① الصف العاشر

العلاقات بين الدوال المثلثية

90° ، $\frac{\pi}{2}$

⊕ جا θ

الربع الأول

جا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = + جتا θ

جتا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = + جا θ

ظا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ = + ظتا θ

الربع الثاني

جا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = + جتا θ

جتا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = − جا θ

ظا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = − ظتا θ

أو

جا $(\pi - \theta)$ = + جا θ

جتا $(\pi - \theta)$ = − جتا θ

ظا $(\pi - \theta)$ = − ظا θ

180° ، π ⊖ جتا θ 2π ⊕ جتا θ 360° ، 2π

الربع الثالث

جا $(\pi + \theta)$ = − جا θ

جتا $(\pi + \theta)$ = − جتا θ

ظا $(\pi + \theta)$ = + ظا θ

الربع الرابع

جا $(2\pi - \theta)$ = − جا θ

جتا $(2\pi - \theta)$ = + جتا θ

ظا $(2\pi - \theta)$ = − ظا θ

⊖ جا θ

$\frac{3\pi}{2}$ ، 270°

* احتمال الحدث أ = ل (أ) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة ف}}$

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$$

أي ل(أ) ∈ [٠، ١]

$٠ \leq ل(أ) \leq ١$

احتمال الحدث المستحيل

احتمال الحدث المؤكد

* ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

اذا كان أ، ب حدثين متنافيين

∴ أ ∩ ب = ϕ

ل(أ ∩ ب) = صفر

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

* احتمال الحدث المتمم لـ أ   ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

* اذا كان ل(أ) = ل($\bar{أ}$)   ∴ ل(أ) = ل($\bar{أ}$) = $\frac{1}{2}$

* اذا كان أ، ب حدثان مستقلان [وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر]

فان ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

* اذا كان وقوع الحدث ب مشروطاً بوقوع الحدث أ

فان ل(ب/أ) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)}$ حيث ل(أ) ≠ ٠.

② العلاقات بين الدوال المثلثية

1- حتا($-\theta$) = حتا θ

جا($-\theta$) = $-$ جا θ

ظا($-\theta$) = $-$ ظا θ

2- عند تبسيط مقدار لأبسط صورة

① نحدد الربع الذى تقع فيه θ "القياس الأساسى"

② نحدد إشارة النسب المثلثية (جا θ، حتا θ، ظا θ) حسب الربع المحدد

③ إذا كانت الزاوية ربعية π أو 2π تظل نفس النسب المثلثية

، إذا كانت الزاوية ربعية $\frac{\pi}{2}$ نقلب النسبة

جا θ ← حتا θ

حتا θ ← جا θ

ظا θ ← ظتا θ

مثال بسط التعبير التالى لأبسط صورة

* جا س + جا($90 +$ س) + جا($180 +$ س) + جا($90 -$ س)

(الثانى +، الثالث −، الأول +)

الحل

جا س + حتا س − جا س + حتا س = 2 حتا س

* حتا($\frac{\pi}{2} - \theta$) − حتا($-\theta$) + جا($\pi + \theta$) + حتا($\frac{\pi}{2} - \theta$)

(الثانى +، الثالث −، الأول +)

$\cancel{\text{حتا}}\ \theta$ − $\cancel{\text{حتا}}\ \theta$ − $\cancel{\text{جا}}\ \theta$ + $\cancel{\text{جا}}\ \theta$

= صفر

(٥) تذكر أن

$\text{جا}\,\theta = \pm\sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\,\theta}$

$\text{جتا}\,\theta = \pm\sqrt{١ - \text{جا}^{٢}\,\theta}$

$\text{قا}\,\theta = \pm\sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\,\theta}$

$\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$

$\text{ظتا}\,\theta = \dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = \dfrac{١}{\text{ظا}\,\theta}$

تمرين ١: بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان $\text{جتا}\,\theta = ٤و٠$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ أوجد $\text{جا}\,\theta$ ، $\text{ظا}\,\theta$

الحل

θ تقع في الربع الأول

جا θ	جتا θ	ظا θ
+٩١٧و٠	+٤و٠	+؟

$\text{جا}\,\theta = +\sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\,\theta}$

$\text{جا}\,\theta = \sqrt{١ - (٤و٠)^{٢}} \simeq ٩١٧و٠$

$\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \simeq \dfrac{٩١٧و٠}{٤و٠} \simeq ٢٩و٢$

تمرين ٢: $\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٧}$ ، $\text{جتا}\,\theta > ٠$ أوجدي $\text{ظا}\,\theta$ ، $\text{ظتا}\,\theta$
بدون استخدام الآلة الحاسبة

الحل

جا θ	جتا θ	ظا θ
$+\frac{٣}{٧}$	+؟	+؟

$\text{جتا}\,\theta = +\sqrt{١ - \text{جا}^{٢}\,\theta}$

$= +\sqrt{١ - \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}}$

$= \dfrac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$

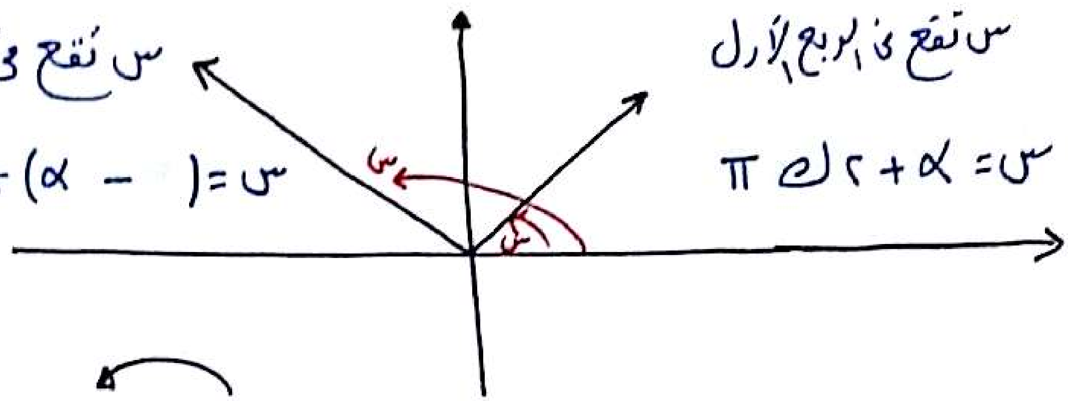
$\text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \dfrac{\frac{٣}{٧}}{\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}} = \dfrac{٣\sqrt{١٠}}{٢٠}$

$\text{ظتا}\,\theta = \dfrac{٢٠}{٣\sqrt{١٠}} = \dfrac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$

④ متى تكون جاس > ٠ موجبه ؟؟

س تقع في الربع الأول

س تقع في الربع الثاني



$س = \alpha + ٢ك\pi$

$س = (\quad - \alpha) + ٢ك\pi$

حل المعادلة : ② $جاس - \sqrt{٢} = ٠$ ؟

① نحدد إشارة النسبة ... الكل

$$جاس = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

جاس > ٠ "إشارة موجبة"

س تقع في الربع الأول أو الثاني

② زاوية الإسناد α

على نظام Deg

$$\alpha = \text{shift } \sin^{-1}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{٤}$$

أو على نظام الراديان

$$\alpha = \text{shift } \sin^{-1}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\pi}{4}$$

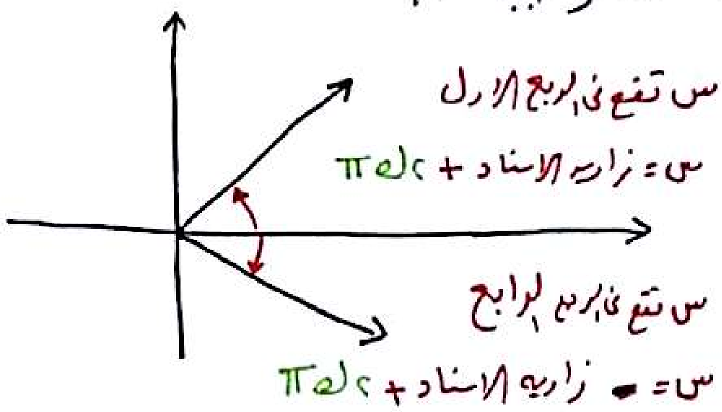
③ حل المعادلة المثلثية

س تقع في الربع الأول	س تقع في الربع الثاني
$س = \frac{\pi}{٤} + ٢ك\pi$	$س = \left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right) + ٢ك\pi$ $س = \frac{٣\pi}{٤} + ٢ك\pi$

ك ∈ ص

٣) حل المعادلات المثلثية

* متى تكون حتاس > ٠ موجبة ؟؟



حل المعادلة : ٢حتاس - √٣ = ٠ ؟

الكل

١) نحدد إشارة النسبة

حتاس = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

حتاس > ٠ "إشارة موجبة"

س تقع في الربع الأول أو الرابع

٢) زاوية الأسناد α

$$\alpha = \text{shift } \cos^{-1} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

أو تحول الآلة الحاسبة (بالراديان) $\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

٣) ∴ حل المعادلة المثلثية

س تقع في الربع الأول	س تقع في الربع الرابع
س = $\frac{\pi}{6}$ + ٢ك π	س = - $\frac{\pi}{6}$ + ٢ك π

لهدص

٦ **تمرين ٣** بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان

ظا θ = $\frac{٢٤}{٧}$ ، جتا θ < ٠ أوجدي جا θ، جتا θ

الحل

جا θ	جتا θ	ظا θ
− ؟	− ؟	+ $\frac{٢٤}{٧}$

$\text{قا}\,\theta = -\sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\theta}$

$= -\sqrt{١ + \left(\frac{٢٤}{٧}\right)^{٢}} = -\frac{٢٥}{٧}$

$\text{جتا}\,\theta = -\frac{٧}{٢٥}$

$\text{جا}\,\theta = -\sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\theta}$

$= -\sqrt{١ - \left(-\frac{٧}{٢٥}\right)^{٢}} = -\frac{٢٤}{٢٥}$

تمرين ٤ : إذا كان ظا θ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا θ > ٠ أوجدي بدون استخدام الآلة الحاسبة جا θ، جتا θ

جا θ	جتا θ	ظا θ
+ ؟	+ ؟	+ $\frac{١٢}{٥}$

$\text{قا}\,\theta = +\sqrt{١ + \text{ظا}^{٢}\theta}$

$= +\sqrt{١ + \left(\frac{١٢}{٥}\right)^{٢}} = \frac{١٣}{٥}$

$\boxed{\text{جتا}\,\theta = +\frac{٥}{١٣}}$

$\text{جا}\,\theta = +\sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\theta}$

$= +\sqrt{١ - \left(\frac{٥}{١٣}\right)^{٢}} = +\frac{١٢}{١٣}$

$\boxed{\text{جا}\,\theta = \frac{١٢}{١٣}}$

٧ اثبت صحة المتطابقة التالية

* جا³س + جاس × جتا²س = جاس

الحل

بأخذ عامل مشترك الطرف الايسر جاس [جا²س + جتا²س]

جاس × ١ = جاس الطرف الايمن

#

* جتا⁴س + جا²س × جتا²س = جتا²س

بأخذ عامل مشترك جتا²س [جتا²س + جا²س]

= جتا²س × ١

= جتا²س الطرف الايمن

* $\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^2\theta}$ = قا²θ حيث المقام ≠ ٠

الحل الطرف الايسر $\frac{\text{قا}^2\theta - ١}{\text{جا}^2\theta} = \frac{\text{ظا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}$

$= \frac{\cancel{\text{جا}^2\theta}}{\text{جتا}^2\theta \cdot \cancel{\text{جا}^2\theta}}$ = قا²θ

* (قا²θ + قتا²θ) − (ظا²θ + ظتا²θ) = ٢

الحل

$١ + \cancel{\text{ظا}^2\theta} + ١ + \cancel{\text{ظتا}^2\theta} - \cancel{\text{ظا}^2\theta} - \cancel{\text{ظتا}^2\theta}$

= ٢ الطرف الايمن

#

الدائرة

نظرية (١):

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة

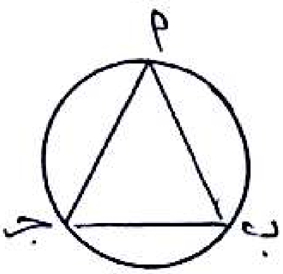
* ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة أي تصلح أن تكون رؤوس مثلث

∴ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس مثلث وتسمى هذه الدائرة بالدائرة المحيطة (الخارجة) لمثلث

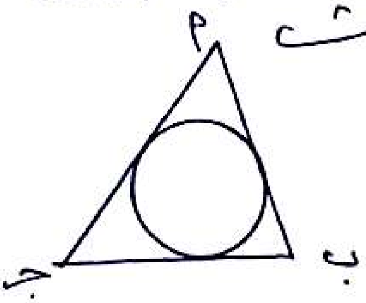
* مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث)

* الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث من الداخل

- مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلة للمثلث



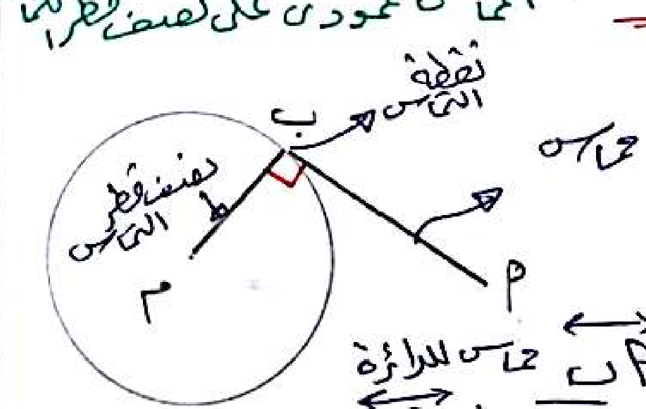
الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ



الدائرة الداخلة للمثلث أ ب جـ

نظرية (٢):

المماس عمودي على نصف قطر التماس

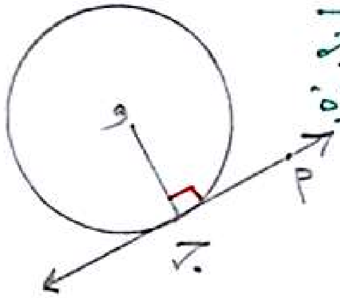


∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة

∴ $\overline{مب} \perp \overleftrightarrow{أب}$

نظرية (٣):

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند طرفه الذي تنتمي إلى الدائرة يكون مماساً لهذه الدائرة عند هذه النقطة

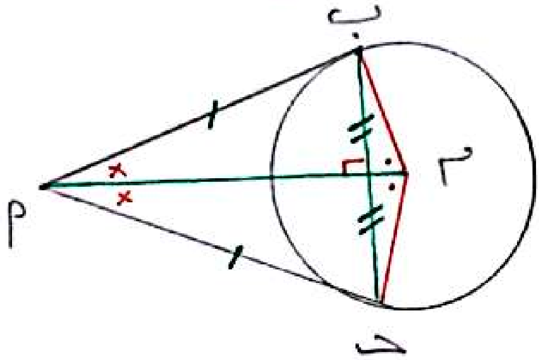


∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ ⊥ و جـ

∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة

نظرية (٤):

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان



$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أ ب = أ جـ

نتائج على النظرية (٤):

① Δ أ ب جـ متطابق الضلعين لأن أ ب = أ جـ

② $\overleftrightarrow{أم}$ ينصف الزاوية ب أ جـ ، ب م جـ

③ $\overleftrightarrow{أم} \perp \overline{بجـ}$ وينصفه

④ الشكل أ ب م جـ رباعي دائري لأن ق(∠أ ب م) = ق(∠أ جـ م) = ٩٠° لأن المماس عمودي على نصف قطر التماس

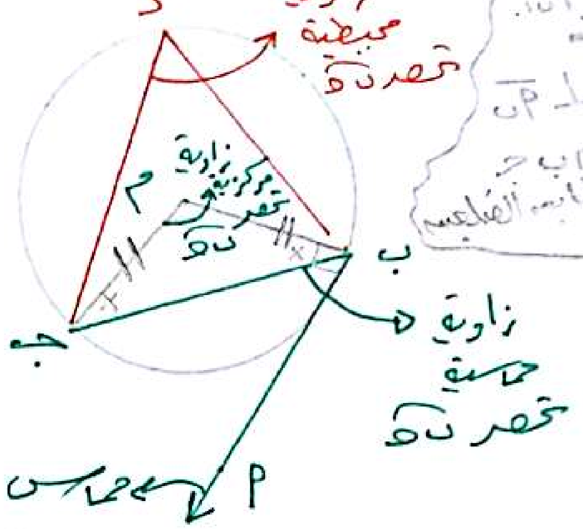
نظرية (٣):

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي

① قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

② $\frac{1}{2}$ قياس القوس المحصور بين المماس والوتر

③ $\frac{1}{2}$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس



لاحظ أن:
مب ⊥ أب
△ م ب جـ متطابق الضلعين

ق(∠أ ب جـ) المماسية = ق(∠ب ء جـ) المحيطية ← مشتركتان في بجَ

= $\frac{1}{2}$ ق(بجَ)

= $\frac{1}{2}$ ق(∠ب م جـ) المركزية ← مشتركتان في بجَ

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس	$\frac{1}{2}$ = نصف ⇐ / ضعف = ٢	قياس الزاوية المحيطية = قياس الزاوية المماسية

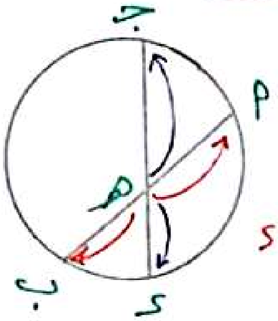
المشتركتان في نفس القوس

★ قياس القوس = ضعف قياس الزاوية المماسية التي تحصر نفس القوس بين ضلعيها

★ قياس الزاوية المركزية = ضعف قياس الزاوية المماسية المشتركة معها في نفس القوس

الأوتار المتقاطعة - المماس ④

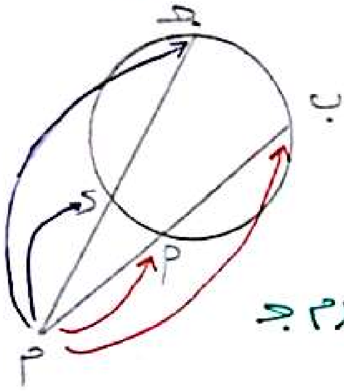
نظرية (١):



أب ، جـء وتران متقاطعان داخل الدائرة

∴ هـأ × هـب = هـجـ × هـء

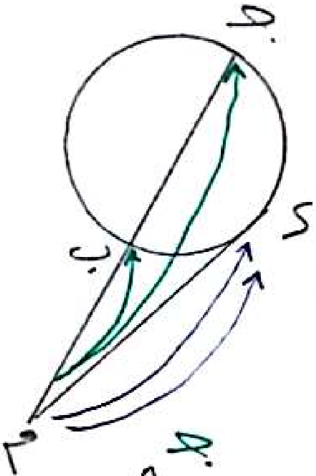
نتيجة (١):



مب ، مجـ قاطعان من نقطة خارج الدائرة

∴ مأ × مب = مء × مجـ

نتيجة (٢):



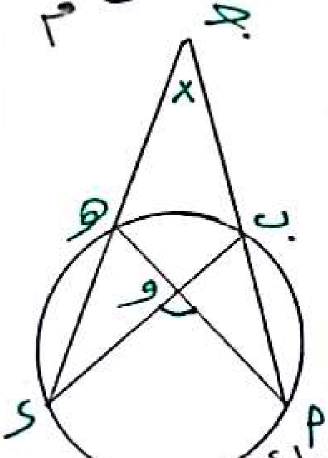
مء مماس للدائرة

مجـ قاطع للدائرة

مء × مء = مب × مجـ

$($مء$)^2$ = مب × مجـ

مثال (١) كتاب الطالب ص ٣٦



ق(∠أ و ء) = $\frac{1}{2}$ [ق(أءَ) + ق(بهـَ)]

≡ و داخل الدائرة

ق(∠أ جـ ء) = $\frac{1}{2}$ [ق(أءَ) − ق(بهـَ)]

≡ جـ خارج الدائرة

الأوتار والأقواس

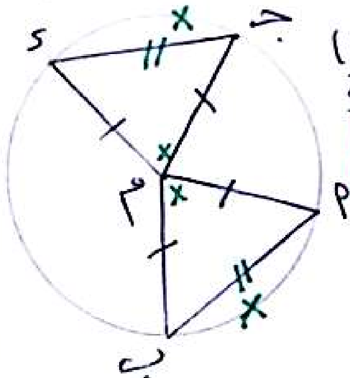
نظرية (١) :-

في دائرة أو في دوائر متطابقة

١) الزوايا المركزية المتطابقة أوتارها متطابقة

٢) الأوتار المتطابقة تقابل أقواس متطابقة

٣) الأقواس المتطابقة زواياها مركزية متطابقة



اذا كان ق(أ م ب) = ق(جـ م د)
المركزية المركزية

∴ ق(أب) = ق(جـد)

∴ أب = جـد

ملاحظات هامة:

* أنصاف أقطار الدائرة الواحدة (أو الدوائر المتطابقة) متطابقة

∴ م أ = م ب = م جـ = م د = نق

* △ م أ ب متطابق الضلعين
لأنهم م أ = م ب = نق
∴ ق(م أ ب) = ق(م ب أ)
بالمثل △ جـ م د متطابق الضلعين

نظرية (٢) :-

١) الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة

٢) الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة

* بعد نقطة عن مستقيم هو البعد العمودي

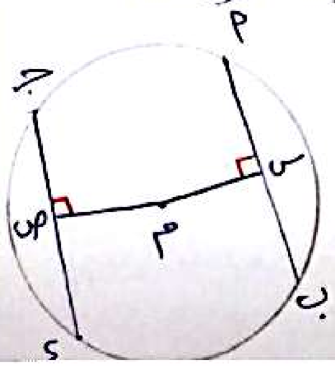
اذا كان أب = جـد

م س ⊥ أب

م ص ⊥ جـد

∴ م س = م ص

والعكس صحيح

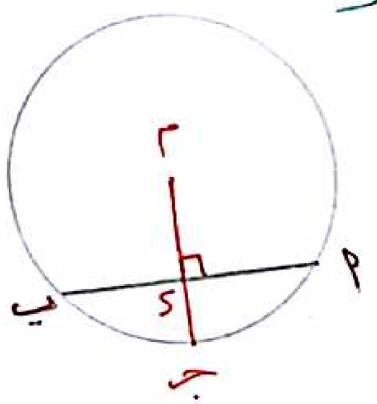


نظرية (٣) :-

١) القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف كلا من قوسيه

٢) القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًا على هذا الوتر

٣) العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة

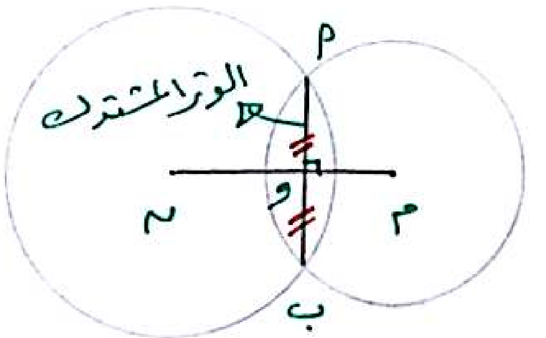


اذا كان م د ⊥ أب

∴ د منتصف أب

∴ جـ منتصف أب

نتيجة: خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك بينهما وينصفه

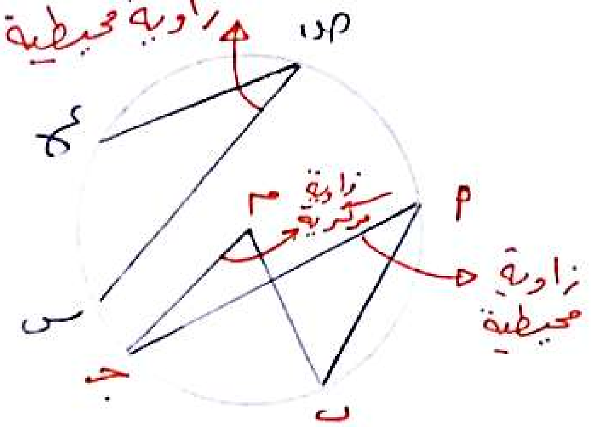


∵ م ، ن دائرتان متقاطعتان

∴ م ن ⊥ أب

وينصف أب

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية



س ص ع زاوية محيطية

ب أ جـ زاوية محيطية
ب م جـ زاوية مركزية
مشتركتان في ب جـ (تحصران)

نظرية (١):

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة

$$ق (ب م جـ) = ق (ب جـ)$$

المركزية

نظرية (٢): في الدائرة قياس الزاوية المحيطية

يساوي ① نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها
② نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه

$$ق (ب أ جـ) = \frac{1}{2} ق (ب جـ)$$

المحيطية

$$= \frac{1}{2} ق (ب م جـ)$$ (تحصران ب جـ)

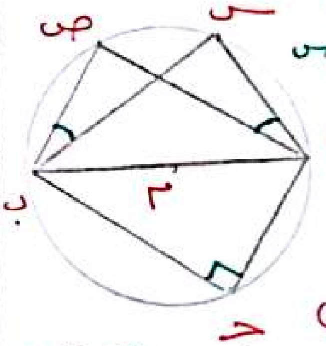
المركزية

★ ملحوظة هامة:

★ قياس القوس ضعف قياس الزاوية المحيطية التي تحصرها القوس بين ضلعيها

★ قياس الزاوية المركزية ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

الشكل الرباعي الدائري: هو شكل رباعي تقع رؤوسه على دائرة.



① كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران نفس القوس متطابقتان

س أ ص ، س ب ص زاويتان محيطيتان مشتركتان في س ص

$$\therefore ق (س أ ص) = ق (س ب ص)$$

② كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون قائمة

$\because$ أ ب قطر في الدائرة

$\therefore$ ق (أ جـ ب) = ٩٠° (محيطية تحصر نصف دائرة)

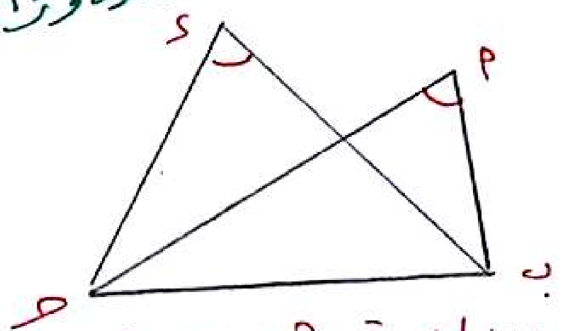
③ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملتان

لاحظ أن: في المستطيل والمربع وشبه المنحرف متساوي الساقين كل زاويتين متقابلتين متكاملتان

$\therefore$ الحكم رسم دائرة تمر برؤوس كل من المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوي الساقين

$\because$ أ ب جـ د رباعي دائري $\therefore$ ق (أ) + ق (جـ) = ١٨٠°

④ إذا تطابقت زاويتان مرسومتان على قاعدة مشتركة وفي جهة واحدة منها فانه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وتر فيها



اذا كان ق (أ) = ق (د)

وهما مرسومتان على ب جـ كقاعدة مشتركة وفي جهة واحدة منها

$\therefore$ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري