وزارة التربية
الإدارة العامة لمنطقة الفروانية التعليمية
ثانوية سلمان الفارسي للبنين
قسم الرياضيات

التاريخ / / ٢٠

٢٠١٩ /٢٠٢٠

أوراق عمل الصف العاشر

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الثامنة

* حساب المثلثات ٢ *

هذه الأوراق لاتغني عن الكتاب المدرس

إعداد قسم الرياضيات

التاريخ / / ٢٠

٨ ـ ١

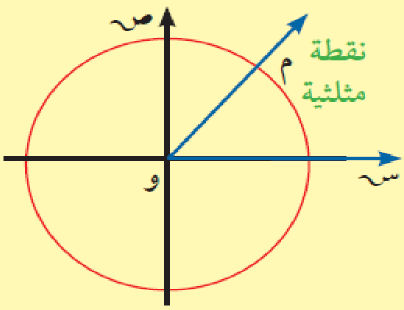
دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة Unit Circle

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

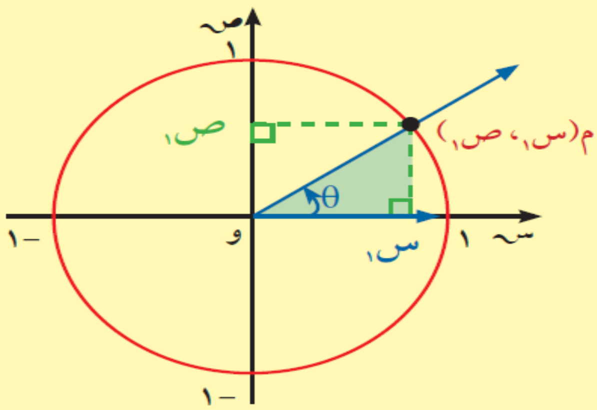
النقطة المثلثية The Triangular Point

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ١

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.



جتاθ = س$_{١}$ جاθ = ص$_{١}$

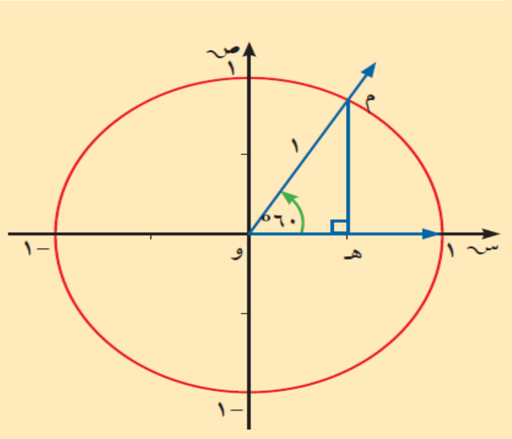
ظاθ = $\frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}}$ ، س$_{١}$ ≠ ٠   ظتاθ = $\frac{\text{س}_{١}}{\text{ص}_{١}}$ ، ص$_{١}$ ≠ ٠

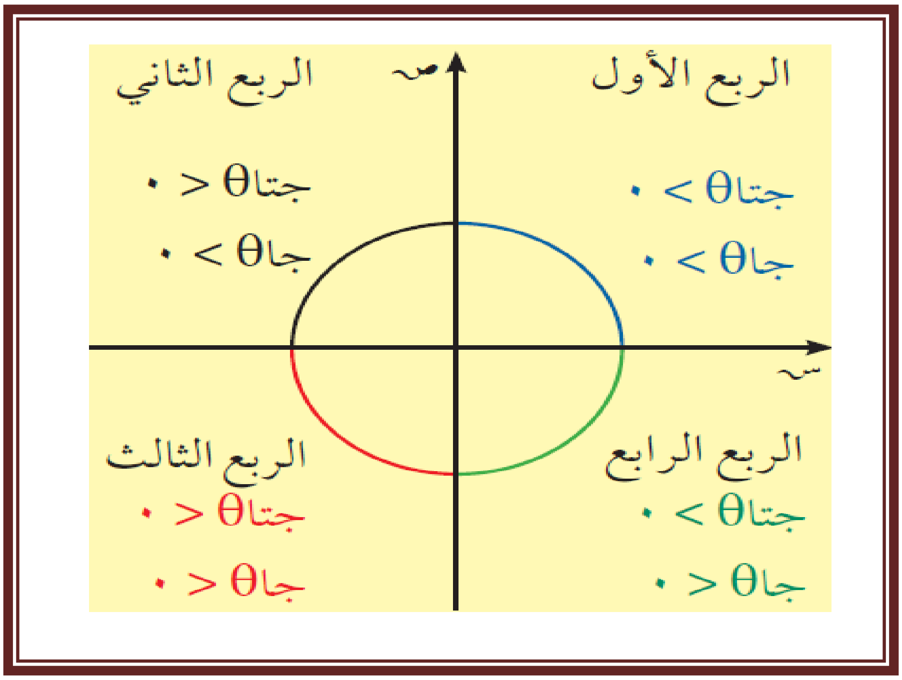
قاθ = $\frac{١}{\text{س}_{١}}$ ، س$_{١}$ ≠ ٠   قتاθ = $\frac{١}{\text{ص}_{١}}$ ، ص$_{١}$ ≠ ٠

التاريخ   /   / ٢٠

مثال (١)

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا ٦٠°، جتا ٦٠°.





التاريخ / / ٢٠

مثال (٢)

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ $\theta = 135^\circ$ ب $\theta = \frac{7\pi}{6}$ ج $\theta = 305^\circ$

أ إذا كانت $90^\circ < \theta < 270^\circ$. ما هي إشارة جتاθ؟

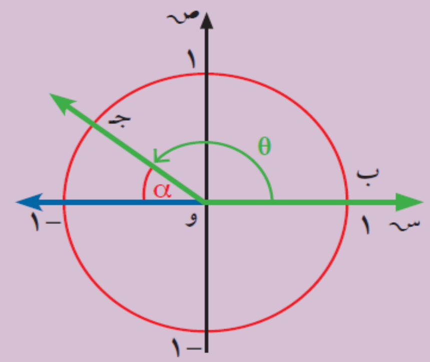
ب إذا كانت $0^\circ < \theta < \pi$. ما هي إشارة جاθ؟

تعريف زاوية الإسناد:

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overleftarrow{وب}$، $\overleftarrow{وجـ}$) التي في وضع قياسي

هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

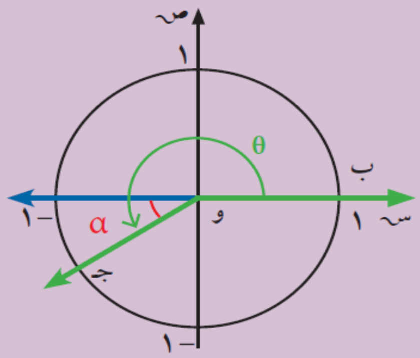
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^{\circ} = ١٨٠^{\circ} - \theta^{\circ}$

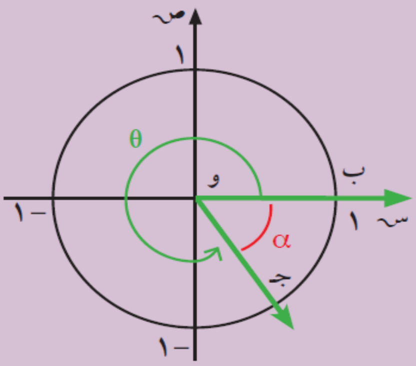
$\alpha^{د} = \pi - \theta^{د}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^{\circ} = \theta^{\circ} - ١٨٠^{\circ}$

$\alpha^{د} = \theta^{د} - \pi$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^{\circ} = ٣٦٠^{\circ} - \theta^{\circ}$

$\alpha^{د} = ٢\pi - \theta^{د}$

مثال (٣)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ ١٢٥° ب ٢١٥° ج $\frac{١١\pi}{٦}$

التاريخ / / ٢٠

٨ ـ ٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى النسب المثلثية الأساسية

علمًا بأن
$-١ \le$ جتا$\theta \le ١$
$-١ \le$ جا$\theta \le ١$
ظا$\theta \in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$.

قانون:

جتا$(-\theta)$ = جتاθ

جا$(-\theta)$ = $-$جاθ

وبالتالي ظا$(-\theta)$ = $-$ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi - \theta)$.

قانون:

جتا$(\pi - \theta)$ = $-$جتاθ

جا$(\pi - \theta)$ = جاθ

وبالتالي ظا$(\pi - \theta)$ = $-$ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi + \theta)$.

قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = $-$جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = $-$جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = $-$جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = $-$ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا$(\theta + ٢$ك $\pi)$ = جاθ

جتا$(\theta + ٢$ك $\pi)$ = جتاθ

ظا$(\theta +$ ك $\pi)$ = ظاθ حيث ظاθ معرّف

التاريخ / / ٢٠

مثال (١)

أ إذا كان جتا $\frac{3\pi}{8}$ = $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ، فأوجد جتا $\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$.

ب إذا كان جا ٣٦° ≃ ٥٨٧٨, ٠ ، فأوجد جا(-٣٦°).

جـ إذا كان ظا ٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(-٤٥°).

١ أكمل إذا كان:

أ جا م = ٣, ٠ فإن جا(- م) = ...

ب جتا ل = ٣٨, ٠ فإن جتا(- ل) = ...

جـ ظا س = ١٤, ٣ فإن ظا(- س) = ...

د جتا(- ص) = $\frac{1}{4}$ فإن جتا ص = ...

التاريخ / / ٢٠

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ جا ٣٠° $= \frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب جتاس $= \frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا(π − س).

جـ ظا $\frac{π}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١π}{١٢}$.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$، فأوجد جا ٢١٠°.

ب ظا $\frac{π}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$، فأوجد ظا $\frac{٩π}{٨}$.

التاريخ / / ٢٠

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ١٥٠°. ب جتا ٢٤٠°. ج ظا $\frac{2\pi}{3}$.

مثال (٥)

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

التاريخ / / ٢٠

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\pi - \theta)$ − جتا$(- \theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

(ب) جا$(\pi + \theta)$ − جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا$(\theta - \pi)$ + جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$.

٥ بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا$(\theta + ٩\pi)$

ب جتا$\left(- \frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

التاريخ / / ٢٠

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال (٦)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

ب ٢ جتا س $- \sqrt{٣} = ٠$

---

٦ حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س $= ١$.

التاريخ / / ٢٠

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال (٧)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

التاريخ / / ٢٠

ب ٢جا س = $\sqrt{2}$

٧ حل المعادلة: ٢جا س − ١ = ٠

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال (٨)

حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.

---

٨ حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١ .

التاريخ / / ٢٠

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

(٢) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = $\varnothing$	أ	ب
إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$	أ	ب
إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$	أ	ب
مجموعة حل قا س = ٠,٣ هي $\varnothing$	أ	ب
ظا (١٥π) = صفر	أ	ب

في التمارين (٣-٥)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٣) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(-٣٣٠°) (ب) جتا(-٢٤٠°) (جـ) ظتا(-١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(٤) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ (جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

(٥) إن قيمة المقدار قا($٢\pi - \theta$) - قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جاθ هي:

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

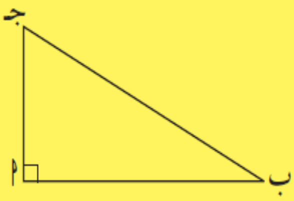
التاريخ   /   / ٢٠

٨ـ٣ العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية   Basic Trigonometric Identities

$ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$ ، $ظتا\theta = \frac{جتا\theta}{جا\theta}$ ، $ظتا\theta = \frac{١}{ظا\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

$قا\theta = \frac{١}{جتا\theta}$ ، $قتا\theta = \frac{١}{جا\theta}$



$جا^٢\theta + جتا^٢\theta = ١$ تسمى متطابقة فيثاغورث

$١ + ظا^٢\theta = قا^٢\theta$

$١ + ظتا^٢\theta = قتا^٢\theta$

مثال (١)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان $جتا\theta = ٠,٤$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$.

أ) أوجد جاθ.

ب) استنتج ظاθ.

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا$\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

التاريخ   /   /   ٢٠

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد ظتاθ، ظاθ.

التاريخ   /   / ٢٠

مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

التاريخ / / ٢٠

مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

التاريخ / / ٢٠

جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظا$^{٢}\theta$ = قا$^{٢}\theta$

١ + ظتا$^{٢}\theta$ = قتا$^{٢}\theta$

مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس.

٥ أثبت صحة المتطابقة: جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س = جتا^{٢}س.

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

٦ أثبت صحة المتطابقة: (قا^{٢} θ + قتا^{٢} θ) − (ظا^{٢} θ + ظتا^{٢} θ) = ٢.

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta}$ = قا^{٢} θ. حيث المقام ≠ ٠

(٦) أثبت صحّة المتطابقات التالية:

(أ) جتا^{٤} θ − جا^{٤} θ = جتا^{٢} θ − جا^{٢} θ

(١٠) (١ − جتا^{٢} θ)(١ + ظتا^{٢} θ) = ١.

(١١) ٣جا^{٢} θ + ٤جتا^{٢} θ = ٣ + جتا^{٢} θ.