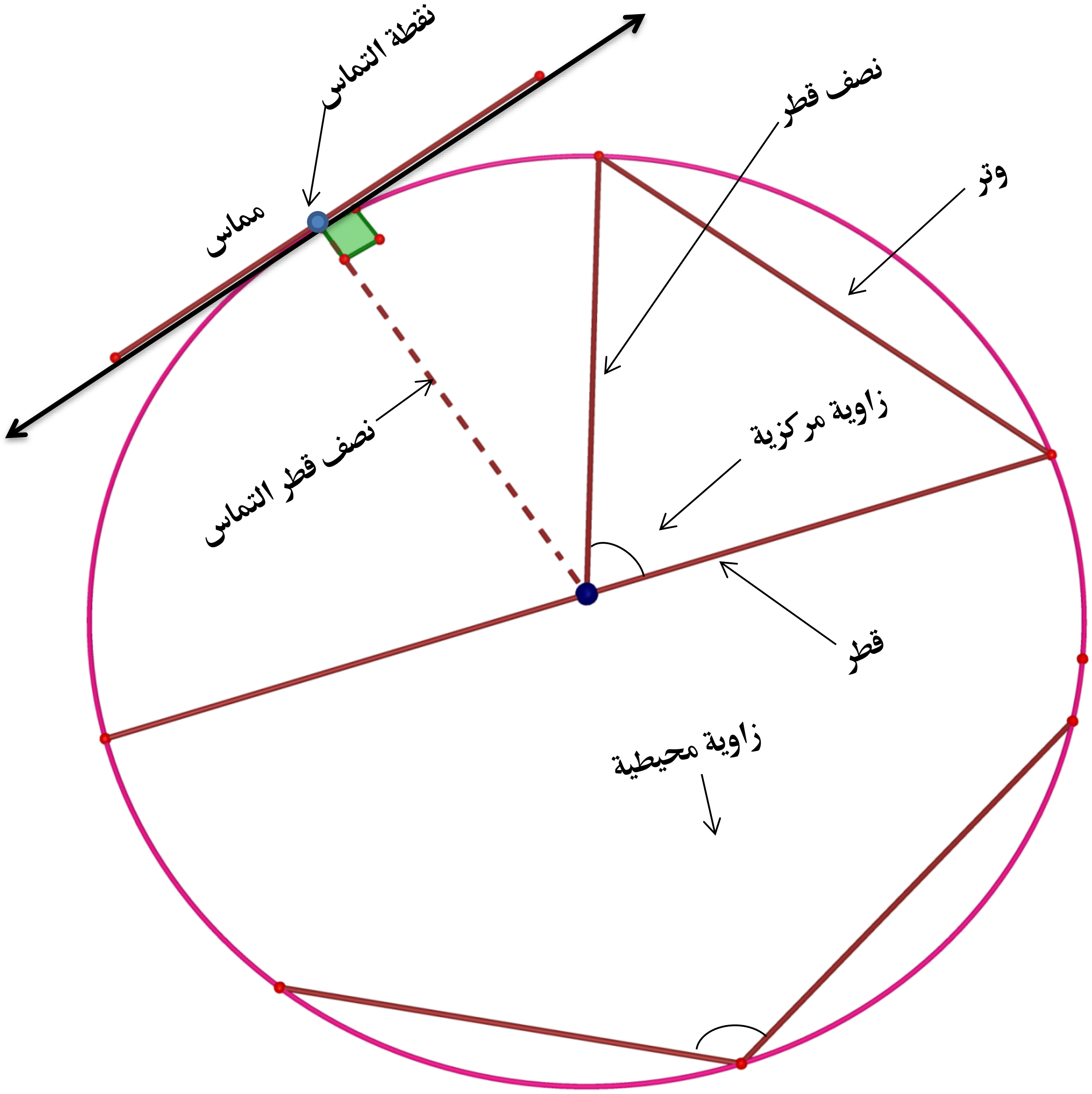
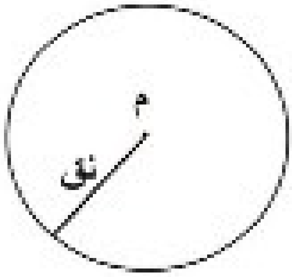
الوحدة السادسة : هندسة الدائرة



الأوتار المتقاطعة ، المماس	الزوايا المركزية والزوايا المحيطية	الأوتار و الأقواس	مماس الدائرة	الدائرة
٦-٤	٦-٣	٦-٢	٦-١(ب)	٦-١(أ)

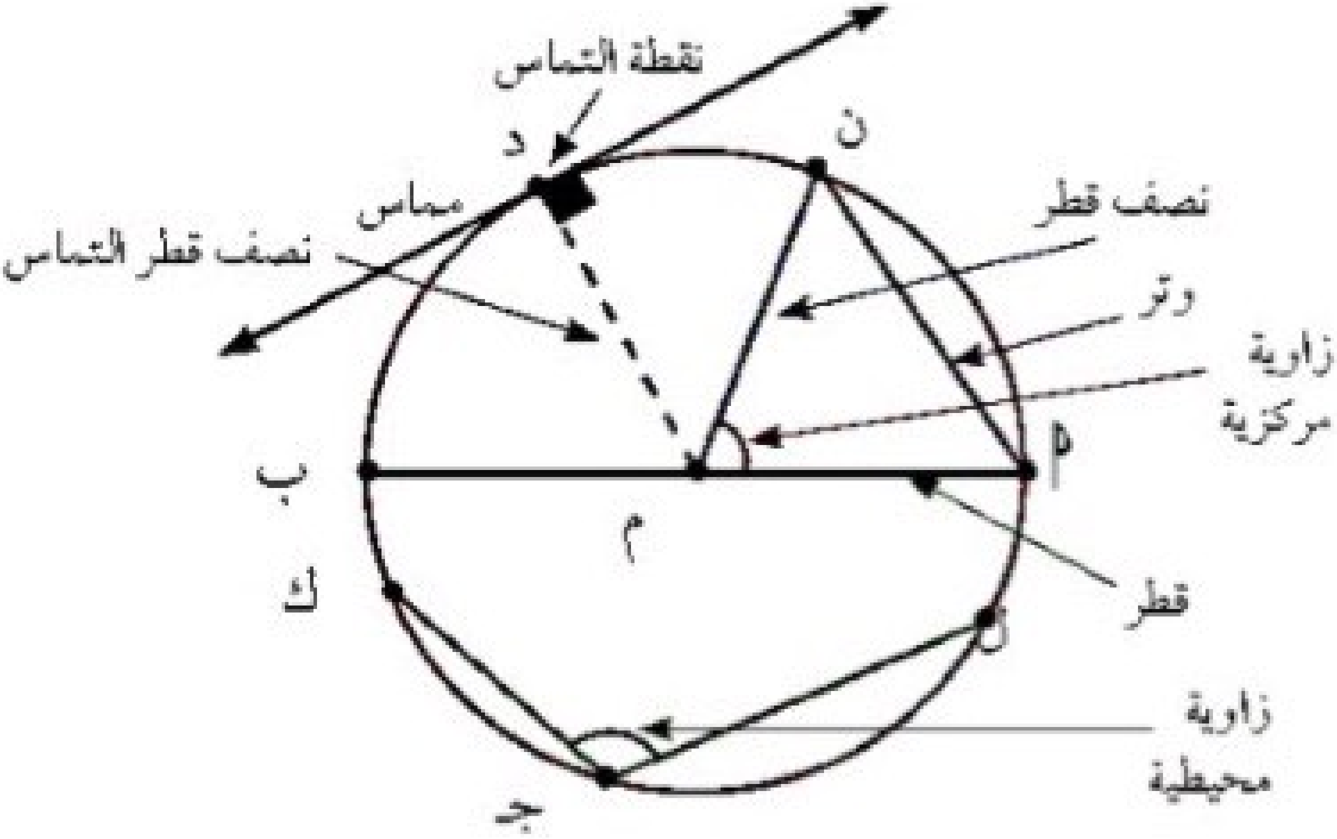
تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوي التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوي بعداً ثابتا تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز له عاده بالرمز نق



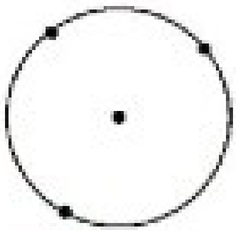
تعاريف هامة :

القطر – نصف القطر – الوتر – المماس – نصف قطر التماس
الزاوية المحيطية – الزاوية المركزية



نظرية ١

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة فقط



نتيجة ١ : من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم

أ .

نتيجة ٢ : أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي

أ .

تدريب ١ : بالإستعانة بالشكل المقابل أجب عن الأسئلة التالية

١) كم عدد الدوائر المارة بالنقطة أ ؟

....

....

٢) كم عدد الدوائر المارة بالنقطتين أ ، ب ؟

....

....

٣) كم عدد الدوائر المارة بالنقطتين أ ، ب ، نصف قطرها ٦ سم ؟

....

....

٤) كم عدد الدوائر المارة بالنقطتين م ، ب ، نصف قطرها ٤ سم ؟

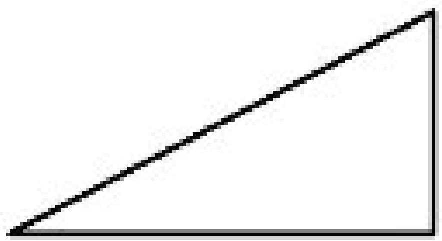
م ٨ سم ب

٥) كم عدد الدوائر المارة بالنقطتين م ، ب ، نصف قطرها ٢.٥ سم ؟

م ٨ سم ب

تدريب ٢ :

حدد مركز الدائرة المارة برؤس مثلث قائم الزاوية ؟

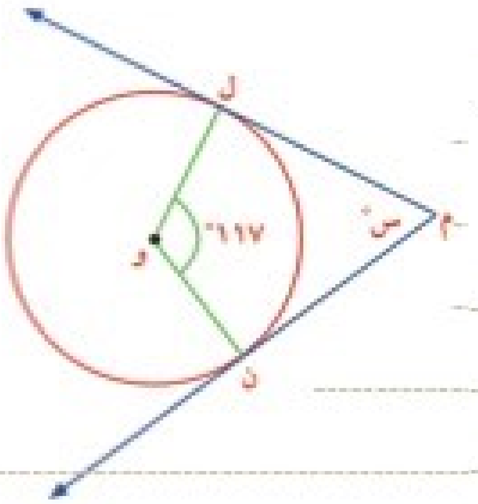


نظرية (٢) : المماس عمودي على نصف قطر التماس .

مثال(١) : في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و .

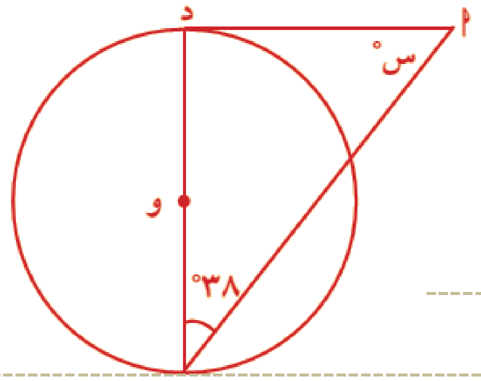
أوجد قياس الزاوية ل مَ ن .

الحل :



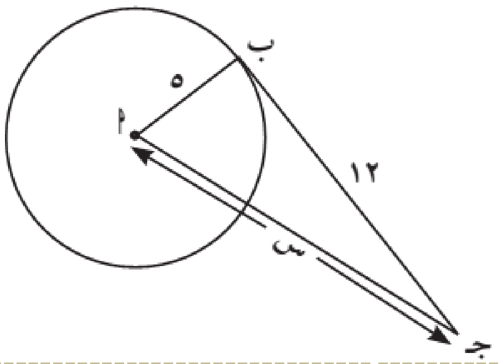
تطبيق(١) : في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م د}}$ مماس للدائرة التي مركزها و أوجد قيمة س

الحل :

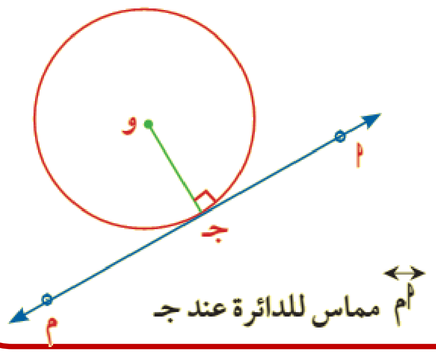


واجب: في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة . أوجد قيمة س

الحل :

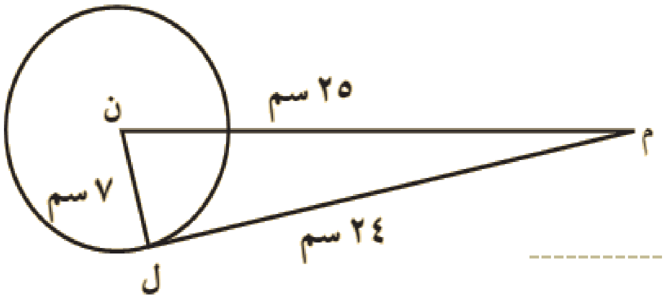


نظرية (٣) : المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة
عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة
يكون مماساً لهذه الدائرة عند هذه النقطة .



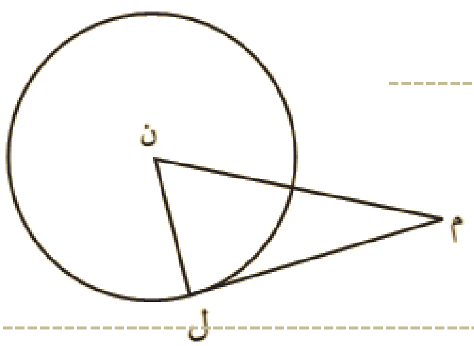
مثال(٢) : في الشكل المقابل : دائرة مركزها ن ، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة .

الحل :



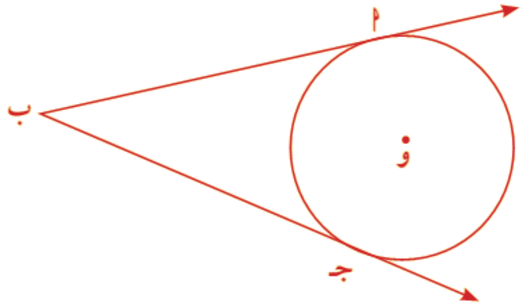
تطبيق (٢) : في الشكل المقابل : دائرة مركزها ن ، ن ل = ٤ سم ، ل م = ٧ سم ، ن م = ٨ سم
هل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن ؟ فسر إجابتك .

الحل :



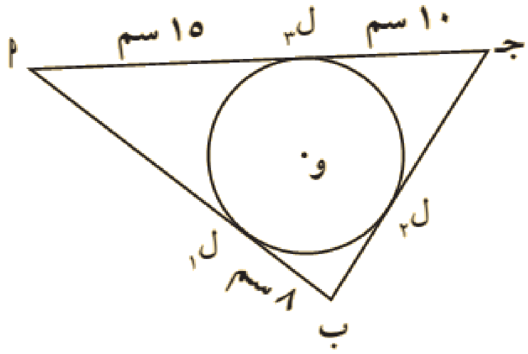
نظرية (٤) : القطعتان المماستان لدائرة و المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان .

$\overline{\text{ب} ؏} \cong \overline{\text{ب} ج}$



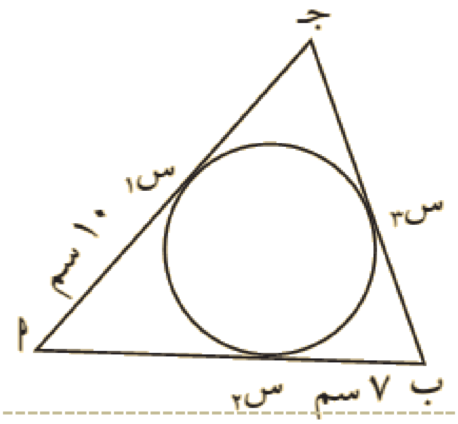
مثال(٣) : في الشكل المقابل أوجد محيط المثلث ؏ ب جـ

الحل :

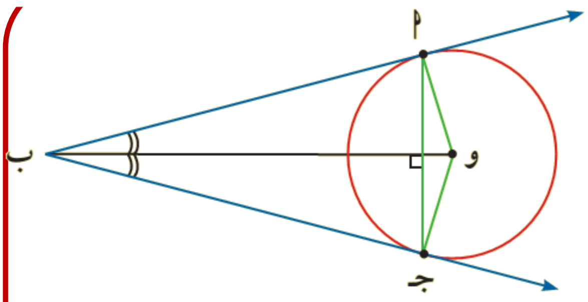


تطبيق(٣) : في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث ؏ ب جـ = ٥٠ سم فأوجد طول ب جـ .

الحل :



نتائج النظرية :



م ب جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة .

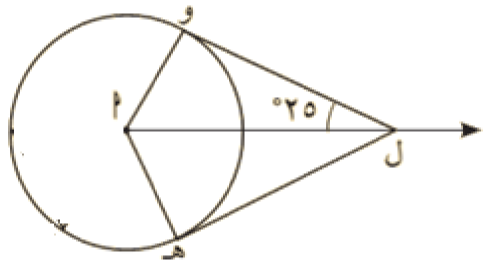
١. $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية م $\widehat{\text{ب}}$ جـ

٢. $\overleftarrow{\text{وب}}$ منصف الزاوية م $\widehat{\text{و}}$ جـ

٣. $\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{م جـ}}$

مثال(٤) : في الشكل المقابل ، أوجد ق(م هـ ل) ، ق(ل م و)

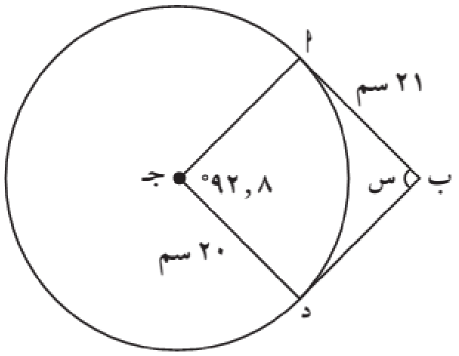
إذا كانت $\overline{\text{ل و}}$ ، $\overline{\text{ل هـ}}$ تمسان الدائرة حيث $\overline{\text{و د}}$ قطر للدائرة .



الحل :

****

تطبيق(٤) : $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة



(أ) أوجد قيمة س

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب م جـ د .

(جـ) أوجد ب جـ

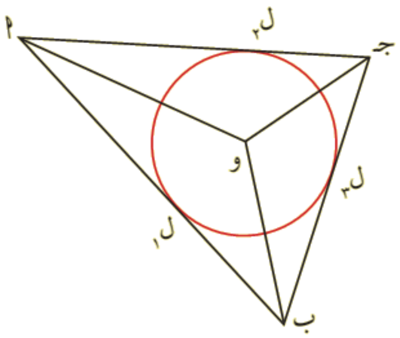
الحل :

الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) :

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل .

مركز هذه الدائرة هو :

نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث .

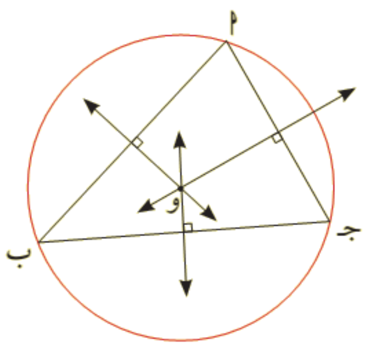


الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة) :

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة .

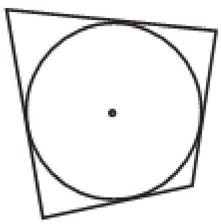
مركز هذه الدائرة هو :

نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث .



مثال(٥) : حدد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع(داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة)

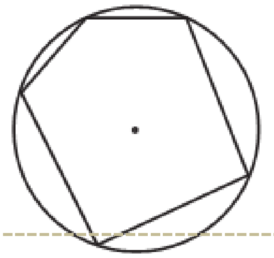
١)



------------ ------------

----

٢)



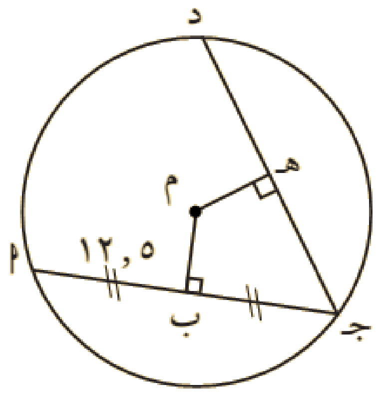
بند ٦ ـ ٢ : الأوتار و الأقواس

نظرية (١) : في دائرة أو في دوائر متطابقة : ١) للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة .
٢) الأوتار المتطابقة تقابل أقواساً متطابقة .
٣) للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة .

نظرية (٢) :
١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة .
٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة .

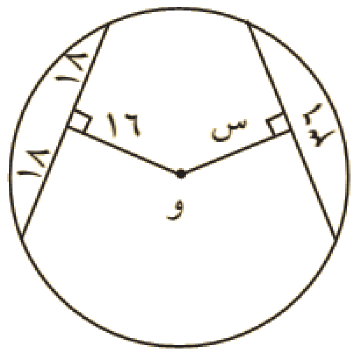
مثال(١) : في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة ، م ب = م هـ . أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسر .

الحل :



تطبيق(١) : في الشكل المقابل دائرة مركزها م أوجد قيمة س . فسر

الحل:

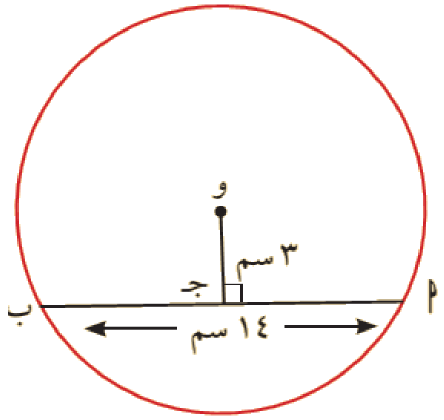


نظرية (٣) :

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه و ينصف كلاً من قوسيه .
٢ القطر الذي ينصف وتراً (ليس قطراً) في دائرة يكون عمودياً على هذا الوتر .
٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة .

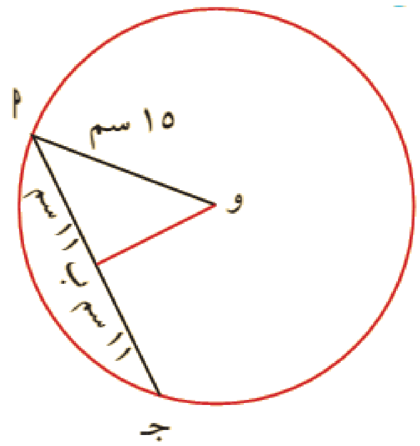
مثال (٢): في الشكل المقابل أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و .

الحل :



تطبيق(٢) : في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة و الوتر .

الحل :

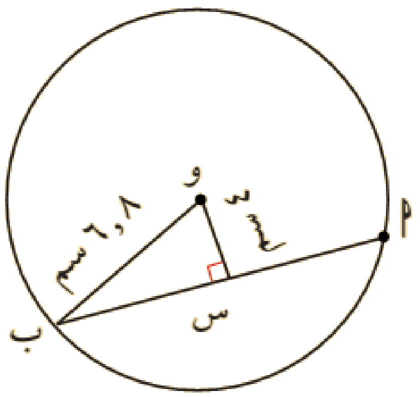


واجب : في الشكل المقابل أوجد :

١) طول الوتر $\overline{\text{م ب}}$.

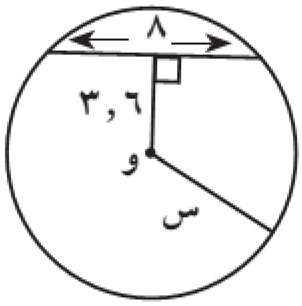
٢) المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{م ب}}$.

الحل :



واجب : في الشكل المقابل أوجد قيمة س .

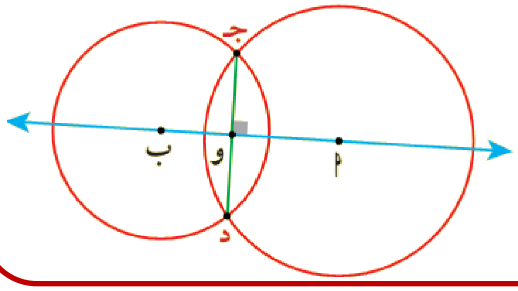
الحل :



نتيجة:

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً

على الوتر المشترك بينهما و ينصفه .

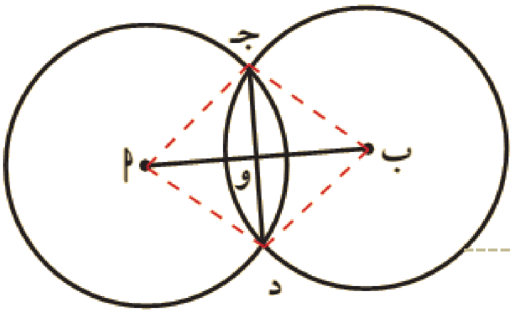


مثال (٢): في الشكل المقابل دائرتين متطابقتين جـ د وتر مشترك .

إذا كان م ب = ٢٤ سم ، بو =١٣ سم

فما طول جـ د ؟

الحل :



بند ٦ – ٣ : الزوايا المركزية و الزوايا المحيطية

تعاريف :

١) الزاوية المركزية : هي زاوية رأسها مركز الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة .
٢) الزاوية المحيطية : هي زاوية رأسها إحدى نقاط الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة .

نظرية (١) :

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصورة بين ضلعيها على الدائرة .

نظرية (٢) :

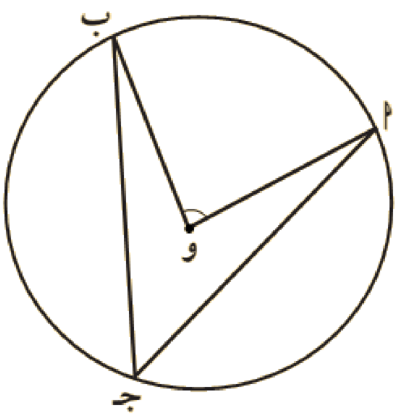
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها .

نتيجة : قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة

معها في القوس نفسه .

مثال (١) : في الشكل المقابل : إذا كان ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٨٠ فأوجد ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ ب}}$) .

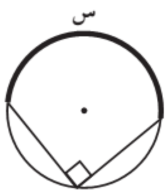
الحل :



تطبيق(١) : أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية :

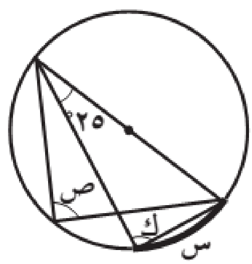
(أ)

(ب)



(جـ)

(هـ)



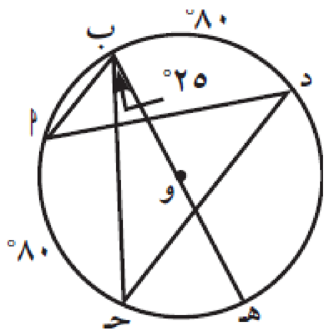
أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:

(أ) ق(أ̂).

(ب) ق(جـ⌒هـ).

(جـ) ق(جـ̂).

(د) ق(أب̂هـ).



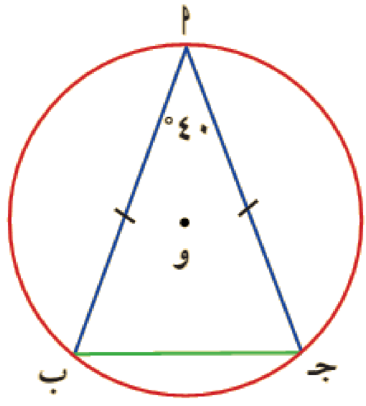
مثال(٢) : ﻡ جـ ب مثلث متطابق الضلعين حيث ﻡ ، ب ، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ، ق(ب ﻡ̂ جـ)=٤٠°

١) أوجد قياس كل من الأقواس ﻡ⁀ب ، ب⁀جـ ، ﻡ⁀جـ

٢) إذا كان جـ هـ منصف الزاوية الداخلية ﻡ جـ⁀ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ .

ما قياس القوس الأصغر ﻡ⁀هـ

الحل :

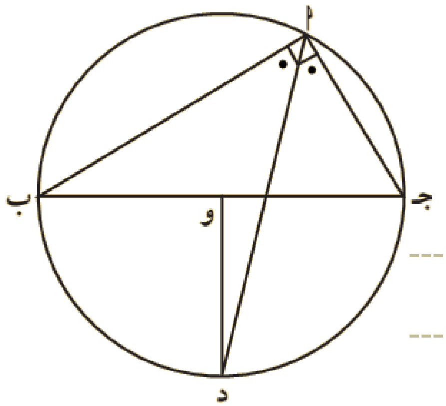


تطبيق(٢) : في الشكل المقابل : دائرة مركزها و .

١) أثبت أن د و ⊥ ب جـ .

٢) إذا كان ق(ﻡ ب̂ جـ) = ٣٠ ، أوجد ق(ﻡ د̂ ب) .

الحل :



نتائج :

١) كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان .

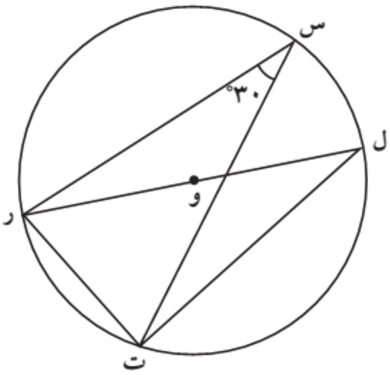
٢) كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة .

٣) كل شكل رباعي دائري تكون زواياه المتقابلة متكاملة .

مثال(٣) : مستخدماً معطيات الشكل المقابل حيث "و " مركز الدائرة

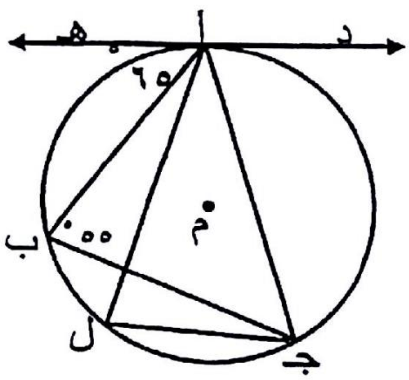
(أ) ما نوع المثلث ر ل ت ؟ (ب) أوجد ق(ل رَ ت)

الحل :

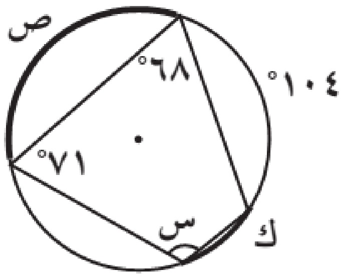


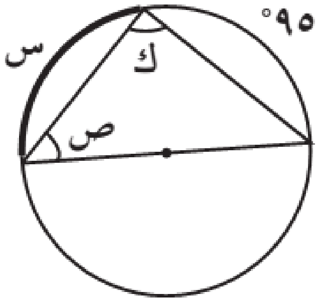
في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، ق (هـ أ̂ ب) = ٦٥° ، ق (أ ب̂ جـ) = ٥٥° أوجد كلاً مما يلي مع ذكر السبب :

(١) ق (أ جـ̂ ب) (٢) ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$) (٣) ق (أ ل̂ جـ)



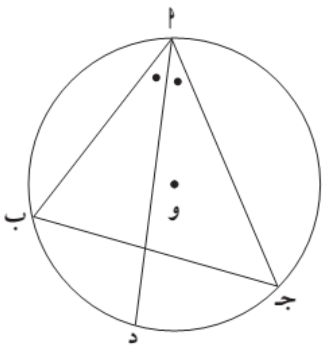
تطبيق(٣) : أوجد قياسات الزوايا و الأقواس المجهولة في الأشكال التالية :





واجب: في الشكل المقابل إذا كان ؍ د منصف الزاوية ؍

أثبت أن المثلث ب جـ د متطابق الضلعين .

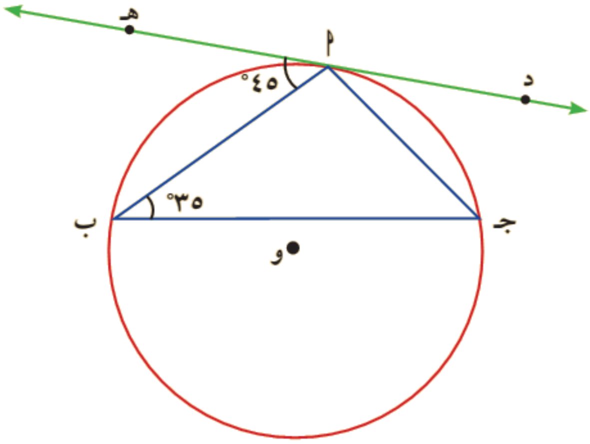


نظرية (٣) :

١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه .
٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصورة بين المماس و الوتر .

مثال(٤) : في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماساً للدائرة عند م ، فأوجد ق($\overset{\frown}{\text{جـ م ب}}$)

الحل :

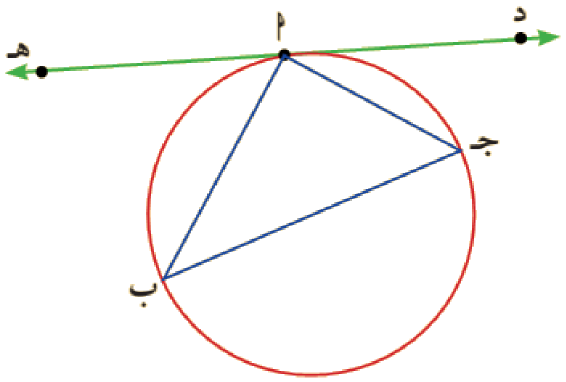


تطبيق(٤) : في الشكل المقابل ، لدينا : ق(د ٨ جـ) = ٤٠ ، ق(هـ ٨ ب) = ٥٠

١) أوجد قياسات زوايا المثلث ٨ ب جـ

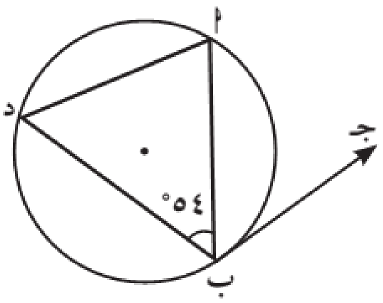
٢) أ ثبت أن جـ ب قطر للدائرة .

الحل :



واجب : في الشكل المقابل إذا كان ق(ب د) = ١٤٠ ، أوجد ق(٨ ب جـ)

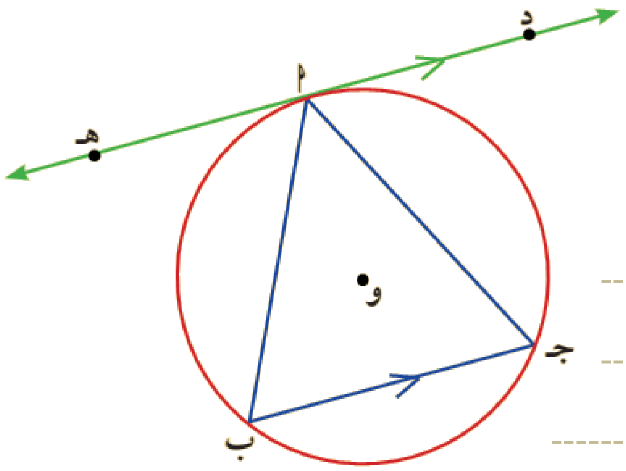
الحل :



مثال (٥): في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة ﻫ ،

$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

أثبت أن المثلث ﻫ ب جـ متطابق الضلعين .

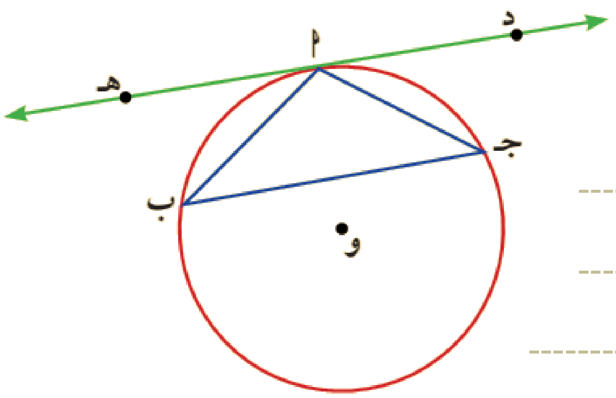


الحل :

تطبيق(٥) : في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة ﻫ ،

المثلث ﻫب جـ متطابق الضلعين (ﻫ ب = ﻫ جـ)

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.



الحل :

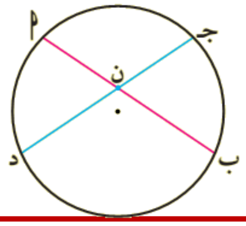
****

بند ٦-٤ : الأوتار المتقاطعة ، المماس

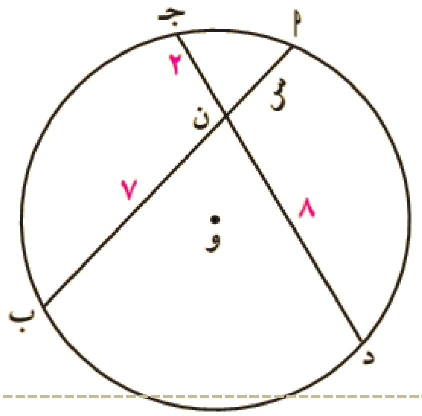
أولاً : تقاطع الأوتار داخل الدائرة :

نظرية (١) : إذا تقاطع وتران داخل دائرة ، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر .

ن م × ن ب = ن جـ × ن د

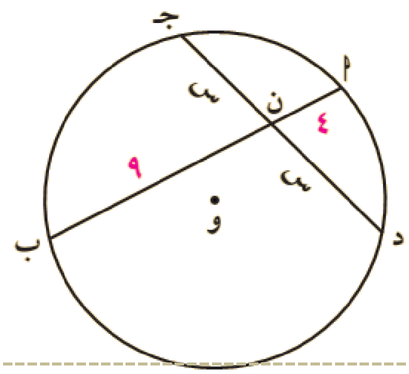


مثال(١) : في الشكل المقابل أوجد قيمة س .



الحل :

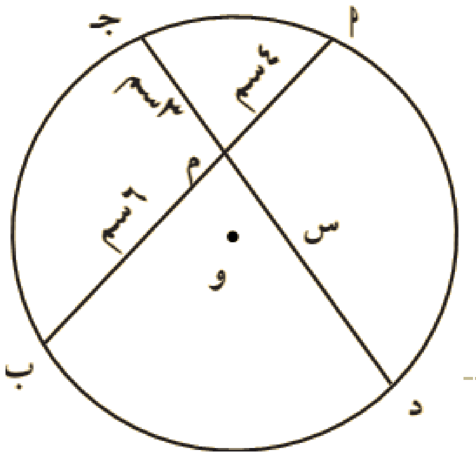
تطبيق(١) : في الشكل المقابل أوجد قيمة س



الحل :

مثال(٢) : في الدائرة المقابلة التي مركزها و :

م ٲ = ٤ سم ، م ب = ٦ سم ، م جـ = ٣ سم ، م د = س



١) أوجد قيمة س
٢) أوجد البعد بين المركز "و" و الوتر $\overline{\text{د جـ}}$
إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦
الحل :

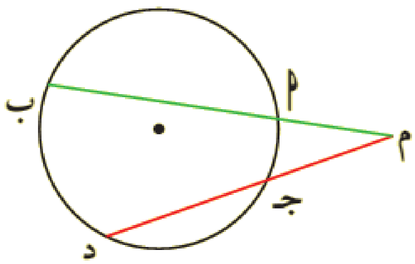
ثانياً : تقاطع الأوتار خارج الدائرة :

نتيجة (١) : إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة ،

فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي

يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي .

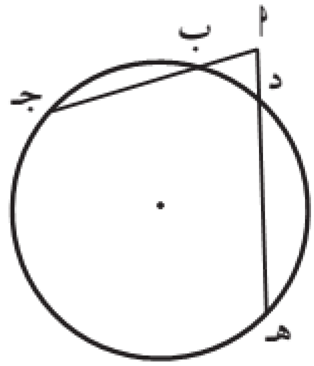
م ﺃ × م ب = م جـ × م د



مثال(٣) : في الشكل المقابل :ﺃجـ = ٢٠ ، ب جـ = ١٥ ، ﺃهـ =٢٥

أوجد دهـ

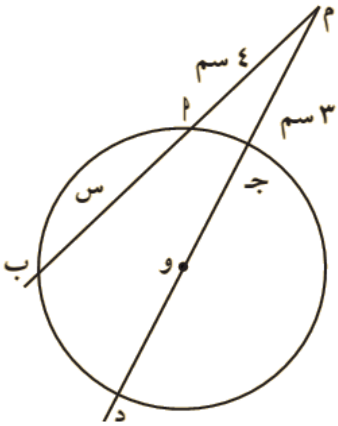
الحل :



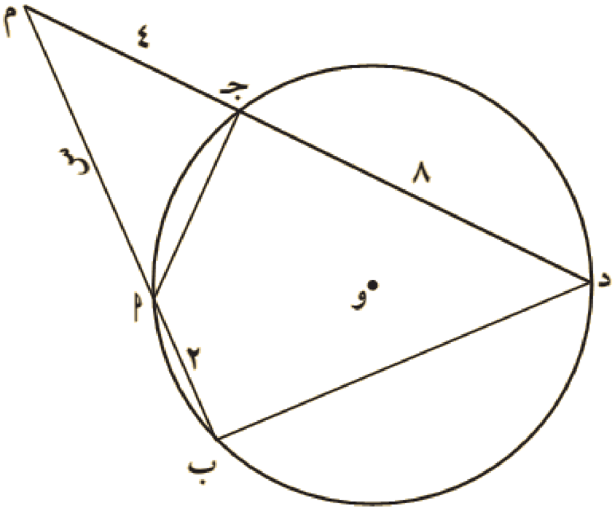
تطبيق(٣) : في الشكل المقابل ، دائرة مركزها و . طول نصف قطرها يساوي ٤ سم

أوجد قيمة س .

الحل :



مثال(٤) : في الشكل المقابل : أوجد قيمة س



الحل :

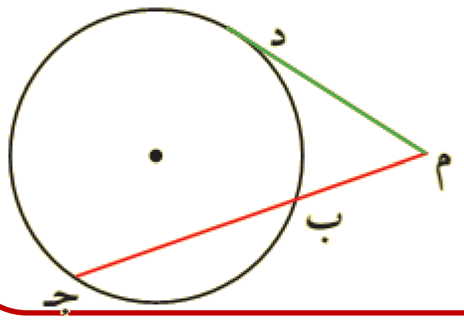
ثالثاً : تقاطع مماس و قاطع الدائرة من نقطة خارج الدائرة :

نتيجة (٢) : إذا رسم من نقطة خارج الدائرة قاطع و مماس ،

فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي

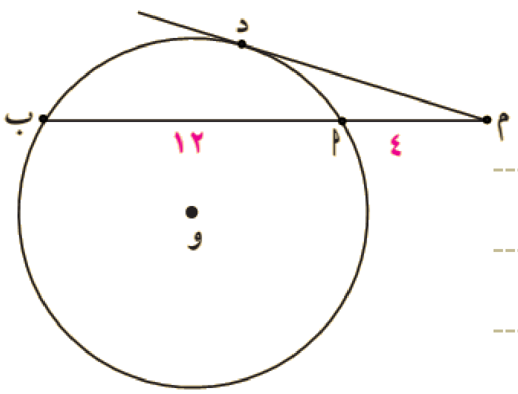
يساوي مربع طول القطعة المماسية .

$(م\ د)^٢ = م\ ب \times م\ جـ$



مثال(٥) : في الشكل المقابل ، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{م\ د}$

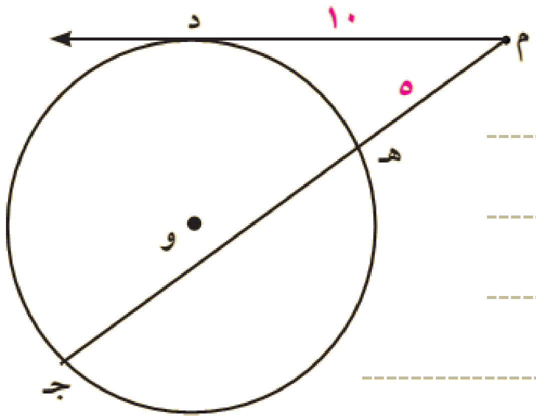
علماً بأن : ؍ م = ٤ سم ، ؍ ب = ١٢ سم



الحل :

تطبيق(٥) : في الشكل المقابل ، $\overline{م\ د}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠ سم ، م هـ = ٥ سم

أوجد طول $\overline{هـ\ جـ}$.



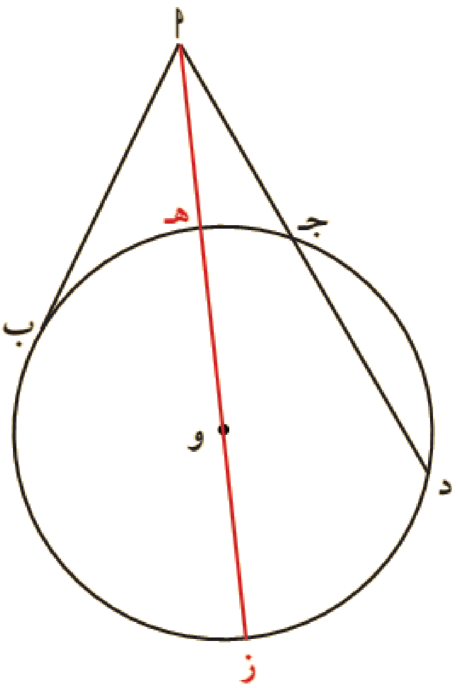
الحل :

****

مثال(٦) : في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ مماس للدائرة

م جـ = ١٠ ، م هـ = ٨ ، هـ ل = ١٢

أوجد : جـ د ، م ب .

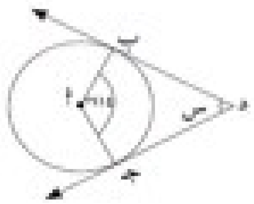


الحل :

بنــــــــود موضـــــــــوعية

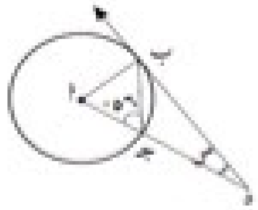
بنـــد (6 – 1)

في التمارين (٨ – ١١)، اختر الإجابة الصحيحة:



(٨) إذا كان $\overleftrightarrow{دب}$ ، $\overleftrightarrow{دجـ}$ مماسان للدائرة. فإن س =

(أ) ٢٦° (ب) ٥٧° (جـ) ٦٦° (د) ١١٤°

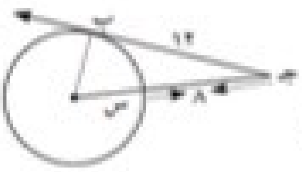


(٩) إذا كان $\overleftrightarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٢٢° (ب) ٢٨° (جـ) ٣٤° (د) ٤٠°

(١٠) إذا كان $\overleftrightarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ١٧



(١١) إذا كان $\overleftrightarrow{جـب}$ مماس للدائرة. فإن س =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

بنـــد (6 – 2)

في التمرينين (٩ – ١٠)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٩) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبًا:

(أ) ٩ سم (ب) ٩,٦ سم (جـ) ١٨ سم (د) ١٩,٢ سم

---

(١٠) في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:

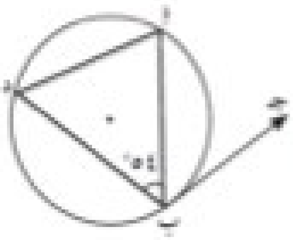
(أ) جـ = د (ب) ٢أ = ب

(جـ) جـ^2 + هـ^2 = ب^2 (د) هـ = د

بنـــد (6 – 3)

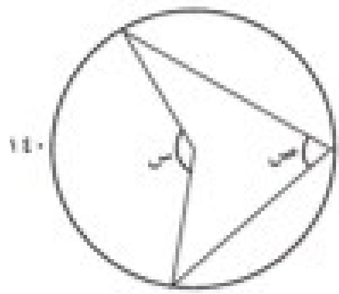
(٦) في الشكل المقابل، إذا كان ق(أب⌒) = ٧٢°، ق(ب جـ هـ) = ٥١°.
فإن قياس القوس هـ أ⌒ =

(أ) ٣٠° (ب) ١٠٢° (جـ) ٧٢° (د) ٦٨°



(٧) في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب د⌒) = ١٤٠°، فإن ق(أب جـ) =

(أ) ٧٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٥٦° (د) ١٢٤°



(٨) في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:

(أ) ٢٨٠°، ١٤٠° (ب) ٧٠°، ٣٥°

(جـ) ١٤٠°، ٤٠° (د) ١٤٠°، ٧٠°