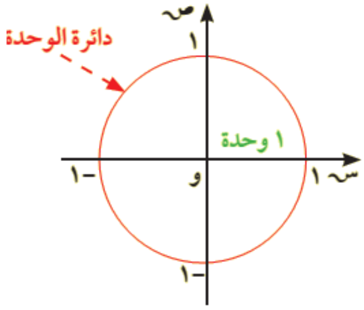
الوحدة الثامنة

حساب المثلثات

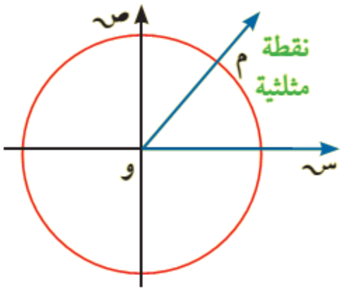
- ٨ـ١ دائرة الوحدة في المستوي الإحداثي و الدوال المثلثية
- ٨ـ٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)
- ٨ـ٣ العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

٨- ١ دائرة الوحدة في المستوي الإحداثي و الدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل و ، و طول نصف قطرها واحد وحدة .



النقطة المثلثية : هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة .

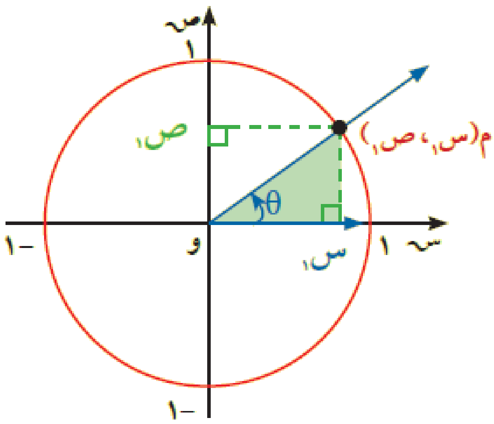


النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

$\text{جتا}\,\theta = \text{س}_1$ $\text{جا}\,\theta = \text{ص}_1$

$\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{ص}_1}{\text{س}_1}$ ، $\text{س}_1 \neq ٠$ $\text{ظتا}\,\theta = \dfrac{\text{س}_1}{\text{ص}_1}$ ، $\text{ص}_1 \neq ٠$

$\text{قا}\,\theta = \dfrac{١}{\text{س}_1}$ ، $\text{س}_1 \neq ٠$ $\text{قتا}\,\theta = \dfrac{١}{\text{ص}_1}$ ، $\text{ص}_1 \neq ٠$



الدوال الدائرية (المثلثية)

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠

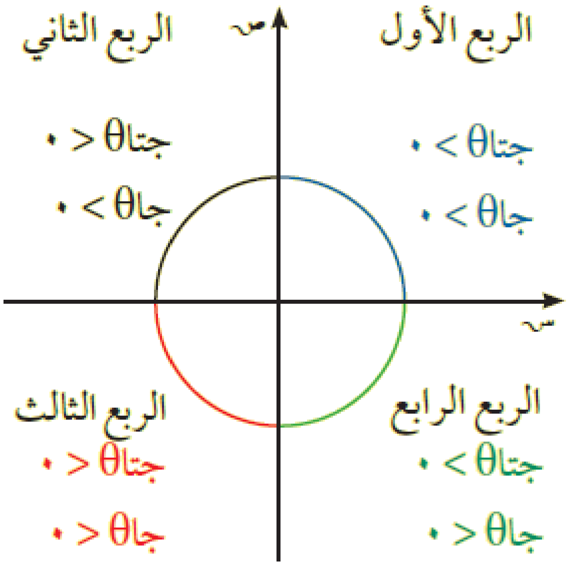
من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠ ، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠ ، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠ ، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠ ، جتاθ > ٠



مثال (١) : حدد إشارة جاθ ، جتاθ في كل مما يلي :

أ $\theta = ١٣٥^\circ$ ب $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$ جـ $\theta = ٣٠٥^\circ$

الحل :

تطبيق (٢) : أ إذا كانت $٩٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$ ماهي إشارة جتا θ ؟

ب إذا كانت $٠^\circ < \theta < \pi$. ما هي إشارة جا θ ؟

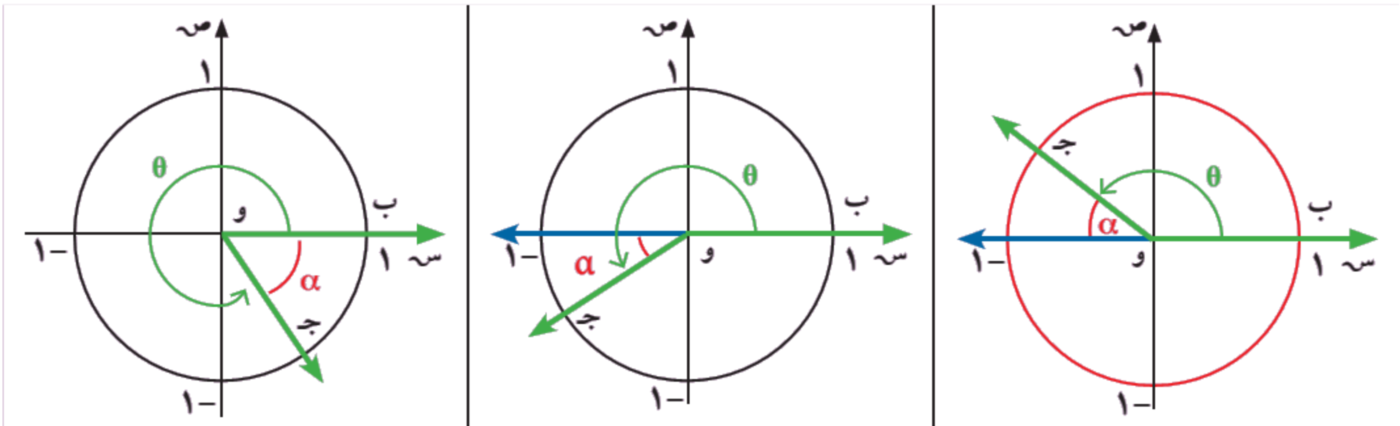
زاوية الإسناد

تعريف زاوية الإسناد :

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (و$\overleftarrow{\text{ب}}$، و$\overleftarrow{\text{جـ}}$) التي في وضع قياسي هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠° < \alpha < ٩٠°$

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد :



عندما θ تقع في الربع الثاني
$\alpha° = ١٨٠° - \theta°$
$\alpha^{ء} = \pi - \theta^{ء}$

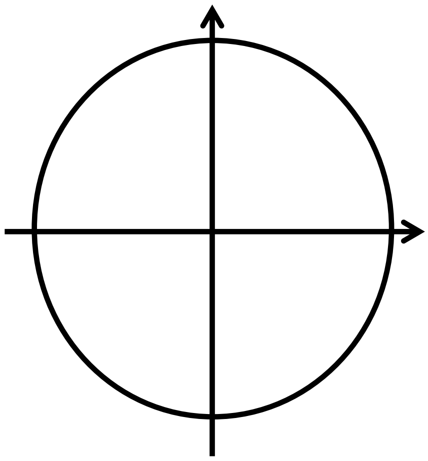
عندما θ تقع في الربع الثالث
$\alpha° = \theta° - ١٨٠°$
$\alpha^{ء} = \theta^{ء} - \pi$

عندما θ تقع في الربع الرابع
$\alpha° = ٣٦٠° - \theta°$
$\alpha^{ء} = ٢\pi - \theta^{ء}$

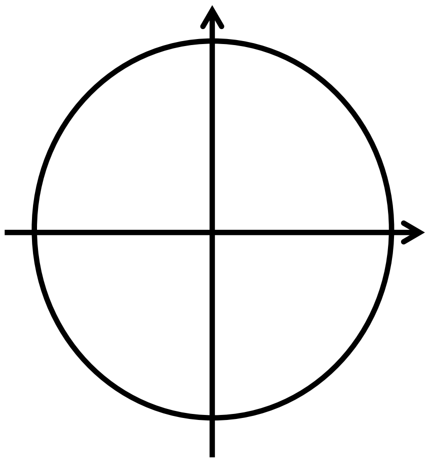
****

مثال (٣) : ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ، ثم عيّن زاوية الإسناد و أوجد قياسها لكل مما يلي :

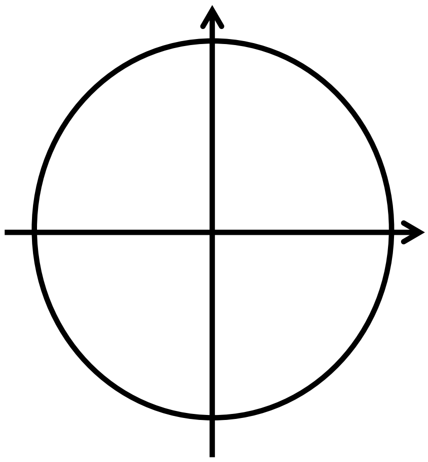
أ) ١٢٥°



ب) ٢١٥°

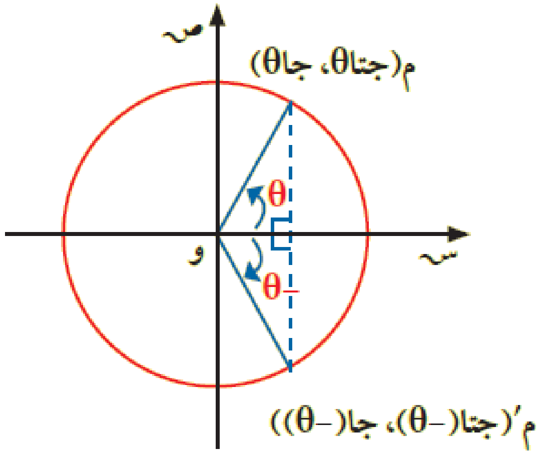


جـ) $\frac{\pi 11}{٦}$



٨-٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

النسب المثلثية للزاويتين θ، -θ.



قانون:

جتا(-θ) = جتاθ

جا(-θ) = -جاθ

وبالتالي ظا(-θ) = -ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

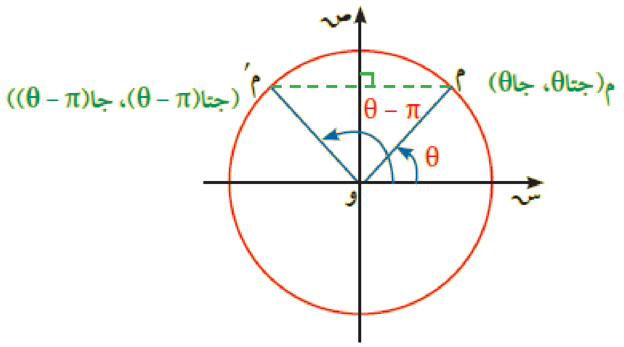
مثال (١) :

أ إذا كان جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ فأوجد جتا $\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$

ب إذا كان جا٣٦° ≃ ٠٫٥٨٧٨ ، فأوجد جا(-٣٦°)

جـ إذا كان ظا٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(-٤٥°)

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\pi - \theta)$.



قانون:

جتا$(\pi - \theta)$ = –جتاθ

جا$(\pi - \theta)$ = جاθ

وبالتالي ظا$(\pi - \theta)$ = –ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال (٢) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان :

أ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ فأوجد جتا ١٢٠°

ب جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، أوجد جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

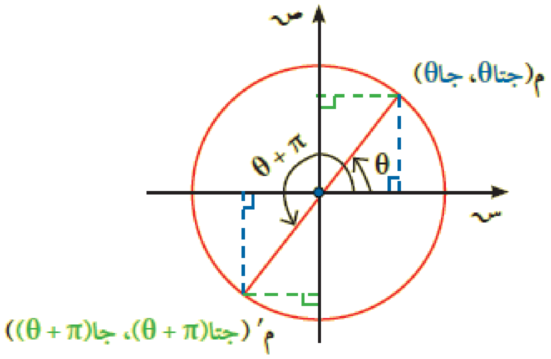
جـ ظاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، أوجد ظا$(\pi - \theta)$.

تطبيق (٢) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان :

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ فأوجد جا ١٥٠°

ب ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ – $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi + \theta)$.



قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = −جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال (٣) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان :

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ فأوجد جا ٢١٠°

ب ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ ، فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

تطبيق (٣) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان : جتا ٤٠° ≃ ٠٫٧٦٦ فأوجد جتا ٢٢٠°

مثال (٤) : بدون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد :

أ جا ١٥٠°

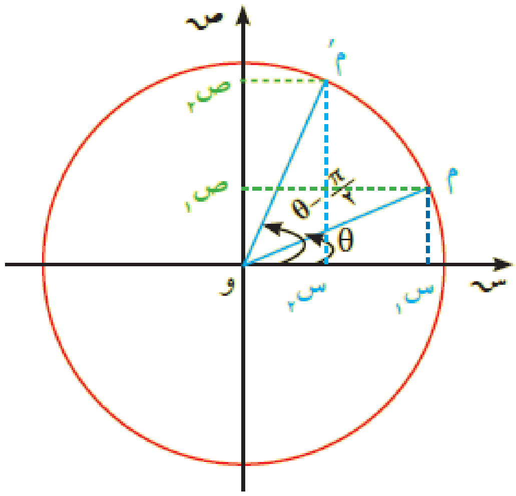
ب جتا ٢٤٠°

جـ ظا $\frac{٢\pi}{٣}$

تطبيق (٤) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان : جا ٥٦° ≃ ٠٫٨٢٩ فأوجد جا ٢٣٦°

****

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$



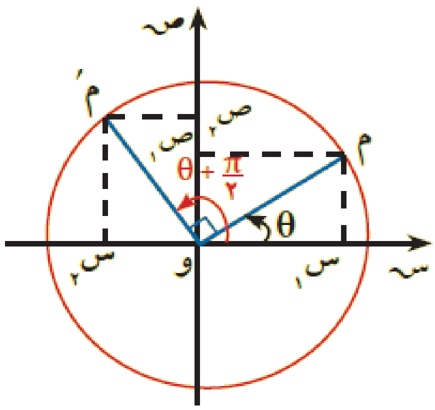
قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$



قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

مثال (٥) : اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ

أ جا $(\pi+\theta)$ --

ب جتا $(\pi-\theta)$ --

جـ جا $\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ --

د جتا $\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$ --

تطبيق (٥) : اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س

أ ظا (١٨٠° - س) --

ب جتا (١٨٠° + س) --

جـ جا (-س) --

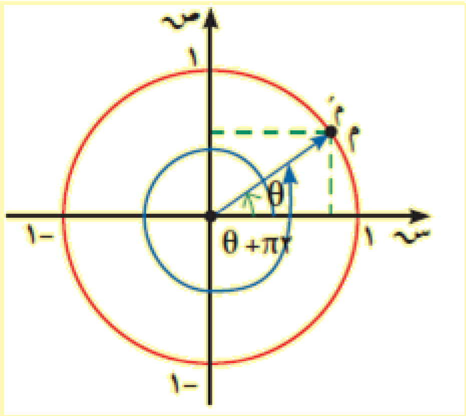
الدوال المثلثية (الدائرية) على ح

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا(θ + ٢ك π) = جاθ

جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ

ظا(θ + ك π) = ظاθ حيث ظاθ معرّف



مثال (٦) : بسط التعبير التالي لأبسط صورة :

جا س + جا (٩٠° +س) +جا (١٨٠° +س) + جا (٩٠° – س)

تطبيق (٦) : بسط كلاً من التعبيرات التالية لأبسط صورة :

أ) جتا $(\pi - \theta)$ - جتا $(-\theta)$ + جا $(\pi + \theta)$ + جتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta)$

ب) جا $(\pi + \theta)$ - جتا $(\theta + \frac{\pi}{٢})$ + جتا $(\theta - \pi)$ + جا $(\frac{\pi}{٢} + \theta)$

****

مثال (٧) : أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة :

أ جا ١٥٠ْ ---

ب ظا (-٢٢٥ْ) ---

جـ جتا (-١٣٥ْ) ---

تطبيق (٧) : أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة :

أ جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ ---

ب جا (- $\frac{٢\pi}{٣}$) ---

جـ ظا $\frac{11\pi}{٦}$ ---

واجب : بسط كلاً من التعبيرات التالية لأبسط صورة :

أ جتا$(\theta + ٩\pi)$

ب جتا $(-\frac{\pi}{٢} - \theta)$

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتا θ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال (٨) : حل كلاً من المعادلتين :

أ جتاس = $\frac{١}{٢}$

ب ٢جتاس - $\sqrt{٣}$ = ٠

تطبيق (٨) : حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتاس = ١

****

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π – θ) + ٢ك π ، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال (٩) : حل كلاً من المعادلتين :

أ جاس = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب ٢جاس = $\sqrt{2}$

تطبيق (٩) : حل المعادلة : ٢ جاس -١ =٠

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك ∈ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال(١٠) : حل المعادلة : ظا س = $\sqrt{3}$

تطبيق (١٠) : حل المعادلة : $\sqrt{3}$ ظا س = ١

****

٣-٨ العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية :

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ ، قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$

متطابقات فيثاغورث :

جا$^٢\theta$ + جتا$^٢\theta$ = ١ ١ + ظا$^٢\theta$ = قا$^٢\theta$ ١ + ظتا$^٢\theta$ = قتا$^٢\theta$

مثال(١) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جتاθ > ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$

أ أوجد جا θ

ب استنتج ظاθ

تطبيق(١) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ ، ظاθ

****

واجب : (١) إذا كانت جا $\theta = \frac{١}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ

(٢) إذا كانت ظا $\theta = \sqrt{٨}$ ، جتا $\theta < ٠$ ، أوجد جا θ ، جتا θ

(٣) إذا كانت جتا $\theta = \frac{١}{٣}$ ، جا $\theta < ٠$ ، أوجد جا θ ، ظتا θ

مثال(٢) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$ ، جتا θ < ٠ فأوجد جا θ ، جتا θ

تطبيق(٢) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جا θ ، جتا θ

واجب : (١) بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا θ <٠ فأوجد جا θ ، جتا θ

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$ ، جتا θ <٠ فأوجد جا θ ، جتا θ

مثال(٣) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$، جتا θ > ٠ فأوجد ظتا θ ، ظا θ

تطبيق(٣) : بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جا θ

مثال(٤) : أثبت صحة المتطابقة التالية : جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس

تطبيق(٤) : أثبت صحة المتطابقة التالية : جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س = جتا^{٢}س

****

مثال(٥) : أثبت صحة المتطابقة التالية : $\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\,\theta} = \text{قا}^{٢}\,\theta$. ، حيث المقام ≠ ٠

تطبيق(٥) : أثبت صحة المتطابقة التالية : $(\text{قا}^{٢}\,\theta + \text{قتا}^{٢}\,\theta) - (\text{ظا}^{٢}\,\theta + \text{ظتا}^{٢}\,\theta) = ٢$.

واجب : أثبت صحة المتطابقات التالية :

(١) ١+ ظتا^{٢}(−θ) = قتا^{٢} θ

(٢) قا^{٤} θ − قا^{٢} θ = ظا^{٤} θ + ظا^{٢} θ

(٣) (١- جتا^{٢} θ) (١+ظتا^{٢} θ) = ١

(٤) ٣جا^{٢} θ + ٤ جتا^{٢} θ= ٣ + جتا^{٢} θ