وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الفروانية التعليمية

ثانوية سلمان الفارسي للبنين

قسم الرياضيات

أوراق عمل الصف العاشر

الفصل الدراسي الثاني

*الوحدة السابعة *

* تنظيم البيانات في مصفوفات *

هذه الأوراق لاتغني عن الكتاب المدرسي

إعداد قسم الرياضيات

التاريخ   /   /   ٢٠

٧ـ١ تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

مثال:

١ اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠,٥ & ٢- \end{bmatrix}$

$ب = \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & ٨- \end{bmatrix}$

$ج = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥- & ١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix}$

ترميز عناصر المصفوفة

$أ = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

مثال (٣)

في المصفوفة: $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ ٤- & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ $ب_{٢٢}$ ب $ب_{١٣}$ ج $ب_{١١}$

التاريخ / / ٢٠

مثال (٤)

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥- & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\underline{د} = \begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & ٢- \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$$

المصفوفات المتساوية:

مثال (٥)

هل المصفوفتان أ، ب متساويتان؟ فسّر. $\underline{أ} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & ٠,٧٥- \\ ٢- & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠,٢ & \frac{٣-}{٤} \\ ٢- & ٠,٥ \end{bmatrix}$

الحل:

مثال (٦)

إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٢س − ٥} \\ \text{٣ص + ١٢} & \text{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٢٥} \\ \text{ص + ١٨} & \text{٣} \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة كل من س، ص.

٦ أ إذا كانت

$$\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٣٨} \\ \text{٤ص − ١٠} & \text{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{س + ٨} \\ \text{−ص} & \text{٣} \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة كل من س، ص.

التاريخ   /   /   ٢٠

أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتين.

$$\begin{bmatrix} \text{٢س} + ٤ & \text{ص} - ٥ \\ \text{ل} + ٦ & \text{٢ك} - ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & \text{٢ص} - ٢ \\ ٤ & \text{٤ك} + ١٥ \end{bmatrix}$$

التاريخ   /   /   ٢٠

٧ـ٢ جمع وطرح المصفوفات

جمع وطرح المصفوفات — Adding and Subtracting Matrices

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.

مثال (١)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ & -٣ \\ -٩ & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

أ) أ + ب   ب) أ + جـ

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

---

١) أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$

التاريخ / / ٢٠

خواص جمع المصفوفات

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال Commutative
- $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ — خاصية التجميع Associative
- $\underline{0}_{م×ن} + \underline{أ} = \underline{أ} + \underline{0}_{م×ن} = \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- $\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \underline{0}_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ الرتبة نفسها، فإن $\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$.

ملاحظة: إذا كان $\underline{أ} \neq \underline{ب}$ ولهما الرتبة نفسها فإن: $\underline{أ} - \underline{ب} \neq \underline{ب} - \underline{أ}$ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (٤)

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ١- & ٤ & ٠ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ٢- & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

أوجد $\underline{أ} - \underline{ب}$ ، $\underline{ب} - \underline{أ}$

٤ أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية Solving Matrix Equations

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات أ، ب، جـ لها الرتبة نفسها إذا كان: أ = ب، فإن: أ + جـ = ب + جـ، أ − جـ = ب − جـ.

مثال (٥)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\underline{س} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

مثال : **حل المعادلة** التاريخ / / ٢٠

$$-\underline{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٩ \\ ١٢ & ٨ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٥ & -٣ \end{bmatrix}$$

مثال : **حل المعادلة**

$$\underline{س} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٥ \\ ١٧ & ٢٨ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٢٠ \\ -٥ & ٠ \\ ٣ & -١٩ \end{bmatrix}$$

التاريخ   /   /   ٢٠

٧ـ٣ ضرب المصفوفات

مثال (١)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤- \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٢- & ١- & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد: ٥أ ، ٣ب . ثم ٥أ − ٣ب

ب أ + ٦ب

التاريخ / / ٢٠

خواص الضرب القياسي

إذا كان أ ، ب ، ٠ مصفوفات من الرتبة م × ن. ك، د عددان قياسيان. فإن:

- ك أ : مصفوفة من الرتبة م × ن — خاصية الإغلاق
- (ك د) أ = ك(د أ) — خاصية التجميع للضرب
- ك(أ + ب) = ك أ + ك ب — خاصية التوزيع من اليمين
- (أ + ب)ك = أ ك + ب ك — خاصية التوزيع من اليسار
- ٠ × أ = ٠ — خاصية الضرب في صفر

مثال (٣)

حل المعادلة: ٤س + ٢ $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

مثال : حل المعادلة

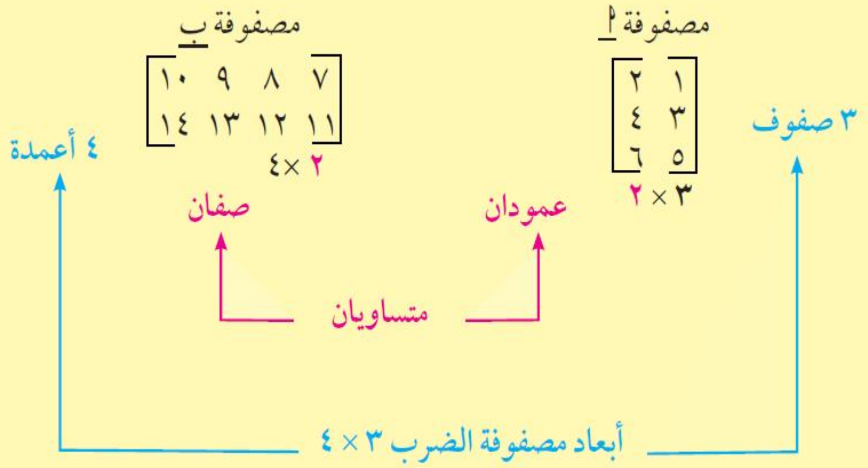
التاريخ / / ٢٠

ب

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ١٠ \\ ١٠ & ١٨- & ١٩- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٠ & ٧ \\ ٤ & ٣- & ٢ \end{bmatrix} + \underline{س}٣-$$

ضرب المصفوفات :

المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب أ × ب هي مصفوفة من الرتبة م × ر.



تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$\underline{أ}_{م \times ن} \times \underline{ب}_{ن \times ر} = \underline{جـ}_{م \times ر}$

مثال (٥)

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix}$$

لضرب المصفوفات بعض خصائص ضرب الأعداد

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات من الرتبة م × م. فإن:

- أ × ب: مصفوفة من الرتبة م × م.
- (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) — خاصية التجميع للضرب
- أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ — خاصية التوزيع
- (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ
- و م×م × أ = أ × و م×م = و م×م — خاصية الضرب في الصفر

مثال (٦)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد: أ^٢ ، أ^٣

التاريخ   /   /   ٢٠

٧ ـ ٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة Identity Matrix

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بِـ و.

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} ، \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$

$\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذ كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{س}$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{و}$ ، فإن $\underline{س}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$

ويرمز إليها بِـ $\underline{أ}^{-١}$.

إذًا $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$

مثال (١)

أثبت أن $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

التاريخ / / ٢٠

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب |أ| = $\begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix}$ = أ د − ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

مثال (٢)

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$

مثال (٣)

إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

التاريخ   /   /   ٢٠

حاول أن تحل

٣ إذا كانت المصفوفة $\underline{ب}$ = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٢س & -٤ \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

مثال (٤)

هل للمصفوفة: $\underline{أ}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

التاريخ   /   /   ٢٠

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

مثال: حل المعادلة الاتية

$$\underline{س} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ & ٣١ \\ ١٢ & ٢٧ \end{bmatrix}$$

التاريخ   /   /   ٢٠

٧ـ٥ حل نظام من معادلتين خطيتين

١- الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة:

مثال (١)

حلّ النظام: $\left\{\begin{array}{l} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{array}\right.$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

حاول أن تحل

١ حلّ النظام: $\left\{\begin{array}{l} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{array}\right.$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

التاريخ / / ٢٠

٢ – استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

مثال (٢)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:
$$\begin{cases} \text{٤س} - \text{٥ص} + ٧ = ٠ \\ \text{٣ص} - \text{٦س} + ٣ = ٠ \end{cases}$$

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

٢ استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:

$$\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$$

استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

$$\begin{rcases} ٤ = \text{ص} + ٢\text{س} \\ ٦ = \text{ص} - ٣\text{س} \end{rcases}$$

مثال: حل المعادلة الاتية

$$\begin{bmatrix} ٨ & ١٠ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} ٣ + \underline{\text{س}}٤$$