الله دائما

كراسة التمارين

في التمرينين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$(8)\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x}{|x|} & : x\neq 0\\ -3 & : x=0\end{cases}\quad ,\quad x=0$$

تعلم ان تكون حليما صبورا

في التمرينين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$(7)\quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} & : x \neq -1 \\ -1 & : x = -1 \end{cases} \quad , \quad x = -1$$

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

في التمرينين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$:

$$(9)\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{2} & : x=1\end{cases}\quad , \quad x=1$$

لا تبحث عن الاخطاء بل ابحث عن الصواب

(6 - 1) نظريات الإتصال

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f , g دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

1. الجمع: $f + g$
2. الطرح: $f - g$
3. الضرب في ثابت: $k \cdot f$ ، $k \in \mathbb{R}$
4. الضرب: $f \cdot g$
5. القسمة: $\frac{f}{g}$ ، $g(c) \neq 0$

دوال متّصلة — Continuous Functions

1. الدالة f : $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة f : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

ابحث اتصال الدالة f عند العدد المبين

1) $f(x) = 5$, $x = -1$

....

....

2) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x = 2$

....

....

3) $f(x) = |x|$, $x = -3$

....

....

اول النخلة نواة

4) $f(x) = \sin x \qquad , x = \dfrac{\pi}{2}$

....

....

5) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+3} \qquad , x = 2$

....

....

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت f دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $f(c) > 0$
فإن الدالة: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x = c$

6) $f(x) = \sqrt{x} \qquad , x = 3$

....

....

7) $f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad , x = -2$

....

....

8) $f(x) = \sqrt{x+3} \qquad , x = -1$

....

....

....

....

....

اننا نصنع مصائرنا،اننا نصبح مانفعله

مثال / حاول أن تحل (1)

ابحث اتصال الدالة f عند x = 3

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 + |x|$$

ابحث اتصال الدالة f عند x=-3

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 - \sqrt[5]{x}$$

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

مثال / حاول أن تحل (3)

ابحث اتصال الدالة f عند x=1

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+9}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=\frac{\pi}{4}$

$$f(x)=\frac{\tan x}{x+1}$$

ابحث اتصال الدالة f عند x=-2

$$f(x)=\sqrt{x^2-3}+|x|$$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

مثال (4)

الدالتان g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ **b** $(g \circ f)(2)$ **c** $(f \circ g)(x)$ **d** $(f \circ g)(2)$

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل

4 إذا كانت g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ **b** $(g \circ f)(-1)$ **c** $(f \circ g)(x)$ **d** $(f \circ g)(-1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

الطموح هو الوقود للوصول الي النجاح

مثال (5)

لتكن: $f(x)=\sqrt{x}\quad,\quad g(x)=x^4+2$

أوجد:

a $(f\circ g)(x)$ b $(f\circ g)(0)$ c $(g\circ f)(x)$ d $(g\circ f)(0)$

حاول أن تحل

5 لتكن: $g(x)=\dfrac{3}{x^2+4}\quad,\quad f(x)=\sqrt{1+x^2}$ أوجد:

a $(f\circ g)(x)$ b $(g\circ f)(\sqrt{3})$

اذا لم تجد طريق اصنع واحدا

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متصلة عند c.

مثال (6)

لتكن: $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x=-2$

كراسة التمارين

(9) لتكن: $f(x)=2x^2-3$ ، $g(x)=\sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x=-2$

الياس ليس من شيم الابطال

حاول أن تحل (6)

لتكن: $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x=1$

ثق في نفسك

مثال (6)

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

حاول أن تحل (6)

لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

انت قادر ان تفعلها

(10) ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \left|\sqrt{x} - 3\right|$ عند $x = 4$

حقق حلمك وحلم من احبوك

(11) ابحث اتصال الدالة g : $g(x)=\sqrt{x^2+1}-|x-3|$ عند $x=3$

حاول ثم حاول لكي تحقق هدفك

(7 – 1) الإتصال على فترة

الاتّصال على فترة — Continuity on an Interval

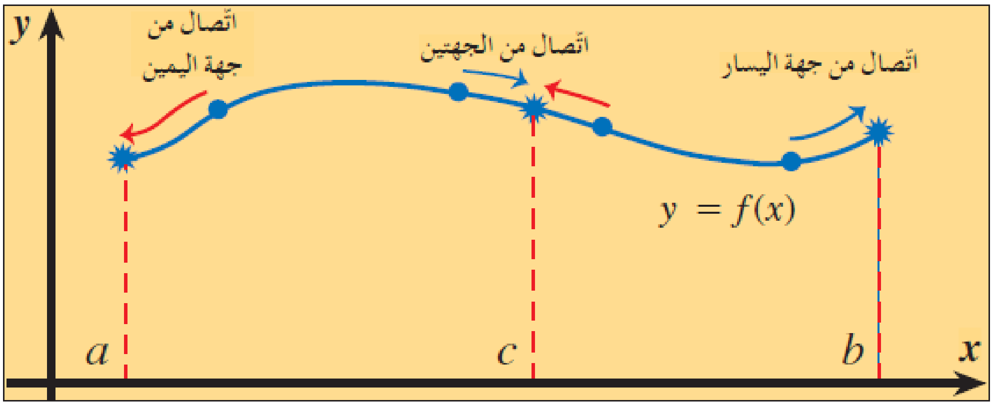
تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة (a , b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b)
إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a , b)

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$



الاتصال عند النقاط a, b, c للدالة $y = f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $[a , b)$**.

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $(a , b]$**.

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a , c]$, $[c , b]$ فإن الدالة متصلة على $[a , b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a , \infty)$, $(-\infty , b]$.

مثال (1)

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة :

$$a)\ f(x)=\frac{x}{x^2+1},\qquad [-1,5]$$

$$b)\ f(x)=\frac{x}{x^2-4},\qquad [0,5]$$

حاول أن تحل (1)

$$a)\ f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2},\qquad [0,3]$$

$$b)\ f(x)=\frac{x}{x^2-1},\qquad [0,2]$$

مثال (2)

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : \quad x = 1 \\ x^2 - 3 : & 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

الخطا يسبق الصواب والفشل يسبق النجاح

حاول أن تحل (2)

ادرس اتصال الدالة f على $[1 , 5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : \quad x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \quad 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : \quad x=5 \end{cases}$$

ان الله لا يغير مابقوم حتي يغيروا ما بانفسهم

مثال (3) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

لكل نجاح بداية ولكل فشل نهاية

حاول أن تحل (3)

لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \quad x<1 \\ -x+2 & , \quad 1\le x<3 \\ 1 & , \quad x\ge 3 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

لن تسقط السماء ذهبا فلا تنتظر

مثال (4)

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$

متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين $a\ ,\ b$

احسن استغلال وقتك

حاول أن تحل (4)

4 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}5 & : \quad x=1\\ ax+b & : \quad 1<x<4\\ b+8 & : \quad x=4\end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين $a\,,\,b$

الصعب ليس في الوصول الي القمة الصعب في الحفاظ عليها

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5,0]$.

حاول أن تحل (5)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

مثال (6)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3,3]$.

حاول أن تحل (6)

لتكن f : $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$.

العلم هو الخير والجهل هو الشر

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (7)

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل (7)

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

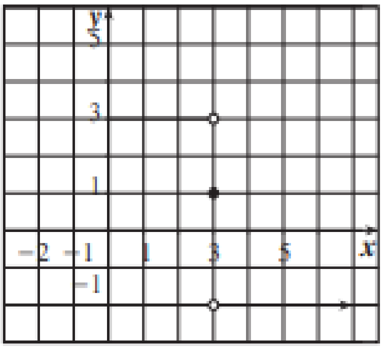
نطمح
نحلم
نتامل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل

(1 - 1) النهايات

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) — (a)



(2) $\lim_{y\to 2} \dfrac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ — (b)

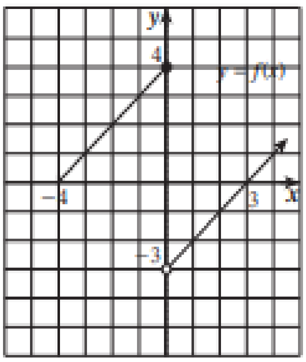
(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ — (a)

(4) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ — (b)

(5) $\lim_{x\to 1^+} (2x-|x|+2) = 3$ — (b)

في التمارين (6—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f.



العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$

(d) $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$

(7) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+3x^2-2x-17)=$

(a) 17 (b) -17 (c) 9 -9

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=$

(a) 1 (b) 0 $\frac{1}{2}$ (d) غير موجودة

(9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}=$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$

(a) -1 (b) 1 $\frac{1}{2}$ (d) 0

(11) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x^2-4}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}=$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{4}$

(13) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}=$

12 (b) -12 (c) 4 (d) -4

(14) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^3+9x^2+9x}{x+3}=$

9 (b) 0 (c) -3 (d) -9

(2 - 1) نهايات تشتمل على ∞ـ ، ∞

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x \to -4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ — (a) (b)

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ — (a) (b)

(3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ — (a) (b)

(4) $\lim_{x \to \infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ — (a) (b)

(5) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$ — (a) (b)

في التمارين (6 — 13)، ظلل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) $\frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+3} =$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 1 (d) 0

(8) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right) =$

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

(9) $\lim_{x \to \infty} \frac{-|x+3|}{2x} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

(10) $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{3}{x-2}\right)^5 =$

(a) 0 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$

(11) $\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{(x-4)^3} =$

(a) ∞ (b) 2 (c) $-\infty$ (d) 0

(3 – 1) صيغ غير معينة

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ — a , b

(2) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ — a , b

(3) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ — a , b

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ — a , b

(5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ — a , b

(6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\frac{3}{2}$ — a , b

في التمارين (7—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $-\infty$

(8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 3 (d) -3

(9) $\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}}=$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

(10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(11) إذا كان: $\lim_{x\to\infty}\frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}=-2$ فإن قيم n , m هي:

(a) $m=0\ ,\ n=-2$ (b) $m=0\ ,\ n=2$ (c) $m=1\ ,\ n=-1$ (d) $m=1\ ,\ n=1$

(12) إذا كانت: $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4}=1$ فإن قيم n , m هي:

(a) $m=0\ ,\ n=-2$ (b) $m=0\ ,\ n=2$ (c) $m=0\ ,\ n=4$ (d) $m=0\ ,\ n=-4$

(4 - 1) نهايات بعض الدوال المثلثية

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$ معلــق (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos 2x}{4x} = \dfrac{1}{2}$ معلــق (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x} = 0$ (a) ☹

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin 2x}{2\cos 2x} = \dfrac{1}{2}$ ☹ (b)

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2\sin x + 5x^3}{4x^3} = 2$ معلــق (a) (b)

في التمارين (6—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin x} =$

☹ 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \left(3 + x^2 \sin \dfrac{1}{x}\right) =$ معلــق

(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) ∞

(8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - x\cos x}{2x^2}$ معلــق

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) -2 (d) 2

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2 + 5\sin^2 x}{3x^2} =$

☹ 3 (b) 9 (c) 0 (d) ∞

(10) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x + \cos x}{|2x|} =$ معلــق

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) 0 (d) ∞

(5 – 1) الإتصال

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}+1$ متصلة عند $x=-2$ (a)   ☺

(2) الدالة: $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ ☺   (b)

(3) الدالة: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x=-1$ ☺   (b)

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-1$ وكان $\lim\limits_{x\to-1}(f(x)-2)=-1$ فإنّ $f(-1)=1$ ☺   (b)

في التمارين (5—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\cot x$ هي:

(a) $0\ ,\ \pi$ (b) $2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

☺ $k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ (d) $\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

(6) نقاط الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

☺ 2 (b) $-2\ ,\ 2$ (c) -2 (d) $-5\ ,\ 2$

(7) نقاط الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) $-1\ ,\ 2$ (b) -2 (c) $1\ ,\ -2$ ☺ 1

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=2$ فإنّ $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $\dfrac{1}{|x-2|}$ (b) $\sqrt{x-2}$ (c) $\dfrac{|x-2|}{x-2}$ ☺ $\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & : x>2\\ 3x-5 & : x\leqslant 2\end{cases}$

(9) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : x\geq 2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2} & : x<2\end{cases}$ فإنّ:

(a) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=4$ ☺ $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=4$ (c) $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ موجودة   (d) f متصلة عند $x=2$

(10) لتصبح الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ متصلة عند $x=1$، يجب إعادة تعريفها على الشكل التالي:

معلـــق

(a) $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^3-1} & , \quad x\neq 1, \quad x\neq -1 \\ \dfrac{3}{2} & , \quad x=1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & , \quad x>1 \\ \dfrac{3}{2} & , \quad x=1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & , \quad x\neq 1, \quad x\neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x=1 \end{cases}$

(d) لا يمكن إعادة تعريفها

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+f(x))=7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

3

(b) 5

(c) 9

(d) 11

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x=1$ وكانت النقطة $(1\ ,\ -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim\limits_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي:

(a) -6

(b) -3

(c) 1

9

في التمارين (13–15)، توجد قائمتان. اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2) لتحصل على عبارة صحيحة:

إذا كانت g دالة متصلة عند $x=a$ ، $a\in\mathbb{Z}$ وكانت:

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $g(x)=\begin{cases} x+1 & : \ x>a \\ 3-x & : \ x\leq a \end{cases} \quad \Rightarrow a=$	(a) -1
	(b) 2
(14) $g(x)=\begin{cases} 2ax-2 & : \ x\neq a \\ 3a & : \ x=a \end{cases} \quad \Rightarrow a=$	(c) 0
	(d) 1
(15) $g(x)=\begin{cases} 3x^2 & : \ x>a \\ 2x & : \ x\leq a \end{cases} \quad \Rightarrow a=$	(e) $\dfrac{2}{3}$

(6 - 1) نظريات الإتصال

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x)=x^2+|x-1|$ متصلة عند $x=3$ — (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{2}{x}$ متصلة عند $x=0$ — (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x=0$ — (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x=3$ — (a) (b)

(5) الدالة f: $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$ متصلة عند $x=2$ — (a) (b)

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) $x=3$
(b) $x=-3$
(c) $x=2$
(d) لا يوجد نقاط انفصال

(7) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي:

(a) $1\ ,\ -1$
(b) $2\ ,\ -2$
(c) $1\ ,\ 2$
(d) $-1\ ,\ -2$

(8) لتكن الدالة f: $f(x)=x^2+3, x\neq 0$ ، الدالة g : $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g\circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$
(b) $\dfrac{x^2}{x^2-3}$
(c) $\dfrac{x^2+3}{x^2}$
(d) $\dfrac{x^2}{x^2+3}$

(9) لتكن الدالة f: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g: $g(x)=x^2+3, x\neq 0$ ، فإن: $(f\circ g)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{x^2}{x-3}+3$
(b) $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+3$
(c) $\dfrac{-(x^2+3)}{x}$
(d) $\dfrac{x^2+3}{|x|}$

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4
(b) -4
(c) 1
(d) -1

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\sqrt{g(x)}$
(b) $\dfrac{1}{g(x)}$
(c) $\dfrac{g(x)}{x-2}$
(d) $|g(x)|$

(12) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي:

(a) 4
(b) 9
(c) 16
(d) 25

(7 – 1) الإتصال على فترة

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[3\ ,\ 5]$, $[1\ ,\ 3)$ فإن f متصلة على $[1\ ,\ 5]$ — a

(2) الدالة f: $f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ — b

(3) الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$ — a

(4) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 0)$ — a

(5) الدالة f: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 2)$ فقط — a

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة f: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f:

(a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x = 4\ ,\ x = -1$

(b) متصلة على $(-\infty\ ,\ 4]$

متصلة على كلٍ من $(4, \infty)\ ,\ (-\infty, 4)$

(d) ليس أي مما سبق

(7) إذا كانت f دالة متصلة على $[-2\ ,\ 3]$ فإن:

(b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(3)$

(a) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(-2)$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

(8) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2 - 25}}$ متصلة على:

$(5\ ,\ \infty)$

(a) $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right]$

(d) $(-5\ ,\ 5)$

(c) $\mathbb{R}$

(9) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} & : \ x \leqslant -3 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : \ -3 < x < 0 \\ \dfrac{4-x^2}{x-2} & : \ x \geqslant 0 , x \neq 2 \end{cases}$، فإن f دالة متصلة على:

(b) $(-\infty\ ,\ 2)$

(a) $(-\infty\ ,\ \infty)$

$(-\infty\ ,\ -3]$

(c) $(-\infty\ ,\ 0]$

(10) الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{3x+m}{x-2} & : \quad x<1\\ x+n & : \quad x>1\\ 2m & : \quad x=1\end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

(a) $m=-1 \quad , \quad n=3$

(b) $m=1 \quad , \quad n=-3$

$m=-1 \quad , \quad n=-3$

(d) $m=1 \quad , \quad n=3$

(11) الدالة g : $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & : \quad x>1\\ 3x & : \quad x\le 1\end{cases}$ متصلة على:

$(-\infty\ ,\ 1]\ ,\ (1\ ,\ \infty)$

(b) $(-\infty\ ,\ 1)\ ,\ [1\ ,\ \infty)$

(c) $(-\infty\ ,\ \infty)$

(d) $(-\infty\ ,\ 3]$