س١٣) إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٤ & \text{٢س} - ٥ \\ \text{٣ص} + ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢٥ \\ \text{ص} + ١٨ & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س ، ص

٢س − ٥ = ٢٥
٢س = ٢٥ + ٥
٢س = ٣٠
س = ١٥

٣ص + ١٢ = ص + ١٨
٣ص − ص = ١٨ − ١٢
٢ص = ٦
ص = ٣

س١٤) إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$

فأوجد : ٢أ + ب ، ٥أ − ٣ب

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} \times ٢ = \text{٢أ} + \text{ب}$$

$$= \begin{bmatrix} -٦ & ٧ & ٤ \\ ٩ & ٧ & ٨ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix} \times ٣ - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} \times ٥ = \text{٥أ} - \text{٣ب}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٩ & -٣ & -٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢٠ & ١٥ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & ٢٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٢٦ & ١٢ & ١٠ \\ ٦ & ٢٣ & ٣١ \end{bmatrix}$$

أ. محمد سامر القصار   أ. محمد جبر الخوالده   أ. صبحي رضوان طحان

س ١٥) **حل المعادلة :** $٤\underline{س} + ٢\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل :

$$٤س = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$٤س = \begin{bmatrix} -٨ & ٤ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{-٨}{٤} & \frac{٤}{٤} \\ \frac{٠}{٤} & \frac{٨}{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

س ١٦) **إذا كانت** $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ **أوجد** $\underline{أ} \times \underline{ب}$ ، $\underline{ب}^٢$

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠+٣ & ٠-٦ \\ ٠-٤ & -٤+٨ \\ ٠+٢ & ٤-٤ \end{bmatrix}$$

٣×٢   ٢×٢

$$= \begin{bmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٤ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب}^٢ = \underline{ب} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠+٠ & ٠+١٦ \\ ٠+١ & -٨-٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٠ & ١٦ \\ ١ & -١٠ \end{bmatrix}$$

س١٧) أثبت أن ب = $\begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

الحل :

$$\begin{bmatrix} ٦+٦- & ٣-٤ \\ ٤+٣- & ٢-٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \text{ب} \times \text{أ}$$

$$\text{و} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} =$$

∴ ب هي النظير الضربي لـ أ

س١٨) هل للمصفوفة : أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٢- & ٨ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي ؟ في حالة الإيجاب أوجده

الحل :

$$٠ \neq ٣- = ٨\times٠ - ٢-\times١- = \begin{vmatrix} ٠ & ١- \\ ٢- & ٨ \end{vmatrix} = |\text{أ}|$$

∴ يوجد للمصفوفة أ نظير ضربي «معكوس»

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ١- & ٨- \end{bmatrix} \frac{١}{٣-} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ١- & ٨- \end{bmatrix} \times \frac{١}{|\text{أ}|} = {}^{١-}\text{أ}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & \frac{٢}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٨}{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٠}{٣-} & \frac{٢-}{٣-} \\ \frac{١-}{٣-} & \frac{٨-}{٣-} \end{bmatrix} =$$

س١٩) اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية محدداً مصفوفة المعاملات و مصفوفة المتغيرات و مصفوفة الثوابت ثم حل النظام باستخدام النظير الضربي

$$\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٥ \\ \text{س} - ٢\,\text{ص} = -٤ \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}}_{\text{م}} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات ، مصفوفة المتغيرات ، مصفوفة الثوابت

$$|\text{م}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = ١ \times -٢ - ١ \times ١ = -٣ \neq ٠$$

$$\text{م}^{-١} = \frac{١}{-٣} \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{-٣} \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{-٣} \begin{bmatrix} -١٠ + ٤ \\ -٥ - ٤ \end{bmatrix} = \frac{١}{-٣} \begin{bmatrix} -٦ \\ -٩ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-٦}{-٣} \\ \frac{-٩}{-٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ٣

مجموعة الحل = {(٢ ، ٣)}

س٢٠) حل النظام : $\left\{\begin{array}{l} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{array}\right.$ باستخدام قاعدة كرامر .

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ \times ٢ - ٣ \times ٣ = ١٠ - ٩ = ١ \neq ٠$$

$$\Delta_س = \begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٧ \times ٢ - ٥ \times ٣ = -١$$

$$\Delta_ص = \begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ٥ \times ٥ - ٧ \times ٣ = ٤$$

$$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-١}{١} = -١$$

$$ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{٤}{١} = ٤$$

$$م.ح = \{(-١ ، ٤)\}$$

أ. محمد سامر القصار
أ. محمد جبر الخوالده
أ. صبحي رضوان طحان

س ٢١) حل النظام : $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$ باستخدام قاعدة كرامر .

الحل :

$٤س - ٥ص = -٧$

$-٦س + ٣ص = -٣$

$$\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ -٣ \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٤ \times ٣ - (-٥) \times -٦ = -١٨$$

$$\Delta_س = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٧ \times ٣ - (-٥) \times (-٣) = -٣٦$$

$$\Delta_ص = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = ٤ \times -٣ - -٦ \times -٧ = -٥٤$$

$$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

$م.ح = \{(٢ ، ٣)\}$

س٢٢) بسط التعبير التالي لأبسط صورة :

جا س + جا (٩٠° +س) +جا (١٨٠° +س) + جا (٩٠° - س)

= جا س + جتا س - جا س + جتا س

= ٢ جتا س

س٢٣) بسط التعبير التالي لأبسط صورة :

جتا ($\pi - \theta$) - جتا ($- \theta$) + جا ($\pi + \theta$) + جتا ($\frac{\pi}{٢} - \theta$)

= - جتا θ - جتا θ + - جا θ + جا θ = - ٢ جتا θ

س٢٤) حل كلاً من المعادلات التالية :

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س < ٠ :

∴ س تقع في الربعين الأول والرابع

بفرض θ زاوية اسناد س

جتا θ = جتا س = $\frac{١}{٢}$

θ = ٦٠ = $\frac{\pi}{٣}$

(١) س تقع في الربع الأول س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π

(٢) س تقع في الربع الرابع

س = ٢π - $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{٥\pi}{٣}$ + ٢π ك

ب ٢جا س - $\sqrt{٣}$ = ٠

جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ س تقع في الربعين الأول والثاني

بفرض θ زاوية اسناد س

جا θ = جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

θ = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$

(١) س تقع في الربع الأول : س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π

(٢) س تقع في الربع الثاني

س = π - $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ك π

أ. محمد سامر القصار   أ. محمد جبر الخوالده   أ. صبحي رضوان طحان

جـ $\sqrt{2}$ جتاس = ١

جتاس = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

جتاس > ٠ ⟸ س تقع في الربعين الأول, الرابع

نفرض θ زاوية اسناد س

جتا θ = جتا س = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

θ = ٤٥ = $\frac{\pi}{4}$

① س في الأول ⟸ س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢πن

② س في الرابع ⟸ س = ٢π − $\frac{\pi}{4}$

= $\frac{7\pi}{4}$ + ٢πن

ظاس = ١

ظا θ = ظاس = ١

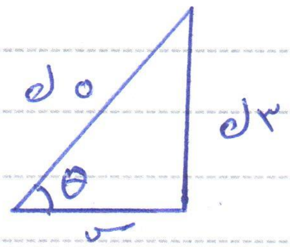
θ = ٤٥ = $\frac{\pi}{4}$

ظاس > ٠ ⟸ س تقع في الربعين الأول, الثالث

س = $\frac{\pi}{4}$ + ن π

س٢٥) بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كانت جاθ = $\frac{3}{5}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{2}$ فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ



جا θ = $\frac{3}{5}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{2}$

∴ كل النسب موجبة

س = $\sqrt{(٥ل)^2 - (٣ل)^2}$ = ٤ل

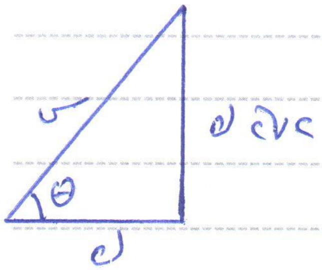
جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٤ل}{٥ل}$ = $\frac{4}{5}$

ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٣ل}{٤ل}$ = $\frac{3}{4}$

قا θ = $\frac{5}{4}$

قتا θ = $\frac{5}{3}$ ، ظتا θ = $\frac{4}{3}$

س٢٦) بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.



∵ ظاθ > ٠ ، جتاθ < ٠

∴ θ تقع في الربع الثالث

س = $\sqrt{(٢\sqrt{٢}\,ل)^2 + ل^2}$ = ٣ ل

جاθ = $\frac{-\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{-٢\sqrt{٢}\,ل}{٣\,ل}$ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

جتاθ = $\frac{-\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{-ل}{٣\,ل}$ = $\frac{-١}{٣}$

س٢٧) إذا كان أ(-٥ ، ٣) ، ب(٧ ، -٤) فأوجد جـ التي تقسم أب من الداخل بنسبة ١ : ٣ من جهة أ

الحل:

أ. محمد سامر القصار أ. محمد جبر الخوالده أ. صبحي رضوان طحان