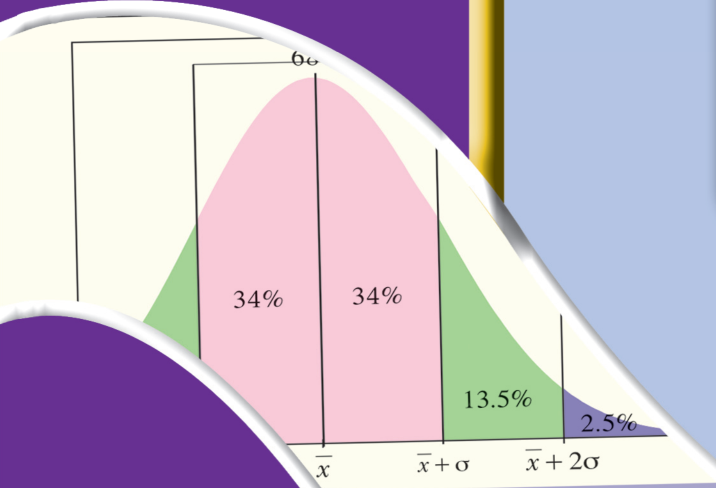
وزارة التربية

الرياضيات

كتاب المعلّم



الصفّ الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الأوّل

١١

الطبعة الثانية

وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الأول

كتاب المعلّم

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٣٦ - ١٤٣٧ هـ

٢٠١٥ - ٢٠١٦ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. حسين اليماني الشامي
أ. مصطفى محمد شعبان

أ. صديقة أحمد صالح الانصاري
أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. منى علي عيسى المسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٣

الطبعة الأولى ٢٠١٣

الطبعة الثانية ٢٠١٥

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدّمة من كتاب المعلِّم

توجيهات عامّة للمعلِّم

هذه السلسلة تعمل على تنمية أساليب التفكير، وذلك بتركيزها على بناء المفاهيم الرياضيّة وربطها بالواقع الحياتيّ من خلال:

١ - الأنشطة العمليّة والتوظيف بشكل مميَّز للألعاب التربويّة في استكشاف المفاهيم ودعم إحساس التلميذ بهذه المفاهيم، وذلك باستخدام طرائق مختلِفة:

العمل في فريق.

تأليف مجلّات رياضيّة.

إِستخدام المحسوسات وشبه المحسوسات.

جذب الانتباه باستخدام بعض الألعاب التي تتناسب مع أعمارهم.

التعبير الشفهيّ - التفكير الناقد.

٢ - الاعتماد على المصوَّرات، وذلك من خلال التمثيل البيانيّ للمعلومات وقراءة البيانات الممثَّلة بيانيًّا.

٣ - الاعتماد على المواقف والقصص الحياتيّة وربطها بالموضوعات، وكذلك توظيف الموضوعات الرياضيّة في حلّ المسائل الحياتيّة.

٤ - التأكيد على فهم المفاهيم واستيعابها، والربط بين الرياضيّات وباقي الموادّ.

تطبيق السلسلة

لتطبيق السلسلة، يجب مراعاة ما يلي:

وجود ملفّين لكلّ طالب بحيث يُخصَّص أحدهما للأنشطة الصفّيّة واللاصفّيّة، أمّا الآخر فيُخصَّص للاختبارات والملحوظات الميدانيّة على أداء التلميذ، ويُدوِّنها المعلِّم، وهذا أوّل ما يقوم به، مقرونةً بتواريخ المتابعة.

يُنوِّع المعلِّم في طرائق التدريس، وخاصّةً التي تشمل الاستكشاف والألعاب التربويّة وحلّ المشكلات.

نماذج المعلِّم لتقييم التلاميذ تشمل:

- تقييم الأداء في حلّ المسائل.
- التقييم المستمرّ في حلّ المسائل والملاحظة والتعليم التعاونيّ.
- التقييم الفرديّ في الملاحظة والمراقبة.
- التقييم العامّ للتلميذ.

تقييم الأداء في حلّ المسائل

الِاسم .... التّاريخ ....

تقييم الأداء في حلّ المسائل

❶ ضع إشارة ✓ قرب العبارة التي تصف بدقّة أداء الطالب.

اِفهَمْ

- يقرأ المسألة بتأنٍّ.
- يقرأ أيّ جدوَل أو أيّ تمثيل بياني.
- يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصّة.
- يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.
- يستطيع فهم وإدراك السؤال الذي يجب الإجابة عليه.

خَطِّطْ

- يختار الخطّة الأنسب لحلّ المسألة.
- يقدِّر الإجابة الصحيحة.

حُلَّ

- يعمل وفقًا لمنهجية معيّنة.
- يعرض الحلّ بطريقة منظَّمة وسليمة.
- يحسب بطريقة صحيحة.
- يعطي الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.

راجِعْ ولاحِظْ

- يُلاحِظُ معقولية الإجابة.
- يجرِّب طرقًا أخرى لحلّ المسألة.

❷ اِتبِع المواصفات التالية لتقييم أداء الطالب:

مستوى ٤ (يتقن الطالب ١١–١٣ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا عميقًا للمسألة ويفسِّرها بشكل موجز وواضح ويكون قادرًا على ربط المسألة بعمل سبق أن أنجزه.

مستوى ٣ (يتقن الطالب ٨–١٠ من المهمات السابق ذكرها). يفهم الطالب المسألة ويعرض الحلّ الصحيح بطريقة منظَّمة وواضحة.

مستوى ٢ (يتقن الطالب ٤–٧ من المهمات السابق ذكرها). يُظهر الطالب فهمًا إجماليًّا للمسألة غير أنّه قد يرتكب بعض الأخطاء في تفاصيل معيّنة.

مستوى ١ (يتقن الطالب ٠–٣ فقط من المهمات السابق ذكرها). لا يُظهر الطالب إلّا فهمًا سطحيًّا أو جزئيًّا للمسألة وهو ليس قادرًا على إتمام العمل المطلوب أو حتى اعتماد المنهجية الصحيحة، كما أنّه لا يعطي إجابة صحيحة أو تكون خطّته غير مناسبة، وفي أغلب الأحيان لا نجد حلًّا ولا تجاوبًا مناسبًا أو إجابة صحيحة مرفقةً بجهد ما.

التقييم المستمرّ: حلّ المسائل

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.**ت** غير قابل للتطبيق

	يقرأ المسألة بتأنٍّ	يدرس الصوَر والجداول والتمثيلات البيانيّة	يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاصّ	يستطيع تحديد المعلومات	يستطيع تحديد الأسئلة التي تطّلب الإجابة عليها	يختار الخطّة المناسبة	يقدّر ما ستكون عليه الإجابة	يعمل بانتظام	يكتب الحلّ بطريقة منظّمة	يُجري العمليات الحسابية بدقّة	يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة	يلاحظ صحّة الإجابة ومعقوليّتها	يجرّب طرقًا أخرى للحلّ
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: الملاحظة

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
- + إذا كان ممتازًا
- ✓ إذا كان مقبولًا
- − بحاجة للتطوير
- غ.ت غير قابل للتطبيق

	يُظهر معرفة بالمهارات	يدرك المفاهيم	يعمل بترتيب وانتظام	يعمل بنجاح مع الآخرين	يُظهر مواقف إيجابية	يحترم أفكار الغير ويستخدمها	يُظهر صبرًا ومثابرة	يطلب المساعدة عند الحاجة	يستخدم الوقت بإنتاجية	يجرّب طرقًا أخرى			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

التقييم المستمرّ: التعلُّم التعاوني

التّاريخ ....

قدّر كلّ بند بـ:
+ إذا كان ممتازًا
✓ إذا كان مقبولًا
– بحاجة للتطوير
غ.ت غير قابل للتطبيق

	يُظهر قدرة على حلّ المسائل	يعمل بانتظام	يعمل مع آخرين في الفريق	يوجّه ويساعد الآخرين	يحترم آراء الآخرين ويستخدمها	يتكلّم بهدوء	يُثير أسئلة	يظهر ميولًا إيجابية	يُظهر صبرًا ومثابرة	يُظهر عدم موافقة دون اشمئزاز			
١.													
٢.													
٣.													
٤.													
٥.													
٦.													
٧.													
٨.													
٩.													
١٠.													
١١.													
١٢.													
١٣.													
١٤.													
١٥.													
١٦.													
١٧.													
١٨.													
١٩.													
٢٠.													
٢١.													
٢٢.													
٢٣.													
٢٤.													
٢٥.													
٢٦.													
٢٧.													
٢٨.													

المحتويات

الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية Real Numbers

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 1: الجذور والتعبيرات الجذرية

جزء 1: الجذور والتعبيرات الجذرية

جزء 2: الجذور التكعيبية.

جزء 3: تبسيط الجذور .

جزء 4: جمع وطرح التعبيرات الجذرية.

جزء 5: ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية.

جزء 6: تبسيط كسر مقامه يتضمّن جذرًا.

2 – 1: الأسس النسبية

جزء 1: قوانين الأسس النسبية.

3 – 1: حل المعادلات

جزء 1: حل المعادلات الجذرية.

جزء 2: حل المعادلات الأسية.

مقدمة الوحدة


الوحدة الأولى

الأعداد الحقيقية

The Real Numbers

مشروع الوحدة: معدل السرعة

1 مقدمة المشروع: شغلت حركة كواكب النظام الشمسي العلماء منذ القدم. ما هو مدار كل كوكب؟ ما كتلته؟ وفي أي اتجاه يدور؟ وما هي الشهب؟
يعتبر يوهانز كيبلر Johannes Kepler من أهم علماء الفلك وواضع ما عرف بقوانين كيبلر الثلاثة حول حركة الكواكب في 1609 و1618.

2 الهدف: التعرف على قوانين كيبلر وإجراء بعض العمليات الحسابية حول مدار كوكب، وسرعته، وزنته.

3 اللوازم: آلة حاسبة علمية، أوراق رسم بياني، حاسوب، جهاز إسقاط Data Show.

4 أسئلة حول التطبيق:

a اعرض قوانين كيبلر الثلاثة وادعم عرضك ببعض الرسوم التي تبيّن حركة الكواكب وعلاقتها بالمدار الإهليليجي (بيضاوي).

b ضع جدولًا يبيّن خصائص بعض كواكب النظام الشمسي: بُعدها عن الشمس، كتلتها، طول قطرها، الزمن المستغرق لدورانها دورة كاملة حول الشمس وحول نفسها.

c أوجد نسبة مربع الزمن لدورة الأرض دورة كاملة حول الشمس إلى مربع الزمن لدورة عطارد دورة كاملة حول الشمس، وقارنها بنسبة مكعب بُعد الأرض عن الشمس إلى مكعب بُعد عطارد عن الشمس.

d اسأل معلم مادة الجغرافيا عن حركة الكواكب وعن أبحاث كوبرنيكوس، وكيبلر، وجاليليو حول هذا الموضوع.

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن خطوات المشروع وكيف استفدت من دروس الوحدة في حساباتك.
ضمّن التقرير نتائج محادثتك مع معلم مادة الجغرافيا. ودعمه بصور وملصقات أو عرض على جهاز الإسقاط Data Show.

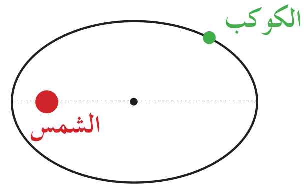
دروس الوحدة

الجذور والتعبيرات الجذرية	الأسس النسبية	حل المعادلات
1−1	1−2	1−3

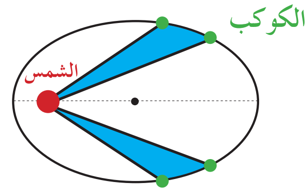
10

اشتهر عالم الفلك الألماني يوهانز كيبلر (Johannes Kepler 1571 – 1630) بدراسة نظرية مركزية الشمس (الأرض تدور حول الشمس) لكوبرنيك (Nicolas Copernic)، وخاصة لاكتشافه أن الكواكب لا تدور بشكل دائري حول الشمس بل وفق مسارٍ إهليليجي (على شكل قطع ناقص) فاكتشف العلاقات الرياضية الثلاث المسماة «قوانين كيبلر» التي تحدد حركة الكواكب على مدارها، و نشر القانونين الأولين سنة 1609، ثمّ ألحق بهما القانون الثالث سنة 1618. ارتكز نيوتن على هذه القوانين في وضع قانون الجاذبية.

القانون الأول: حركة الكواكب حول الشمس إهليليجية (على شكل قطع ناقص) تكون الشمس في إحدى بؤرتيه.



القانون الثاني: تختلف سرعة دوران كوكب حول الشمس بحيث تتساوى مساحة القطاعين المشكلين بين الشمس وأحد الكواكب خلال فترتين زمنيتين متساويتين.



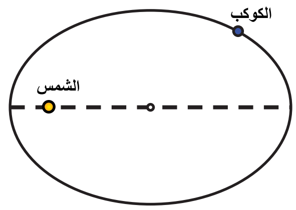
القانون الثالث: النسبة بين مربّعي فترتي دوران أي كوكبين هي نفسها النسبة بين القيمة التكعيبية للبعد المتوسط لكل منهما عن الشمس.

مشروع الوحدة

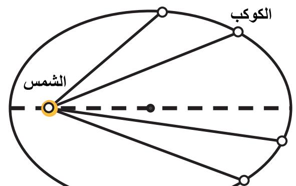
لم يتعرف بعد الطالب «القطوع المخروطية» الناتجة عن تقاطع سطح مخروطي ومستوٍ بوضعيات مختلفة. يمكن للمعلم إعطاء فكرة سريعة عن هذه القطوع مدعمًا فكرته برسوم بيانية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) القانون الأول: حركة الشمس حول الكواكب على شكل قطع ناقص تكون الشمس في إحدى بؤرتيه.



القانون الثاني: تختلف سرعة دوران كوكب حول الشمس بحيث تتساوى مساحة القطاعين المشكلين بين الشمس وأحد الكواكب خلال فترتين زمنيتين متساويتين.



القانون الثالث: النسبة بين مربعي فترتي دوران كوكبين تساوي النسبة بين مكعب البعد المتوسط لكل منهما عن الشمس.

(b)

	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون
البعد عن الشمس (10^6 km)	46 إلى 69.8	108.21	149.6	227.94	7 778.34	1 427	2 869	4 496.7
الكتلة (بالنسبة إلى الأرض)	0.06	0.82	1	0.11	317.9	95.1	14.5	17.2
القطر (km)	4 870	12 100	12 750	6 790	142 790	120 600	51 100	40 600
زمن الدوران حول الشمس	87.9 يومًا	224.7 يومًا	1 سنة = 365.25 يومًا	1.88 سنة	11.86 سنة	29.46 سنة	84 سنة	164.7 سنة
زمن الدوران حول نفسه	58.6 يومًا	243 يومًا	1 يوم = 23.9 h	1.025 يوم = 24.6 h	9.9 h	10.7 h	17.2 h	16.05 h

(c) 17: 1 ، نلاحظ تساوي النسبتين.

(d) تتنوّع أساليب العرض.


الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)
- تعرفت الأعداد الحقيقية.
- تعرفت الجذر التربيعي.
- تعرفت حل المتباينات.
- استخدمت الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.
- تعرفت القيمة المطلقة وحل متباينات تتضمن القيمة المطلقة.

ماذا سوف تتعلم؟
- ضرب الجذور التربيعية والجذور التكعيبية وقسمتها.
- ضرب التعبيرات الجذرية النونية وقسمتها.
- كيفية إيجاد المرافق واستخدامه.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الأسية.
- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

المصطلحات الأساسية

الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – الجذر النوني – المرافق – دليل الجذر – المجذور – المعادلة الجذرية – المعادلة الأسية – الصورة الجذرية – الصورة الأسية.

أضف إلى معلوماتك

المعكوس الضربي لكل عدد حقيقي موجب أكبر من واحد هو عدد حقيقي موجب أصغر من واحد. إذًا يوجد أعداد حقيقية موجبة أصغر من واحد بقدر ما يوجد أعداد حقيقية موجبة أكبر من واحد.

ظهور الصفر في الهند: في العام 876 وجدت الأرقام التالية في مغارة غواليور Gwalior (على بعد 300 km من نيودلهي) وتعود إلى القرن الخامس ويظهر فيها الصفر.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

مثلًا: 270 933

انتقل هذا الترقيم إلى الغرب بواسطة الخوارزمي (بين القرنين الثامن والتاسع).

خضعت هذه الأرقام لعدة تحولات وأصبحت حاليًا:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

11

التقرير

اعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقش معهم النتائج التي توصلت إليها، ثمّ أعد النظر ببعض الأفكار والاقتراحات والحسابات إذا رأيت ذلك ضروريًّا.

سلّم التقييم

4	العرض في المشروع بكامله واضح– الجدول متكامل ويخلو من الأخطاء– الحسابات صحيحة. التقرير مفصل ومنظّم ويعكس دقةً وجهدًا في العمل.
3	معظم العرض في المشروع واضح– بعض الأخطاء في الجدول– أخطاء طفيفة في الحسابات. التقرير مفصل ومنظّم ولكن ينقصه بعض التفاصيل الصغيرة.
2	بعض العرض في المشروع واضح– أخطاء متكرّرة ومتعدّدة في الجدول وفي الحسابات– التقرير غير مفصل وغير منظّم إجمالًا.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

1–1: الجذور والتعبيرات الجذرية

1 الأهداف

- يختصر الجذور.
- يضرب التعبيرات الجذرية ويقسمها.
- يستخدم المرافق لتبسيط كسر إلى كسر مقامه عدد نسبي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

التعبيرات الجذرية – الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – المرافق – دليل الجذر – المجذور – تحليل – عوامل أولية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد الجذر التربيعي لكل عدد مما يلي:

$\sqrt{64},\ \sqrt{121},\ \sqrt{256},\ \sqrt{200}$

(b) أوجد الجذر التربيعي إلى أقرب جزء من مئة لكل عدد مما يلي باستخدام الآلة الحاسبة.

$\sqrt{17},\ \sqrt{182},\ \sqrt{200}$

(c) بسّط كلًّا مما يلي:

$\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}},\ \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}},\ (4)^2,\ (-4)^2,\ \sqrt{3}\times\sqrt{12},\ \sqrt{2}\times\sqrt{32}$

5 التدريس

التعامل مع الجذور والتعبيرات الجذرية يحتاج إلى الكثير من الانتباه وتأنٍّ وخبرة، خاصة عند إجراء العمليات التي تحوي التعابير الجذرية.

ركّز أولًا على أن: $\sqrt{x^2}=|x|$

وأن: $\pm\sqrt{x^2}=\pm|x|$

أي أن: $\sqrt{25}=\sqrt{(\pm5)^2}=|\pm5|=5$

1–1

الجذور والتعبيرات الجذرية

Roots and Radical Expressions

سوف تتعلم
- اختصار الجذور.
- ضرب التعبيرات الجذرية.
- قسمة التعبيرات الجذرية.
- استخدام المرافق لتبسيط كسر إلى كسر مقامه عدد نسبي.

المفردات والمصطلحات:
- الجذر التربيعي Square Root
- الجذر التكعيبي Cubic Root
- التعبيرات الجذرية Radical Expressions
- دليل الجذر Radix
- المجذور Radicand
- المرافق Conjugate
- تحليل Analyse
- عوامل أولية Prime Factors

دعنا نفكر ونتناقش

1 صالة عرض سيّارات مكعبة الشكل. إذا كان:

a طول ضلعها يساوي 12 m فإن مساحة أحد أوجهها تساوي ....

b مساحة أحد أوجهها تساوي $100\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ...

c مساحة أحد أوجهها تساوي $400\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ... (يمكن استخدام الآلة الحاسبة).

d مساحتها الكلية تساوي $384\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ...

e طول ضلعها يساوي 12 m فإن حجمها يساوي ...

f حجمها يساوي $512\ m^3$ فإن طول ضلعها يساوي ...

g حجمها يساوي $970\ m^3$ فإن طول ضلعها يساوي ...

الجذور والتعبيرات الجذرية Roots and Radical Expressions

بما أن $(5)^2=(-5)^2=25$

فإن العددين -5 , $+5$ هما الجذران التربيعيان للعدد 25

بما أن $(5)^3=125$ فإن العدد 5 هو الجذر التكعيبي للعدد 125

وأيضًا بما أن $(-5)^3=-125$

فإن العدد (-5) هو الجذر التكعيبي للعدد (-125)

وبالتالي:

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

أي أن إذا كان $A^2=x$ فإن $A=\pm\sqrt{x}\ ,\ x>0$

- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد.

ملخص عدد الجذور الحقيقية لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور الحقيقية التكعيبية
موجب	2	1
صفر	1	1
سالب	0	1

معلومة:

أسماء وحدات الطول

millimetre	mm
centimetre	cm
decimetre	dm
metre	m
decametre	dam
hectometre	hm
kilometre	km

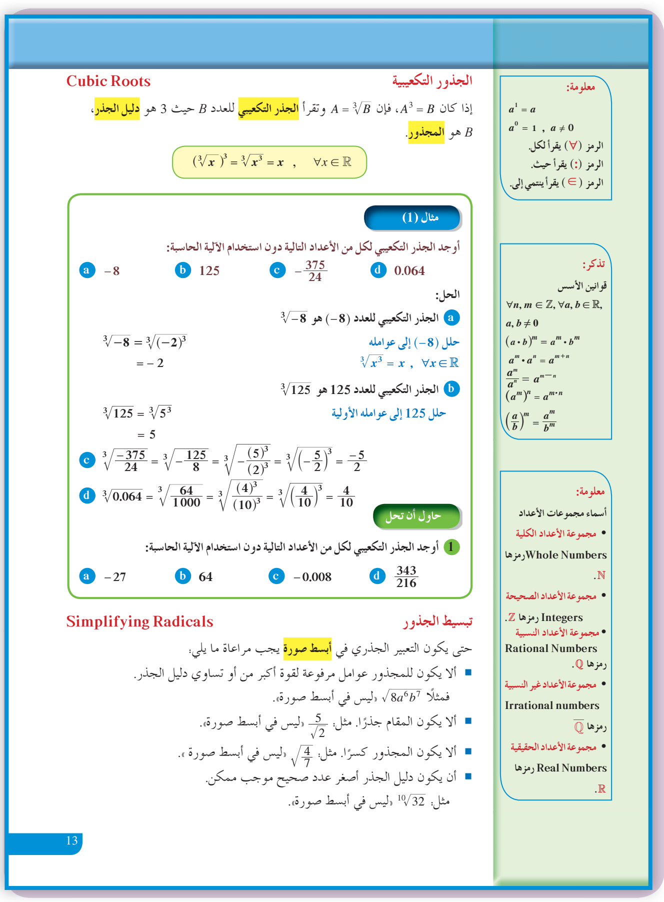
معلومة:

عندما يكون دليل الجذر يساوي 2 فلا يكتب الدليل.

مثال: $\sqrt{x}$ تعني الجذر التربيعي لِـ x

أي مقدار يتضمن جذورًا يسمى تعبيرًا جذريًّا.

12



الجذور التكعيبية Cubic Roots

إذا كان $A^3=B$، فإن $A=\sqrt[3]{B}$ وتقرأ **الجذر التكعيبي** للعدد B حيث 3 هو **دليل الجذر**، B هو **المجذور**.

$(\sqrt[3]{x})^3=\sqrt[3]{x^3}=x\ ,\quad \forall x\in\mathbb{R}$

مثال (1)

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلية الحاسبة:

a -8 b 125 c $-\frac{375}{24}$ d 0.064

الحل:

a الجذر التكعيبي للعدد (-8) هو $\sqrt[3]{-8}$

حلل (-8) إلى عوامله

$\sqrt[3]{x^3}=x\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

b الجذر التكعيبي للعدد 125 هو $\sqrt[3]{125}$

حلل 125 إلى عوامله الأولية

$\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$

c $\sqrt[3]{\frac{-375}{24}}=\sqrt[3]{-\frac{125}{8}}=\sqrt[3]{-\frac{(5)^3}{(2)^3}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{5}{2}\right)^3}=\frac{-5}{2}$

d $\sqrt[3]{0.064}=\sqrt[3]{\frac{64}{1000}}=\sqrt[3]{\frac{(4)^3}{(10)^3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{10}\right)^3}=\frac{4}{10}$

حاول أن تحل

1 أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلية الحاسبة:

a -27 b 64 c -0.008 d $\frac{343}{216}$

تبسيط الجذور Simplifying Radicals

حتى يكون التعبير الجذري في **أبسط صورة** يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر. فمثلًا $\sqrt{8a^6b^7}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المقام جذرًا. مثل: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المجذور كسرًا. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ «ليس في أبسط صورة ».
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن. مثل: $\sqrt[10]{32}$ «ليس في أبسط صورة».

معلومة:

$a^1=a$

$a^0=1\ ,\ a\neq0$

الرمز $(\forall)$ يقرأ لكل.

الرمز $(:)$ يقرأ حيث.

الرمز $(\in)$ يقرأ ينتمي إلى.

تذكر:

قوانين الأسس

$\forall n,m\in\mathbb{Z}, \forall a,b\in\mathbb{R},$

$a,b\neq0$

$(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$

معلومة:

أسماء مجموعات الأعداد

- مجموعة الأعداد الكلية Whole Numbers رمزها $\mathbb{N}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة Integers رمزها $\mathbb{Z}$.
- مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers رمزها $\mathbb{Q}$.
- مجموعة الأعداد غير النسبية Irrational numbers رمزها $\overline{\mathbb{Q}}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية Real Numbers رمزها $\mathbb{R}$.

13

ولكن: $\pm\sqrt{25} = \pm\sqrt{(\pm 5)^2} = \pm|5| = \pm 5$

من ناحية ثانية، فإن $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(4)^3} = 4$

ثم $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

وعلى العموم إذا كان: $x^2 = a$، فإن $a > 0$, $x = \pm\sqrt{a}$

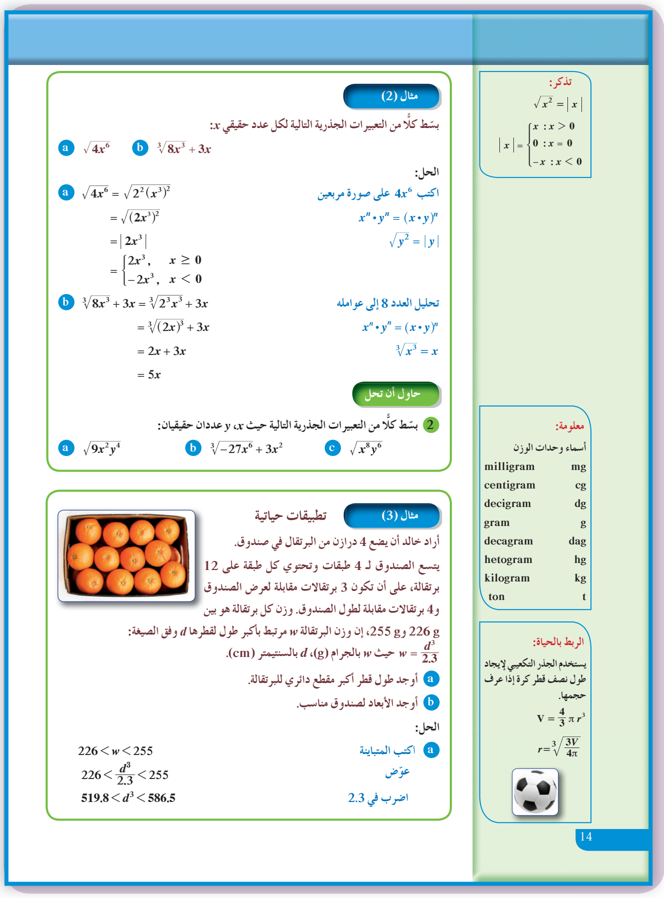
أي يوجد قيمتان للمتغير x تحققان المعادلة $x^2 = a$، ولكن إذا $x^3 = a$، فإن $x = \sqrt[3]{a}$ أي يوجد قيمة واحدة فقط تحقق المعادلة $x^3 = a$

توسع في هذه المفاهيم من خلال المثال (1) وذلك بعرض أمثلة بديلة تساعد على تعميق هذه المعلومات.

في المثال (2)

تبسيط التعبيرات الجذرية تدخل ضمن إطار ما تقدم، والمهم هو إيجاد الربط بين أس المجذور ودليل الجذر فيصبح التبسيط عندها في غاية السهولة.

شجِّع الطلاب دائمًا على كتابة أس المجذور بصورة مضاعفات لدليل الجذر.


تذكر:

$\sqrt{x^2} = |x|$

$|x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$

مثال (2)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي x:

a $\sqrt{4x^6}$ b $\sqrt[3]{8x^3} + 3x$

الحل:

a $\sqrt{4x^6} = \sqrt{2^2(x^3)^2}$ اكتب $4x^6$ على صورة مربعين

$= \sqrt{(2x^3)^2}$ $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

$= |2x^3|$ $\sqrt{y^2} = |y|$

$= \begin{cases} 2x^3, & x \geq 0 \\ -2x^3, & x < 0 \end{cases}$

b $\sqrt[3]{8x^3} + 3x = \sqrt[3]{2^3x^3} + 3x$ تحليل العدد 8 إلى عوامله

$= \sqrt[3]{(2x)^3} + 3x$ $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

$= 2x + 3x$ $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 5x$

حاول أن تحل

2 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية حيث x، y عددان حقيقيان:

a $\sqrt{9x^2y^4}$ b $\sqrt[3]{-27x^6} + 3x^2$ c $\sqrt{x^8y^6}$

معلومة:

أسماء وحدات الوزن

milligram	mg
centigram	cg
decigram	dg
gram	g
decagram	dag
hetogram	hg
kilogram	kg
ton	t

مثال (3) تطبيقات حياتية

أراد خالد أن يضع 4 درازن من البرتقال في صندوق. يتسع الصندوق لـ 4 طبقات وتحتوي كل طبقة على 12 برتقالة، على أن تكون 3 برتقالات مقابلة لعرض الصندوق و4 برتقالات مقابلة لطول الصندوق. وزن كل برتقالة هو بين 226 g و255 g، إن وزن البرتقالة w مرتبط بأكبر طول لقطرها d وفق الصيغة: $w = \frac{d^3}{2.3}$ حيث w بالجرام (g)، d بالسنتيمتر (cm).

a أوجد طول قطر أكبر مقطع دائري للبرتقالة.

b أوجد الأبعاد لصندوق مناسب.

الحل:

a اكتب المتباينة $226 < w < 255$

عوّض $226 < \frac{d^3}{2.3} < 255$

اضرب في 2.3 $519.8 < d^3 < 586.5$

الربط بالحياة:

يستخدم الجذر التكعيبي لإيجاد طول نصف قطر كرة إذا عرف حجمها.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

14

في الأمثلة (4 — 7)

تتناول العمليات التي يمكن القيام بها على التعابير الجذرية ألا وهي الجمع والطرح والضرب والقسمة، ومن ثم العودة إلى تبسيط هذه الجذور. شدّد على أن العمليات الأربع تتم بين التعابير الجذرية إذا كان لها الدليل نفسه.

في المثال (8)

وضِّح للطلاب معنى المرافق والغاية من استخدامه. أخبرهم أن مرافق الجذر التربيعي هو نفسه الجذر التربيعي، أي أن مرافق $\sqrt{a}$ هو $\sqrt{a}$، لأن $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2$ فنتخلص من الجذر ولكن مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$ كي نتخلص من الجذر أي:

$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$

أما إذا كان يوجد تعبير جذريّ تربيعيّ، فإن مرافق $(a-b)$ هو $(a+b)$، لأن: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$، وهذا يجعلنا أيضًا نتخلص من الجذر. وعلى العموم فإن عملية ضرب مقام الكسر في المرافق هي إجراء يهدف إلى التخلص من الجذر في مقام الكسر وبالتالي يساعد على تبسيط الكسر إذا أمكن ذلك.


أوجد الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{519.8} < \sqrt[3]{d^3} < \sqrt[3]{586.5}$

استخدم الآلة الحاسبة $8.04 < d < 8.37$

وبالتالي طول قطر أكبر مقطع دائري بين 8.04cm و 8.37cm

b عرض الصندوق: $3 \times 8.37 = 25.11\,\text{cm}$

طول الصندوق = ارتفاع الصندوق:

$4 \times 8.37 = 33.48\,\text{cm}$

حاول أن تحل

3 استخدم الصيغة $w = \frac{d^3}{2.3}$ لإيجاد طول قطر أكبر مقطع دائري لكل برتقالة وزنها كما يلي:

a 85 g b 195.93 g c 177.19 g

معلومة:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

• $\mathbb{R}^-$ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

• $\mathbb{R}^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

جمع وطرح التعبيرات الجذرية Adding and Subtracting Radical Expressions

لجمع التعبيرات الجذرية وطرحها، يجب أن تكون متشابهة

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

يجب وضع التعبيرات الجذرية في أبسط صورة مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

لاحظ أن: $5\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ تعبيران جذريان متشابهان

$8\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{27}$ و $\sqrt{12}$ تعبيران جذريان متشابهان. لماذا؟

في حين أن:

$\sqrt{3}$ و $3\sqrt{5}$ هما تعبيران جذريان غير متشابهين

$\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{y}$ $(x \geqslant 0$، $y \geqslant 0)$ هما تعبيران جذريان غير متشابهين

معلومة:

إذا كان $a \in \mathbb{R}^-$، فإن $\sqrt{a} \notin \mathbb{R}$ فمثلًا $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

معلومة:

نتعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة.

مثال (4)

أوجد الناتج في أبسط صورة

a $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$ b $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

c $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$ d $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

15

6 الربط

يوفّر المثالان (9) ,(3) فرصة أمام الطلاب للتعرف على كيفية استخدام الجذور في مواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في جمع التعابير الجبرية للجذور وطرحها،

مثل: $\sqrt{x \pm y} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

ساعدهم على تخطي ذلك بأمثلة حسيّة مثل:

$$\sqrt{36+64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

$$10 \neq 14$$

8 التقييم

من المهم جدًّا متابعة عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لمعرفة مدى قدرتهم على فهم العمليات على الجذور والتعبيرات الجذرية وتبسيطها واستخدام المرافق.

تمرّنْ 1−1

الجذور والتعبيرات الجذرية
Roots and Radical Expressions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

(a) $\sqrt{400}$ **(b)** $\sqrt{1600}$ **(c)** $\sqrt{10^4}$ **(d)** $\sqrt{0.01}$

(e) $\sqrt{0.25}$ **(f)** $\sqrt{0.0064}$ **(g)** $\sqrt{\frac{-16}{49}}$ **(h)** $\sqrt{\frac{2}{50}}$

(i) $\sqrt{\frac{12}{147}}$ **(j)** $\sqrt{36 \times 25}$ **(k)** $\sqrt{\frac{-1}{121}}$ **(l)** $\sqrt{75 \times 300}$

(2) باستخدام قوانين الجذور أوجد:

(a) $\sqrt[3]{27}$ **(b)** $\sqrt[3]{1000}$ **(c)** $\sqrt[3]{-64}$ **(d)** $\sqrt[3]{0.125}$

(e) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ **(f)** $\sqrt[3]{216 \times 343}$ **(g)** $\sqrt[3]{-\frac{375}{24}}$ **(h)** $\sqrt[3]{0}$

(i) $\sqrt[3]{60 \times 90}$

(3) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{16x^2}$ **(b)** $\sqrt{0.25x^6}$ **(c)** $\sqrt{x^8y^{18}}$

(d) $\sqrt{8x^3},\ x \geq 0$ **(e)** $\sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}},\ y \geq 0,\ x > 0$ **(f)** $5\sqrt{216x^2 + 23\sqrt{64x^4}}, x > 0$

(g) $\sqrt[3]{-125y^6}$ **(h)** $\sqrt[3]{81x^2}$ **(i)** $\sqrt[3]{-250x^6y^5}$

(j) $\sqrt[3]{49x^2} \times \sqrt[3]{56xy^3}$ **(k)** $\sqrt[3]{256u^5v} \div \sqrt[3]{4u^2v^{10}}, u \neq 0, v \neq 0$

(4) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{5} \times \sqrt{40}$ **(b)** $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{80}$ **(c)** $\frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{270}}$

(d) $\sqrt{5} \times (\sqrt{5} + \sqrt{15})$ **(e)** $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ **(f)** $\sqrt{2} \times (\sqrt{50} + 7)$

(g) $(5 + 2\sqrt{11})^2$ **(h)** $\frac{\sqrt{3.6 \times 10^8}}{\sqrt{4 \times 10^3}}$ **(i)** $3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$

(j) $\sqrt{75} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32}$ **(k)** $4\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{54}$ **(l)** $\sqrt[3]{-18} \times \sqrt[3]{-12}$

(m) $(2\sqrt{7} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$

9

الحل:

a $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

$= 3\sqrt{16 \times 2} - \sqrt{49 \times 2}$

$= 3\sqrt{4^2 \times 2} - \sqrt{7^2 \times 2}$ اكتب 16 , 49 على صورة مربعات كاملة

$= 3 \times 4 \times \sqrt{2} - 7 \times \sqrt{2}$ $\sqrt{x^2} = x, x \geqslant 0$

$= 12\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$ بسّط

$= 5\sqrt{2}$

b $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

$= 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{125 \times 3}$

$= 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{5^3 \times 3}$ اكتب 125 على صورة مكعب كامل

$= 2\sqrt[3]{3} + 5 \times 5 \times \sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 2\sqrt[3]{3} + 25\sqrt[3]{3}$ بسّط

$= 27\sqrt[3]{3}$

c $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

$= \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{36 \times 2}$

$= \sqrt{3^2 \times 2} + \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{6^2 \times 2}$ اكتب 9 , 25 , 16 على صورة مربعات كاملة

$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $\sqrt{x^2} = x\ ,\ x \geqslant 0$

$= 2\sqrt{2}$ بسّط

d $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

$= \sqrt[3]{64 \times 2} + \sqrt[3]{27 \times 2} - 2\sqrt[3]{125 \times 2}$

$= \sqrt[3]{4^3 \times 2} + \sqrt[3]{3^3 \times 2} - 2\sqrt[3]{5^3 \times 2}$ اكتب 64 , 27 , 125 على صورة مكعبات كاملة

$= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 2 \times 5\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2}$

$= -3\sqrt[3]{2}$ بسّط

حاول أن تحل

4 أوجد الناتج في أبسط صورة:

a $4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128}$ **b** $2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

c $\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$ **d** $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

16

(5) حديقة مستطيلة الشكل طولها $5\sqrt{21}$ m وعرضها $2\sqrt{7}$ m

(a) أوجد محيط الحديقة.

(b) أوجد مساحة الحديقة.

(6) اكتب كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

(a) $\sqrt{\frac{21}{4}} \times \sqrt{\frac{7}{27}}$ **(b)** $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ **(c)** $\frac{4}{3\sqrt{3} - 2}$

(d) $\frac{3 + \sqrt{8}}{2 - 2\sqrt{8}}$ **(e)** $\frac{5 + \sqrt{5}}{4 - 3\sqrt{5}}$ **(f)** $\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} - (9 - 4\sqrt{5})$

(g) $\frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$ **(h)** $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ **(i)** $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1},\ x \in \mathbb{Z}^+,\ x \neq 1$

(j) $\frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, x, y \in \mathbb{Z}^+$

(7) أوجد قيمة التعبير: $x^2 - 6$، إذا كان $x = \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$

(8) أوجد قيمة التعبير: $x^2 - x + 1$، إذا كان $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(9) اكتب كلًّا من التعبيرين التاليين على الصورة $a + b\sqrt{2}\ ,\ a, b \in \mathbb{Z}$

$E = 5 + 6\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 4)$ $F = (7\sqrt{2} - 4)^2$

(10) **الحساب الذهني.** بسّط: $\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sqrt[3]{-64x^3} + 4x = 0$ (a) (b)

(2) $\frac{8 - \sqrt{7}}{3} + \frac{3}{4 - \sqrt{7}} \in \mathbb{Z}$ (a) (b)

(3) $(3 - 2\sqrt{2})^{27} \times (3 + 2\sqrt{2})^{27} = 1$ (a) (b)

(4) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5}$ (a) (b)

(5) $|m| \times \sqrt{m^2} = m^2, \forall m \in \mathbb{R}$ (a) (b)

10

اختبار سريع

1 بسّط ما يلي:

(a) $\sqrt{49x^5y^7}$

$7x^2y^2|y|\sqrt{xy} = \begin{cases} 7x^2y^3\sqrt{xy}: & y \geqslant 0 \\ -7x^2y^3\sqrt{xy}: & y < 0 \end{cases}$

(b) $3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{147}$

$29\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{3xm} \times \sqrt{15xy}$

$3|x|\sqrt{5my} = 3x\sqrt{5my}$

(d) $\dfrac{\sqrt[3]{243x^5y^8}}{\sqrt[3]{9xy^2}}$ $x \neq 0,\ y \neq 0$

$3xy^2\sqrt[3]{x}$

2 يعطى حجم الكرة بالقاعدة: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

إذا كان حجم كرة يساوي $972\pi\ \text{cm}^3$

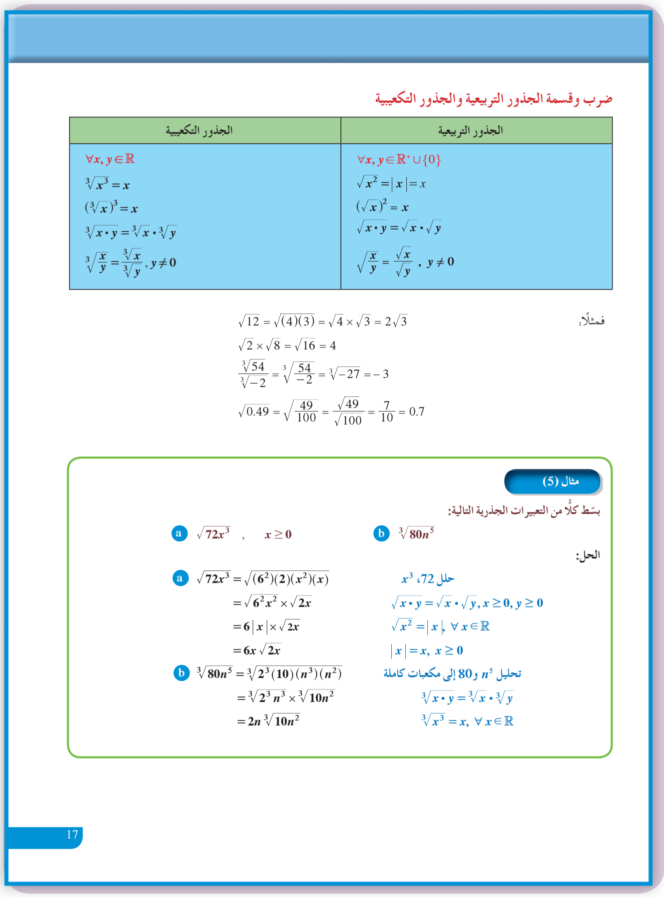
فما طول قطرها؟

$r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = 9$ ، $d = 9 \times 2 = 18\,\text{cm}$

3 اكتب الكسر التالي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًّا:

$$\frac{\sqrt{7}-6}{\sqrt{7}+6}$$

$$\frac{-43+12\sqrt{7}}{29}$$



ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التكعيبية	الجذور التربيعية
$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\sqrt[3]{x^3} = x$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$
$(\sqrt[3]{x})^3 = x$	$(\sqrt{x})^2 = x$
$\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$	$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$
$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, y \neq 0$	$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$

فمثلًا:

$\sqrt{12} = \sqrt{(4)(3)} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{-2}} = \sqrt[3]{-27} = -3$

$\sqrt{0.49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10} = 0.7$

مثال (5)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{72x^3}$, $x \geq 0$ **b** $\sqrt[3]{80n^5}$

الحل:

a $\sqrt{72x^3} = \sqrt{(6^2)(2)(x^2)(x)}$ حلل 72، x^3

$= \sqrt{6^2x^2} \times \sqrt{2x}$ $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, x \geq 0, y \geq 0$

$= 6|x| \times \sqrt{2x}$ $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

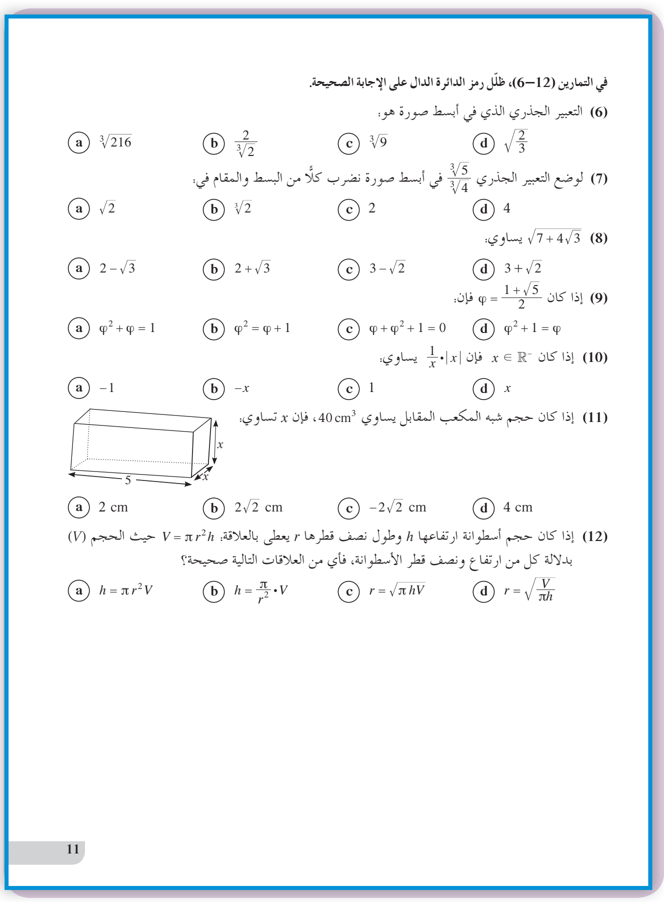
$= 6x\sqrt{2x}$ $|x| = x,\ x \geq 0$

b $\sqrt[3]{80n^5} = \sqrt[3]{2^3(10)(n^3)(n^2)}$ تحليل 80 و n^5 إلى مكعبات كاملة

$= \sqrt[3]{2^3n^3} \times \sqrt[3]{10n^2}$ $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

$= 2n\sqrt[3]{10n^2}$ $\sqrt[3]{x^3} = x, \forall x \in \mathbb{R}$

17



في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) التعبير الجذري الذي في أبسط صورة هو:

(a) $\sqrt[3]{216}$ (b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (c) $\sqrt[3]{9}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(7) لوضع التعبير الجذري $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ في أبسط صورة نضرب كلًّا من البسط والمقام في:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) 2 (d) 4

(8) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ يساوي:

(a) $2-\sqrt{3}$ (b) $2+\sqrt{3}$ (c) $3-\sqrt{2}$ (d) $3+\sqrt{2}$

(9) إذا كان $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإن:

(a) $\varphi^2+\varphi=1$ (b) $\varphi^2=\varphi+1$ (c) $\varphi+\varphi^2+1=0$ (d) $\varphi^2+1=\varphi$

(10) إذا كان $x \in \mathbb{R}^-$ فإن $\frac{1}{x} \cdot |x|$ يساوي:

(a) -1 (b) $-x$ (c) 1 (d) x

(11) إذا كان حجم شبه المكعب المقابل يساوي $40\,\text{cm}^3$، فإن x تساوي:

5

x

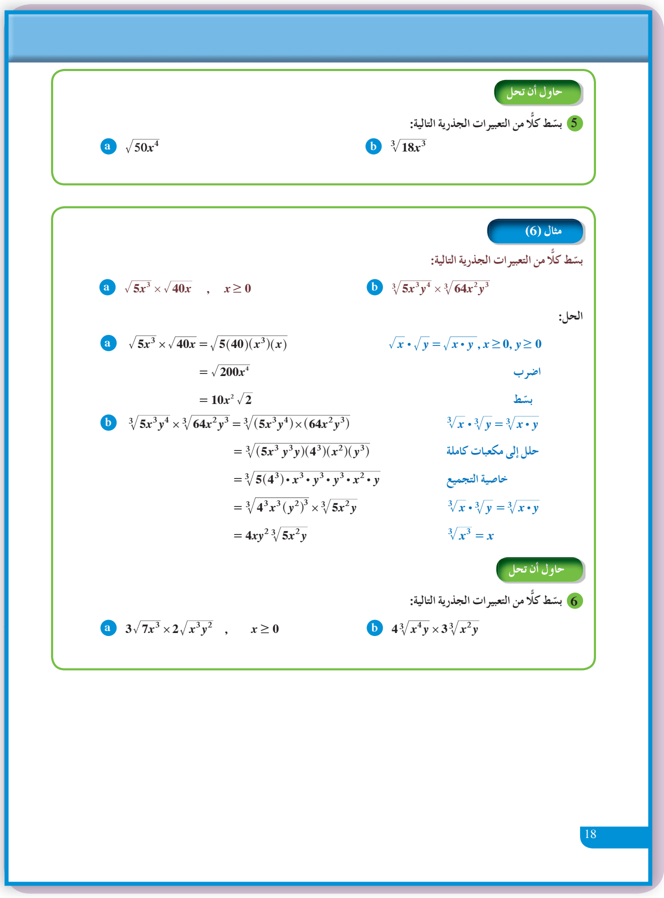
x

(a) 2 cm (b) $2\sqrt{2}$ cm (c) $-2\sqrt{2}$ cm (d) 4 cm

(12) إذا كان حجم أسطوانة ارتفاعها h وطول نصف قطرها r يعطى بالعلاقة: $V = \pi r^2 h$ حيث الحجم (V) بدلالة كل من ارتفاع ونصف قطر الأسطوانة، فأي من العلاقات التالية صحيحة؟

(a) $h = \pi r^2 V$ (b) $h = \frac{\pi}{r^2} \cdot V$ (c) $r = \sqrt{\pi hV}$ (d) $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

11



حاول أن تحل

5 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{50x^4}$ b $\sqrt[3]{18x^3}$

مثال (6)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} \quad , \quad x \geq 0$ b $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3}$

الحل:

a $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} = \sqrt{5(40)(x^3)(x)}$ — $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}, x \geq 0, y \geq 0$

$= \sqrt{200x^4}$ — اضرب

$= 10x^2\sqrt{2}$ — بسّط

b $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3} = \sqrt[3]{(5x^3y^4)\times(64x^2y^3)}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= \sqrt[3]{(5x^3y^3y)(4^3)(x^2)(y^3)}$ — حلل إلى مكعبات كاملة

$= \sqrt[3]{5(4^3)\cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y}$ — خاصية التجميع

$= \sqrt[3]{4^3x^3(y^2)^3} \times \sqrt[3]{5x^2y}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

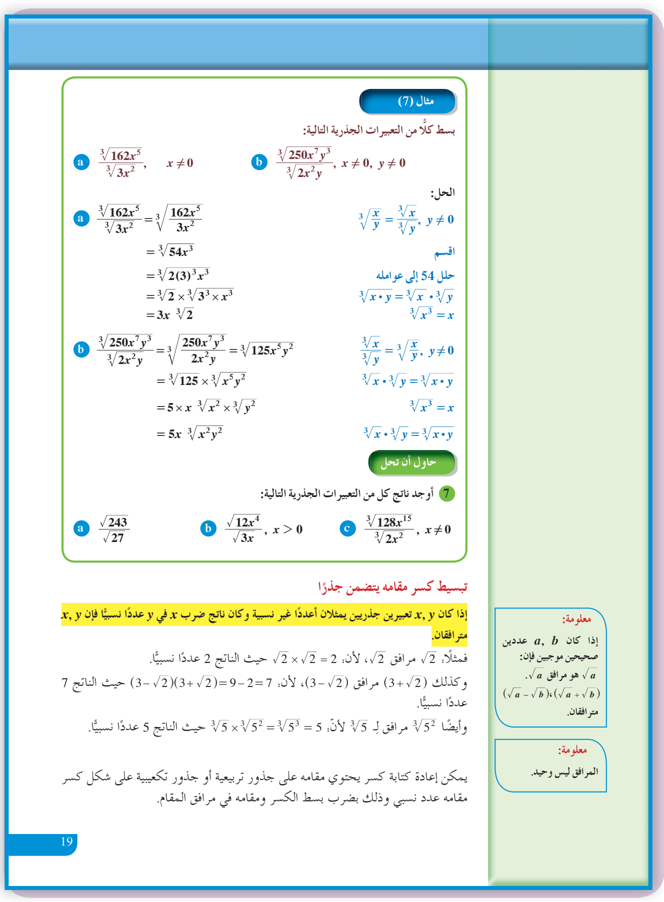
$= 4xy^2\sqrt[3]{5x^2y}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

حاول أن تحل

6 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3y^2} \quad , \quad x \geq 0$ b $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

18



مثال (7)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\dfrac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}, \quad x \neq 0$ b $\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}}, x \neq 0, y \neq 0$

الحل:

a $\dfrac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{162x^5}{3x^2}}$ — $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, y \neq 0$

$= \sqrt[3]{54x^3}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{2(3)^3x^3}$ — حلل 54 إلى عوامله

$= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3 \times x^3}$ — $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

$= 3x\sqrt[3]{2}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

b $\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}} = \sqrt[3]{\dfrac{250x^7y^3}{2x^2y}} = \sqrt[3]{125x^5y^2}$ — $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}, y \neq 0$

$= \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{x^5y^2}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= 5 \times x\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{y^2}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 5x\sqrt[3]{x^2y^2}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

حاول أن تحل

7 أوجد ناتج كل من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\dfrac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$ b $\dfrac{\sqrt{12x^4}}{\sqrt{3x}}, x > 0$ c $\dfrac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^2}}, x \neq 0$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا

إذا كان x, y تعبيرين جذريين يمثلان أعدادًا غير نسبية وكان ناتج ضرب x في y عددًا نسبيًّا فإن x, y مترافقان.

فمثلًا: $\sqrt{2}$ مرافق $\sqrt{2}$، لأن: $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ حيث الناتج 2 عددًا نسبيًّا.

وكذلك $(3+\sqrt{2})$ مرافق $(3-\sqrt{2})$، لأن: $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = 9-2 = 7$ حيث الناتج 7 عددًا نسبيًّا.

وأيضًا $\sqrt[3]{5^2}$ مرافق لِـ $\sqrt[3]{5}$ لأنّ: $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ حيث الناتج 5 عددًا نسبيًّا.

يمكن إعادة كتابة كسر يحتوي مقامه على جذور تربيعية أو جذور تكعيبية على شكل كسر مقامه عدد نسبي وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام.

معلومة:

إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين فإن: $\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$،$(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ مترافقان.

معلومة:

المرافق ليس وحيد.

19

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) 144 m^2

(b) 10 m

(c) 20 m

(d) 8 m

(e) 1728 m^3

(f) 8 m

(g) ≈9.9 m

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $\sqrt[3]{-27} = -3$

(b) $\sqrt[3]{64} = 4$

(c) $\sqrt[3]{-0.008} = -0.2$

(d) $\sqrt[3]{\dfrac{343}{216}} = \dfrac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{216}} = \dfrac{7}{6}$

2 **(a)** $3|x|y^2$

(b) $-3x^2 + 3x^2 = 0$

(c) $x^4y^2|y| = \begin{cases} x^4y^3 & : \quad y \geq 0 \\ -x^4y^3 & : \quad y < 0 \end{cases}$

3 **(a)** 5.8 cm

(b) 7.67 cm

(c) 7.4 cm

4 **(a)** $8 + 8\sqrt[3]{2}$

(b) $6\sqrt{3}$

(c) $6\sqrt{3}$

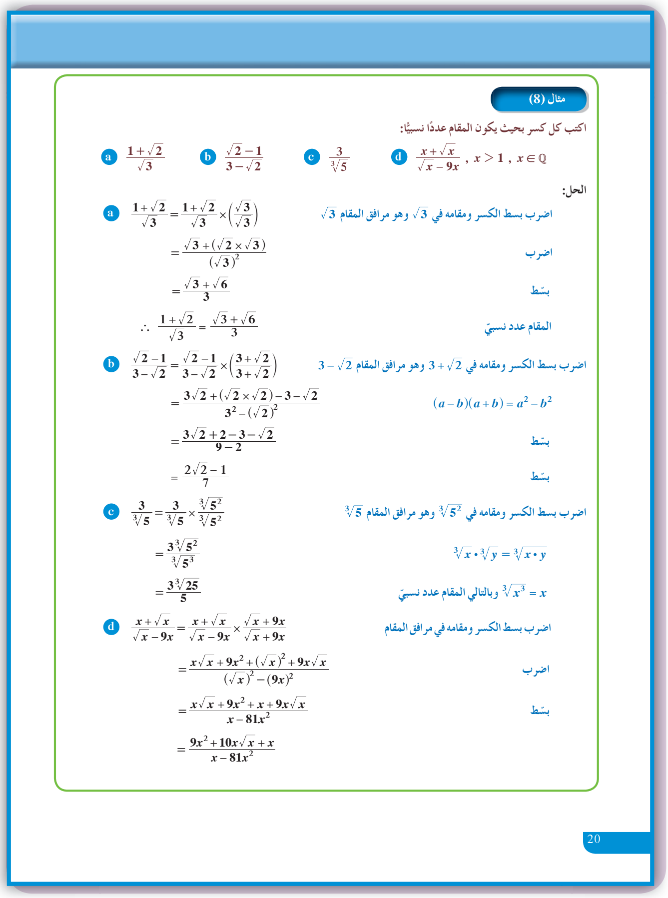
(d) $3\sqrt[3]{5}$

5 **(a)** $5x^2\sqrt{2}$

(b) $x\sqrt[3]{18}$

6 **(a)**

$$6\sqrt{7(x^3)^2y^2} = 6x^3 \times |y|\sqrt{7} = \begin{cases} 6x^3y\sqrt{7} & : \quad y \geq 0 \\ -6x^3y\sqrt{7} & : \quad y < 0 \end{cases}$$



مثال (8)

اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا:

a $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$ c $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ d $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}$, $x>1$, $x\in\mathbb{Q}$

الحل:

a $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $\sqrt{3}$ وهو مرافق المقام $\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{3}+(\sqrt{2}\times\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2}$ اضرب

$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$ بسّط

$\therefore\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$ المقام عدد نسبيّ

b $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}\times\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $3+\sqrt{2}$ وهو مرافق المقام $3-\sqrt{2}$

$=\frac{3\sqrt{2}+(\sqrt{2}\times\sqrt{2})-3-\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$=\frac{3\sqrt{2}+2-3-\sqrt{2}}{9-2}$ بسّط

$=\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$ بسّط

c $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3}{\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $\sqrt[3]{5^2}$ وهو مرافق المقام $\sqrt[3]{5}$

$=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}$ $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x\cdot y}$

$=\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$ $\sqrt[3]{x^3}=x$ وبالتالي المقام عدد نسبيّ

d $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}\times\frac{\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}+9x}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$=\frac{x\sqrt{x}+9x^2+(\sqrt{x})^2+9x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-(9x)^2}$ اضرب

$=\frac{x\sqrt{x}+9x^2+x+9x\sqrt{x}}{x-81x^2}$ بسّط

$=\frac{9x^2+10x\sqrt{x}+x}{x-81x^2}$

20

(b) $12\sqrt[3]{x^6y^2}=12x^2\sqrt[3]{y^2}$

7 **(a)** $\sqrt{9}=3$

(b) $2x\sqrt{x}$

(c) $4x^4\sqrt[3]{x}$

8 **(a)** $\frac{3+\sqrt{6}}{3}$

(b) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

(c) $\frac{\sqrt[3]{7}}{7}$

(d) $\frac{(x+1)\sqrt{x}+2x}{x-1}$

9 الزمن الدوري: $\sqrt{\frac{4\pi^2\times(5.84\times10^5)^3}{6.673\times10^{-11}\times5.4\times10^{21}}}$

فيكون الزمن الدوري $\approx 4\,671\,\mathrm{s}$

$=\frac{x(9x+10\sqrt{x}+1)}{x(1-81x)}$, $x>1$ x عامل مشترك

$=\frac{9x+10\sqrt{x}+1}{1-81x}$ بسّط

حاول أن تحل

8 أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية في أبسط صورة:

a $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b $\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ c $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$ d $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $x>1$, $x\in\mathbb{Q}$

مثال (9) تطبيقات حياتية

ينص قانون كيبلر الثالث على أن مربع الزمن الدوري (T^2) لدوران كوكب حول الشمس يتناسب طردًا مع مكعب نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب (r^3) ويمكن تمثيل ذلك بالعلاقة:

$T^2=\frac{4\pi^2}{(6.673)\times(10^{-11})\times M}\times r^3$، حيث M بالكيلوجرام، r بالمتر، T بالثانية.

أوجد نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب كتلته: $M=6\times10^{24}\,\mathrm{kg}$

وزمنه الدوري: $T=5175\,s$.

الحل:

$T^2=\frac{4\pi^2}{(6.673)(10^{-11})\times M}\times r^3$

$r^3=\frac{M\times(6.673)(10^{-11})\times T^2}{4\pi^2}$

$r=\sqrt[3]{\frac{M\times(6.673)\times(10^{-11})\times T^2}{4\pi^2}}$

$r=\sqrt[3]{\frac{(6\times10^{24})(6.673\times10^{-11})(5175)^2}{4\pi^2}}$

$\approx 6.476\times10^6\ \mathrm{m}$

يبلغ نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب حوالي $6.476\times10^6\ \mathrm{m}$

حاول أن تحل

9 باستخدام العلاقة في مثال (9) أوجد الزمن الدوري إذا كان نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب $5.84\times10^5\,\mathrm{m}$، وكتلته $5.4\times10^{21}\,\mathrm{kg}$

معلومة:

كيبلر عالم رياضيات وفلك وفيزياء ألماني، وضع قوانينًا تصف حركة دوران الكوكب حول الشمس.

من قوانينه:

كل كوكب يدور في مدار إهليليجي (بيضاوي) حول الشمس وتقع الشمس في إحدى بؤرتيه ويسمى هذا المدار بالقطع الناقص.

21

2–1: الأسس النسبية

1 الأهداف

- يكتب عددًا حقيقيًّا في الصورة الجذرية.
- يكتب عددًا حقيقيًّا في الصورة الأسية.
- يتعرف التحويل بين الصورتين الجذرية والأسية.
- يتعرف الجذر النوني للعدد وخواصه.
- يضرب الجذور النونية ويقسمها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الصورة الجذرية – الصورة الأسية – الجذر النوني.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

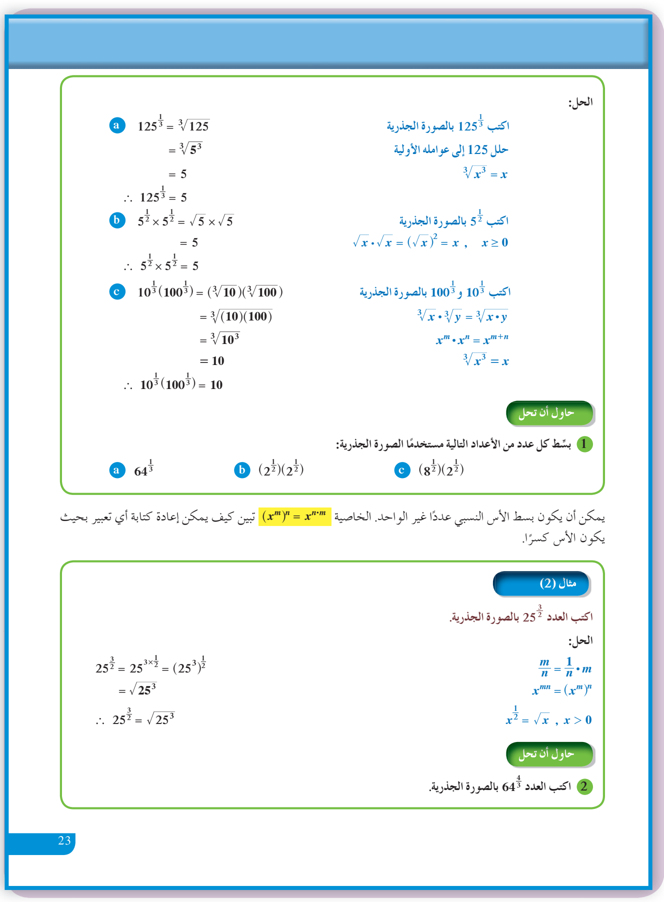
اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية :

(a) أوجد ناتج كلّ مما يلي: $\sqrt[3]{216}\ ,\ -\sqrt{81}$

(b) بسّط التعابير التالية: $\sqrt{128x^5y^9}\ ,\ \sqrt[3]{250x^6y^8}\ ,\ \sqrt{72x^2y^5}$

(c) أوجد الناتج ثم بسّط إذا أمكن:

- $\sqrt{3xy^2}\times\sqrt{12x^3y^5}$
- $\sqrt[3]{5x^4y^5}\times\sqrt[3]{25x^7y^4}$
- $\dfrac{\sqrt{162x^7y^9}}{\sqrt{2x^5y^6}}\quad (x\neq 0\ ,\ y\neq 0)$



5 التدريس

يعتبر التحويل بين الجذور والأسس النسبية مهمًّا. سوف يستكشفه الطالب الآن في عمليات حسابية لتبسيط النتائج، كما أنه سوف يدرك أهميته لاحقًا في دراسات متقدمة.

شدّد أولًا للطلاب على فكرة العلاقة بين الجذر التربيعي والجذر التكعيبي والأسس وذلك من خلال التعامل مع المثال (1) ومع أمثلة بديلة.

اكتب على السبورة ما يلي:

لكل عدد حقيقي $a \geq 0$ فإن $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

لكل عدد حقيقي a فإن $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

ثم اطلب إليهم كتابة أمثلة متعددة تطبيقًا لهاتين العلاقتين.

في المثالين (3) , (2)

في خطوة متقدمة لتعميم ما ورد في المثال (1)،

اكتب الآن على السبورة ما يلي:

$$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}}$$

اطلب إليهم كتابة أمثلة متعددة كتطبيق على هاتين العلاقتين.

دع الطلاب يلاحظون أن خواص الأسس النسبية مشابهة تمامًا لخواص الأسس الصحيحة التي تعلمها الطالب سابقًا. ولكن تبقى الأهمية في استخدام العمليات الأربع على الأعداد النسبية. أي المقامات المشتركة عند الجمع والطرح.

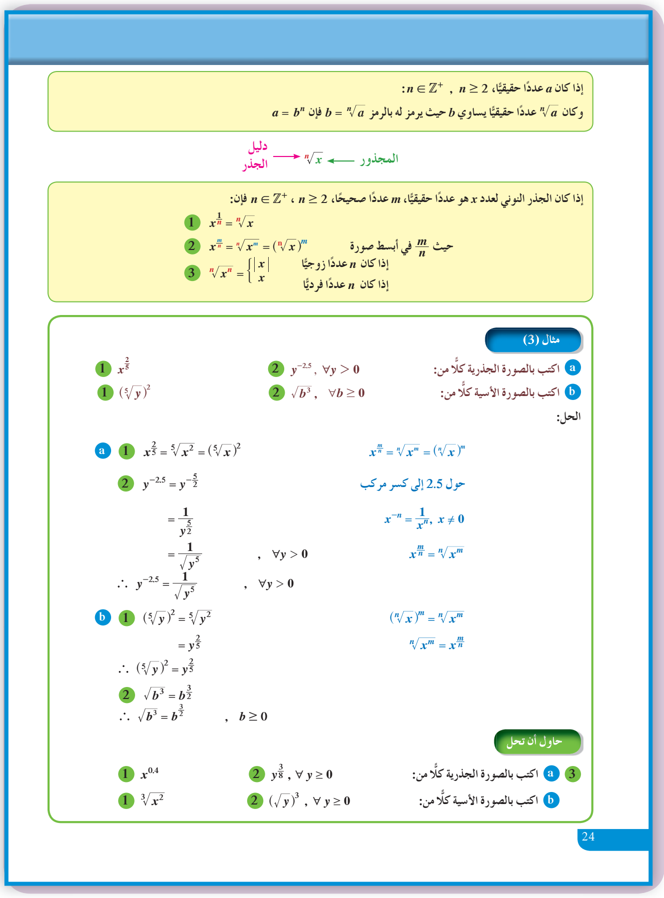
في المثال (5)

استمع إلى أسئلتهم في التحويلات عند قسمة الأعداد النسبية.

أعط أمثلة بديلة تساعد الطلاب على فهم العمليات مع الجذور عندما تكون العلاقة مع الأسس النونية.

في المثال (6)

يتناول هذا المثال كيفية حل التمرين نفسه بطريقتين مختلفتين وذلك بالربط بين خواص الجذور وخواص الأسس.



إذا كان a عددًا حقيقيًّا، $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}^+$:

وكان $\sqrt[n]{a}$ عددًا حقيقيًّا يساوي b حيث يرمز له بالرمز $b = \sqrt[n]{a}$ فإن $a = b^n$

$\sqrt[n]{x}$

إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًّا، m عددًا صحيحًا، $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

1. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
2. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة
3. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًّا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًّا} \end{cases}$

مثال (3)

a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من: (1) $x^{\frac{2}{5}}$ (2) $y^{-2.5}, \forall y > 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من: (1) $(\sqrt[5]{y})^2$ (2) $\sqrt{b^3}, \forall b \geq 0$

الحل:

a (1) $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} = (\sqrt[5]{x})^2$ — $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

(2) $y^{-2.5} = y^{-\frac{5}{2}}$ — حول 2.5 إلى كسر مركب

$= \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}}$ — $x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0$

$= \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad , \forall y > 0$ — $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$\therefore y^{-2.5} = \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad , \forall y > 0$

b (1) $(\sqrt[5]{y})^2 = \sqrt[5]{y^2}$ — $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$

$= y^{\frac{2}{5}}$ — $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$\therefore (\sqrt[5]{y})^2 = y^{\frac{2}{5}}$

(2) $\sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}} \quad , b \geq 0$

حاول أن تحل

3 a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من: (1) $x^{0.4}$ (2) $y^{\frac{3}{8}}, \forall y \geq 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من: (1) $\sqrt[3]{x^2}$ (2) $(\sqrt{y})^3, \forall y \geq 0$

24

مثال (4)

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام التوازن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس فيه ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبية الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية: $n = \frac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$

حيث n هي السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية (s).

r هو طول نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر (m).

g هي الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز، طول نصف قطره 1.7 m يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي 9.8 m/s^2

الحل:

اكتب المعادلة: $n = \frac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$

عوض: $\approx \frac{9.8^{0.5}}{2(3.14)(1.7)^{0.5}}$

استخدم الآلة الحاسبة: $n \approx 0.382$

تبلغ سرعة دوران الجهاز حوالي 0.382 دورة في الثانية.

حاول أن تحل

4 احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (4) ليحاكي جاذبية تحاكي نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

الربط بالحياة:

نيل آرمسترونغ

Neil Armstrong

(1930 – 2012)

هو أول رائد فضاء وطأت قدماه سطح القمر.

- قاد سنة 1966 المركبة Gemini 8 وقام مع زميله ديفيد سكوت بإجراء أول عملية التحام بين مركبتين في الفضاء بواسطة إنسان.
- سنة 1969 قاد المركبة Apollo 11 برفقة بن آلدرن ومايكل كولينز. هبط آرمسترونغ مع آلدرن على سطح القمر حيث أمضيا 2h31min.

قوانين الأسس النسبية Laws of Rational Exponents

ليكن n , m عددين نسبيين، a , b عددين حقيقيين حيث b^m , b^n , a^n أعدادًا حقيقية.

القانون	المثال
$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$	$8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$
$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$	$(5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{1}{2} \times 4} = 5^2 = 25$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}, b \neq 0$	$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$
$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}, b \neq 0$	$\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$\left(\frac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{-5}{3}$

25

6 الربط

يوفّر المثالان (7) , (4) فرصة أمام الطلاب ليتعرفوا كيفية الربط بين الجذور والأسس في موقف حياتي.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحويل الأسس على صورة أعداد نسبية إلى جذور نونية وبالعكس. ساعدهم على كتابة المساواة $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ عدة مرات وبأمثلة عددية.
وقد يخطئ الطلاب أيضًا في عدم مراعاة شروط الجذر النوني.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن أسئلة فقرات «حاول أن تحل» لتقف على أدائهم في التحويل بين الجذور والأسس.

اختبار سريع

1 بسّط ما يلي:

(a) $625^{\frac{1}{4}}$ $\quad \sqrt[4]{625} = 5$

(b) $128^{\frac{1}{7}}$ $\quad \sqrt[7]{128} = 2$

(c) $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}}$ $\quad 4^{\frac{3}{3}} = 4^1 = 4$

2 اكتب $x^{\frac{13}{4}}$, $x \geq 0$ على صورة جذر، ثم بسّط.

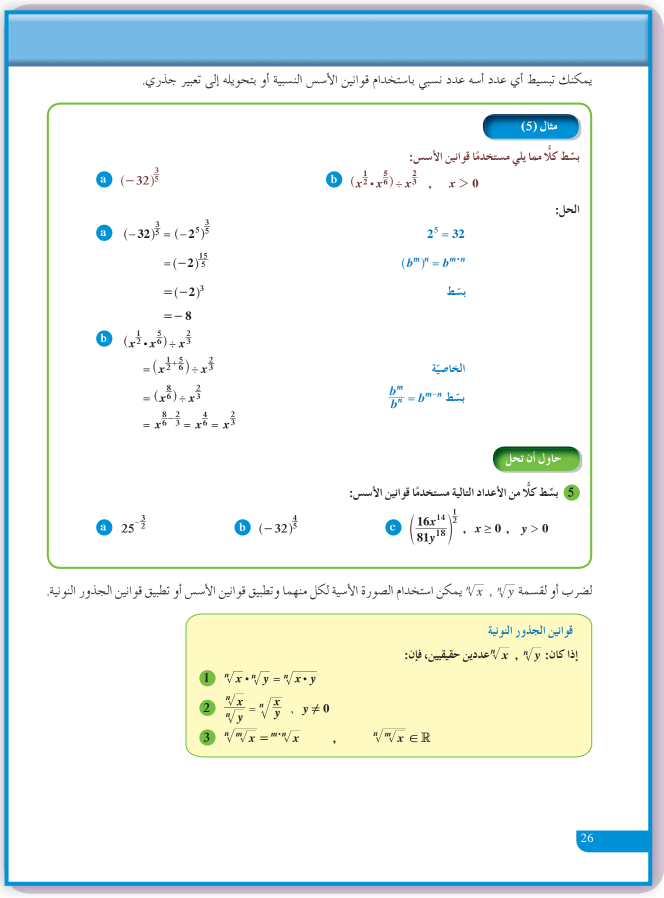
$\sqrt[4]{x^{13}} = x^3\sqrt[4]{x}$

3 اكتب $\sqrt[6]{x^3y^4}$, $x \geq 0$ بالصورة الأسية.

$x^{\frac{3}{6}}y^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$

4 بسّط: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{262144}}$

$\sqrt[12]{2^{18}} = 2^{\frac{18}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$



يمكنك تبسيط أي عدد أسه عدد نسبي باستخدام قوانين الأسس النسبية أو بتحويله إلى تعبير جذري.

مثال (5)

بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا قوانين الأسس:

a $(-32)^{\frac{3}{5}}$

b $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$, $x > 0$

الحل:

a $(-32)^{\frac{3}{5}} = (-2^5)^{\frac{3}{5}}$ $\quad 2^5 = 32$

$= (-2)^{\frac{15}{5}}$ $\quad (b^m)^n = b^{m \cdot n}$

$= (-2)^3$ $\quad$ بسّط

$= -8$

b $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$

$= (x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ الخاصيّة

$= (x^{\frac{8}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$ $\quad \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ بسّط

$= x^{\frac{8}{6}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}$

حاول أن تحل

5 بسّط كلًّا من الأعداد التالية مستخدمًا قوانين الأسس:

a $25^{-\frac{3}{2}}$ $\quad$ b $(-32)^{\frac{4}{5}}$ $\quad$ c $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, $y > 0$

لضرب أو لقسمة $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ يمكن استخدام الصورة الأسية لكل منهما وتطبيق قوانين الأسس أو تطبيق قوانين الجذور النونية.

قوانين الجذور النونية

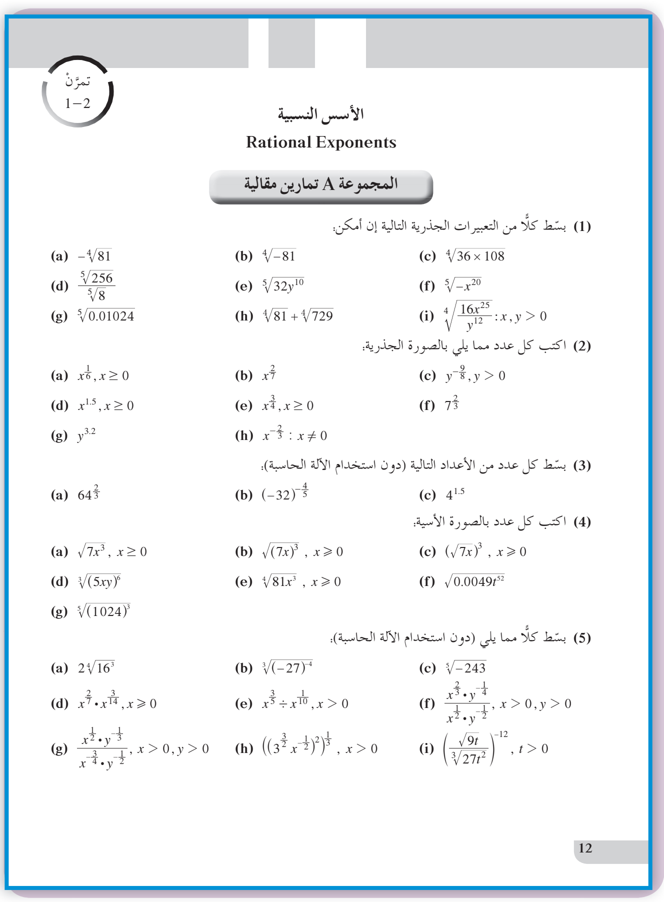
إذا كان: $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:

1 $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

2 $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$

3 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \in \mathbb{R}$

26



تمرَّنْ 1–2

الأسس النسبية

Rational Exponents

المجموعة A تمارين مقالية

(1) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية إن أمكن:

(a) $-\sqrt[4]{81}$ (b) $\sqrt[4]{-81}$ (c) $\sqrt[4]{36 \times 108}$

(d) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$ (e) $\sqrt[5]{32y^{10}}$ (f) $\sqrt[5]{-x^{20}}$

(g) $\sqrt[5]{0.01024}$ (h) $\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{729}$ (i) $\sqrt[4]{\frac{16x^{25}}{y^{12}}} : x, y > 0$

(2) اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الجذرية:

(a) $x^{\frac{1}{6}}, x \geq 0$ (b) $x^{\frac{2}{7}}$ (c) $y^{-\frac{9}{8}}, y > 0$

(d) $x^{1.5}, x \geq 0$ (e) $x^{\frac{3}{4}}, x \geq 0$ (f) $7^{\frac{2}{3}}$

(g) $y^{3.2}$ (h) $x^{-\frac{2}{3}} : x \neq 0$

(3) بسّط كل عدد من الأعداد التالية (دون استخدام الآلة الحاسبة):

(a) $64^{\frac{2}{3}}$ (b) $(-32)^{-\frac{4}{5}}$ (c) $4^{1.5}$

(4) اكتب كل عدد بالصورة الأسية:

(a) $\sqrt{7x^3}$, $x \geq 0$ (b) $\sqrt{(7x)^3}$, $x \geqslant 0$ (c) $(\sqrt{7x})^3$, $x \geqslant 0$

(d) $\sqrt[3]{(5xy)^6}$ (e) $\sqrt[4]{81x^3}$, $x \geqslant 0$ (f) $\sqrt{0.0049t^{52}}$

(g) $\sqrt[5]{(1024)^3}$

(5) بسّط كلًّا مما يلي (دون استخدام الآلة الحاسبة):

(a) $2\sqrt[4]{16^3}$ (b) $\sqrt[3]{(-27)^{-4}}$ (c) $\sqrt[5]{-243}$

(d) $x^{\frac{2}{7}} \cdot x^{\frac{3}{14}}, x \geqslant 0$ (e) $x^{\frac{3}{5}} \div x^{\frac{1}{10}}, x > 0$ (f) $\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}, x > 0, y > 0$

(g) $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}, x > 0, y > 0$ (h) $\left((3^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}})^2\right)^{\frac{1}{3}}$, $x > 0$ (i) $\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}$, $t > 0$

12

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) 4

(b) 2

(c) 4

2 $(64 = 4^3)\ \sqrt[3]{64^4} = 64\sqrt[3]{64} = 64 \times 4 = 256$

3 (a) (1) $\sqrt[5]{x^2}$, (2) $\sqrt[8]{y^3}$

(b) (1) $x^{\frac{2}{3}}$, (2) $y^{\frac{3}{2}}$

4 $v = \dfrac{4.9^{0.5}}{2 \times 3.14 \times (1.7)^{0.5}} \approx 0.27$

السرعة الدورانية 0.27 دورة بالثانية.

مثال (6)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$ b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$ d $\left[(\sqrt{x^3y^3})^{\frac{1}{3}}\right]^{-1}$ $x, y \in \mathbb{Q}^+$

الحل:

طريقة أولى

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{5 \times 7}$ $\qquad \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$= \sqrt[4]{35}$ اضرب

$\therefore \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{35}$

طريقة ثانية

$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = 5^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}}$ $\qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= (5 \times 7)^{\frac{1}{4}}$ $\qquad x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$

$= (35)^{\frac{1}{4}}$ اضرب

$= \sqrt[4]{35}$ $\qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

طريقة أولى

b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}\ (y \neq 0)$

$= \sqrt[3]{8}$ اقسم

$= \sqrt[3]{2^3}$ حلل 8 إلى عوامله

$= 2$ $\qquad \sqrt[3]{x^3} = x$

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = 2$

طريقة ثانية

$\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$ $\qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n,\ y \neq 0$

$= 8^{\frac{1}{3}}$ اقسم

$= \sqrt[3]{8}$ $\qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$= 2$ بسّط

27

(6) أوجد ناتج كلّ مما يلي في أبسط صورة:

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{64x^6}}$ (b) $5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{1}{3}}$ (c) $\dfrac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$

(d) $\sqrt[10]{1024} - 2\sqrt[6]{2^6}$ (e) $\dfrac{(32)^{\frac{1}{2}} \times (16)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$ (f) $(2 - \sqrt[3]{8})(2 + \sqrt[3]{8})$

(7) أوجد عددًا x بحيث يكون $(4 + \sqrt{5}) \times x$ عددًا نسبيًّا.

(8) في التعبير $PV^{\frac{7}{5}}$، حيث P يمثل الضغط، V يمثل حجم عينة من غاز.

أوجد قيمة التعبير إذا كان: $P = 6, V = 32$

(9) **تحليل الخطأ:** أوجد الخطأ في الحل التالي: $5 \times \left(4 - 5^{\frac{1}{2}}\right) = 5 \times 4 - 5 \times 5^{\frac{1}{2}} = 20 - 25^{\frac{1}{2}} = 15$

(10) **علم الأحياء:** يستخدم التعبير: $0.036\,m^{\frac{3}{4}}$ لدراسة السوائل. أوجد قيمة التعبير، إذا كان $m = 46 \times 10^4$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $16^{-\frac{3}{4}} = 32^{-\frac{3}{5}}$ (a) (b)

(2) $x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3}}$ (a) (b)

(3) $x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{6}}$ (a) (b)

(4) $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = x\ ,\ x > 0$ (a) (b)

(5) $\sqrt{32} \times \sqrt{16^{-1}} = 4$ (a) (b)

في البنود (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $n > 0$ ، فإن التعبير الذي **لا يكافئ** $\sqrt[4]{4n^2}$ هو:

(a) $(4n^2)^{\frac{1}{4}}$ (b) $2n^{\frac{1}{2}}$ (c) $(2n)^{\frac{1}{2}}$ (d) $\sqrt{2n}$

(7) إذا كان: $y > 0$ ، فإن التعبير $\dfrac{56^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}}{(7y^2)^{\frac{1}{3}}}$ يساوي:

(a) $14y$ (b) $\frac{1}{7}y$ (c) $2y$ (d) $\frac{8}{7}y$

(8) $\left(\sqrt[4]{x^{-2}y^4}\right)^{-2} =$ $\quad : x \neq 0\ ,\ y \neq 0$

(a) $|x^{-1}|y^2$ (b) $|x|y^{-2}$ (c) xy^2 (d) $x^{-2}y^2$

(9) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}} =$

(a) $5^{-\frac{1}{2}}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $5^{\frac{1}{2}}$ (d) $5^{\frac{2}{3}}$

13

(10) إذا كان $x + y = 2\ ,\ x^2 - xy + y^2 = 4$ فإن $\sqrt[6]{x^3 + y^3}$ يساوي:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt[3]{6}$ (d) 2

(11) في التعبير $P.V^{\frac{7}{5}}$ حيث P يمثل الضغط، V يمثل حجم عينة من غاز فإن قيمته عندما $P = \frac{32}{27}\ ,\ V = \frac{243}{32}$ يساوي:

(a) $\frac{4}{81}$ (b) 4 (c) $\frac{81}{4}$ (d) $\frac{243}{4}$

(12) إن قيمة التعبير $x > 0$, $\dfrac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[4]{x^5}}{x^3 \cdot \sqrt[8]{x^2}}$ تساوي:

(a) x (b) $\frac{1}{x}$ (c) 1 (d) $\sqrt{x}$

14

طريقة أولى

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt{(256)^{\frac{1}{4}}}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left[(256)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}$ — $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$= 256^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}$ — $(x^m)^n = x^{m\cdot n}$

$= 256^{\frac{1}{8}}$ — اضرب

$= (2^8)^{\frac{1}{8}}$ — حلل 256 إلى عوامله

$= 2$ — $(x^m)^n = x^{m.n}$

طريقة ثانية

$\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[2\times4]{256}$ — $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$

$= \sqrt[8]{2^8}$ — حلل 256 إلى عوامله الأولية

$= 2$ — $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ (n عدد زوجي)

$\therefore \sqrt{\sqrt[4]{256}} = 2$

d $\left(\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left(\left((x^3y^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left(\left(((xy)^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — الخاصية: $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$= \left(\left((xy)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — الخاصية: $(b^n)^m = b^{n\cdot m}$

$= \left((xy)^{\frac{1\times3}{3\times2}}\right)^{-1}$

$= \left((xy)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ — بسِّط

$= (xy)^{-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$= \dfrac{\sqrt{xy}}{xy}$ — ضرب البسط والمقام بمرافق المقام

حاول أن تحل

6 بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{27}$ **b** $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}}$ **c** $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$ **d** $\left(\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{y^3}\right)^{-12}, x, y \in \mathbb{Q}^+$

28

5 (a) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3}$

(b) 16

(c) $\dfrac{4}{9} \times \dfrac{x^7}{y^9}$

6 (a) $\sqrt[5]{3^2} \times \sqrt[5]{3^3} = 3$

(b) $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$

(c) $\sqrt[3\times2]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$

(d) $x^{\frac{-12}{4}} \times \left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{-12} = x^{-3} \times y^{-9} = \dfrac{1}{x^3y^9}$

7 $d = \sqrt{\dfrac{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30} \times 5.98 \times 10^{24}}{53.2 \times 10^{23}}}$

المسافة بين الأرض والشمس:

$d \approx 1.225 \times 10^7$ km أو $d \approx 1.225 \times 10^{10}$ m

مثال (7)

تعطى قوة الجاذبية بين جسمين بالعلاقة:

$g = 6.67 \times (10)^{-11} \cdot \dfrac{k_1 \cdot k_2}{d^2}$ حيث: k_1 ،k_2 كتلتي الجسمين بالكيلوغرام (kg)، d المسافة بين الجسمين بالمتر (m)، g قوة الجاذبية بالنيوتن (N).

أوجد المسافة بين الأرض والقمر إذا كانت كتلة الأرض تساوي تقريبًا 5.98×10^{24}kg ، كتلة القمر تساوي 1.23% من كتلة الأرض وقوة الجاذبية بينهما هي 183×10^{19} N تقريبًا.

الحل:

$k_1 = (5.98)(10^{24})\text{kg} \quad , \quad k_2 = (1.23\%)(5.98)(10^{24})\text{kg}$

$g = (6.67)(10)^{-11} \cdot \dfrac{k_1 \cdot k_2}{d^2}$

$\therefore d^2 = (6.67)(10)^{-11} \cdot \dfrac{k_1 \cdot k_2}{g}$

$d = \sqrt{\dfrac{(6.67)(10)^{-11} \cdot k_1 \cdot k_2}{g}}$

$= \sqrt{\dfrac{(6.67)(10)^{-11}(5.98)(10^{24})(0.0123)(5.98)(10^{24})}{183 \times 10^{19}}}$

$d = \sqrt{\dfrac{(6.67)(5.98)^2(0.0123)(10^{18})}{183}}$

$\approx 126\,616\,735.4$ m

تبلغ المسافة بين الأرض والقمر 126 616 735.4 m تقريبًا.

حاول أن تحل

7 باستخدام العلاقة من مثال (7) أوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا كانت كتلة الشمس تساوي $(2)(10^{30})$kg تقريبًا. وقوة الجاذبية بينهما $(53.2)(10^{23})$N

29

3–1: حل المعادلات

1 الأهداف

- يحل معادلات جذرية.
- يحل معادلات أسية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة جذرية – معادلة أسية – كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب بالصورة الأسية ما يلي: $\sqrt[6]{x^5}, \sqrt[7]{x^3}$

(b) اكتب بالصورة الجذرية ما يلي:

$x^{\frac{6}{5}}\ ,\ x^{\frac{3}{5}}\ ,\ x^{\frac{3}{4}}$

(c) حل المعادلات الآتية:

$5x - 2 = 0$

$x^2 - 3x = 28$

$x^2 - 1 = 3$

(d) أكمل الفراغ في كل مما يلي:

$7^{-2} = \frac{\square}{\square}$

$(-2)^0 = \square$

$\frac{4}{9} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^2$

1–3

سوف تتعلم
- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

المفردات والمصطلحات:
- معادلة جذرية Radical Equation
- معادلة أسية Exponential Equation
- كثيرة حدود من الدرجة الثانية Quadratic Polynomial

حل المعادلات

Solving Equations

دعنا نفكر ونتناقش

1 ليكن: $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

a احسب: $(2+\sqrt{3})^2$

b استنتج قيمة مبسطة لِـ a

c أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2 = 7+4\sqrt{3}$

2 مستعينًا بما قمت به في الفقرة 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $y^2 = 7-4\sqrt{3}$

3 a احسب $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$.

b حل المعادلة: $x^2 = 12-2\sqrt{35}$

أولًا: المعادلات الجذرية Radical Equations

المعادلة الجذرية هي معادلة يكون أس المتغير فيها عددًا نسبيًّا (ليس عددًا صحيحًا) أو يتضمن المجذور متغيرًا.

فمثلًا:

معادلة جذرية	$3+\sqrt{x} = 10$
معادلة جذرية	$(x-2)^{\frac{1}{2}} = 1$
ليست معادلة جذرية	$\sqrt{3}+x = 1$

تعلم

لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: أفصل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.

الخطوة الثانية: حدد شرط الحل

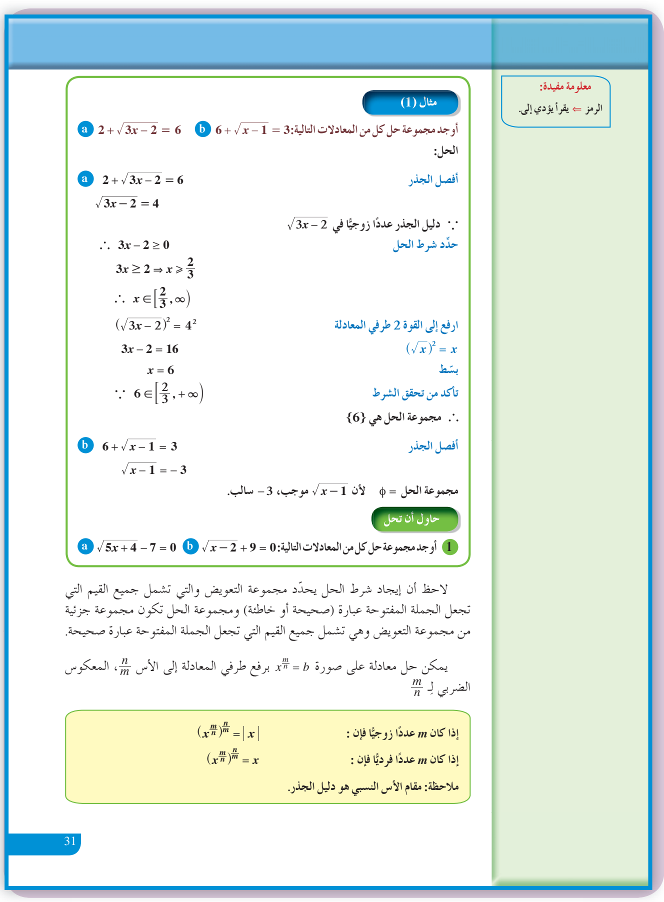
– إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلًّا من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضًا.

– إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًّا فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

الخطوة الثالثة: ارفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.

الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.

30



معلومة مفيدة:

الرمز $\Rightarrow$ يقرأ يؤدي إلى.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: a $2+\sqrt{3x-2} = 6$ b $6+\sqrt{x-1} = 3$

الحل:

أفصل الجذر — a $2+\sqrt{3x-2} = 6$

$\sqrt{3x-2} = 4$

$\because$ دليل الجذر عددًا زوجيًّا في $\sqrt{3x-2}$

حدِّد شرط الحل — $\therefore\ 3x-2 \geq 0$

$3x \geq 2 \Rightarrow x \geqslant \frac{2}{3}$

$\therefore\ x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$

ارفع إلى القوة 2 طرفي المعادلة — $(\sqrt{3x-2})^2 = 4^2$

$(\sqrt{x})^2 = x$ — $3x-2 = 16$

بسّط — $x = 6$

تأكد من تحقق الشرط — $\because\ 6 \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{6\}$

أفصل الجذر — b $6+\sqrt{x-1} = 3$

$\sqrt{x-1} = -3$

مجموعة الحل $= \phi$ لأن $\sqrt{x-1}$ موجب، -3 سالب.

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: a $\sqrt{5x+4}-7 = 0$ b $\sqrt{x-2}+9 = 0$

لاحظ أن إيجاد شرط الحل يحدّد مجموعة التعويض والتي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة (صحيحة أو خاطئة) ومجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض وهي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة صحيحة.

يمكن حل معادلة على صورة $x^{\frac{m}{n}} = b$ برفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$، المعكوس الضربي لِـ $\frac{m}{n}$

إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$

إذا كان m عددًا فرديًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

31

5 التدريس

يعتبر هذا الدرس خطوة أولى في رحلة طويلة أمام الطلاب، حيث يقدم مسائل بسيطة لحل معادلات تتضمن جذورًا ومعادلات تتضمن أسسًا. والمهم أن يفهم الطلاب أن المعادلات الجذرية يمكن أن يكون لها حلول دخيلة. شدّد للطلاب على هذه الفكرة وذلك من خلال استخدام أمثلة بديلة متعددة.

أخبرهم أن الحلول الدخيلة تكون عادة ناتجة عن المعادلات التي تتضمن جذورًا حيث الدليل هو عدد زوجي، أما في المعادلات التي تتضمن جذورًا حيث الدليل هو عدد فردي فلا تتحدث عن حلول دخيلة.

في المثال (1)

حيث المعادلة تتضمن جذرًا تربيعيًّا يوجد حل واحد مقبول في المعادلة بعد أن تمّ عزل الجذر التربيعي وتحديد شرط الحل، ثم رفع المعادلة إلى التربيع.

أعطهم مثالًا حسيًّا عن هذه الإشكالية، حيث إن: $3 \neq -3$ ولكن $(-3)^2 = (3)^2$.

في المثال (2)

إذا كانت المعادلة تتضمن أسًّا، بحيث يكون عددًا نسبيًّا على صورة $\frac{m}{n}$ فمن الضروري رفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$ بعد عزل تعبير الأس. أعط أمثلة بديلة لحل معادلات تتضمن أسًّا عددًا نسبيًّا على الصورة $\frac{m}{n}$ في الحالتين:

ـ أولًا، m عدد زوجي.

ـ ثانيًا، m عدد فرديّ.

في المثال (3)

من المهم أولًا تحديد قيمة المتغير في تعبير المجذور، إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وذلك كي يكون لدينا عددًا حقيقيًّا، ويمكن التحقق من الإجابات التي نحصل عليها للتأكد من انتمائه لمجموعة التعويض (شرط الحل).

أعط أمثلة بديلة للتأكد من فهم الطلاب لهذه الفكرة عن الحلول الدخيلة في المعادلة. فمثلًا المعادلة:

$\sqrt{x+5} = x-1$ التي شرط حلها $x \in [1, \infty)$ يوجد لها حلان: $x = -1$ أو $x = 4$.

مثال (2)

أوجد مجموعة الحل: $2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

الحل:

$2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

$(x-2)^{\frac{2}{3}} = 25$ — اقسم

$\left((x-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 25^{\frac{3}{2}}$ — ارفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{3}{2}$

$|x-2| = \sqrt{25^3}$ — $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = |x|$ إذا كان m عددًا زوجيًّا

$|x-2| = \sqrt{5^6} = 125$

$\therefore\ x-2 = 125$ أو $x-2 = -125$ — $|x| = b \Longrightarrow (x = b$ أو $x = -b)$

$x = 127$ أو $x = -123$

مجموعة الحل $= \{-123, 127\}$

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة الحل:

a $2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$ b $(1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

يمكن الحصول على حلول دخيلة (لا تحقق الشرط) عند رفع طرفي المعادلة إلى قوة ما.

مثال (3)

أوجد مجموعة الحل: $5 + \sqrt{x-3} = x$

الحل:

$\sqrt{x-3} + 5 = x$ — أفصل الجذر

$\sqrt{x-3} = x-5$

تكون قيمة x مقبولة إذا حققت:

$x-3 \geq 0\ ,\ x-5 \geq 0$

$x \geq 3\ ,\ x \geq 5$

$\therefore\ x \geq 5$

$\therefore\ x \in [5, \infty)$

32

$(\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2$ — رفع طرفي المعادلة إلى القوة 2

$x-3 = (x-5)^2$ — $(\sqrt{x})^2 = x$ إذا كان $0 \leq x$

$x-3 = x^2 - 10x + 25$ — فك

$x^2 - 11x + 28 = 0$ — بسّط

$(x-4)(x-7) = 0$ — حلّل

$x-4 = 0$ أو $x-7 = 0$ — $a \cdot b = 0$ مكافئ لِـ $a = 0$ أو $b = 0$

$x = 4$ أو $x = 7$

$4 \notin [5, \infty)\ ,\ 7 \in [5, \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{7\}$

ملاحظة: $x = 4$ هو حل دخيل (لا يحقق الشرط).

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة الحل: $\sqrt{5x-1} + 3 = x$

في بعض الحالات تحتوي المعادلة على جذرين، فيتم فصلهما بحيث يحتوي كل طرف في المعادلة على جذر.

مثال (4)

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة: b $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$ a $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

الحل:

a $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$ — اكتب المعادلة

$\sqrt{8x} = 2\sqrt{4x-16}$ — أفصل كل جذر

$4x-16 \geq 0\ ,\ 8x \geq 0$ — تكون قيمة x مقبولة إذا حققت:

$x \geq 4\ ,\ x \geq 0$ — أي

$\therefore\ x \geq 4$

$\therefore\ x \in [4, \infty)$

$(\sqrt{8x})^2 = (2\sqrt{4x-16})^2$ — ربّع طرفي المعادلة

$8x = 4(4x-16)$ — $(\sqrt{x})^2 = x,\ x \geq 0$

$2x = 4x - 16$ — اقسم على 4

$2x = 16 \Rightarrow x = 8$

$8 \in [4, \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{8\}$

33

ولكن $x = -1 \notin (0,1]$ غير مقبولة، لأن:

$\sqrt{x+5} = \sqrt{-1+5} = \sqrt{4} = 2$ (التعبير من جهة اليسار)

$x - 1 = -1 - 1 = -2$ (التعبير من جهة اليمين)

$-2 \neq 2$

أما المعادلة: $\sqrt{x+2} = 3$ فلها حل واحد هو $x = 7$.

في المثال (6)

في حلول المعادلات الأسية يجب دائمًا لفت انتباه الطالب إلى إيجاد معادلة لها الأساس نفسه، وعند ذلك يمكن استنتاج أن الأسس متساوية أي عندما تكون $a^d = a^c$، فإن $d = c$.

في المثال (7)

يمكن أيضًا وضع أمثلة بديلة أمام الطلاب للتأكد من أنهم قادرون على تحليل الأساس إلى عوامل متساوية.

6 الربط

يمثل المثال (5)، حالة ربط بين الأس والجذر لإيجاد إجابة عن حالة حياتية.

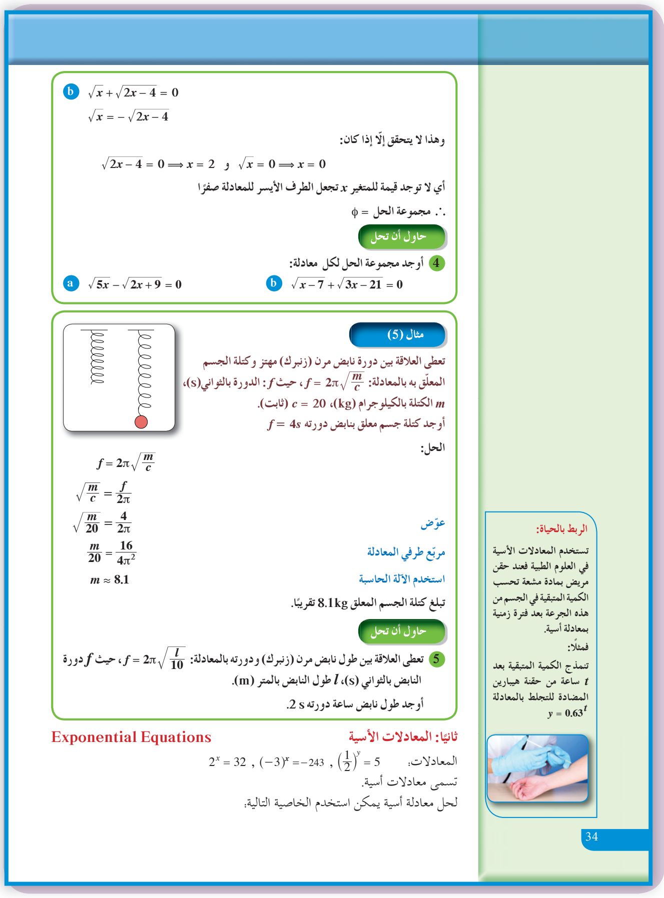
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة أساسات متساوية لحل معادلة أسية. ساعدهم من خلال إعطائهم أمثلة متعددة عن تحليل بعض الأساسات لإيجاد المشترك في ما بينها.

وقد يخطئ الطلاب أيضًا في إيجاد شرط الحل فساعدهم في إعطائهم أمثلة متعددة لإيجاد تقاطع فترات مختلفة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من أنهم قادرون على تخطي بعض الإشكاليات في هذا الدرس.



(b) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$

$\sqrt{x} = -\sqrt{2x-4}$

وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان:

$\sqrt{2x-4} = 0 \Longrightarrow x = 2$ و $\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$

أي لا توجد قيمة للمتغير x تجعل الطرف الأيسر للمعادلة صفرًا

∴ مجموعة الحل $= \phi$

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

(a) $\sqrt{5x} - \sqrt{2x+9} = 0$ (b) $\sqrt{x-7} + \sqrt{3x-21} = 0$

مثال (5)

تعطى العلاقة بين دورة نابض مرن (زنبرك) مهتز وكتلة الجسم المعلّق به بالمعادلة: $f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$، حيث f: الدورة بالثواني(s)، m الكتلة بالكيلوجرام (kg)، $c = 20$ (ثابت).

أوجد كتلة جسم معلق بنابض دورته $f = 4s$

الحل:

$f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$

$\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{f}{2\pi}$

$\sqrt{\frac{m}{20}} = \frac{4}{2\pi}$ عوّض

$\frac{m}{20} = \frac{16}{4\pi^2}$ مربّع طرفي المعادلة

$m \approx 8.1$ استخدم الآلة الحاسبة

تبلغ كتلة الجسم المعلق 8.1kg تقريبًا.

حاول أن تحل

5 تعطى العلاقة بين طول نابض مرن (زنبرك) ودورته بالمعادلة: $f = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$، حيث f دورة النابض بالثواني (s)، l طول النابض بالمتر (m).

أوجد طول نابض ساعة دورته 2 s.

ثانيًا: المعادلات الأسية **Exponential Equations**

المعادلات: $2^x = 32$, $(-3)^x = -243$, $\left(\frac{1}{2}\right)^y = 5$

تسمى معادلات أسية.

لحل معادلة أسية يمكن استخدام الخاصية التالية:

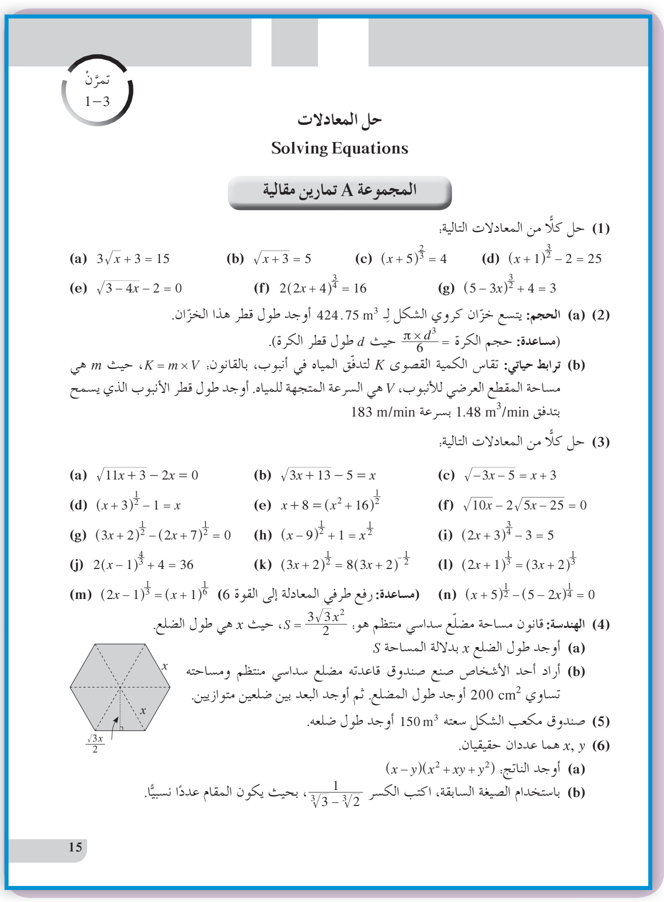
الربط بالحياة:

تستخدم المعادلات الأسية في العلوم الطبية فعند حقن مريض بمادة مشعة تحسب الكمية المتبقية في الجسم من هذه الجرعة بعد فترة زمنية بمعادلة أسية.

فمثلًا:

تنمذج الكمية المتبقية بعد t ساعة من حقنة هيبارين المضادة للتجلط بالمعادلة $y = 0.63^t$

34



تمرَّنْ 1–3

حل المعادلات

Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

(1) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $3\sqrt{x} + 3 = 15$ **(b)** $\sqrt{x+3} = 5$ **(c)** $(x+5)^{\frac{2}{3}} = 4$ **(d)** $(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2 = 25$

(e) $\sqrt{3-4x} - 2 = 0$ **(f)** $2(2x+4)^{\frac{3}{4}} = 16$ **(g)** $(5-3x)^{\frac{3}{2}} + 4 = 3$

(2) **(a)** **الحجم:** يتسع خزّان كروي الشكل لِـ $424.75\ m^3$ أوجد طول قطر هذا الخزّان.

(**مساعدة:** حجم الكرة $= \frac{\pi \times d^3}{6}$ حيث d طول قطر الكرة).

(b) **ترابط حياتي:** تقاس الكمية القصوى K لتدفّق المياه في أنبوب، بالقانون: $K = m \times V$، حيث m هي مساحة المقطع العرضي للأنبوب، V هي السرعة المتجهة للمياه. أوجد طول قطر الأنبوب الذي يسمح بتدفق $1.48\ m^3/min$ بسرعة $183\ m/min$

(3) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $\sqrt{11x+3} - 2x = 0$ **(b)** $\sqrt{3x+13} - 5 = x$ **(c)** $\sqrt{-3x-5} = x+3$

(d) $(x+3)^{\frac{1}{2}} - 1 = x$ **(e)** $x+8 = (x^2+16)^{\frac{1}{2}}$ **(f)** $\sqrt{10x} - 2\sqrt{5x-25} = 0$

(g) $(3x+2)^{\frac{1}{2}} - (2x+7)^{\frac{1}{2}} = 0$ **(h)** $(x-9)^{\frac{1}{2}} + 1 = x^{\frac{1}{2}}$ **(i)** $(2x+3)^{\frac{3}{4}} - 3 = 5$

(j) $2(x-1)^{\frac{4}{3}} + 4 = 36$ **(k)** $(3x+2)^{\frac{1}{2}} = 8(3x+2)^{-\frac{1}{2}}$ **(l)** $(2x+1)^{\frac{1}{3}} = (3x+2)^{\frac{1}{3}}$

(m) $(2x-1)^{\frac{1}{3}} = (x+1)^{\frac{1}{6}}$ (**مساعدة:** رفع طرفي المعادلة إلى القوة 6) **(n)** $(x+5)^{\frac{1}{2}} - (5-2x)^{\frac{1}{4}} = 0$

(4) **الهندسة:** قانون مساحة مضلّع سداسي منتظم هو: $S = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$، حيث x هي طول الضلع.

(a) أوجد طول الضلع x بدلالة المساحة S

(b) أراد أحد الأشخاص صنع صندوق قاعدته مضلع سداسي منتظم ومساحته تساوي $200\ cm^2$ أوجد طول المضلع. ثم أوجد البعد بين ضلعين متوازيين.

(5) صندوق مكعب الشكل سعته $150\ m^3$ أوجد طول ضلعه.

(6) x, y هما عددان حقيقيان.

(a) أوجد الناتج: $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

(b) باستخدام الصيغة السابقة، اكتب الكسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$، بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا.

15

اختبار سريع

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة مما يلي:

(a) $\sqrt[3]{5x-7}=2$

$x = 3$

(b) $\sqrt{-4x+5}=x+4\ ,\ \left(-4\le x\le \frac{5}{4}\right)$

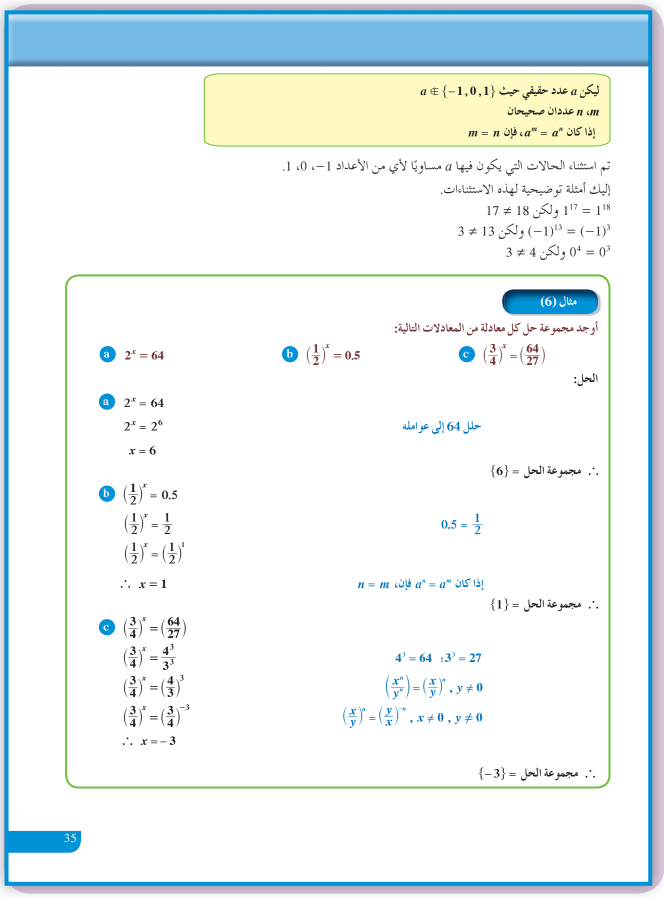
$x=-1$ أو $x=-11$ غير مقبول

(c) $\sqrt{x+5}=x-1,\quad x\ge 1$

$x=-1$ غير مقبول أو $x=4$ مقبول

(d) $5^{-x^2+4x}=125$

$x=1$ أو $x=3$


ليكن a عدد حقيقي حيث $a \notin \{-1,0,1\}$
m، n عددان صحيحان
إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

تم استثناء الحالات التي يكون فيها a مساويًا لأي من الأعداد 1−، 0، 1.
إليك أمثلة توضيحية لهذه الاستثناءات.
$1^{18} = 1^{17}$ ولكن $17 \ne 18$
$(-1)^3 = (-1)^{13}$ ولكن $3 \ne 13$
$0^3 = 0^4$ ولكن $3 \ne 4$

مثال (6)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $2^x = 64$ b $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$ c $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$

الحل:

a $2^x = 64$
$2^x = 2^6$ حلل 64 إلى عوامله
$x = 6$
∴ مجموعة الحل = $\{6\}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$ $0.5 = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^1$
$\therefore\ x = 1$ إذا كان $a^n = a^m$، فإن $n = m$
∴ مجموعة الحل = $\{1\}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$
$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4^3}{3^3}$ $3^3 = 27$ ؛ $4^3 = 64$
$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ $\left(\frac{x^n}{y^n}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^n,\ y \ne 0$
$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{y}{x}\right)^{-n},\ x \ne 0,\ y \ne 0$
$\therefore\ x = -3$
∴ مجموعة الحل = $\{-3\}$

35

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكّر ونتناقش»

1 **(a)** $7+4\sqrt{3}$

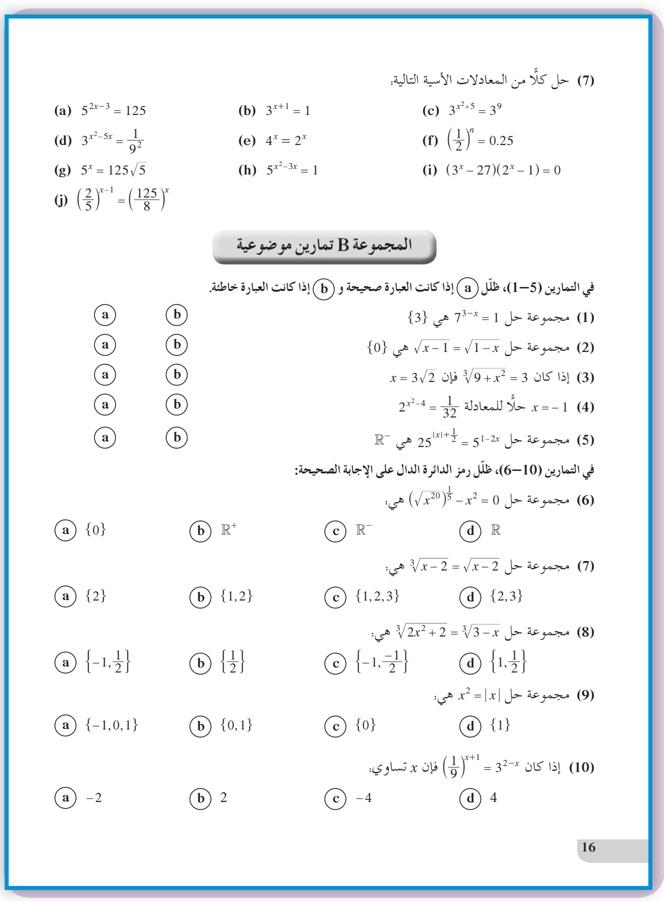
(b) $2+\sqrt{3}$

(c) $\pm(2+\sqrt{3})$

2 $y=\pm(2-\sqrt{3})$

3 **(a)** $12-2\sqrt{35}$

(b) $\pm(\sqrt{7}-\sqrt{5})$


(7) حل كلًّا من المعادلات الأسية التالية:

(a) $5^{2x-3} = 125$ (b) $3^{x+1} = 1$ (c) $3^{x^2+5} = 3^9$
(d) $3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$ (e) $4^x = 2^x$ (f) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.25$
(g) $5^x = 125\sqrt{5}$ (h) $5^{x^2-3x} = 1$ (i) $(3^x-27)(2^x-1) = 0$
(j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجموعة حل $7^{3-x} = 1$ هي $\{3\}$ (a) (b)
(2) مجموعة حل $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$ هي $\{0\}$ (a) (b)
(3) إذا كان $\sqrt[3]{9+x^2} = 3$ فإن $x = 3\sqrt{2}$ (a) (b)
(4) $x=-1$ حلًّا للمعادلة $2^{x^2-4} = \frac{1}{32}$ (a) (b)
(5) مجموعة حل $5^{1-2x} = 25^{|x|+\frac{1}{2}}$ هي $\mathbb{R}^-$ (a) (b)

في التمارين (10—6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) مجموعة حل $\left(\sqrt{x^{20}}\right)^{\frac{1}{5}} - x^2 = 0$ هي:
(a) $\{0\}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}$

(7) مجموعة حل $\sqrt{x-2} = \sqrt[3]{x-2}$ هي:
(a) $\{2\}$ (b) $\{1,2\}$ (c) $\{1,2,3\}$ (d) $\{2,3\}$

(8) مجموعة حل $\sqrt[3]{3-x} = \sqrt[3]{2x^2+2}$ هي:
(a) $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$ (b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ (c) $\left\{-1,\frac{-1}{2}\right\}$ (d) $\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$

(9) مجموعة حل $|x| = x^2$ هي:
(a) $\{-1,0,1\}$ (b) $\{0,1\}$ (c) $\{0\}$ (d) $\{1\}$

(10) إذا كان $3^{2-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$ فإن x تساوي:
(a) -2 (b) 2 (c) -4 (d) 4

16

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $x=9$

(b) $x\in\phi$

2 **(a)** $x=6$

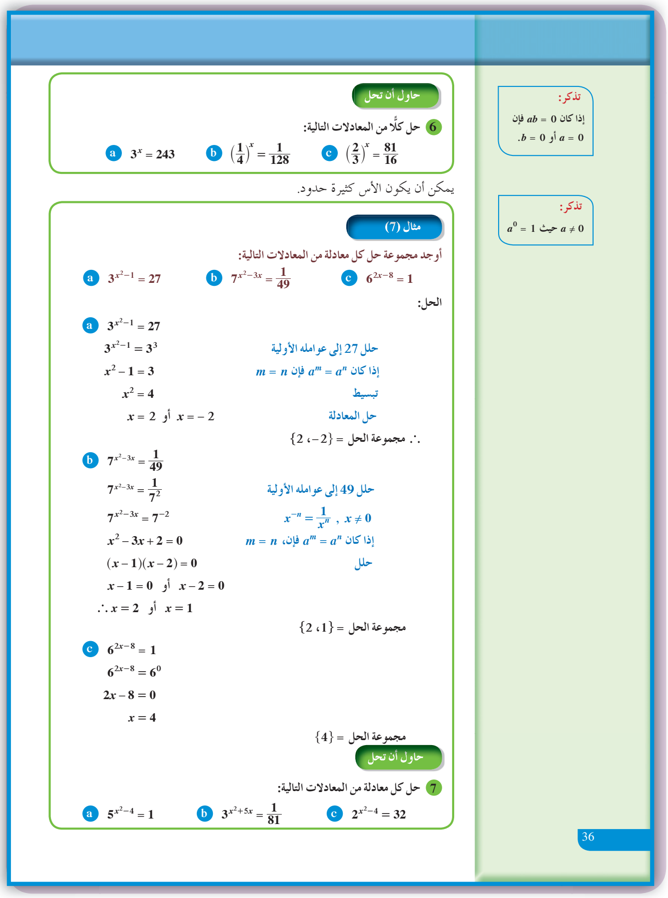
(b) $x=-31$ أو $x=33$

3
$$\left.\begin{array}{l} 5x-1\ge 0\ ;\ x\ge \frac{1}{5}\\ x-3\geqslant 0\ ;\ x\geqslant 3\end{array}\right\}\Rightarrow x\ge 3$$

الحلول: $x=1$ غير مقبول

$x=10$ مقبول

4 **(a)** $x=3$ **(b)** $x=7$



تذكر:

إذا كان $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

تذكر:

$a^0 = 1$ حيث $a \neq 0$

حاول أن تحل

6 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $3^x = 243$ b $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$ c $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

يمكن أن يكون الأس كثيرة حدود.

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $3^{x^2-1} = 27$ b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$ c $6^{2x-8} = 1$

الحل:

a $3^{x^2-1} = 27$

$3^{x^2-1} = 3^3$ حلل 27 إلى عوامله الأولية

$x^2 - 1 = 3$ إذا كان $a^m = a^n$ فإن $m = n$

$x^2 = 4$ تبسيط

$x = 2$ أو $x = -2$ حل المعادلة

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{2, -2\}$

b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$

$7^{x^2-3x} = \frac{1}{7^2}$ حلل 49 إلى عوامله الأولية

$7^{x^2-3x} = 7^{-2}$ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}\ ,\ x \neq 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ إذا كان $a^m = a^n$ فإن، $m = n$

$(x-1)(x-2) = 0$ حلل

$x - 1 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$\therefore x = 2$ أو $x = 1$

مجموعة الحل $= \{2, 1\}$

c $6^{2x-8} = 1$

$6^{2x-8} = 6^0$

$2x - 8 = 0$

$x = 4$

مجموعة الحل $= \{4\}$

حاول أن تحل

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4} = 1$ b $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$ c $2^{x^2-4} = 32$

36

5 $l \backsimeq 1\,\text{m}$

6 **(a)** $3^x = 3^5\ ;\ x = 5$

(b) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

$2x = 7, x = \frac{7}{2} = 3.5$

(c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\ ;\ x = -4$

7 **(a)** $5^{x^2-4} = 5^0\ ;\ x^2 - 4 = 0\ ;\ x = \pm 2$

(b) $x^2 + 5x + 4 = 0\ ,\ x = -1$ أو $x = -4$

(c) $2^{x^2-4} = 2^5\ ;\ x^2 = 9\ ,\ x = \pm 3$

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

طول قطر الأسطوانة:

$$d = \sqrt{x^2 + x^2}$$
$$= x\sqrt{2}$$

طول نصف قطر الأسطوانة:

$$r = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

حجم الأسطوانة:

$$V_1 = \pi\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times x$$
$$V_1 = \frac{\pi\, x^3}{2}$$

حجم المكعب:

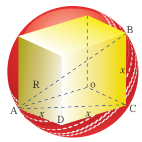
$$V_2 = x^3$$

$$\frac{\text{حجم الأسطوانة}}{\text{حجم المكعب}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{2} \approx \frac{1.57}{1}$$

المرشد لحل المسائل

مكعب طول ضلعه x محاط بكرة كما في الصورة المقابلة.

أوجد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.



كيف نفكّر؟

إستراتيجية الحل:

إيجاد حجم المكعب، إيجاد حجم الكرة، ثم إيجاد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

الخطوة الأولى: حجم المكعب.

في البداية علينا إيجاد حجم المكعب بدلالة طول ضلعه x.

حجم المكعب $= x^3$

الخطوة الثانية: حجم الكرة.

إيجاد نصف قطر الكرة.

AB هو قطر للكرة.

AB هو قطر للمكعب.

AB هو أيضًا وتر المثلث ABC قائم الزاوية C حيث: $AC = g$ ، $CB = x$.

a لإيجاد AB سنبدأ بإيجاد AC،

ACD مثلث قائم الزاوية D.

$(AC)^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$ نظرية فيثاغورث

$\therefore AC = x\sqrt{2}$

b لإيجاد AB نستخدم المثلث ABC

ABC مثلث قائم الزاوية C

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ نظرية فيثاغورث

$(AB)^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$

$\therefore AB = x\sqrt{3}$

c لإيجاد طول نصف القطر:

$R = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

37

---

d إيجاد حجم الكرة:

حجم الكرة: $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}(3.14)\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= \frac{4(3.14)(3x^3\sqrt{3})}{(8)(3)}$

$\approx 1.57\sqrt{3}\, x^3$

الخطوة الثالثة: احسب نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب:

نوجد $\frac{\text{حجم الكرة}}{\text{حجم المكعب}}$: $\frac{(1.57)\times x^3\sqrt{3}}{x^3} = \frac{2.72}{1}$

$\therefore$ حجم الكرة: حجم المكعب حوالى

2.72 : 1

مساعدة رياضية

حجم الأسطوانة $= \pi \times r^2 \times h$

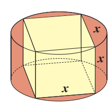
حيث h = ارتفاع الأسطوانة.

r = طول نصف القطر للأسطوانة.

مسألة إضافية

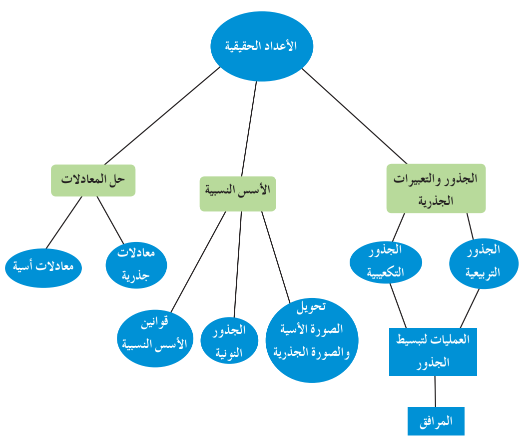
مكعب طول ضلعه x محاط بأسطوانة كما في الصورة أدناه.

أوجد نسبة حجم الأسطوانة إلى حجم المكعب.



38

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



39

ملخص

- $\sqrt{x^2}=|x|\ ,\ (\sqrt{x})^2=x$
- $A^2=x,\ x\geqslant 0 \Longrightarrow A=\pm\sqrt{x}$
- $\forall x\in\mathbb{R}, (\sqrt[3]{x})^3=\sqrt[3]{x^3}=x$
- $\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \qquad \forall x, y\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$
- $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \qquad \forall x, y\in\mathbb{R}^+$
- $\sqrt[3]{x\cdot y}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y} \qquad \forall x, y\in\mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ y\neq 0$
- إذا كان a, b عددين نسبيين موجبين فإن:

  $\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$

  $a+\sqrt{b}$ هو مرافق $a-\sqrt{b}$

  المجذور ⟵ $\sqrt[n]{x}$ ⟶ دليل الجذر
- إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًّا، m عددًا صحيحًا، n عددًا طبيعيًّا $n>1$ فإن:
- $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$
- $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$
- إذا كان n عددًا زوجيًّا
- إذا كان n عددًا فرديًّا

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x| \\ x\end{cases}$$

- $(\forall m,n\in\mathbb{Z}\ ,\ \forall a,b\in\mathbb{R}\ ,\ a,b\neq 0)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}(a\cdot b)^n=a^n.b^n \\ a^m\cdot a^n=a^{m+n} \\ (a^m)^n=a^{m\cdot n} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m} \\ b^{-n}=\frac{1}{b^n} \\ \frac{b^n}{b^m}=b^{n-m}\end{cases}$$

- إذا كان $\sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{y}$ عددين حقيقيين فإن:
- $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}} \qquad y\neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n.m]{x}\ :\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\in\mathbb{R}$
- المعادلة الجذرية معادلة أس المتغير فيها عدد نسبي أو يتضمن المجذور المتغير.
- إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}=|x|$
- إذا كان m عددًا فرديًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}=x$
- $m,n\in\mathbb{Z}, a\in\mathbb{R}, a\notin\{-1,0,1\}\ ,\ a^m=a^n\Longrightarrow m=n$

اختبار الوحدة الأولى

(1) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

(a) $\sqrt{121x^{90}}$ **(b)** $\sqrt[3]{-64y^{81}}$ **(c)** $\sqrt[5]{32y^{25}}$

(d) $\sqrt{0.0081x^{60}}$ **(e)** $\sqrt{16x^{36}y^{96}}$ **(f)** $\sqrt{8}(\sqrt{24}+3\sqrt{8})$

(g) $2\sqrt{5x^3}\times 3\sqrt{28x^3y^2}$, ($x\geq 0$, حيث y عدد حقيقي) **(h)** $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

(i) $\sqrt[3]{2x^2}\times\sqrt[3]{4x}$

(2) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًّا:

(a) $\frac{1}{(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}-2\sqrt{3})}$ **(b)** $\frac{5}{4\sqrt{7}+5}$

(c) $\frac{2+\sqrt{10}}{2-3\sqrt{5}}$ **(d)** $\frac{-2+\sqrt{8}}{-3-\sqrt{2}}$

(3) بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(a) $64^{\frac{2}{3}}$ **(b)** $25^{1.5}$ **(c)** $6^{\frac{1}{2}}\times 12^{\frac{1}{2}}$

(d) $81^{-0.25}$ **(e)** $\sqrt{8}\times\sqrt{2}-2\sqrt{75}+5\sqrt{12}$ **(f)** $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

(4) ليكن x العدد الحقيقي، $x=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

(a) احسب x^2

(b) أثبت أن قيمة x تساوي -2

(5) اكتب كل تعبير مما يلي بالصورة الجذرية:

(a) $x^{\frac{5}{7}}$ **(b)** $y^{-\frac{2}{9}}, y\neq 0$ **(c)** $(\sqrt[5]{x})^2$

(d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$ **(e)** $2\sqrt{3}\times 5\sqrt[4]{3}$ **(f)** $3\sqrt{x}\times 2\sqrt[3]{x}, x\geq 0$

(g) $2\sqrt[3]{3}\div\sqrt[4]{3}$ **(h)** $5\sqrt{10}\times 2\sqrt[4]{10}\times\sqrt[3]{10}$ **(i)** $\sqrt{2}\div 3\sqrt[6]{8}$

(6) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية:

(a) $(8^{-3}y^{-6})^{-\frac{2}{3}}$ **(b)** $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}, y\neq 0$

(c) $((x^{-\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{3}}, x>0$ **(d)** $\frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{6}}\cdot y^{\frac{3}{4}}}, x>0, y>0$

(7) **تحليل الخطأ:** في سبيل تبسيط الكسر $\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}$ كتب أحد الطلاب ما يلي:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}&=(1-\sqrt{2})^{-2}\\&=1^{-2}-(\sqrt{2})^{-2}\\&=1-\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\\&=1-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ما الخطأ الذي ارتكبه الطالب؟

(8) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $5\sqrt{x}+7=8$ **(b)** $\sqrt{x+2}=x$ **(c)** $\sqrt{4x-23}-3=2$

(d) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+11}=0$ **(e)** $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=2$ (**مساعدة:** تربيع طرفي المعادلة مرتين متتاليتين)

(f) $\sqrt{3x-9}=\sqrt{2x+4}$

(9) **الفيزياء:** السرعة V لجسم ما أسقط عن سطح مبنى عال معطاة بالقانون: $V=8\sqrt{m}$، حيث m هي ارتفاع المبنى. أوجد الارتفاع m بدلالة السرعة V

(10) إذا كان $x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$، فأوجد قيمة $x^2(3-x)$

(11) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $2^{x^2}=512$ **(b)** $4^{x^2-x}=16$

تمارين إثرائية

(1) بسّط كلًّا مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(a) $\sqrt[3]{-343}$ **(b)** $\sqrt[4]{810\,000}$ **(c)** $\left(\sqrt[4]{\sqrt{3}}\right)^8$

(d) $-\sqrt[4]{6\,561}$ **(e)** $\sqrt[5]{-0.00001}$ **(f)** $\sqrt{9(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{4(1-\sqrt{3})^2}$

(g) $\dfrac{27^{-2}\times 45^{-3}}{36^{-5}\times 45^{4}}$ **(h)** $\dfrac{12^{3}\times 18^{-2}}{6^{-2}\times 3^{-5}}$

(2) أوجد ناتج ما يلي:

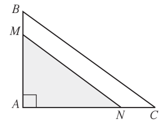
(a) $\sqrt[4]{(\sqrt[3]{4}-4)^4}-\sqrt[3]{-8(\sqrt[3]{2}+1)^6}$ **(b)** $\left(\sqrt[5]{\sqrt{32}}+3\right)\left(3-\sqrt[6]{8}\right)$ **(c)** $\dfrac{\sqrt[3]{13^2}\times\sqrt{13}}{\sqrt[3]{13^{\frac{1}{2}}}}$

(3) بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(a) $\left(\dfrac{8x^9y^3}{27x^2y^{12}}\right)^{\frac{2}{3}}$, $x\neq 0,\ y\neq 0$ **(b)** $\left(x^{\frac{-3}{8}}\bullet y^{\frac{1}{4}}\right)^{16}$, $x>0,\ y\geq 0$

(c) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[6]{x\bullet y}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}\bullet y^{\frac{1}{6}}\right)$ **(d)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}}$, $x>0$

(4) ABC مثلث قائم الزاوية A



$AN = 2+\sqrt{3}$ $AM = 2\sqrt{3}-1$

$\overleftrightarrow{MN}\,//\,\overleftrightarrow{BC}$ $MB = 1$

أوجد: **(a)** CN **(b)** MN

(5) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًّا دون استخدام الآلة الحاسبة:

(a) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ **(c)** $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-1}$, $x\in\mathbb{Z}^+$, $x\neq 1$

(6) أوجد قيمة x ليكون العدد $\sqrt{x}\times\sqrt{-x}$ عددًا حقيقيًّا.

(7) **تحليل الخطأ:** أوجد الخطأ $\sqrt{16}=\sqrt{(-2)\times(-8)}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}$

(8) ما قيمة x، إذا $32^{0.8}\times x = 1$ ؟

(9) بسّط كلًّا مما يلي:

(a) $\left(\dfrac{x^{a^2}}{x^{b^2}}\right)^{\frac{1}{a-b}}$ **(b)** $\dfrac{2\times 3^{x+2}-8\times 3^{x}}{3^{x+1}+2\times 3^{x}}$ **(c)** $\left(x^{\frac{1}{2}}\times y^{-\frac{1}{3}}\right)$, $x\geq 0$, $y\neq 0$

(10) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $(0.01)^x = 0.000001$ **(b)** $2^{\frac{1}{2}(x+3)}=\dfrac{2^3}{\sqrt{2}}$ **(c)** $(3^{2x}-9)(2^x-16)=0$

(d) $(3^x)^2-10\times 3^x+9=0$ (**مساعدة:** ليكن $3^x = y$) **(e)** $4^{x-1}-9\times 2^{x-1}+8=0$

الوحدة الثانية: الدوال الحقيقية
The Real Functions

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 2: مجال الدالة

جزء 1: العلاقة والدالة.

جزء 2: مجال الدالة.

2 – 2: الدوال التربيعية ونمذجتها

جزء 1: الدوال التربيعية.

جزء 2: نمذجة البيانات.

3 – 2: الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

جزء 1: القطوع المكافئة التي تمثل دوال تربيعية.

جزء 2: معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها.

4 – 2: مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

5 – 2: المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

جزء 1: معكوس العلاقة ومعكوس الدالة الخطية.

جزء 2: دوال الجذر التربيعي.

6 – 2: حل المتباينات

مقدمة الوحدة

يتمحور محتوى هذه الوحدة حول جزء من الدوال الحقيقية، حيث سيكون التركيز على مجال التعريف ببعض الدوال الحقيقية بمداها، وبصورة خاصة بالدوال التربيعية ورسومها البيانية لذا سنتوقف لدراسة القطع المكافئ والتعرف على بعض خصائصه.

أوضح جاليليو أن جميع المقذوفات تأخذ مسارًا منتظمًا على شكل قطع مكافئ (∩)، وهذا يعود إلى انتظام عجلة الجاذبية للأرض. كما أن للقطوع المكافئة تطبيقات حياتية متنوعة في مرايا السيارات، ومصابيحها الأمامية، وفي الصواريخ البالستية، وفي تركيز الإنارة والصوت في الملاعب، وفي التليسكوبات العاكسة، وأطباق الأقمار الاصطناعية، وفي أجهزة الرادارات. وسوف يرى الطالب في مرحلة لاحقة عدة معادلات للقطع المكافئ تجعل رسمه البياني مفتوحًا نحو أحد الاتجاهات المعروفة، وباختصار فإن أي دالة في x، على أن تكون كثيرة حدود من الدرجة الثانية، نحصل منها على رسم بياني هو قطع مكافئ.

وبصورة عامة، فإن القطع المكافئ هو منحنى يعرّف بالمعادلة غير القابلة للاختزال كما يلي:

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$، حيث $b^2=4ac$

والمعروف، أن دالة القطع المكافئ أو الدالة التربيعية قد ساهمت كثيرًا في إيجاد حلول لمسائل اقتصادية ومالية وحياتية تتطلب تحقيق قيم عظمى أو قيم صغرى.

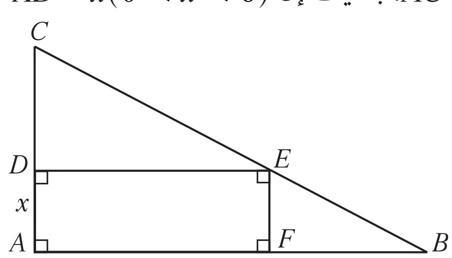
مسألة للتفكير

ABC مثلث قائم الزاوية $\hat{A}$.

$AB=8\,\text{cm}$ ، $AC=6\,\text{cm}$

D نقطة متحركة على AC، بحيث إن $AD=x(0<x<6)$

$AFED$ مستطيل.



الوحدة الثانية

الدوال الحقيقية

The Real Functions

مشروع الوحدة: رياضة القوس والنشاب

1. **مقدمة المشروع:** تستخدم رياضة القوس والنشاب سلاحًا على شكل قوس وأدوات رماية وهي الأسهم. يصوب فيها اللاعب على قرص كبير مقسم إلى خمس حلقات مختلفة الألوان بترتيب محدد من الداخل إلى الخارج: أصفر، أحمر، أزرق، أسود وأخيرًا أبيض ولكل حلقة عدد من النقاط غير المتساوية تتدرج من 1 إلى 10 بحسب قربها أو بعدها عن المركز. فمثلًا إذا سقط السهم على الحلقة البيضاء ينال الرامي نقطة واحدة (1) أما إذا سقط السهم على الحلقة الصفراء فينال الرامي 10 نقاط.
2. **الهدف:** خلال عملك في هذه الوحدة سوف تبحث في مواضيع مثل: كيف يختار الرماة أسهمهم؟ وكيف غيرت التكنولوجيا في هذه الرياضة؟ وقد تحتاج في نهاية المشروع إلى تقديم عرض لما توصلت إليه.
3. **اللوازم:** السهم: قطره الأقصى 9.3 mm، القوس: يختلف وزنه بين الإناث والرجال، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، أوراق ملصقات.
4. **أسئلة حول التطبيق:**

a. يرسم الطلاب القطع المكافئ الذي يمكن أن يمثله مسار السهم عندما يطلقه الرامي أثناء وقوفه أو أثناء جلوسه على كرسي متحرك.

b. يمكن تنفيذ عدة رسوم لمسارات عدد من الأسهم، ثم تحديد التشابهات والاختلاف بينها. يوضح الجدول أدناه كيف أن وزن السهم يؤثر على محوره المركزي. ارسم البيانات المعطاة في الجدول على شبكة إحداثيات. هل حصلت على نموذج خطي أم على نموذج تربيعي؟

الوزن بالجرام (g)	140	150	170	175	205
المحور المركزي بالسنتيمتر (cm)	3.6	3.2	2.4	2	1.1

c. افترض أنك أحد الرماة وصوبت سهمًا وأنت واقفًا. قس المسافة من الأرض إلى كتفك. افترض أنك قد أصبت هدفًا على ارتفاع 5 m عن سطح الأرض. ارسم بيانيًا الشكل الممثل لمسار سهمك مستخدمًا هذه البيانات. حدد هذا الشكل.

d. أجر مقابلة مع أحد رماة القوس والنشاب في نادي الرماية الكويتي. ابحث عن بعض تقنيات هذه اللعبة وتطورها وشروط تطبيقها.

5. **التقرير:** قدم تقريرًا مفصلًا عن أبحاثك ورسومك عارضًا إيجابيات هذه اللعبة من حيث الدقة والتركيز والميزات الأساسية للاعب. قدم مشروعك بعرض بصري أو مسرحي قصير أو على قرص مدمج.

دروس الوحدة

مجال الدالة	الدوال التربيعية ونمذجتها	الدوال التربيعية والقطوع المكافئة	مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة	المعكوسات ودوال الجذر التربيعي	حل المتباينات
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6

42

(a) أثبت أن مساحة المستطيل هي دالة تربيعية، $f(x)$ بحيث إن: $f(x)=-\frac{4}{3}x^2+8x$

(b) أكمل الجدول التالي:

$x\,(\text{cm})$									
$f(x)\,\text{cm}^2$									

(c) ما قيمة x التي تحقق قيمة عظمى للدالة $f(x)$؟ وما أبعاد المستطيل إذا ما تحققت المساحة العظمى؟

مشروع الوحدة

حفّز الطلاب على إجراء بحث واسع ومستفيض عن رياضة القوس والنشاب ليتعرفوا أكثر على شروطها وكيفية التعامل معها. أخبرهم أن هذه الرياضة تتطلب تركيزًا وأعصابًا قوية وهادئة ودقة في التصويب.

شجعهم على تجميع نتائج مباريات القوس والنشاب التي جرت في دورات الأولمبياد العالمية.

اطلب إليهم تكوين جداول مشابهة للجدول الموجود في مشروع الوحدة، ثم كتابة دالة تربيعية باستخدام ثلاث قيم.

ركّز معهم على فكرة أن الرسم البياني لن يمر بالنقاط كلها الموجودة على الجدول بل إن معظمها سيكون قريبًا منه.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) تحقق من عمل الطلاب.

(b) نموذج تربيعي.

(c) تحقق من عمل الطلاب.

(d) تحقق من عمل الطلاب.

التقرير

اكتب تقريرًا يبيّن أهمية التركيز في استخدام القوس والنشاب. اعرض رسومك البيانية وحساباتك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقشهم بالنتائج التي توصلت إليها، ثم أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت العمليات الأساسية على التعابير الجذرية.
- تعرفت قوانين الأسس وكيفية استخدامها في تبسيط الجذور.
- تعلمت كيفية إيجاد حلول لمعادلات جذرية ومعادلات أسية.
- تعرفت نمذجة مواقف حياتية إلى دوال خطية ومعادلات تربيعية.
- تعلمت إيجاد حلول معادلة من الدرجة الثانية بطرائق متعددة.

ماذا سوف تتعلم؟

- الدوال التربيعية واستخداماتها.
- نمذجة البيانات.
- إيجاد أوسع مجال للدوال الحدودية والنسبية والجذرية.
- إيجاد القيم الصغرى والقيم العظمى لدالة تربيعية.
- رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.
- إيجاد رأس منحنى الدالة من الدالة المكتوبة في الصورة العامة.
- كتابة المعادلات التربيعية بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.
- إيجاد معكوس الدوال الخطية والدوال التربيعية.
- استخدام دوال الجذر التربيعي لتمثيل مواقف حياتية.
- حل متباينات تتضمن حدوديات من الدرجة الثانية في متغير واحد أو حدوديات نسبية.

المصطلحات الأساسية

دالة تربيعية — نمذجة بيانات — مجال — مدى — قيمة صغرى — قيمة عظمى — قطع مكافئ — رأس القطع المكافئ — الصورة العامة — معادلة بدلالة إحداثيات رأس القطع المكافئ — معكوس دالة خطية — معكوس دالة تربيعية — متباينة من الدرجة الثانية — متباينة حدوديات نسبية.

أضف إلى معلوماتك

ارتبطت رياضة الرماية منذ بداياتها الأولى بالقوة إذ بدأت كسلاح ثم تطورت لتصبح رياضة للنخبة.

حث الإسلام المسلمين على ممارسة هذه الرياضة وجعلها في مصاف الفروسية والسباحة. حتى أن الخليفة عمر بن الخطاب قال: «علموا أبناءكم السباحة والرماية وركوب الخيل». وبقيت هذه الهواية مصدرًا لكبرياء العرب وسلاحًا للدفاع عن أنفسهم.

ومن المتعارف عليه أنّ الرماية بالقوس والسهم يتطلب توازنًا وقدرة فائقة على التركيز تحت ضغط كبير وقوة مميّزة في جذب الوتر وإطلاق السهم وذلك بسرعة تصل إلى 240 km/h تقريبًا.

لقد تمكن المنتخب الوطني الكويتي لرماية القوس والسهم من الحصول على 8 ميداليات متنوعة في البطولة العربية الثامنة لرماية القوس والسهم والتي أقيمت في مدينة «سرت» الليبية لذا وضعت إدارة نادي الرماية الكويتي برامج هادفة لاستقطاب الشباب الكويتي على تطوير مهاراتهم وقدراتهم في ممارسة هذه الرياضة وقررت تجهيز ميدان متكامل وتوفير أحدث الأجهزة من أقواس وأسهم ومعدات للرماة.

43

سلّم التقييم

4	الرسومات دقيقة — الحسابات صحيحة — تقديم المشروع جيد جدًّا — التقرير مفصل وواضح.
3	معظم الرسومات دقيقة — أخطاء قليلة في الحسابات — تقديم المشروع جيد — معظم التقرير مفصل وواضح.
2	بعض الرسومات دقيقة — أخطاء متعددة في الحسابات — تقديم المشروع مقبول — نقاط كثيرة في التقرير غامضة.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

2–1: مجال الدالة

2–1

مجال الدالة

Domain of the Function

سوف تتعلم
- متى تمثل العلاقة دالة.
- مجال الدالة.

المفردات والمصطلحات:
- العلاقة Relation
- المجال Domain
- المجال المقابل Co–Domain
- المدى Range
- الدالة Function
- اختبار المستقيم الرأسي Vertical Line Test
- أصفار المقام Zeros of Denominator

دعنا نفكر ونتناقش

من أهم ما يميز حياة الإنسان العلاقات. مثل انتماء شخص إلى وطنه أو إلى نادي رياضي أو ثقافي أو انتماء نقطة إلى منحنى. يمكن تمثيل العلاقات أحيانًا بمخططات سهمية.

a اختر خمسة من أصدقائك، واكتب أسماءهم ثم صل كل اسم بسنة ولادته.

b أعد كتابة الأسماء الخمسة واكتب أسماء ثلاث رياضات ثم صل اسم كل شخص برياضته المفضلة.

في الفقرة a يرتبط كل اسم بسنة ولادته بينما في الفقرة b قد يرتبط الاسم الواحد بأكثر من رياضة أو قد لا يرتبط بأي رياضة.

قارن بين عملك وعمل زملائك في الفصل.

سوف نتعرف في هذا الدرس على العلاقات ونمثلها بيانيًا، وسوف نتعرف أيضًا متى تمثل العلاقة دالة مع التركيز على العلاقات في المستوى الإحداثي.

العلاقة والدالة Relation and Function

كثيرًا ما نحتاج في الرياضيات وتطبيقاتها إلى التعبير عدديًا أو جبريًا عن علاقة تربط بين متغيرين أو أكثر، والعلاقة رياضيًا هي أي مجموعة من الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، وتسمى مجموعة المساقط الأولى لهذه الأزواج (الإحداثيات الأفقية أي السينية) مجال العلاقة. وتسمى مجموعة المساقط الثانية (الإحداثيات الرأسية أي الصادية) مدى العلاقة وهي مجموعة جزئية من المجال المقابل

عندما يكون كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر (عدد) واحد فقط من المجال المقابل، فإن العلاقة تسمى دالة.

والدالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.

معلومة مفيدة:

(a, b) زوج مرتب يسمى a المسقط الأول، b المسقط الثاني.

مثال توضيحي (1)

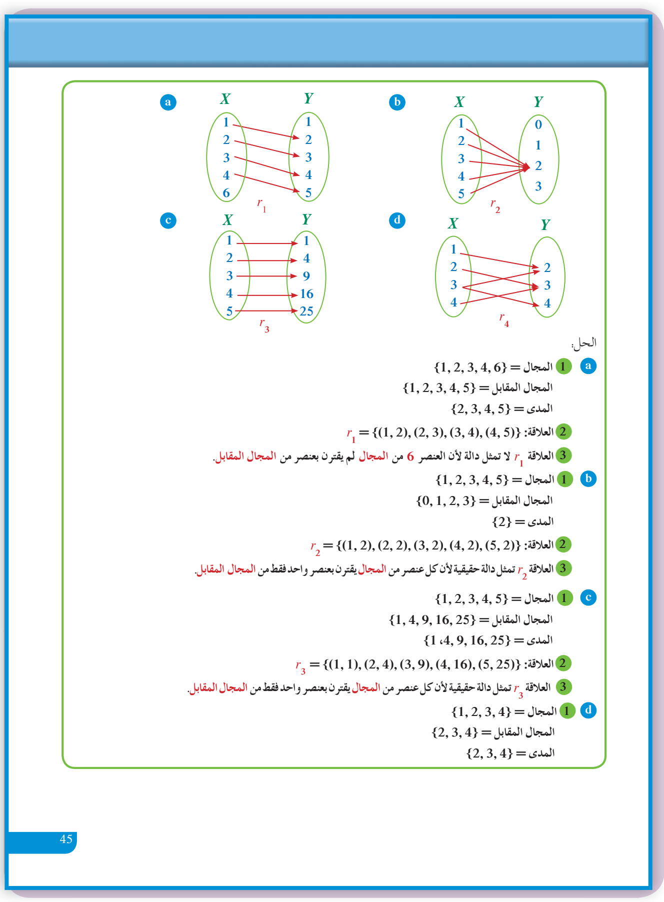
في المخططات السهمية التالية علاقات من: $X \longrightarrow Y$

1 حدّد المجال والمجال المقابل والمدى.

2 اكتب كل علاقة على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة.

3 بيّن أي من العلاقات يمثل دالة حقيقية وأيها لا يمثل دالة حقيقية مع ذكر السبب.

44



الحل:

a 1 المجال $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

المجال المقابل $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المدى $= \{2, 3, 4, 5\}$

2 العلاقة: $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

3 العلاقة r_1 لا تمثل دالة لأن العنصر 6 من المجال لم يقترن بعنصر من المجال المقابل.

b 1 المجال $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المجال المقابل $= \{0, 1, 2, 3\}$

المدى $= \{2\}$

2 العلاقة: $r_2 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

3 العلاقة r_2 تمثل دالة حقيقية لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

c 1 المجال $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المجال المقابل $= \{1, 4, 9, 16, 25\}$

المدى $= \{1 ،4, 9, 16, 25\}$

2 العلاقة: $r_3 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$

3 العلاقة r_3 تمثل دالة حقيقية لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

d 1 المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

المجال المقابل $= \{2, 3, 4\}$

المدى $= \{2, 3, 4\}$

45

1 الأهداف

- يتعرف متى تمثل العلاقة دالة.
- يتعرف مجال الدالة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

العلاقة – المجال – المجال المقابل – المدى – الدالة – اختبار المستقيم الرأسي – أصفار المقام.

3 الأدوات والوسائل

جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) حل كل معادلة مما يلي:

(1) $2x - 5 = 0$

(2) $x^2 - 9 = 0$

(3) $x^2 - 7x + 12 = 0$

(b) حل كل متباينة مما يلي:

(1) $3x - 12 \geq 0$ (2) $-4x + 8 \geq 0$

(c) أوجد قيم المتغير x حيث يكون الجذر التربيعي معرفًا.

(1) $\sqrt{3x - 6}$ (2) $\sqrt{-2x + 5}$

(d) أوجد قيم المتغير x حيث يكون الجذر التكعيبي معرفًا.

(1) $\sqrt[3]{x - 5}$ (2) $\sqrt[3]{-3x + 4}$

(e) أوجد مجموعة حل النظام التالي:

$$\begin{cases} 3x - 6 \geq 0 \\ -2x + 10 \geq 0 \end{cases}$$

5 التدريس

يعتبر تعريف مجال الدالة، ومجالها المقابل، ومداها من الشروط الأساسية لدراسة الدالة وخصائصها وميزاتها. وهذا يشابه كثيرًا تركيز الأساس عند بناء البيوت والقلاع والأبراج.

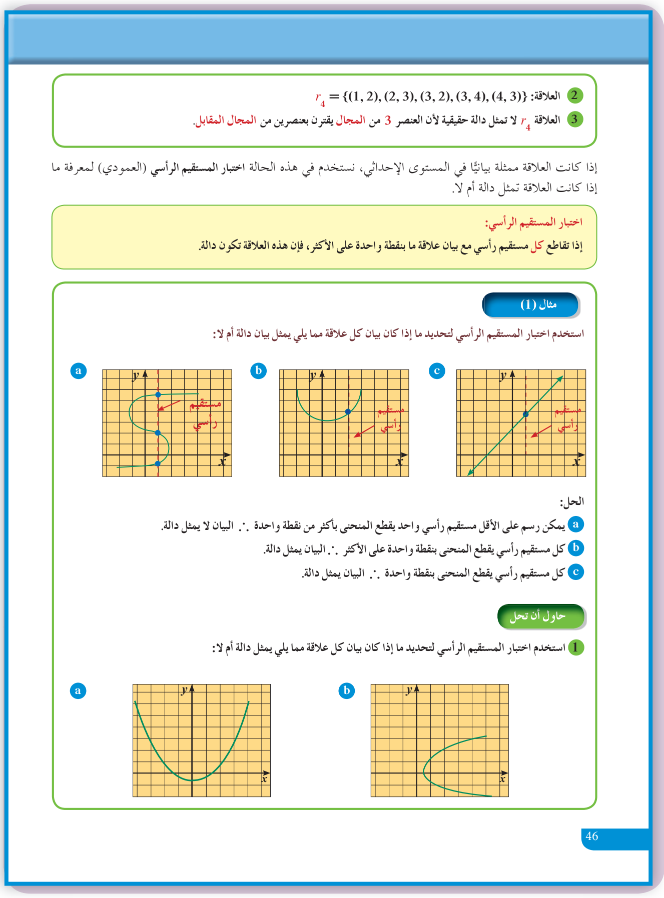
في المثال التوضيحي (1) سوف يوضح الفرق بين العلاقة والدالة، حيث تساعد المخططات السهمية كثيرًا على إبراز هذا الفرق، وتوفر للطلاب فرصة للتعرف على مجال العلاقة (الدالة) أو المجموعة الابتدائية أو مجموعة الانطلاق ثم المجال المقابل أو مجموعة الوصول وبعد ذلك المدى وهو الجزء من المجال المقابل.

في المثال (1)

يساعد كثيرًا اختبار المستقيم الرأسي على تحديد ما إذا كان بيان علاقة ما يمثل دالة أم لا. قدّم للطلاب أمثلة بيانية متعددة عن المستقيم ليلاحظوا أن التقاطع بين المستقيم الرأسي وبيان العلاقة يجب أن يكون على الأكثر نقطة واحدة كي يكون هذا البيان لدالة.

في المثال التوضيحي (2) والمثال (2)

يعالجان معًا مجال دوال من أنواع متعددة سوف تكون ركائز للطالب خلال دراسته المستقبلية إن كان لجهة الدوال الحدودية أو النسبية، أو لجهة الدوال الجذرية (تربيعية أو تكعيبية أو ...).
ناقش معهم بشكل خاص حلول الأمثلة التالية:
مثال توضيحي (2) $(d-f)$ ثم مثال (2) $(c-d)$ حيث إن المقام يجب أن لا يساوي صفرًا.



2 العلاقة: $r_4 = \{(1,2),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$

3 العلاقة r_4 لا تمثل دالة حقيقية لأن العنصر 3 من المجال يقترن بعنصرين من المجال المقابل.

إذا كانت العلاقة ممثلة بيانيًا في المستوى الإحداثي، نستخدم في هذه الحالة اختبار المستقيم الرأسي (العمودي) لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا.

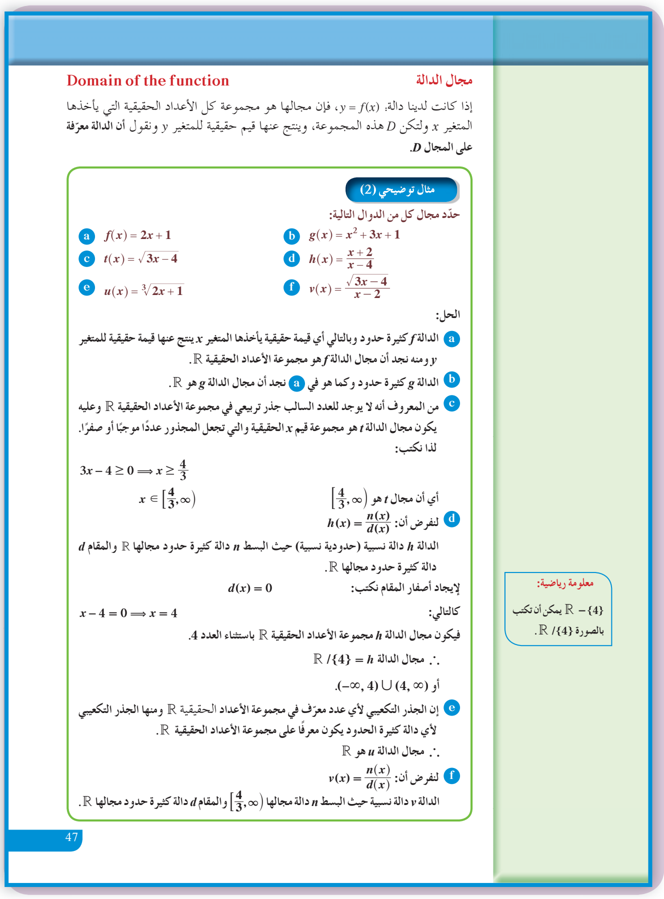
اختبار المستقيم الرأسي:
إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر، فإن هذه العلاقة تكون دالة.

مثال (1)
استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:

الحل:
a يمكن رسم على الأقل مستقيم رأسي واحد يقطع المنحنى بأكثر من نقطة واحدة ∴ البيان لا يمثل دالة.
b كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة على الأكثر ∴ البيان يمثل دالة.
c كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة ∴ البيان يمثل دالة.

حاول أن تحل
1 استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل دالة أم لا:

46



مجال الدالة Domain of the function

إذا كانت لدينا دالة: $y = f(x)$، فإن مجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يأخذها المتغير x ولتكن D هذه المجموعة، وينتج عنها قيم حقيقية للمتغير y ونقول أن الدالة معرّفة على المجال D.

مثال توضيحي (2)
حدّد مجال كل من الدوال التالية:
a $f(x) = 2x+1$
b $g(x) = x^2+3x+1$
c $t(x) = \sqrt{3x-4}$
d $h(x) = \frac{x+2}{x-4}$
e $u(x) = \sqrt[3]{2x+1}$
f $v(x) = \frac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$

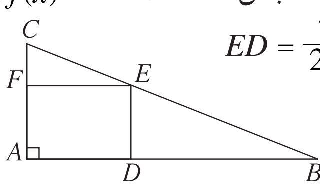
الحل:
a الدالة f كثيرة حدود وبالتالي أي قيمة حقيقية يأخذها المتغير x ينتج عنها قيمة حقيقية للمتغير y ومنه نجد أن مجال الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
b الدالة g كثيرة حدود وكما هو في a نجد أن مجال الدالة g هو $\mathbb{R}$.
c من المعروف أنه لا يوجد للعدد السالب جذر تربيعي في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وعليه يكون مجال الدالة t هو مجموعة قيم x الحقيقية والتي تجعل المجذور عددًا موجبًا أو صفرًا.
لذا نكتب:
$3x-4 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{4}{3}$
$x \in \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$
أي أن مجال t هو $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$
d لنفرض أن: $h(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$
الدالة h دالة نسبية (حدودية نسبية) حيث البسط n دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$ والمقام d دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.
لإيجاد أصفار المقام نكتب: $d(x) = 0$
كالتالي: $x-4=0 \Longrightarrow x=4$
فيكون مجال الدالة h مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ باستثناء العدد 4.
∴ مجال الدالة h = $\mathbb{R}/\{4\}$
أو $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.
e إن الجذر التكعيبي لأي عدد معرّف في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ومنها الجذر التكعيبي لأي دالة كثيرة الحدود يكون معرفًا على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
∴ مجال الدالة u هو $\mathbb{R}$
f لنفرض أن: $v(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$
الدالة v دالة نسبية حيث البسط n دالة مجالها $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$ والمقام d دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

معلومة رياضية:
$\mathbb{R} - \{4\}$ يمكن أن تكتب بالصورة $\mathbb{R}/\{4\}$.

47

6 الربط

نأخذ المثلث ABC قائم الزاوية A، حيث: $AC = 7, AB = 24$.
نأخذ على $\overline{AB}$ نقطة D بحيث إن $AD = x$.
نكمل المستطيل $ADEF$.
أوجد مساحة $ADEF$ بدلالة x، حدّد مجال هذه المساحة $f(x)$.



الحل: $AD = FE = x$ ، $ED = \frac{7}{24}(24-x)$
وبالتالي: $f(x) = \frac{-7}{24}x^2 + 7x$
مجال هذه الدالة: $0 < x < 24$

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد الشروط لتعريف مجال الدالة النسبية (الدالة الكسرية) التي تتضمن جذورًا في البسط أو في المقام، ومن ثم إيجاد حلول لنظام متباينات.
اعرض أمثلة متعددة تساعد الطلاب على تخطي هذه الأخطاء.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل».
لتتأكد من حسن أدائهم في معالجة تعريف مجال الدالة.

اختبار سريع

حدّد مجال كل دالة مما يلي:

(a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$

كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$

(b) $f(x) = \sqrt{-4x + 7}$

مجالها: $-4x + 7 \geq 0$; $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{x - 5}$

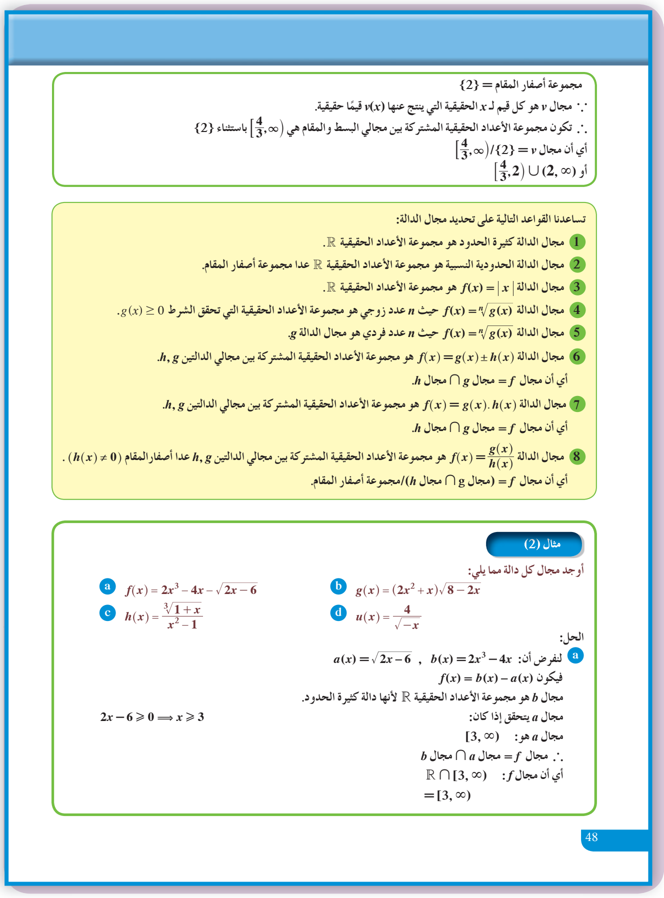
مجالها: $x - 3 \geq 0$; $x \neq 5$; $[3, 5) \cup (5, \infty)$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{-x + 2}}$

مجالها: $-x + 2 > 0 ; (-\infty, 2)$

(e) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 4}$

مجالها: $x^2 - 5x + 4 \neq 0$; $\mathbb{R} - \{1, 4\}$



مجموعة أصفار المقام $= \{2\}$

$\because$ مجال v هو كل قيم لـ x الحقيقية التي ينتج عنها $v(x)$ قيمًا حقيقية.

$\therefore$ تكون مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي البسط والمقام هي $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$ باستثناء $\{2\}$

أي أن مجال $v = \left[\frac{4}{3}, \infty\right) / \{2\}$

أو $\left[\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, \infty)$

تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:

1. مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
2. مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام.
3. مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
4. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$.
5. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g.
6. مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.
   أي أن مجال $f =$ مجال $g \cap$ مجال h.
7. مجال الدالة $f(x) = g(x) . h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.
   أي أن مجال $f =$ مجال $g \cap$ مجال h.
8. مجال الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g عدا أصفارالمقام $(h(x) \neq 0)$.
   أي أن مجال $f =$ (مجال $g \cap$ مجال h)/مجموعة أصفار المقام.

مثال (2)

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

(a) $f(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x - 6}$

(b) $g(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8 - 2x}$

(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1 + x}}{x^2 - 1}$

(d) $u(x) = \dfrac{4}{\sqrt{-x}}$

الحل:

(a) لنفرض أن: $b(x) = 2x^3 - 4x$, $a(x) = \sqrt{2x - 6}$

فيكون $f(x) = b(x) - a(x)$

مجال b هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

مجال a يتحقق إذا كان: $2x - 6 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 3$

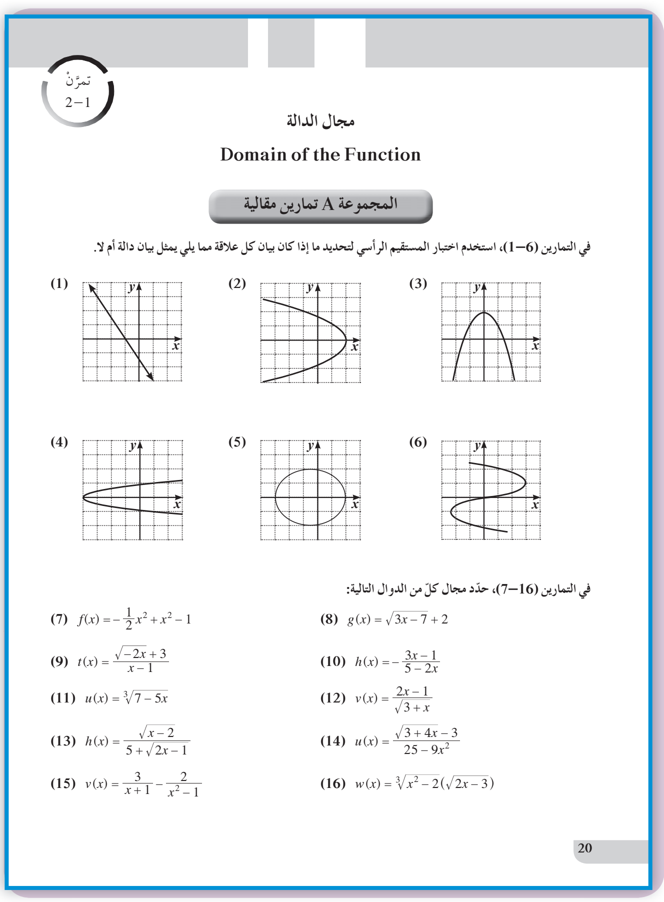
مجال a هو: $[3, \infty)$

$\therefore$ مجال $f =$ مجال $a \cap$ مجال b

أي أن مجال f: $\mathbb{R} \cap [3, \infty)$

$= [3, \infty)$

48



تمرَّنْ 2–1

مجال الدالة

Domain of the Function

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–6)، استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا.

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

في التمارين (7–16)، حدّد مجال كلّ من الدوال التالية:

(7) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^2 - 1$

(8) $g(x) = \sqrt{3x - 7} + 2$

(9) $t(x) = \dfrac{\sqrt{-2x} + 3}{x - 1}$

(10) $h(x) = -\dfrac{3x - 1}{5 - 2x}$

(11) $u(x) = \sqrt[3]{7 - 5x}$

(12) $v(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{3 + x}}$

(13) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{5 + \sqrt{2x - 1}}$

(14) $u(x) = \dfrac{\sqrt{3 + 4x} - 3}{25 - 9x^2}$

(15) $v(x) = \dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$

(16) $w(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2}\left(\sqrt{2x - 3}\right)$

20

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) يقطع المستقيم الرأسي البيان المرسوم على الأكثر بنقطة واحدة فقط، لذا فالبيان يمثل دالة.

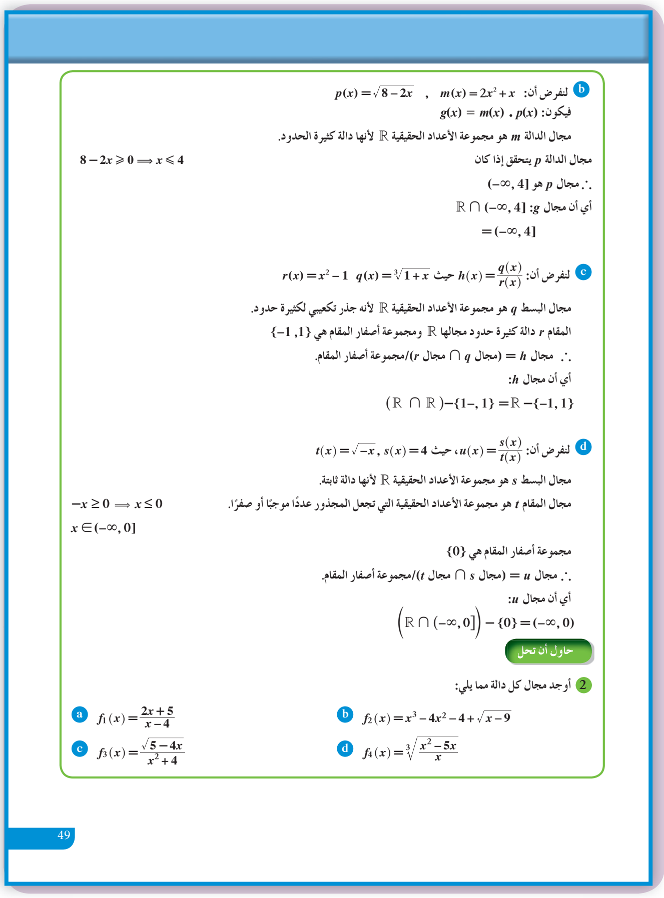
(b) يقطع المستقيم الرأسي البيان المرسوم بنقطتين، لذا فالبيان لا يمكن أن يمثل دالة.

2 (a) $\mathbb{R}/\{4\}$

(b) $x-9 \geq 0$; $x \geq 9$; $x \in [9, \infty)$

(c) $\begin{cases} 5-4x \geq 0 \\ x^2+4 \neq 0 \end{cases}$; $x \leq \frac{5}{4}$; $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$

(d) $x \neq 0$; $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



b لنفرض أن: $m(x) = 2x^2 + x$, $p(x) = \sqrt{8-2x}$

فيكون: $g(x) = m(x) \cdot p(x)$

مجال الدالة m هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

مجال الدالة p يتحقق إذا كان $8-2x \geqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant 4$

∴ مجال p هو $(-\infty, 4]$

أي أن مجال g: $\mathbb{R} \cap (-\infty, 4]$

$= (-\infty, 4]$

c لنفرض أن: $h(x) = \frac{q(x)}{r(x)}$ حيث $q(x) = \sqrt[3]{1+x}$ $r(x) = x^2 - 1$

مجال البسط q هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنه جذر تكعيبي لكثيرة حدود.

المقام r دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$ ومجموعة أصفار المقام هي $\{-1, 1\}$

∴ مجال h = (مجال q ∩ مجال r)/مجموعة أصفار المقام.

أي أن مجال h:

$(\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{1-, 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

d لنفرض أن: $u(x) = \frac{s(x)}{t(x)}$، حيث $s(x) = 4$, $t(x) = \sqrt{-x}$

مجال البسط s هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة ثابتة.

مجال المقام t هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل المجذور عددًا موجبًا أو صفرًا. $-x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 0$

$x \in (-\infty, 0]$

مجموعة أصفار المقام هي $\{0\}$

∴ مجال u = (مجال s ∩ مجال t)/مجموعة أصفار المقام.

أي أن مجال u:

$\left(\mathbb{R} \cap (-\infty, 0]\right) - \{0\} = (-\infty, 0)$

حاول أن تحل

2 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

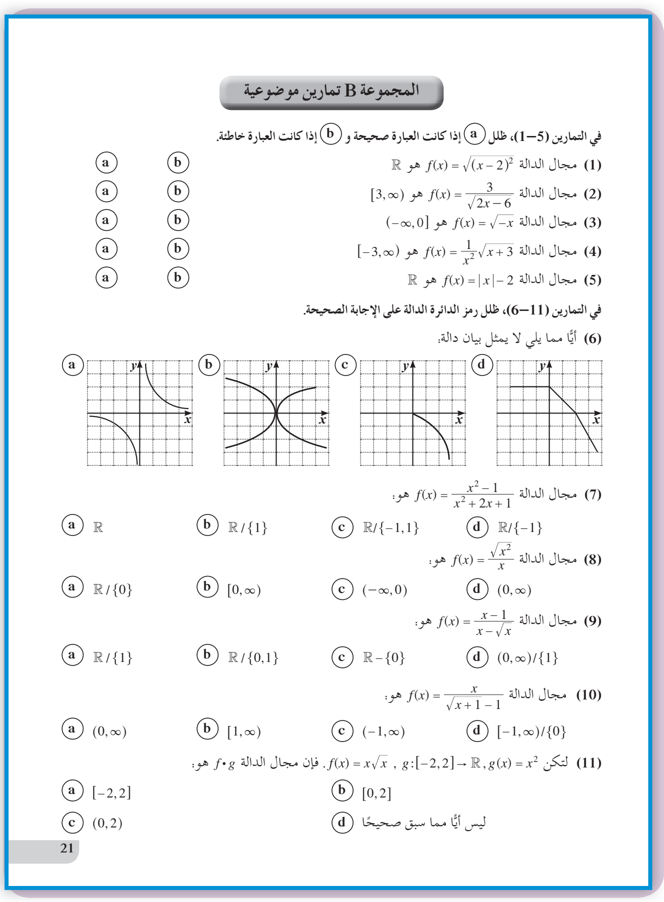
a $f_1(x) = \frac{2x+5}{x-4}$

b $f_2(x) = x^3 - 4x^2 - 4 + \sqrt{x-9}$

c $f_3(x) = \frac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

d $f_4(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-5x}{x}}$

49



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

(2) مجال الدالة $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-6}}$ هو $[3, \infty)$ (a) (b)

(3) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{-x}$ هو $(-\infty, 0]$ (a) (b)

(4) مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}\sqrt{x+3}$ هو $[-3, \infty)$ (a) (b)

(5) مجال الدالة $f(x) = |x| - 2$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) أيًا مما يلي لا يمثل بيان دالة:

(7) مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}/\{1\}$ (c) $\mathbb{R}/\{-1, 1\}$ (d) $\mathbb{R}/\{-1\}$

(8) مجال الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ هو:

(a) $\mathbb{R}/\{0\}$ (b) $[0, \infty)$ (c) $(-\infty, 0)$ (d) $(0, \infty)$

(9) مجال الدالة $f(x) = \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}$ هو:

(a) $\mathbb{R}/\{1\}$ (b) $\mathbb{R}/\{0, 1\}$ (c) $\mathbb{R} - \{0\}$ (d) $(0, \infty)/\{1\}$

(10) مجال الدالة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ هو:

(a) $(0, \infty)$ (b) $[1, \infty)$ (c) $(-1, \infty)$ (d) $[-1, \infty)/\{0\}$

(11) لتكن $g: [-2, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$, $f(x) = x\sqrt{x}$. فإن مجال الدالة $f \circ g$ هو:

(a) $[-2, 2]$ (b) $[0, 2]$

(c) $(0, 2)$ (d) ليس أيًا مما سبق صحيحًا

21

2–2: الدوال التربيعية ونمذجتها

1 الأهداف

- يتعرف الدوال التربيعية واستخداماتها.
- يقدّر متى يستخدم النموذج الخطي أو النموذج التربيعي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الدوال التربيعية – دالة خطية – الصورة العامة – حد من الدرجة الثانية – حد مطلق (ثابت) – مجال الدالة.

3 الأدوات والوسائل

عبوة بلاستيكية سعتها لتران – شريط لاصق – مسمار – مسطرة – ساعة رقمية – مياه – وعاء أو حوض – ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية.

4 التمهيد

(a) عيّن على المستوى الإحداثي النقاط التالية:

$$(-3,-1),(-1,0),(1,1),(3,2)$$

اسأل الطلاب: هل تقع جميع هذه النقاط على مستقيم واحد؟ اشرح.

(b) عيّن على المستوى الإحداثي النقاط التالية:

$$(-2,0),(-1,1),(2,2),(7,3)$$

اسأل الطلاب: هل تقع جميع هذه النقاط على مستقيم واحد؟ اشرح.

(c) اسأل الطلاب: ما هي معادلة الخط المستقيم؟ كيف توجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بنقطتين على المستوى الإحداثي؟

2–2

سوف تتعلم
- الدوال التربيعية واستخداماتها.
- تقدير متى تستخدم النموذج الخطي أو النموذج التربيعي.

سوف تحتاج إلى...
- عبوة بلاستيكية سعتها لتران.
- شريط لاصق.
- مسمار.
- مسطرة.
- ساعة رقمية.
- مياه.
- وعاء أو حوض.
- ورق رسم بياني.
- آلة حاسبة علمية.

المفردات والمصطلحات
- الدوال التربيعية Quadratic Functions
- الصورة العامة General Form
- حد من الدرجة الثانية Quadratic Term
- حد مطلق (ثابت) Constant Term
- دالة خطية Linear Function
- مجال الدالة Domain of the Function

الدوال التربيعية ونمذجتها

Quadratic Functions and their Modelling

عمل تعاوني

قسم الفصل إلى مجموعات لإجراء هذه التجربة.

حدد مهام أفراد مجموعتك. اطلب إلى أحدهم أن يراقب الزمن، واطلب إلى آخر أن يقوم بوضع العلامات. ثبت شريطًا لاصقًا بطول الزجاجة واصنع ثقبًا بجانب قاعدتها بواسطة مسمار.

أولًا: ضع علامة عند مستوى الثقب على الشريط اللاصق واكتب عند هذه العلامة «0» ثم أغلق الثقب بواسطة الشريط اللاصق. املأ الزجاجة بالماء، ثم ضع علامة عند مستوى الماء في الزجاجة.

ثانيًا: انزع الشريط اللاصق من على الثقب ودع الماء يتدفق. ضع علامة عند مستوى سطح الماء كل 10 s استمر على هذا النحو حتى يصل مستوى سطح الماء إلى الصفر.

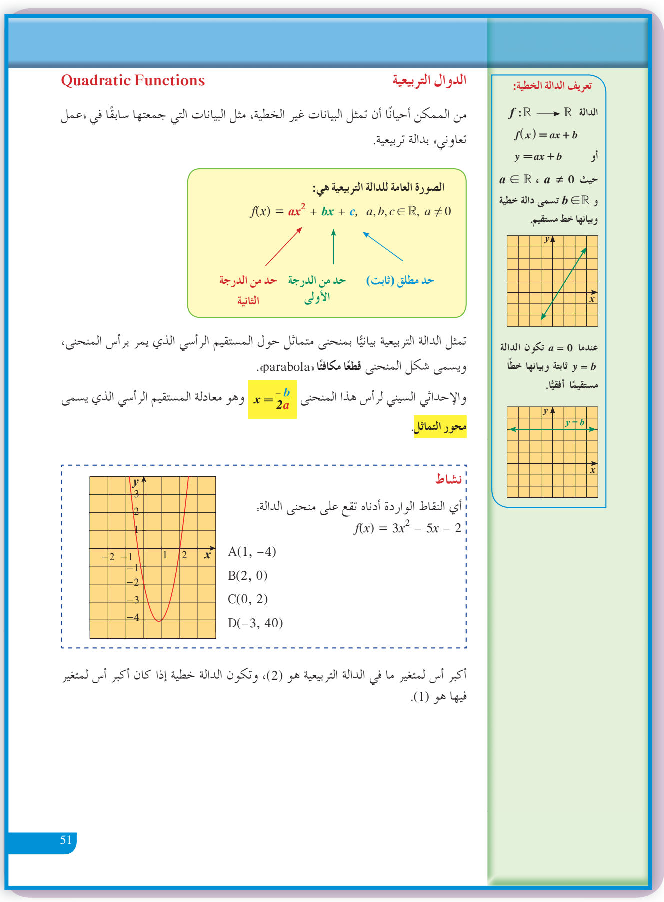
1 قس المسافة من «0» إلى كل علامة، ثم ارسم جدولًا مماثلًا للجدول أدناه ودوّن فيه بياناتك.

2 a مثل بياناتك على شبكة إحداثيات.
b أضف خطًا إلى رسمك يوضح نزعة البيانات. هل تبدو البيانات خطية؟

3 أي منحنى مما يلي يبدو أكثر ملاءمة لتمثيل بياناتك؟

الزمن بالثانية (s)	مستوى الماء بالميليلتر (ml)
0	
10	
20	
30	
40	
⋮	⋮

50



الدوال التربيعية Quadratic Functions

من الممكن أحيانًا أن تمثل البيانات غير الخطية، مثل البيانات التي جمعتها سابقًا في «عمل تعاوني» بدالة تربيعية.

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

حد من الدرجة الثانية – حد من الدرجة الأولى – حد مطلق (ثابت)

تمثل الدالة التربيعية بيانيًا بمنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحنى، ويسمى شكل المنحنى **قطعًا مكافئًا** «parabola».

والإحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $x=\frac{-b}{2a}$ وهو معادلة المستقيم الرأسي الذي يسمى **محور التماثل**.

نشاط

أي النقاط الواردة أدناه تقع على منحنى الدالة: $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

A(1, −4)
B(2, 0)
C(0, 2)
D(−3, 40)

أكبر أس لمتغير ما في الدالة التربيعية هو (2)، وتكون الدالة خطية إذا كان أكبر أس لمتغير فيها هو (1).

تعريف الدالة الخطية:

الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$
أو $y=ax+b$
حيث $a\in\mathbb{R}$ ، $a\neq 0$ و $b\in\mathbb{R}$ تسمى دالة خطية وبيانها خط مستقيم.

عندما $a=0$ تكون الدالة $y=b$ ثابتة وبيانها خطًا مستقيمًا أفقيًا.

51

5 التدريس

تعرف الطالب سابقًا بيانات كثيرة، ووجد أن تمثيلها البياني يكون إما خطًّا مستقيمًا ومعادلته من الدرجة الأولى: $y = ax + b$ وإما خطًّا منكسرًا ومعادلته من الدرجة الأولى، وتتضمن قيمة مطلقة على المتغير أو على التعبير بكامله.

ولكن يوجد بيانات كثيرة تكون نمذجتها بدوال من الدرجة الثانية أو الثالثة أو أكثر، وتمثل جميع قيم هذه البيانات.

في هذا الدرس، سوف يتعرف الطالب على بيانات يمكن نمذجتها بدوال تربيعية ومعادلتها:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

في المثال (2)

يتضمن الجدول قيمًا، والمطلوب نمذجة هذه البيانات بدالة تربيعية، لذا نختار 3 قيم لإيجاد الثوابت a , b , c في الدالة التربيعية. وهكذا نحصل على الدالة التربيعية.

أكّد للطلاب أنه يجب أن تكون بقية القيم على منحنى هذه الدالة أو أن تحقق المعادلة.

في نشاط إثرائي

يبيّن الجدول نتائج ممكنة لاختبار مشابه لاختبار فقرة «عمل تعاوني».

اطلب إلى الطلاب استخدام ورق رسم بياني لتعيين النقاط كلها في مستوى إحداثي، ثم رسم منحنى الدالة التي حصلنا عليها: $f(t) = 0.00625t^2 - 19.5t + 120$. سوف يتأكدون من أن بقية النقاط موجودة على المنحنى.

مثال (1)

حدّد ما إذا كانت الدالة: $f(x) = (3x - 4)(x + 2)$ خطية أم تربيعية.

الحل:

نكتب الدالة بالصورة العامة:

$f(x) = (3x - 4)(x + 2)$

التوزيع بالضرب $f(x) = 3x^2 + 6x - 4x - 8$

جمع الحدود المتشابهة $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$

∵ الدالة في الصورة العامة تتضمن الحد $3x^2$ (من الدرجة الثانية)

∴ هي دالة تربيعية.

حاول أن تحل

1 حدّد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية.

a $f(x) = 2x(x - 3)$

b $f(x) = (x - 2)(2x + 1)$

c $f(x) = (2x + 3)^2 - 4x^2 - 7x$

d $f(x) = 3(x^2 - 4x) - 3x^2 + 4$

نمذجة البيانات Modelling Data

تعلمت سابقًا كيفية كتابة نموذج خطي لبيانات، حيث يحدد الخط المستقيم نزعة معروفة للبيانات. ولكن يوجد بيانات لا يمكن نمذجتها خطيًّا وقد تكون الدالة التربيعية أفضل نمذجة لها.

مثال (2)

يبيّن الجدول التالي عدد القطع المستقيمة الواصلة بين نقطتين مختلفتين إذا كان لدينا x نقطة، شرط ألا تكون 3 نقاط منها على مستقيم واحد.

عدد النقاط (x)	2	3	4	5	6	7
عدد القطع المستقيمة (y)	1	3	6	10	15	21

a إذا كانت العلاقة بين x , y تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b أوجد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين 10 نقاط، وبين 20 نقطة.

الحل:

a الصورة العامة للدالة التربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c$

بالتعويض بالأزواج (6 ,4)، (3 ,3)، (1 ,2)، ينتج النظام التالي:

$$\begin{cases} 1 = 4a + 2b + c & (1) \\ 3 = 9a + 3b + c & (2) \\ 6 = 16a + 4b + c & (3) \end{cases}$$

إرشاد

الإجراءات اللازمة لحل 3 معادلات بـ 3 مجاهيل:

لحل ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل يمكن استخدام طريقة الحذف أو طريقة التعويض.

تقوم طريقة التعويض على عزل أحد المجاهيل في إحدى المعادلات والتعويض عن هذا المجهول بما يساويه في المعادلتين الباقيتين. وهكذا نحصل على نظام معادلتين بمجهولين يسهل حلّه.

أما طريقة الحذف فتقوم على استخدام العمليات الأربع على المعادلات بحيث يتم إلغاء أحد المجاهيل وينتج من ذلك نظام معادلتين بمجهولين.

52

نطرح 1 من 2 ثم نطرح 2 من 3 فينتج:

$$\begin{cases} 2 = 5a + b & (4) \\ 3 = 7a + b & (5) \end{cases}$$

نطرح 4 من 5 فينتج: $2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

نعوّض في 4 عن $a = \frac{1}{2}$: $2 = 5 \times \frac{1}{2} + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$

نعوّض في 1 عن $a = \frac{1}{2} , b = -\frac{1}{2}$:

$1 = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + c$

$1 = 2 - 1 + c$

$c = 0$

$\because \; a = \frac{1}{2} , \; b = -\frac{1}{2} , \; c = 0$

∴ الدالة التربيعية هي: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

b عدد القطع المستقيمة التي تصل بين (10) نقاط هي $f(10)$:

$f(10) = \frac{1}{2}(10)^2 - \frac{1}{2}(10)$

$f(10) = 50 - 5 = 45$

أي يوجد 45 قطعة مستقيمة تربط بين 10 نقاط اثنتين اثنتين.

وبالمثل $f(20)$:

$f(20) = \frac{1}{2}(20)^2 - \frac{1}{2}(20)$

$f(20) = 200 - 10 = 190$

أي يوجد 190 قطعة مستقيمة تربط بين 20 نقطة اثنتين اثنتين.

حاول أن تحل

2 يبيّن الجدول التالي عدد الأقطار في المضلعات بحسب عدد أضلاعها.

عدد الأضلاع (x)	4	5	6	7
عدد الأقطار (y)	2	5	9	14

a إذا كانت العلاقة بين x, y تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b مستخدمًا العلاقة في a، أوجد عدد أقطار المضلع إذا كان عدد أضلاعه 10 وإذا كان عدد أضلاعه 15 .

53

6 الربط

يحقق كل من النشاطين الإثرائيين ص 54 وص 55 في كتاب الطالب الربط بين بيانات من الحياة الواقعية وكيفية نمذجتها إلى دوال تربيعية تساعد على إيجاد توقعات.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة الإحداثي السيني لرأس المنحنى.

أكّد على حفظ $x = \dfrac{-b}{2a}$.

أشر إلى أن المستقيم الرأسي الذي معادلته $x = \dfrac{-b}{2a}$ هو محور تماثل لبيان الدالة التربيعية.

8 التقييم

تابع الطلاب باهتمام وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل»، لأنها سوف تعطيك فكرة واضحة عن تفاعل الطلاب مع مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

نشاط إثرائي (تطبيقات حياتية)

يبيّن الجدول التالي بيانات اختبار مشابه للاختبار السابق في فقرة «عمل تعاوني»، حيث t تمثل المدة الزمنية بالثواني (s)، y تمثل مستوى المياه بالميليلتر (ml).

t	4	8	12	16	20	24	28	32
y	112.3	104.8	97.5	90.4	83.5	76.8	70.3	64

a أوجد دالة تربيعية تنمذج هذه البيانات.

b استخدم الدالة أعلاه لإيجاد مستوى المياه بعد مرور 36 s.

الحل:

a لتكن الدالة التربيعية: $f(t) = at^2 + bt + c \ , \quad y = f(t)$

نختار من الجدول 3 أزواج تحقق الدالة.

الزوج (4, 112.3) $112.3 = a \times (4)^2 + b(4) + c$

الزوج (12, 97.5) $97.5 = a(12)^2 + b(12) + c$

الزوج (20, 83.5) $83.5 = a(20)^2 + b(20) + c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 112.3 \\ 144a + 12b + c = 97.5 \\ 400a + 20b + c = 83.5 \end{cases}$$

باستخدام آلة حاسبة علمية ينتج: $a = \frac{1}{160} = 0.00625 \quad b = -\frac{39}{20} = -1.95 \quad c = 120$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{160}t^2 - \frac{39}{20}t + 120$$

أو

$$f(t) = 0.00625t^2 - 1.95t + 120$$

لاحظ أن النقطة (8 , 104.8) تحقق المعادلة حيث

$$f(8) = \frac{1}{160}(8)^2 - 1.95(8) + 120 = 104.8 \checkmark$$

بالمثل يمكن إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

b نوجد:

$$f(36) = \frac{1}{160}(36)^2 - \frac{39}{20}(36) + 120$$
$$= 8.1 - 70.2 + 120$$
$$= 57.9$$

أي يصبح مستوى المياه حوالى 58cm

الربط بالتكنولوجيا

خطوات الحل المستخدمة لحل ثلاث معادلات بالحاسبة.

اضغط المفتاح Mode

يظهر على الشاشة 8 خيارات لبرامج مستخدمة

اختر البرنامج: 5: EQN

فيظهر على الشاشة 4 صيغ لمعادلات.

اختر الصيغة:

$2: a_nx + b_ny + c_nz = d_n$

فيظهر على الشاشة المصفوفة:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} a\square & b\square & c\square & d\square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

اكتب كلًّا من المعادلات الثلاث على الشكل التالي:

$ax + by + cz = d$

املأ المربعات في السطر الأول بمعامل x يليه = ثم معامل y يليه = ثم معامل z يليه = ثم قيمة d يليه = .

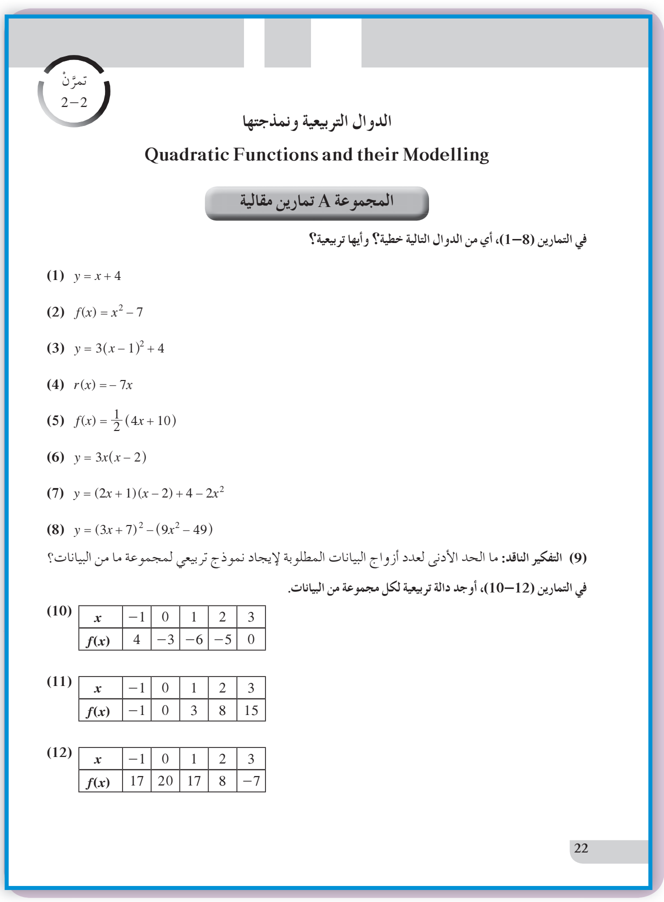
كرر العملية في السطرين الثاني والثالث.

اضغط الآن على المفتاح = تظهر قيمة x (المجهول الأول)

اضغط ثانية على المفتاح = تظهر قيمة y (المجهول الثاني)

اضغط ثالثة على المفتاح = تظهر قيمة z (المجهول الثالث)

54



تمرَّنْ 2-2

الدوال التربيعية ونمذجتها

Quadratic Functions and their Modelling

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، أي من الدوال التالية خطية؟ وأيها تربيعية؟

(1) $y = x + 4$

(2) $f(x) = x^2 - 7$

(3) $y = 3(x-1)^2 + 4$

(4) $r(x) = -7x$

(5) $f(x) = \frac{1}{2}(4x + 10)$

(6) $y = 3x(x-2)$

(7) $y = (2x+1)(x-2) + 4 - 2x^2$

(8) $y = (3x+7)^2 - (9x^2 - 49)$

(9) **التفكير الناقد:** ما الحد الأدنى لعدد أزواج البيانات المطلوبة لإيجاد نموذج تربيعي لمجموعة ما من البيانات؟

في التمارين (12–10)، أوجد دالة تربيعية لكل مجموعة من البيانات.

(10)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	4	−3	−6	−5	0

(11)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−1	0	3	8	15

(12)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	17	20	17	8	−7

22

اختبار سريع

أي من هذه الدوال التالية تنمذج النقاط في الجدول التالي: (c)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-10	-7	0	11

(a) $f(x) = x^2 - 11$

(b) $f(x) = x^2 + 2x - 7$

(c) $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$

(d) $f(x) = 2x^2 + 5x + 7$

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 – 3 تحقق من عمل الطلاب.

«نشاط»

$A(1,-4); B(2,0), D(-3,40)$

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $f(x) = 2x^2 - 6x$ (تربيعية)

(b) $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ (تربيعية)

(c) $f(x) = 5x + 9$ (خطية)

(d) $f(x) = -12x + 4$ (خطية)

نشاط إثرائي (الصلة بالواقع)

يقف أحد السباحين على منصة يبلغ ارتفاعها 3 m عن مستوى سطح المياه. يقفز إلى أعلى ثم يسقط في المياه. يبيّن الجدول التالي ارتفاعه y بالأمتار (m)، ابتعاده الأفقي عن المنصة x بالأمتار (m).

x	0.6	1	1.2	1.3	1.6	2	2.6	3
y	4.44	4.92	5.016	5.028	4.92	4.44	3	1.56

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذج العلاقة بين x , y ثم تحقق.

الحل:

لتكن الدالة التربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad y = f(x)$

يتضمن الجدول 8 أزواج مرتبة (x,y) أي أن القطع المكافئ يجب أن يمر بهذه النقاط. نختار 3 أزواج لنجد الثوابت (a, b, c)

الزوج $(0.6, 4.44)$ $4.44 = a(0.6)^2 + b(0.6) + c$

الزوج $(1, 4.92)$ $4.92 = a(1)^2 + b(1) + c$

الزوج $(1.2, 5.016)$ $5.016 = a(1.2)^2 + b(1.2) + c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$\begin{cases} 0.36a + 0.6b + c = 4.44 \\ a + b + c = 4.92 \\ 1.44a + 1.2b + c = 5.016 \end{cases}$$

نستخدم آلة حاسبة لحل النظام فنحصل على: $a = -1.2, \quad b = 3.12, \quad c = 3$

$f(x) = -1.2x^2 + 3.12x + 3$

للتحقق، نعوّض عن $(x , f(x))$ ببقية أزواج قيم الجدول.

مثلًا: نعوّض بالزوج: $(1.3, 5.028)$:

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2(1.3)2 + 3.12(1.3) + 3$$
$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2 \times 1.69 + 3.12 \times 1.3 + 3$$
$$5.028 \stackrel{\checkmark}{=} 5.028$$

$\therefore$ $(1.3, 5.028)$ يحقق المعادلة.

بالمثل يمكنك إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

تدريب إثرائي

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذجها ثم تحقق من بقية الأزواج في الجدول.

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	3	4
y	10	6.25	3	0.25	−2	−3.75	−5	−6	−5

55

2 **(a)** $y = ax^2 + bx + c$

$2 = a(4)^2 + b(4) + c$

$9 = a(6)^2 + b(6) + c$

$5 = a(5)^2 + b(5) + c$

نحصل على: $a = \frac{1}{2}\ ,\ c = 0\ ,b = \frac{-3}{2}$

فتكون: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

(b) إذا كان عدد الأضلاع 10، فيكون عدد الأقطار 35 إذا كان عدد الأضلاع 15، فيكون عدد الأقطار 90.

«تدريب إثرائي»

$y = x^2 - 6x + 3$

تحقق من بقية قيم x في الجدول:

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 - 6(-1) + 3 = 10$

$x = -0.5 \Rightarrow y = (-0.5)^2 - 6(-0.5) + 3 = 6.25$

$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 - 6(0) + 3 = 3$

$x = 0.5 \Rightarrow y = (0.5)^2 - 6(0.5) + 3 = 0.25$

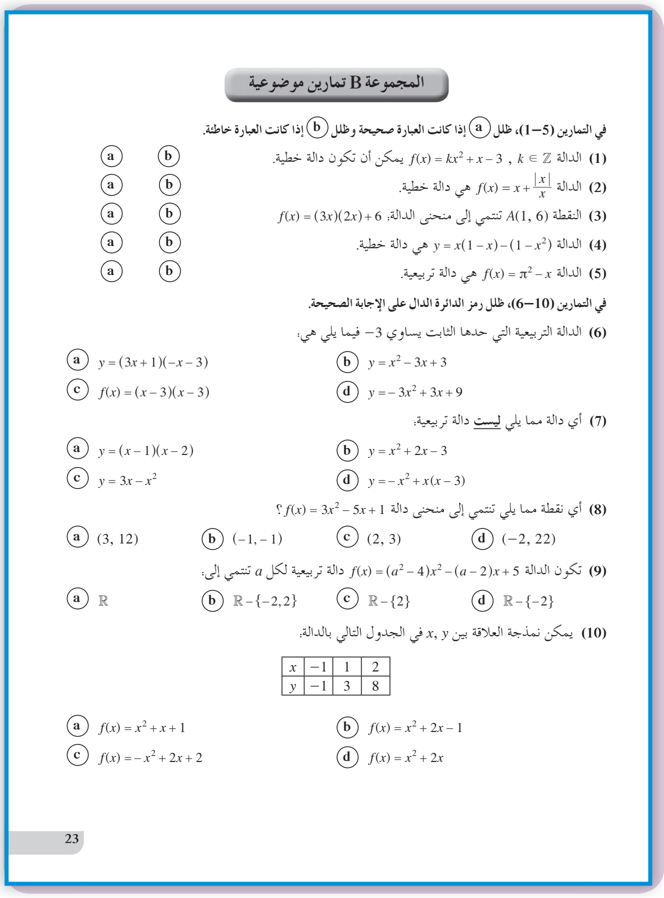
$x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 - 6(1) + 3 = -2$

$x = 1.5 \Rightarrow y = (1.5)^2 - 6(1.5) + 3 = -3.75$

$x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 6(2) + 3 = -5$

$x = 3 \Rightarrow y = (3)^2 - 6(3) + 3 = -6$

$x = 4 \Rightarrow y = (4)^2 - 6(4) + 3 = -5$



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $f(x) = kx^2 + x - 3\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ يمكن أن تكون دالة خطية. (a) (b)

(2) الدالة $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ هي دالة خطية. (a) (b)

(3) النقطة $A(1, 6)$ تنتمي إلى منحنى الدالة: $f(x) = (3x)(2x) + 6$ (a) (b)

(4) الدالة $y = x(1 - x) - (1 - x^2)$ هي دالة خطية. (a) (b)

(5) الدالة $f(x) = \pi^2 - x$ هي دالة تربيعية. (a) (b)

في التمارين (6—10)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) الدالة التربيعية التي حدها الثابت يساوي -3 فيما يلي هي:

(a) $y = (3x + 1)(-x - 3)$ (b) $y = x^2 - 3x + 3$

(c) $f(x) = (x - 3)(x - 3)$ (d) $y = -3x^2 + 3x + 9$

(7) أي دالة مما يلي ليست دالة تربيعية:

(a) $y = (x - 1)(x - 2)$ (b) $y = x^2 + 2x - 3$

(c) $y = 3x - x^2$ (d) $y = -x^2 + x(x - 3)$

(8) أي نقطة مما يلي تنتمي إلى منحنى دالة $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ ؟

(a) $(3, 12)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(2, 3)$ (d) $(-2, 22)$

(9) تكون الدالة $f(x) = (a^2 - 4)x^2 - (a - 2)x + 5$ دالة تربيعية لكل a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ (c) $\mathbb{R} - \{2\}$ (d) $\mathbb{R} - \{-2\}$

(10) يمكن نمذجة العلاقة بين x, y في الجدول التالي بالدالة:

x	-1	1	2
y	-1	3	8

(a) $f(x) = x^2 + x + 1$ (b) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

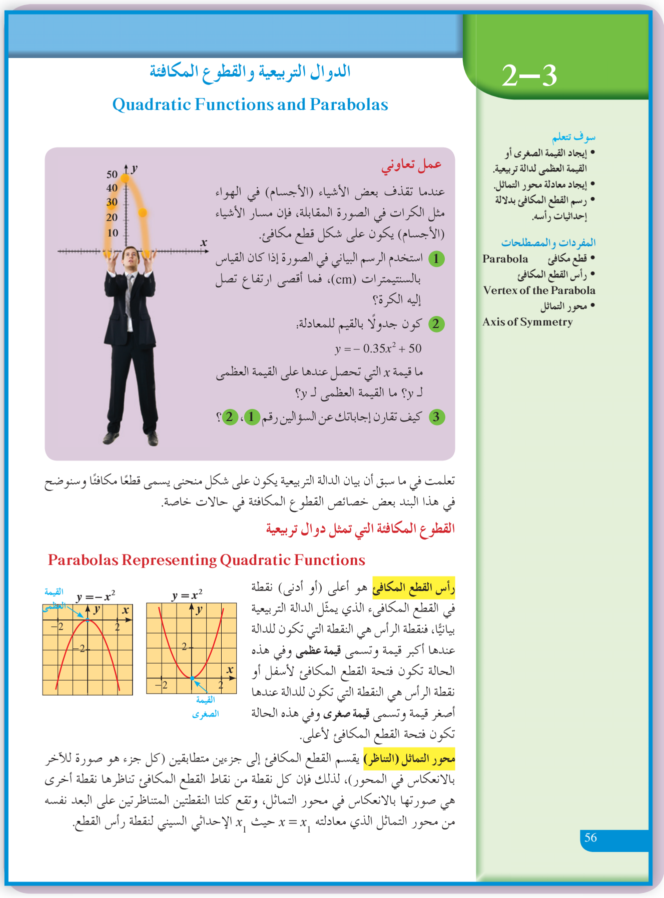
(c) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ (d) $f(x) = x^2 + 2x$

23

2–3: الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

1 الأهداف

- يوجد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة تربيعية.
- يوجد معادلة محور التماثل.
- يرسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.



2–3

سوف تتعلم
- إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة تربيعية.
- إيجاد معادلة محور التماثل.
- رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

المفردات والمصطلحات
- قطع مكافئ Parabola
- رأس القطع المكافئ Vertex of the Parabola
- محور التماثل Axis of Symmetry

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

Quadratic Functions and Parabolas

عمل تعاوني

عندما تقذف بعض الأشياء (الأجسام) في الهواء مثل الكرات في الصورة المقابلة، فإن مسار الأشياء (الأجسام) يكون على شكل قطع مكافئ.

1 استخدم الرسم البياني في الصورة إذا كان القياس بالسنتيمترات (cm)، فما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

2 كون جدولًا بالقيم للمعادلة:

$y = -0.35x^2 + 50$

ما قيمة x التي تحصل عندها على القيمة العظمى لـ y؟ ما القيمة العظمى لـ y؟

3 كيف تقارن إجاباتك عن السؤالين رقم 1، 2؟

تعلمت في ما سبق أن بيان الدالة التربيعية يكون على شكل منحنى يسمى قطعًا مكافئًا وسنوضح في هذا البند بعض خصائص القطوع المكافئة في حالات خاصة.

القطوع المكافئة التي تمثل دوال تربيعية

Parabolas Representing Quadratic Functions

رأس القطع المكافئ هو أعلى (أو أدنى) نقطة في القطع المكافىء الذي يمثّل الدالة التربيعية بيانيًّا، فنقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أكبر قيمة وتسمى **قيمة عظمى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأسفل أو نقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أصغر قيمة وتسمى **قيمة صغرى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأعلى.

$y = -x^2$ القيمة العظمى — $y = x^2$ القيمة الصغرى

محور التماثل (التناظر) يقسم القطع المكافئ إلى جزءين متطابقين (كل جزء هو صورة للآخر بالانعكاس في المحور)، لذلك فإن كل نقطة من نقاط القطع المكافئ تناظرها نقطة أخرى هي صورتها بالانعكاس في محور التماثل، وتقع كلتا النقطتين المتناظرتين على البعد نفسه من محور التماثل الذي معادلته $x = x_1$ حيث x_1 الإحداثي السيني لنقطة رأس القطع.

56

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قطع مكافئ – رأس القطع المكافئ – محور التماثل.

3 الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب .

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

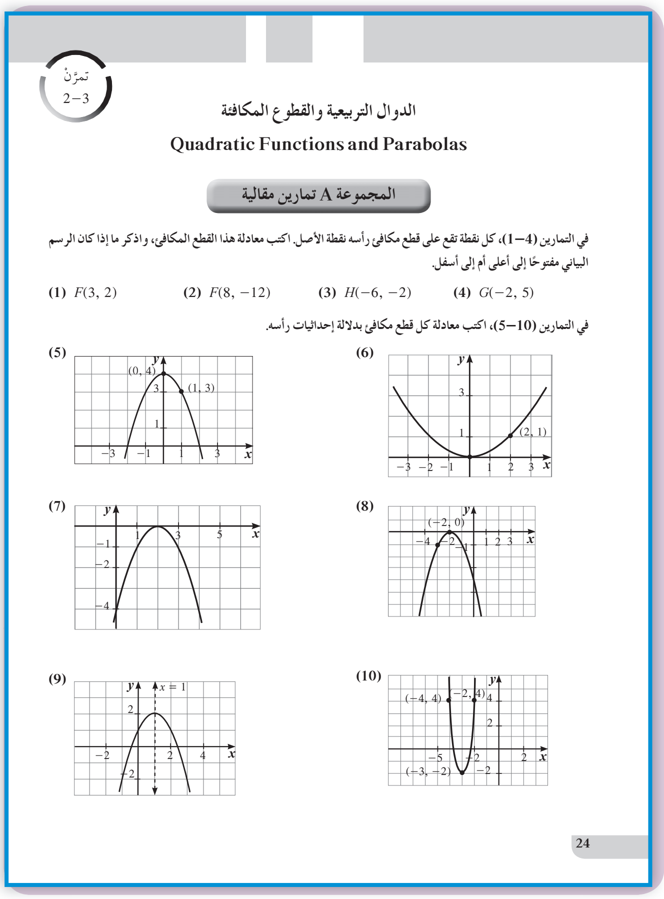
(a) اكتب التعبير $(2x - 5)^2$ على صورة: $ax^2 + bx + c$.

(b) اكتب التعبير $(3x + 2)^2$ على صورة: $ax^2 + bx + c$.

(c) اكتب التعبير $x^2 + 10x + 25$ في صورة مربع كامل.

(d) اكتب التعبير $4x^2 - 12x + 9$ في صورة مربع كامل.

(e) اكتب التعبير $2x^2 + 9x + 4$ في صورة مربع كامل مع قيمة ثابتة.



تمرَّنْ 2–3

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

Quadratic Functions and Parabolas

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، كل نقطة تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة هذا القطع المكافئ، واذكر ما إذا كان الرسم البياني مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

(1) $F(3, 2)$ (2) $F(8, -12)$ (3) $H(-6, -2)$ (4) $G(-2, 5)$

في التمارين (10–5)، اكتب معادلة كل قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

(5) (6) (7) (8) (9) (10)

24

5 التدريس

تعرفت على الدالة التربيعية ورسمها البياني بأنه قطع مكافئ. والآن سوف تتعرف على خواص القطع المكافئ بصورة إحداثيات الرأس وخط التماثل ومتى يكون مفتوحًا إلى الأعلى أو إلى الأسفل وكيفية استخدام الإزاحة لإيجاد معادلة قطع مكافئ إذا تمت إزاحته.

وأخيرًا كيف نستخدم خاصية القيمة الصغرى أو القيمة العظمى في مواقف حياتية.

في نشاط (1)

ناقش مع الطلاب الفقرتين (a), (b) واستمع جيّدًا إلى ملاحظاتهم وأسئلتهم، وتأكد من أنهم قد وجدوا بشكل صحيح إحداثيات النقاط المناظرة للنقاط المعطاة على القطع المكافئ وأنهم قد تفهموا جيّدًا الدور الذي يمثله محور التماثل في القطع المكافئ.

في المثال (2)

أكّد للطلاب أن خطوط التوتر العالي والتي تستند على الأعمدة تأخذ دائمًا شكل قطع مكافئ مفتوحًا إلى الأعلى لأسباب تتعلق بدرجة الحرارة.

شجعهم على القيام ببحث أو التواصل مع معلم مادة الفيزياء حول هذا الموضوع.

في المثال (3)

ركّز على إزاحة القطوع المكافئة والربط بين المعادلة: $y = ax^2$، والمعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$، حيث إن رأس القطع المكافئ سوف يتحول من نقطة الأصل $(0, 0)$ إلى نقطة (h, k) دون أن يتغير شكله أو فتحته.

في المثالين (4), (5)

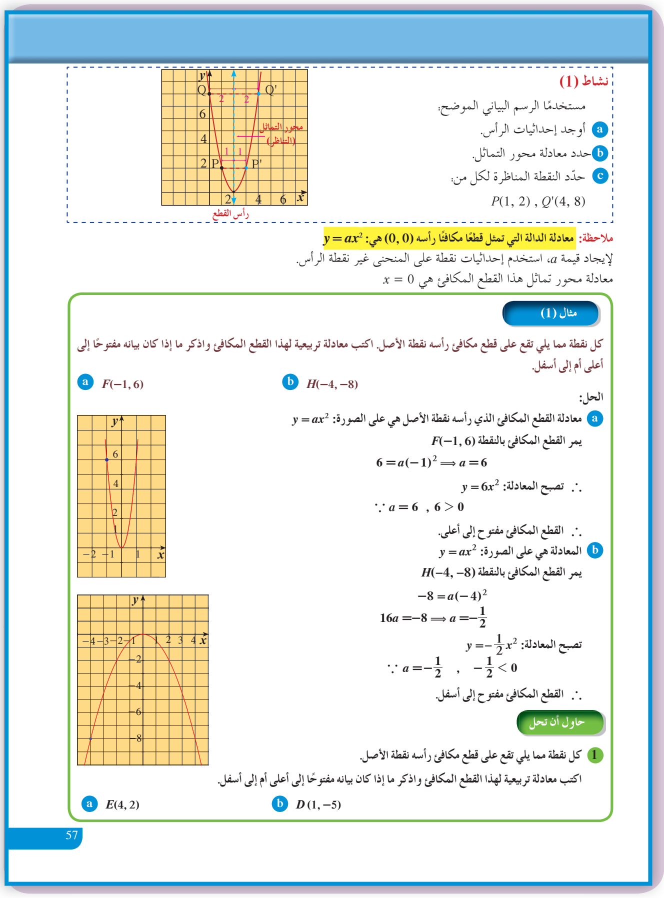
أعط أمثلة بديلة، واطلب إلى متطوعين رسم قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأسه، ومحور التماثل وكيفية استخدامه.

في المثال (6)

وضّح للطلاب كيفية استخدام نموذج الدالة التربيعية التي تمثل قطعًا مكافئًا في موقف قد يشاهدونه في ملاعب كرة المضرب.

في المثال (7)

تطبيق القيمة العظمى في القطع المكافئ على الأرباح في مجال التسويق. وسوف يرى الطلاب لاحقًا أمثلة كثيرة تستخدم فيها القيمة العظمى أو القيمة الصغرى في مجالات إنتاجية وصناعية متعددة.


نشاط (1)

مستخدمًا الرسم البياني الموضح:

a أوجد إحداثيات الرأس.

b حدد معادلة محور التماثل.

c حدّد النقطة المناظرة لكل من: $P(1, 2)$, $Q'(4, 8)$

ملاحظة: معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0, 0)$ هي: $y = ax^2$

لإيجاد قيمة a، استخدم إحداثيات نقطة على المنحنى غير نقطة الرأس.

معادلة محور تماثل هذا القطع المكافئ هي $x = 0$

مثال (1)

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $F(-1, 6)$ b $H(-4, -8)$

الحل:

a معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل هي على الصورة: $y = ax^2$

يمر القطع المكافئ بالنقطة $F(-1, 6)$

$6 = a(-1)^2 \Longrightarrow a = 6$

$\therefore$ تصبح المعادلة: $y = 6x^2$

$\because a = 6 \ , \ 6 > 0$

$\therefore$ القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.

b المعادلة هي على الصورة: $y = ax^2$

يمر القطع المكافئ بالنقطة $H(-4, -8)$

$-8 = a(-4)^2$

$16a = -8 \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}$

تصبح المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x^2$

$\because a = -\frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{2} < 0$

$\therefore$ القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل.

حاول أن تحل

1 كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $E(4, 2)$ b $D(1, -5)$

57


في التمارين (18–11)، ارسم منحنى كل دالة من الدوال التالية:

(11) $y = (x+3)^2$ (12) $y = (x-2)^2$ (13) $y = -(x+1)^2$

(14) $y = -x^2 + 3$ (15) $y = (x+4)^2 + 1$ (16) $y = 3(x-2)^2 + 4$

(17) $y = -4(x+3)^2$ (18) $y = -2(x+1)^2 - 4$

(19) الكتابة: صف الخطوات التي سوف تستخدمها لرسم الدالة: $y = -2(x-3)^2 + 4$ بيانيًّا.

(20) السؤال المفتوح: اكتب معادلة لدالة يمثلها بيانيًّا قطع مكافئ له محور التماثل التالي: $x = -2$

في التمارين (25–21)، ارسم كل قطع مكافئ مستخدمًا المعلومات المعطاة. ثم اكتب معادلته بدلالة إحداثيات الرأس.

(21) الرأس $V(0, 0)$ ويمر بالنقطة $P(2, 10)$

(22) الرأس $V(0, 0)$ ويمر بالنقطة $P(-2, -10)$

(23) الرأس $V(0, 5)$ ويمر بالنقطة $P(1, -2)$

(24) الرأس $V(3, 1)$ والجزء المقطوع من محور الصادات -2

(25) الرأس $V(-2, 6)$ والجزء المقطوع من محور السينات 2

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلل a إذا كانت العبارة صحيحة وظلل b إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة $y = 2x^2 - 2(3-x)^2$ تمثل معادلة قطع مكافئ. a b

(2) القطع المكافئ $y = -\frac{1}{3}(x+2)^2 - 3$ فتحته إلى الأعلى. a b

(3) المعادلة $y = 2(x-1)^2 + 2$ يكون بيانها أكثر اتساعًا من بيان الدالة $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ a b

(4) توجد عند رأس منحنى الدالة $y = -(x-3)^2 - 2$ قيمة عظمى. a b

(5) منحنى القطع المكافئ $y = (-x+2)^2 + 3$ يمر بالنقطة $P(2, 3)$ a b

في التمارين (11–6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) الدالة $y = a(3-x)^2 - 2$ يكون رسمها أوسع من رسم بيان الدالة $y = -2x^2$ إذا كان:

a $|a| = 2$ b $|a| > 2$ c $a < 2$ d $|a| < 2$

(7) معادلة القطع المكافئ $y = 2x^2$ الذي تم إزاحة رأسه وحدتين يسارًا و4 وحدات لأعلى هي:

a $y = (2x+2)^2 + 4$ b $y = 2(x-2)^2 + 4$

c $y = 2(x+2)^2 + 4$ d $y = 2(x+2)^2 - 4$

25

6 الربط

الأمثلة (7), (6), (2) تحقق الربط بين القطع المكافئ واستخداماته في مجالات متعددة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة إحداثيات رأس القطع المكافئ من المعادلة: $y = a(x-h)^2 + k$

ساعدهم على المقارنة بأمثلة متعددة. مثال ذلك:

$y = 2(x+3)^2 - 4 \ , \ h = -3 \ , \ k = -4$

وبالتالي إحداثيات الرأس هي $(-3 \ , -4)$

8 التقييم

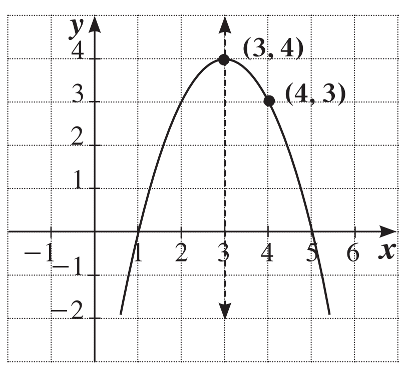
راقب الطلاب وهم يجيبون عن أسئلة فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من سلامة أدائهم وفهمهم لما ورد في الدرس.

اختبار سريع

1. أوجد معادلة قطع مكافئ إحداثيات رأسه $(-3 \ , 4)$ ويمر بالنقطة $(-2 \ , 1)$

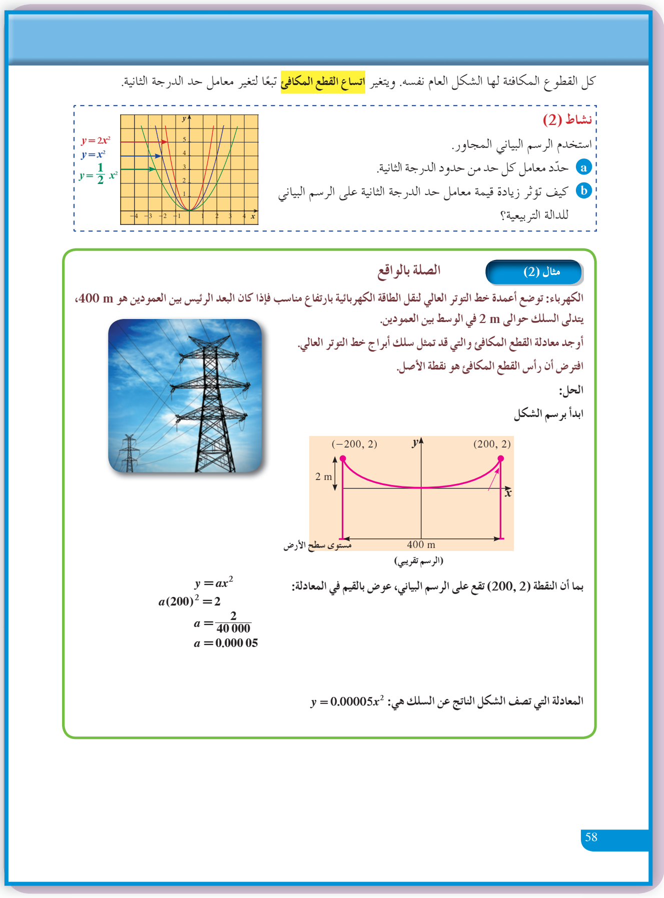
$f(x) = -3(x+3)^2 + 4$

2. مستخدمًا الرسم التالي، اكتب معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات الرأس ثم بالصورة العامة.



بدلالة إحداثيات الرأس: $f(x) = -(x-3)^2 + 4$

بالصورة العامة: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



كل القطوع المكافئة لها الشكل العام نفسه. ويتغير **اتساع القطع المكافئ** تبعًا لتغير معامل حد الدرجة الثانية.

نشاط (2)

استخدم الرسم البياني المجاور.

a حدّد معامل كل حد من حدود الدرجة الثانية.

b كيف تؤثر زيادة قيمة معامل حد الدرجة الثانية على الرسم البياني للدالة التربيعية؟

$y = 2x^2$ ، $y = x^2$ ، $y = \frac{1}{2}x^2$

مثال (2) **الصلة بالواقع**

الكهرباء: توضع أعمدة خط التوتر العالي لنقل الطاقة الكهربائية بارتفاع مناسب فإذا كان البعد الرئيس بين العمودين هو 400 m، يتدلى السلك حوالى 2 m في الوسط بين العمودين.

أوجد معادلة القطع المكافئ والتي قد تمثل سلك أبراج خط التوتر العالي.

افترض أن رأس القطع المكافئ هو نقطة الأصل.

الحل:

ابدأ برسم الشكل

(−200, 2) (200, 2) 2 m 400 m مستوى سطح الأرض

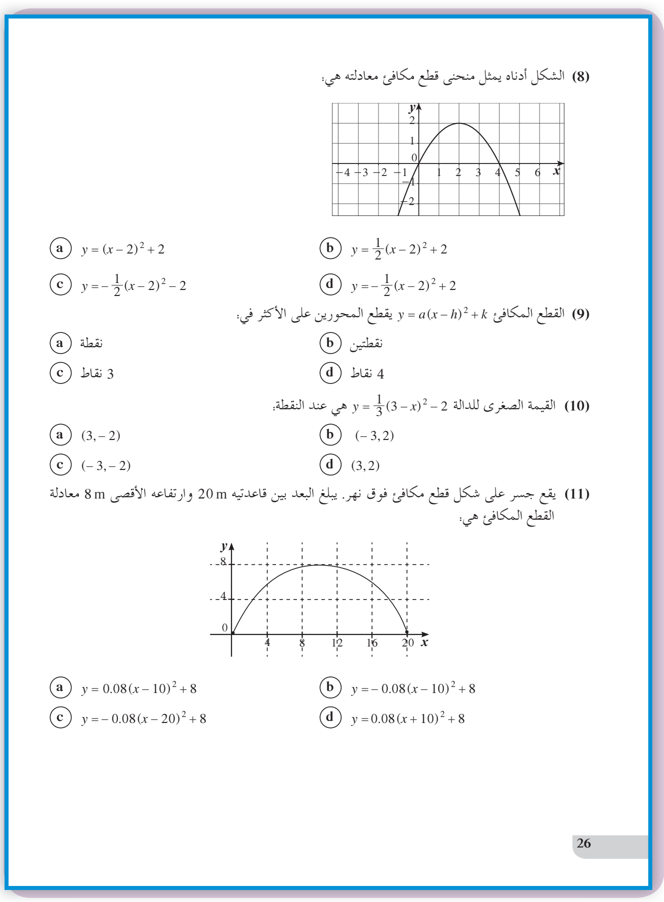
(الرسم تقريبي)

بما أن النقطة (200, 2) تقع على الرسم البياني، عوض بالقيم في المعادلة:

$$y = ax^2$$
$$a(200)^2 = 2$$
$$a = \frac{2}{40\,000}$$
$$a = 0.000\,05$$

المعادلة التي تصف الشكل الناتج عن السلك هي: $y = 0.00005x^2$

58



(8) الشكل أدناه يمثل منحنى قطع مكافئ معادلته هي:

a $y = (x-2)^2 + 2$

b $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

c $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

d $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

(9) القطع المكافئ $y = a(x-h)^2 + k$ يقطع المحورين على الأكثر في:

a نقطة

b نقطتين

c 3 نقاط

d 4 نقاط

(10) القيمة الصغرى للدالة $y = \frac{1}{3}(3-x)^2 - 2$ هي عند النقطة:

a $(3, -2)$

b $(-3, 2)$

c $(-3, -2)$

d $(3, 2)$

(11) يقع جسر على شكل قطع مكافئ فوق نهر. يبلغ البعد بين قاعدتيه 20 m وارتفاعه الأقصى 8 m معادلة القطع المكافئ هي:

a $y = 0.08(x-10)^2 + 8$

b $y = -0.08(x-10)^2 + 8$

c $y = -0.08(x-20)^2 + 8$

d $y = 0.08(x+10)^2 + 8$

26

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1. 50 cm
2. $y = -\ 0.35x^2 + 50$

x	0	2	4	5	6
y	50	48.6	44.4	41.25	37.4

أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة هو 50 cm عند $x = 0$.
نطابق النتائج عند النظر إلى الرسم وعند حساب أعلى قيمة لـ y، فنحصل على $y = 50$ كأعلى قيمة.

3. تتنوع الإجابات. مثال:
القيمة العظمى لـ y = الارتفاع الأقصى

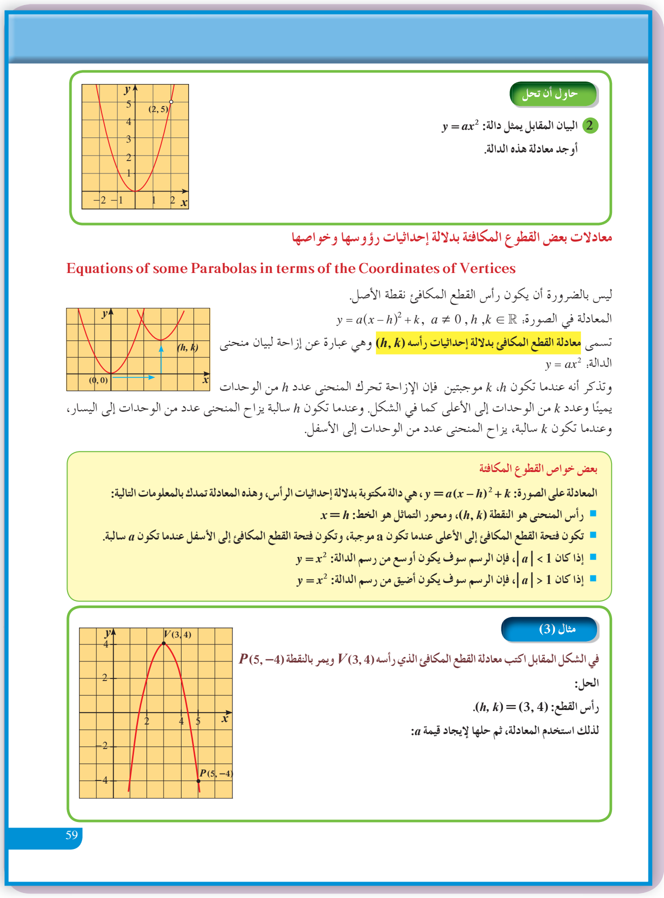
«نشاط (1)»

(a) $(2\ ,\ 0)$
(b) $x = 2$
(c) $P'(3,2)$
$Q(0,8)$

«حاول أن تحل»

1. رأس القطع المكافئ هو النقطة $(0\ ,\ 0)$
في المعادلة: $y = ax^2$
(a) يمر المنحنى في النقطة $E(4\ ,\ 2)$ نعوض:
$2 = a(4)^2$ فنحصل على $a = \frac{1}{8}$
والمعادلة: $y = \frac{1}{8}x^2$
والمنحنى مفتوح إلى الأعلى.
(b) $-5 = a(1)^2$، ومنه $a = -5$
والمعادلة: $y = -\ 5x^2$
والمنحنى مفتوح إلى الأسفل.

2. $y = ax^2$ المنحنى يمر بالنقطة $(2\ ,\ 5)$
$5 = a(2)^2\ ,\ a = \frac{5}{4}$
المعادلة: $y = \frac{5}{4}x^2$


حاول أن تحل
2 البيان المقابل يمثل دالة: $y = ax^2$
أوجد معادلة هذه الدالة.

معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها
Equations of some Parabolas in terms of the Coordinates of Vertices

ليس بالضرورة أن يكون رأس القطع المكافئ نقطة الأصل.
المعادلة في الصورة: $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0\ , h\ , k \in \mathbb{R}$
تسمى **معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k)** وهي عبارة عن إزاحة لبيان منحنى الدالة: $y = ax^2$
وتذكر أنه عندما تكون h، k موجبتين فإن الإزاحة تحرك المنحنى عدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى كما في الشكل. وعندما تكون h سالبة يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى اليسار، وعندما تكون k سالبة، يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى الأسفل.

بعض خواص القطوع المكافئة
المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:
- رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$
- تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.
- إذا كان $1 > |a|$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$
- إذا كان $1 < |a|$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$

مثال (3)
في الشكل المقابل اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3, 4)$ ويمر بالنقطة $P(5, -4)$
الحل:
رأس القطع: $(h, k) = (3, 4)$.
لذلك استخدم المعادلة، ثم حلها لإيجاد قيمة a:

59

3 رأس القطع المكافئ هو النقطة $(2, 4)$

فتكون المعادلة: $y = a(x-2)^2 + 4$

يمر المنحنى في النقطة $(0, 0)$

فيكون: $0 = a(0-2)^2 + 4$ ومنه $a = -1$

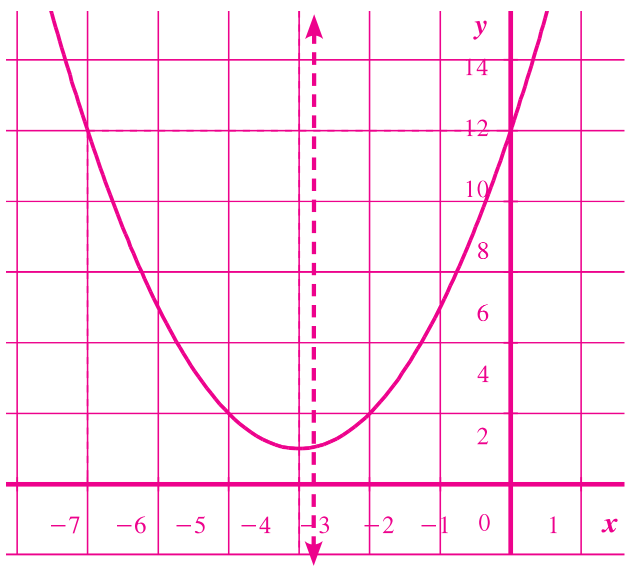
والمعادلة: $y = -(x-2)^2 + 4$

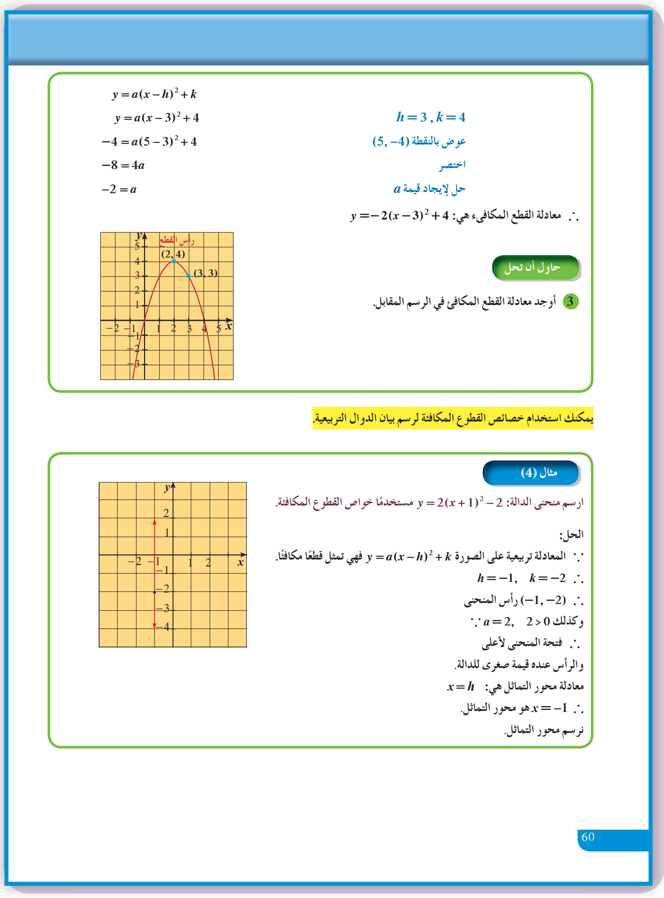
4 رأس المنحنى $(-3, 1)$

محور التماثل $x = -3$

إذا $x = 0$ تكون $y = 10$، إذا $x = -6$ تكون $y = 10$

النقطة $(0, 10)$ هي انعكاس للنقطة $(-6, 10)$ في محور التماثل: $x = -3$





$y = a(x-h)^2 + k$

$h = 3, k = 4$ $\quad y = a(x-3)^2 + 4$

عوض بالنقطة $(5, -4)$ $\quad -4 = a(5-3)^2 + 4$

اختصر $\quad -8 = 4a$

حل لإيجاد قيمة a $\quad -2 = a$

$\therefore$ معادلة القطع المكافيء هي: $y = -2(x-3)^2 + 4$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل.

يمكنك استخدام خصائص القطوع المكافئة لرسم بيان الدوال التربيعية.

مثال (4)

ارسم منحنى الدالة: $y = 2(x+1)^2 - 2$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

الحل:

$\because$ المعادلة تربيعية على الصورة $y = a(x-h)^2 + k$ فهي تمثل قطعًا مكافئًا.

$\therefore$ $h = -1, \quad k = -2$

$\therefore$ $(-1, -2)$ رأس المنحنى

وكذلك $\because a = 2, \quad 2 > 0$

$\therefore$ فتحة المنحنى لأعلى

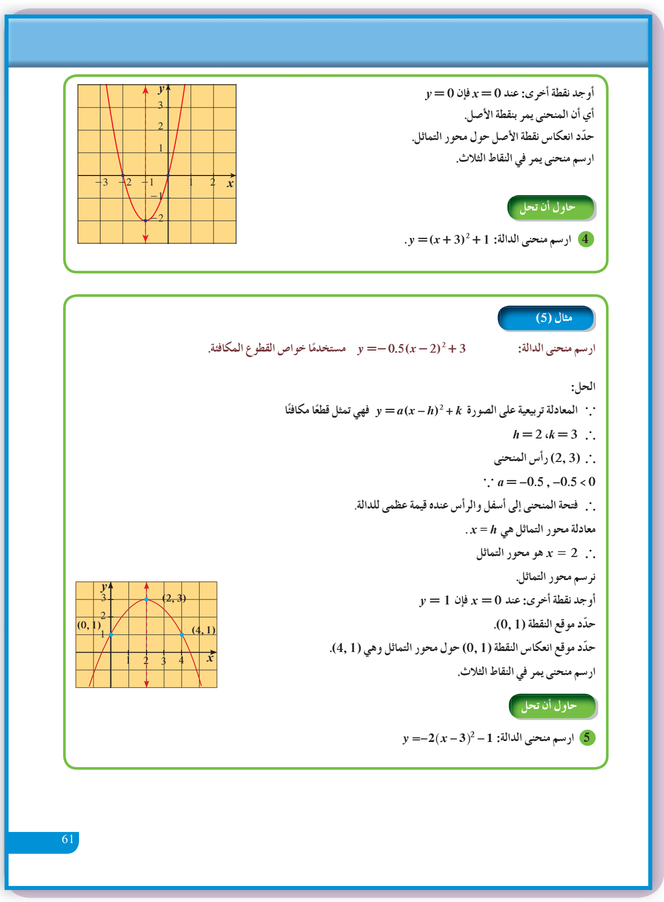
والرأس عنده قيمة صغرى للدالة.

معادلة محور التماثل هي: $x = h$

$\therefore$ $x = -1$ هو محور التماثل.

نرسم محور التماثل.

60



أوجد نقطة أخرى: عند $x = 0$ فإن $y = 0$

أي أن المنحنى يمر بنقطة الأصل.

حدّد انعكاس نقطة الأصل حول محور التماثل.

ارسم منحنى يمر في النقاط الثلاث.

حاول أن تحل

4 ارسم منحنى الدالة: $y = (x+3)^2 + 1$.

مثال (5)

ارسم منحنى الدالة: $y = -0.5(x-2)^2 + 3$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

الحل:

$\because$ المعادلة تربيعية على الصورة $y = a(x-h)^2 + k$ فهي تمثل قطعًا مكافئًا

$\therefore$ $h = 2$ ،$k = 3$

$\therefore$ $(2, 3)$ رأس المنحنى

$\because a = -0.5, -0.5 < 0$

$\therefore$ فتحة المنحنى إلى أسفل والرأس عنده قيمة عظمى للدالة.

معادلة محور التماثل هي $x = h$.

$\therefore$ $x = 2$ هو محور التماثل

نرسم محور التماثل.

أوجد نقطة أخرى: عند $x = 0$ فإن $y = 1$

حدّد موقع النقطة $(0, 1)$.

حدّد موقع انعكاس النقطة $(0, 1)$ حول محور التماثل وهي $(4, 1)$.

ارسم منحنى يمر في النقاط الثلاث.

حاول أن تحل

5 ارسم منحنى الدالة: $y = -2(x-3)^2 - 1$

61

مثال (6) تطبيقات حياتية

رميت كرة من فوق حاجز بارتفاع 150 cm عن سطح الملعب فاجتازت الكرة الحاجز الشبكي ثم سقطت على الأرض مبتعدة 300 cm عن قاعدة الحاجز.

استخدم الحاجز كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.

افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع الحاجز مع الأرض.

الحل:

يمكن نمذجة المسألة كما يبين الرسم، باعتباره قطع مكافئ.

معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات الرأس هي:

$y = a(x-h)^2 + k$

$\because$ إحداثيات الرأس: $(0, 150)$

$\therefore\ h = 0 , k = 150$

$y = a(x-0)^2 + 150 \ ,\ y = ax^2 + 150$

يمر البيان بالنقطة $(300, 0)$ فيكون:

$a(300)^2 + 150 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{600}$

معادلة مسار الكرة هي:

$y = -\frac{1}{600}x^2 + 150$

حاول أن تحل

6 في ملعب لكرة المضرب، رمى لاعب الكرة من فوق الشبكة بارتفاع 1 m عن سطح الملعب فاجتازت الكرة الشبكة ثم سقطت على الأرض مبتعدة 6 m عن قاعدتها.

افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع المستقيم الرأسي في منتصف الشبكة مع أرض الملعب.

استخدم المستقيم كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.

الربط بالحياة:

كرة المضرب (Tennis) هي إحدى النشاطات الرياضيّة الحائزة على عدد كبير من تشجيع الجماهير. حيث يتبارى فيها لاعبان في مباريات الفردي أو فريقان مكوّنان من لاعبين في مباريات الزوجي.

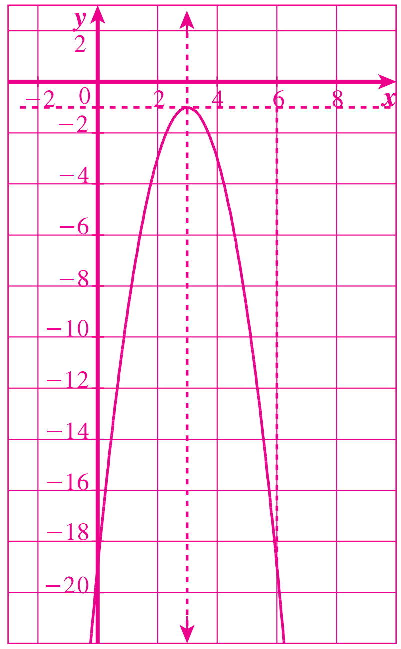
يستخدم كل لاعب مضرب يستخدمه في إرسال الكرة إلى منطقة الخصم بهدف تسجيل النقاط. وما يميز لعبة كرة المضرب عن غيرها من بقية الألعاب هو أنها تفيد أجزاء كثيرة من الجسم فضلًا عن التوافق بين الذهن وكافة عضلات الجسم.

62

5 رأس المنحنى $(3, -1)$، محور التماثل $x = 3$ إذا $x = 0$ فتكون $y = -19$ إذا $x = 6$ فتكون $y = 19$

وبالتالي النقطة $(0, -19)$ هي انعكاس للنقطة $(6, -19)$ في محور التماثل $x = 3$

الرسم البياني:



مثال (7)

تطبيقات حياتية

يبيع أحد المحلات عددًا أكبر من الفطائر عندما يخفض السعر، لكن ربحه يتغير. تنمذج أرباح هذا المحل (بالدينار) وفقًا للدالة التالية: $y = -100(x - 1.75)^2 + 300$ أرباح هذا المحل بالدينار، حيث x سعر الفطيرة بالدينار. يرغب صاحب المحل في تحقيق القيمة العظمى لربحه من المبيع.

a صف المجال الواقعي للدالة.

b أوجد أرباحه اليومية إذا باع الفطيرة الواحدة، بـ 2 دينار. وإذا باع الفطيرة الواحدة بـ 1.25 دينار.

c ما السعر الذي يجب أن يبيع به الفطيرة الواحدة ليحقق الربح الأكبر؟ وما قيمة هذا الربح؟

الحل:

a حيث إن x تمثل سعر الفطيرة يجب أن تكون $x > 0$.

b في المعادلة: $y = -100(x - 1.75)^2 + 300$

عند $x = 2$

$y = -100(2 - 1.75)^2 + 300$

$y = 293.75$

أي يكون ربحه 293.75 دينارًا.

عند $x = 1.25$

$y = -100(1.25 - 1.75)^2 + 300$

$y = 275$

أي يكون ربحه 275 دينارًا.

c تمثل الدالة قطعًا مكافئًا له قيمة عظمى لأن $-100 < 0$، وبالتالي إحداثيات رأسه $(1.75, 300)$، حيث إن 1.75 دينار هو السعر الذي يحقق الربح الأكبر وقيمة هذا الربح الأكبر هي 300 دينار.

حاول أن تحل

7 في المثال (7) أوجد سعر مبيع الفطيرة الواحدة إذا لم يربح ولم يخسر في أحد الأيام.

63

6 الرأس $(0, 1)$

$y = a(x-h)^2 + k$

$y = a(x-0) + 1$

$y = ax^2 + 1$

يمر المنحنى بالنقطة $(6, 0)$ فيكون: $0 = 36a + 1$

أي $a = -\frac{1}{36}$ والمعادلة: $y = -\frac{1}{36}x^2 + 1$

7 في الدالة: $y = -100(x - 1.75)^2 + 300$

إذا لم يكن هناك لا ربح ولا خسارة فتكون $y = 0$

ومنه: $-100(x - 1.75)^2 + 300 = 0$

دنانير $x = 3.48$ أو دينار $x = 0.018$

«نشاط (2)»

(a) $2 , 1 , \frac{1}{2}$

(b) كلما صغر مُعامل حد الدرجة الثانية توسعت فتحة بيان الدالة التربيعية.

2–4: مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

1 الأهداف

- يوجد رأس منحنى الدالة من الدالة التربيعية بالصورة العامة.
- يكتب المعادلات بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

رأس القطع المكافئ – الصورة العامة.

3 الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

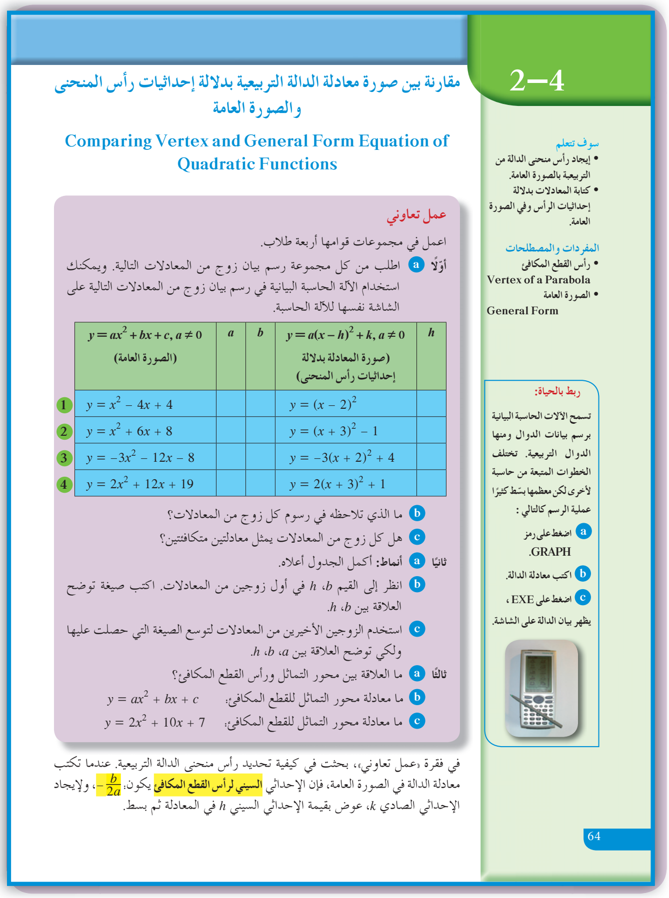
(a) أوجد إحداثيات رأس القطع المكافئ ومحور التماثل في: $y=(x+2)^2-3$.

(b) أوجد إحداثيات رأس القطع المكافئ ومحور التماثل في: $y=3x^2+4$.

(c) أوجد إحداثيات انعكاس النقطة $(-3,3)$ في محور تماثل القطع المكافئ حيث معادلته: $y=2(x-2)^2-5$.

5 التدريس

يقدم هذا الدرس مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة وكيفية التحويل من الصورة $y=a(x-h)^2+k$ إلى الصورة $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ ويوفر الربط بين الثوابت a, h, k و b, c ويوجد علاقة بين معادلة محور التماثل $x=h$ مع $-\frac{b}{2a}$ فنحصل على $x=-\frac{b}{2a}$. تابع بدقة فقرة «عمل تعاوني» للتأكد من أنهم استطاعوا الربط جيّدًا بين الصورة العامة والصورة بدلالة إحداثيات الرأس.



2–4

مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

Comparing Vertex and General Form Equation of Quadratic Functions

سوف تتعلم

- إيجاد رأس منحنى الدالة من التربيعية بالصورة العامة.
- كتابة المعادلات بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.

المفردات والمصطلحات

- رأس القطع المكافئ Vertex of a Parabola
- الصورة العامة General Form

عمل تعاوني

اعمل في مجموعات قوامها أربعة طلاب.

أوّلًا (a) اطلب من كل مجموعة رسم بيان زوج من المعادلات التالية. ويمكنك استخدام الآلة الحاسبة البيانية في رسم بيان زوج من المعادلات التالية على الشاشة نفسها للآلة الحاسبة.

	$y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ (الصورة العامة)	a	b	$y=a(x-h)^2+k, a\neq 0$ (صورة المعادلة بدلالة إحداثيات رأس المنحنى)	h
1	$y=x^2-4x+4$			$y=(x-2)^2$	
2	$y=x^2+6x+8$			$y=(x+3)^2-1$	
3	$y=-3x^2-12x-8$			$y=-3(x+2)^2+4$	
4	$y=2x^2+12x+19$			$y=2(x+3)^2+1$	

(b) ما الذي تلاحظه في رسوم كل زوج من المعادلات؟

(c) هل كل زوج من المعادلات يمثل معادلتين متكافئتين؟

ثانيًا (a) **أنماط:** أكمل الجدول أعلاه.

(b) انظر إلى القيم b، h في أول زوجين من المعادلات. اكتب صيغة توضح العلاقة بين b، h.

(c) استخدم الزوجين الأخيرين من المعادلات لتوسع الصيغة التي حصلت عليها ولكي توضح العلاقة بين a، b، h.

ثالثًا (a) ما العلاقة بين محور التماثل ورأس القطع المكافئ؟

(b) ما معادلة محور التماثل للقطع المكافئ: $y=ax^2+bx+c$

(c) ما معادلة محور التماثل للقطع المكافئ: $y=2x^2+10x+7$

ربط بالحياة:

تسمح الآلات الحاسبة البيانية برسم بيانات الدوال ومنها الدوال التربيعية. تختلف الخطوات المتبعة من حاسبة لأخرى لكن معظمها بسّط كثيرًا عملية الرسم كالتالي:

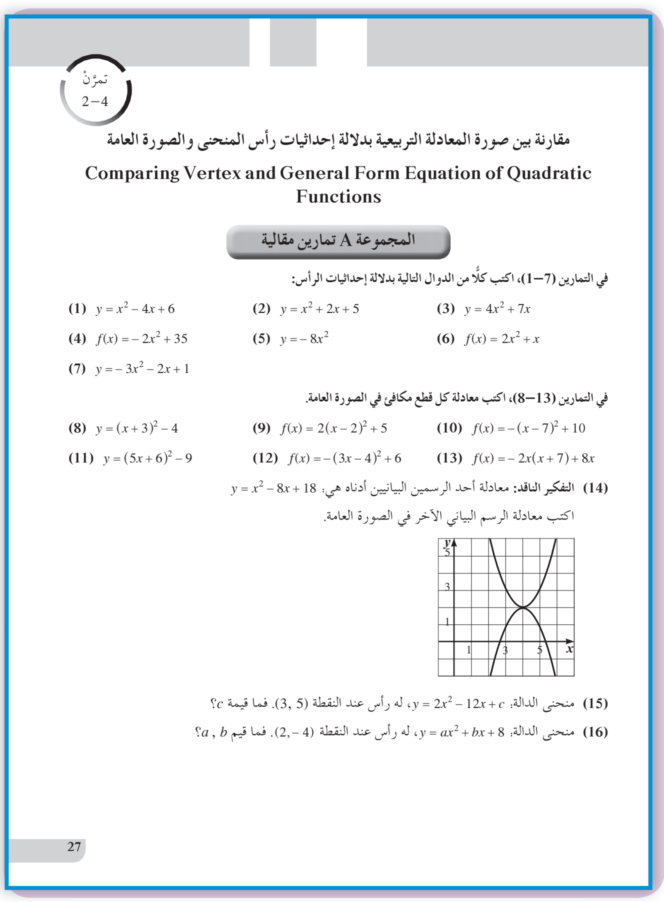
(a) اضغط على رمز GRAPH.

(b) اكتب معادلة الدالة.

(c) اضغط على EXE، يظهر بيان الدالة على الشاشة.

في فقرة «عمل تعاوني»، بحثت في كيفية تحديد رأس منحنى الدالة التربيعية. عندما تكتب معادلة الدالة في الصورة العامة، فإن الإحداثي **السيني لرأس القطع المكافئ** يكون: $-\frac{b}{2a}$، ولإيجاد الإحداثي الصادي k، عوض بقيمة الإحداثي السيني h في المعادلة ثم بسط.

64



تمرَّنْ 2–4

مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

Comparing Vertex and General Form Equation of Quadratic Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (7–1)، اكتب كلًّا من الدوال التالية بدلالة إحداثيات الرأس:

(1) $y=x^2-4x+6$ **(2)** $y=x^2+2x+5$ **(3)** $y=4x^2+7x$

(4) $f(x)=-2x^2+35$ **(5)** $y=-8x^2$ **(6)** $f(x)=2x^2+x$

(7) $y=-3x^2-2x+1$

في التمارين (13–8)، اكتب معادلة كل قطع مكافئ في الصورة العامة.

(8) $y=(x+3)^2-4$ **(9)** $f(x)=2(x-2)^2+5$ **(10)** $f(x)=-(x-7)^2+10$

(11) $y=(5x+6)^2-9$ **(12)** $f(x)=-(3x-4)^2+6$ **(13)** $f(x)=-2x(x+7)+8x$

(14) **التفكير الناقد:** معادلة أحد الرسمين البيانيين أدناه هي: $y=x^2-8x+18$

اكتب معادلة الرسم البياني الآخر في الصورة العامة.

(15) منحنى الدالة: $y=2x^2-12x+c$، له رأس عند النقطة $(3,5)$. فما قيمة c؟

(16) منحنى الدالة: $y=ax^2+bx+8$، له رأس عند النقطة $(2,-4)$. فما قيم a، b؟

27

في المثال (1)

شجع الطلاب على إيجاد أولًا قيمة $h = \frac{-b}{2a}$، ثم تعويض هذه القيمة في الصيغة العامة لإيجاد قيمة k، وبذلك يكون التحول من الصورة العامة إلى الصورة بدلالة إحداثيات الرأس.

في المثال (2)

يؤكد الصلة بالواقع واستخدام المعطيات الجديدة في إيجاد إحداثيات رأس القطع المكافئ التي تعبر عن القيمة العظمى أو القيمة الصغرى إذا تمّ تعويض $x = -\frac{b}{2a}$ في المعادلة الأساسية أي في الصورة العامة.

في المثال (3)

تحويل من الصورة بدلالة إحداثيات الرأس إلى الصورة العامة وذلك بتفكيك المربع الكامل، ثم تجميع الحدود المتشابهة.

في المثال (4)

يستخدم رأس القطع المكافيء لايجاد قيم مجهولة في معادلته.

في المثال (5)

تطبيقات حياتية باستخدام رأس القطع المكافئ لإيجاد قيمة عظمى.

6 الربط

يوفر هذا الدرس أمثلة متعددة في الاقتصاد والتسويق والإنشاءات، وذلك باستخدام القيمة العظمى عند إحداثيات رأس القطع المكافئ كما في المثالين (5)، (2)

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في إيجاد الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ فيكتبون: $h = \frac{b}{2a}$ أو $h = -\frac{b}{a}$

أشر إليهم أن الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ هو $h = -\frac{b}{2a}$، ثم نعوض هذه القيمة في الصورة العامة لإيجاد الإحداثي الصادي.

مثال (1)

اكتب الدالة: $y = 2x^2 + 10x + 7$، بدلالة إحداثيات الرأس.

الحل:

صورة المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس (h, k) هي: $y = a(x-h)^2 + k$

الإحداثي السيني:

استخدم $\frac{-b}{2a}$ لإيجاد الإحداثي السيني $h = -\frac{b}{2a}$

عوّض بقيم a، b $= \frac{-10}{2(2)}$

$= -2.5$

الإحداثي الصادي:

عوض بـ $x = -2.5$ في المعادلة الأصلية $k = 2(-2.5)^2 + 10(-2.5) + 7$

$= -5.5$

∴ المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس هي: $y = 2(x+2.5)^2 - 5.5$

حاول أن تحل

1 اكتب الدالة: $y = -3x^2 + 12x + 5$ بدلالة إحداثيات رأس المنحنى، ثم ارسم بيانها.

يمكنك استخدام رأس القطع المكافئ في تطبيقات حياتية تتطلب إيجاد أكبر مساحة وأصغر مساحة.

مثال (2) الصلة بالواقع

إذا قمت بالتخطيط لصنع برواز مستطيل الشكل لمجموعة من الصور، وذلك لتقديمها كهدية تخرج لأحد الأصدقاء، وكان لديك قطعة من الخشب طولها 2.8 m لصنع برواز. فما أبعاد البرواز التي تعطيك أكبر مساحة (A) لوضع مجموعة الصور؟

وما هي أكبر مساحة؟

الحل:

استخدم صيغة المحيط (P) لإيجاد تعبير رياضي (مقدار) يعبر عن طول البرواز (L) بدلالة العرض (W).

المحيط = 2 (الطول + العرض) $P = 2(L + W)$

$P = 2.8\ m = 280\ cm$ $2(W + L) = 280$

بسط، وحل لإيجاد الطول $L = 140 - W$

المصطلحات

- المحيط: مح Perimetre (P)
- المساحة: م Area (A)
- الطول: ل Length (L)
- العرض: ض Width(W)
- الارتفاع: ع Height (h)
- المستطيل Rectangle

مراجعة سريعة:

لإيجاد محيط المستطيل ومساحته، استخدم ما يلي:

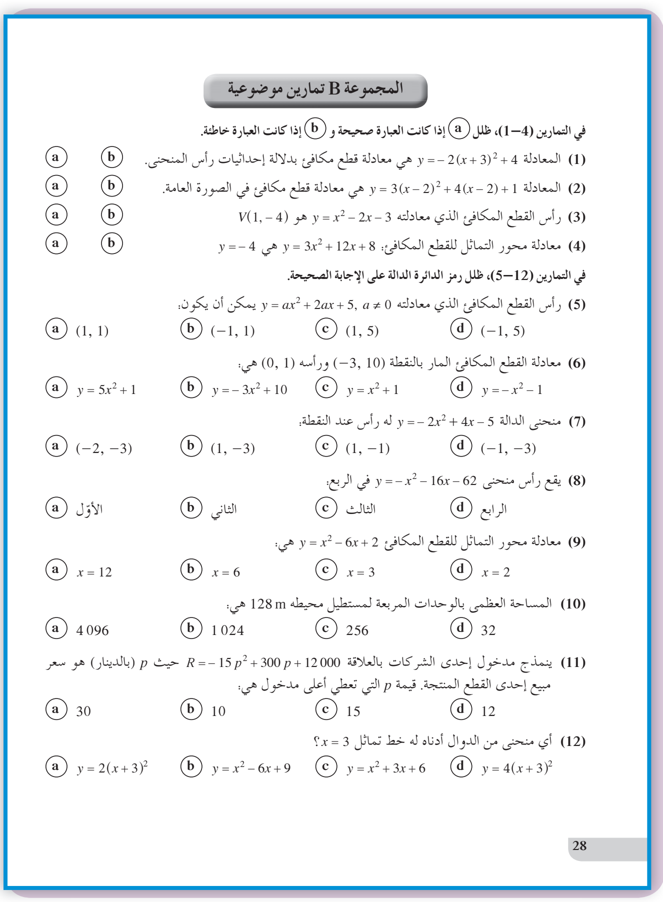
المحيط = 2 (الطول + العرض)

$P = 2(L + W)$

المساحة = الطول × العرض

$A = L \times W$

65



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة $y = -2(x+3)^2 + 4$ هي معادلة قطع مكافئ بدلالة إحداثيات رأس المنحنى. (a) (b)

(2) المعادلة $y = 3(x-2)^2 + 4(x-2) + 1$ هي معادلة قطع مكافئ في الصورة العامة. (a) (b)

(3) رأس القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2 - 2x - 3$ هو $V(1, -4)$ (a) (b)

(4) معادلة محور التماثل للقطع المكافئ: $y = 3x^2 + 12x + 8$ هي $y = -4$ (a) (b)

في التمارين (12–5)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(5) رأس القطع المكافئ الذي معادلته $y = ax^2 + 2ax + 5,\ a \neq 0$ يمكن أن يكون:

(a) $(1, 1)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $(1, 5)$ (d) $(-1, 5)$

(6) معادلة القطع المكافئ المار بالنقطة $(-3, 10)$ ورأسه $(0, 1)$ هي:

(a) $y = 5x^2 + 1$ (b) $y = -3x^2 + 10$ (c) $y = x^2 + 1$ (d) $y = -x^2 - 1$

(7) منحنى الدالة $y = -2x^2 + 4x - 5$ له رأس عند النقطة:

(a) $(-2, -3)$ (b) $(1, -3)$ (c) $(1, -1)$ (d) $(-1, -3)$

(8) يقع رأس منحنى $y = -x^2 - 16x - 62$ في الربع:

(a) الأوّل (b) الثاني (c) الثالث (d) الرابع

(9) معادلة محور التماثل للقطع المكافئ $y = x^2 - 6x + 2$ هي:

(a) $x = 12$ (b) $x = 6$ (c) $x = 3$ (d) $x = 2$

(10) المساحة العظمى بالوحدات المربعة لمستطيل محيطه 128 m هي:

(a) 4 096 (b) 1 024 (c) 256 (d) 32

(11) ينمذج مدخول إحدى الشركات بالعلاقة $R = -15p^2 + 300p + 12\,000$ حيث p (بالدينار) هو سعر مبيع إحدى القطع المنتجة. قيمة p التي تعطي أعلى مدخول هي:

(a) 30 (b) 10 (c) 15 (d) 12

(12) أي منحنى من الدوال أدناه له خط تماثل $x = 3$؟

(a) $y = 2(x+3)^2$ (b) $y = x^2 - 6x + 9$ (c) $y = x^2 + 3x + 6$ (d) $y = 4(x+3)^2$

28

8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة مهمة للمعلم ليتعرف على مدى متابعة الطلاب لما ورد في هذا الدرس وكيفية التحويل من صيغة إلى أخرى دون ارتكاب أخطاء.

اختبار سريع

1 اكتب الدالة: $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$ بدلالة إحداثيات الرأس.

$f(x) = 2(x+2)^2 - 13$

2 اكتب الدالة: $f(x) = (x+2)^2 - 1$ بالصورة العامة.

$f(x) = x^2 + 4x + 3$

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

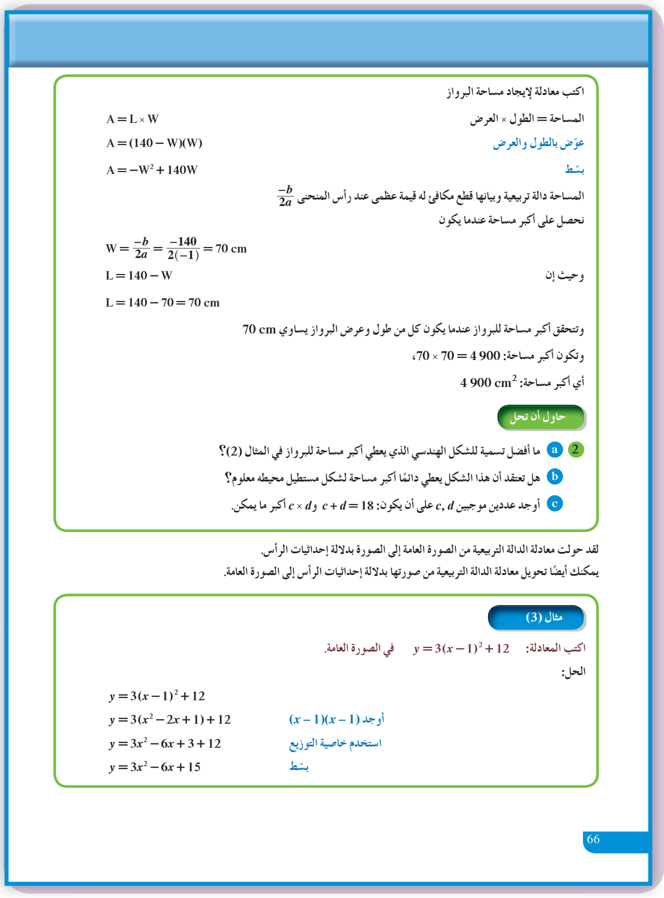
أولًا: **(a)** تحقق من عمل الطلاب على الآلة الحاسبة.

(b) يجب أن تبيّن الآلة الحاسبة الرسوم البيانية نفسها لكل زوج من المعادلات في الصورة العامة والصورة بدلالة إحداثيات الرأس.

(c) كل زوج من المعادلات، يمثّل شكلين مختلفين للمعادلة نفسها.

ثانيًا: **(a)**

$y = ax^2 + bx + c$ (الصورة العامة)	a	b	$y = a(x-h)^2 + k$ (صورة المعادلة بدلالة إحداثيات رأس المنحنى)	h
$y = x^2 - 4x + 4$	1	-4	$y = (x-2)^2$	2
$y = x^2 + 6x + 8$	1	6	$y = (x+3)^2 - 1$	-3
$y = -3x^2 - 12x - 8$	-3	-12	$y = -3(x+2)^2 + 4$	-2
$y = 2x^2 + 12x + 19$	2	12	$y = 2(x+3)^2 + 1$	-3



اكتب معادلة لإيجاد مساحة البرواز

المساحة = الطول × العرض $A = L \times W$

عوّض بالطول والعرض $A = (140 - W)(W)$

بسّط $A = -W^2 + 140W$

المساحة دالة تربيعية وبيانها قطع مكافئ له قيمة عظمى عند رأس المنحنى $\frac{-b}{2a}$

نحصل على أكبر مساحة عندما يكون $W = \frac{-b}{2a} = \frac{-140}{2(-1)} = 70$ cm

وحيث إن $L = 140 - W$

$L = 140 - 70 = 70$ cm

وتتحقق أكبر مساحة للبرواز عندما يكون كل من طول وعرض البرواز يساوي 70 cm

وتكون أكبر مساحة: $70 \times 70 = 4\,900$،

أي أكبر مساحة: $4\,900$ cm^2

حاول أن تحل

2 a ما أفضل تسمية للشكل الهندسي الذي يعطي أكبر مساحة للبرواز في المثال (2)؟

b هل تعتقد أن هذا الشكل يعطي دائمًا أكبر مساحة لشكل مستطيل محيطه معلوم؟

c أوجد عددين موجبين c, d على أن يكون: $c + d = 18$ و $c \times d$ أكبر ما يمكن.

لقد حولت معادلة الدالة التربيعية من الصورة العامة إلى الصورة بدلالة إحداثيات الرأس.

يمكنك أيضًا تحويل معادلة الدالة التربيعية من صورتها بدلالة إحداثيات الرأس إلى الصورة العامة.

مثال (3)

اكتب المعادلة: $y = 3(x-1)^2 + 12$ في الصورة العامة.

الحل:

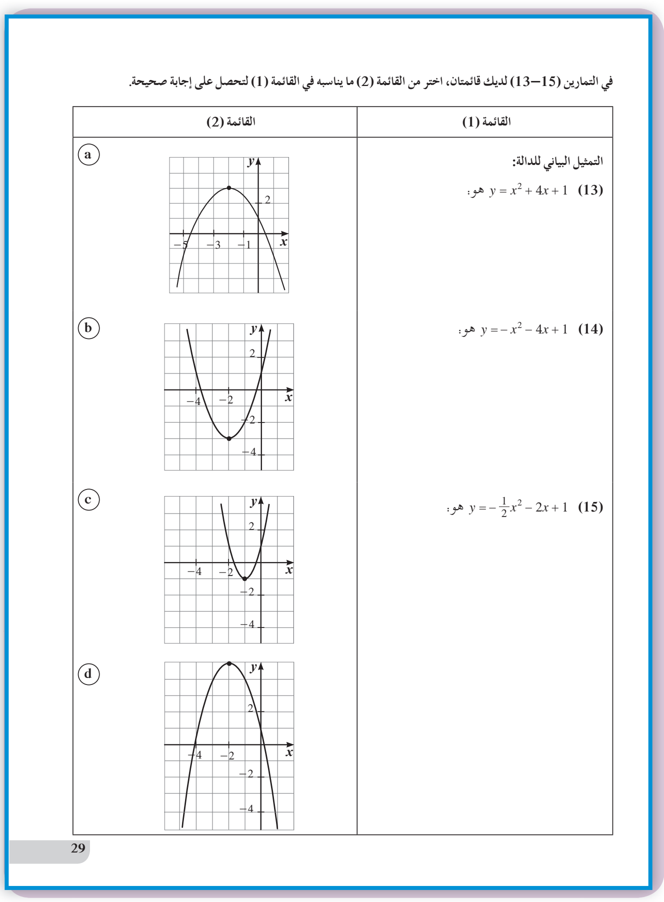
$y = 3(x-1)^2 + 12$

أوجد $(x-1)(x-1)$ $y = 3(x^2 - 2x + 1) + 12$

استخدم خاصية التوزيع $y = 3x^2 - 6x + 3 + 12$

بسّط $y = 3x^2 - 6x + 15$

66



في التمارين (13–15) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسبه في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
التمثيل البياني للدالة: (13) $y = x^2 + 4x + 1$ هو:	a
(14) $y = -x^2 - 4x + 1$ هو:	b
(15) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ هو:	c
	d

29

(b) نلاحظ أن: $h = -\frac{b}{2}$، وذلك في المعادلتين الأولى والثانية.

(c) نلاحظ أن: $h = -\frac{b}{2a}$، وذلك في المعادلتين الثالثة والرابعة وهذا ينطبق على الحالتين في الفقرة (b)، لأن $a = 1$

ثالثًا: **(a)** معادلة محور التماثل هو قيمة الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ أي $x = -\frac{b}{2a}$

(b) $x = -\frac{b}{2a}$

(c) $x = \frac{-10}{2 \times 2} = \frac{-5}{2}$

«حاول أن تحل»

1 $y = -3x^2 + 12x + 5$

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-3)} = 2\ ,\quad h = 2$

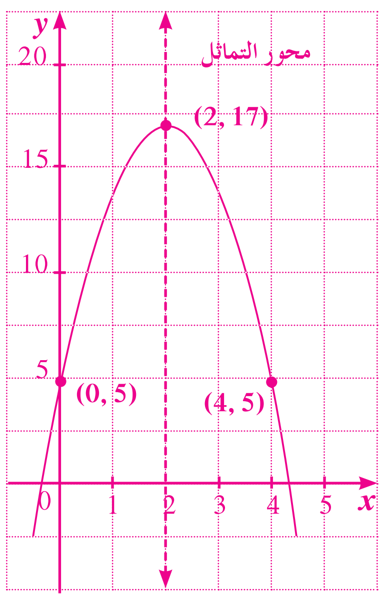
نعوض $x = 2$ بـ y فيكون $y = 17$ والمعادلة بدلالة إحداثيات الرأس هي:

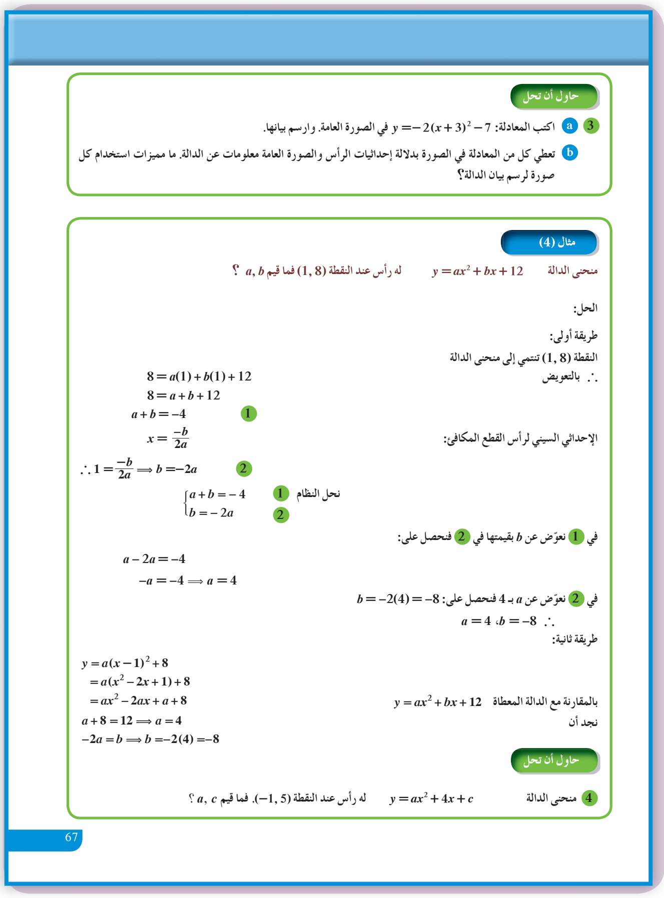
$y = -3(x-2)^2 + 17$

الرأس $(2, 17)$، محور التماثل $x = 2$

نقطة على المنحنى $(4, 5)$ انعكاسها في محور التماثل النقطة $(0, 5)$.

الرسم البياني:





حاول أن تحل

3 **a** اكتب المعادلة: $y = -2(x+3)^2 - 7$ في الصورة العامة. وارسم بيانها.

b تعطي كل من المعادلة في الصورة بدلالة إحداثيات الرأس والصورة العامة معلومات عن الدالة. ما مميزات استخدام كل صورة لرسم بيان الدالة؟

مثال (4)

منحنى الدالة $y = ax^2 + bx + 12$ له رأس عند النقطة $(1, 8)$ فما قيم a, b ؟

الحل:

طريقة أولى:

النقطة $(1, 8)$ تنتمي إلى منحنى الدالة

$\therefore$ بالتعويض

$8 = a(1) + b(1) + 12$

$8 = a + b + 12$

$a + b = -4$ (1)

الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ: $x = \frac{-b}{2a}$

$\therefore 1 = \frac{-b}{2a} \Longrightarrow b = -2a$ (2)

نحل النظام (1) (2)

$\begin{cases} a + b = -4 \\ b = -2a \end{cases}$

في (1) نعوّض عن b بقيمتها في (2) فنحصل على:

$a - 2a = -4$

$-a = -4 \Longrightarrow a = 4$

في (2) نعوّض عن a بـ 4 فنحصل على: $b = -2(4) = -8$

$\therefore$ $b = -8$، $a = 4$

طريقة ثانية:

$y = a(x-1)^2 + 8$

$= a(x^2 - 2x + 1) + 8$

$= ax^2 - 2ax + a + 8$

بالمقارنة مع الدالة المعطاة $y = ax^2 + bx + 12$

نجد أن

$a + 8 = 12 \Longrightarrow a = 4$

$-2a = b \Longrightarrow b = -2(4) = -8$

حاول أن تحل

4 منحنى الدالة $y = ax^2 + 4x + c$ له رأس عند النقطة $(-1, 5)$. فما قيم a, c ؟

67

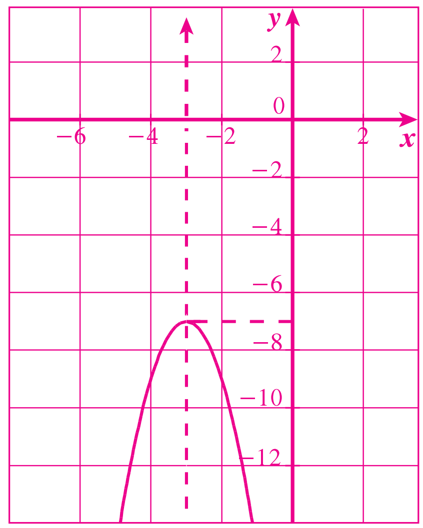
2 **(a)** بما أن الطول = العرض = 70 cm، فإن الشكل الهندسي الحاصل هو مربع.

(b) عمومًا إذا كان لدينا مستطيل محيطه معلوم فمساحته العظمى تتحقق عندما يكون الطول يساوي العرض أي مربع.

(c) مشابه لما سبق لذا يتحقق أكبر ناتج ضرب إذا تساوى العددان أي $c = d = 9$

وبالتالي: $c \times d = 9 \times 9 = 81$

3 **(a)** $y = -2x^2 - 12x - 25$



(b) المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس توفر بسرعة إحداثيات الرأس ومحور التماثل. أما المعادلة بالصورة العامة فتوفر بسرعة تقاطع المنحنى مع محور الصادات ومحور التماثل $x = \frac{-b}{2a}$

4 $-1 = \frac{-4}{2a}$ ومنه نحصل على $a = 2$

$5 = 2(-1)^2 + 4(-1) + c$ ومنه $c = 7$

وتصبح المعادلة: $y = 2x^2 + 4x + 7$

مثال (5) تطبيقات حياتية

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة:

$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$،

حيث x تمثل سعر الحذاء بالدينار.

a ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟

b ما قيمة أعلى ربح؟

الحل:

a $f(x) = -15x^2 + 600x + 50$

رسمها البياني قطع مكافئ له قيمة عظمى، تتحقق القيمة العظمى عند

$x = \frac{-b}{2a}$

$x = \frac{-600}{2(-15)} = 20$

أي أن ثمن الحذاء الذي يحقق أعلى ربح هو 20 دينارًا.

b $f(20) = -15(20)^2 + 600(20) + 50 = 6\,050$

$\therefore$ الربح الأعلى يساوي 6 050 دينارًا.

حاول أن تحل

5 لاحظ صاحب محل لبيع الدراجات النارية أن بالإمكان نمذجة ربحه بالدالة:

$f(x) = -x^2 + 2200x - 1\,150\,000$

حيث x تمثل سعر مبيع الدراجة النارية بالدينار

a أوجد سعر مبيع الدراجة النارية الذي يحقق أعلى ربح.

b أوجد قيمة أعلى ربح.

68

5 **(a)** $x = -\frac{b}{2a}$

$x = \frac{-2\,200}{-2} = 1100$

السعر الذي يحقق أعلى ربح = 1100 دينار

(b)

$f(1100) = -(1100)^2 + 2\,200(1100) - 1\,500\,000$

$= 60\,000$

قيمة أعلى ربح تساوي 60 000 دينار.

2–5: المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

1 الأهداف

- يوجد معكوس الدالة.
- يستخدم دوال الجذر التربيعي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المعكوس – معكوس دالة – دوال الجذر التربيعي.

3 الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) النقطة $A(2, 4)$ في المستوى الإحداثي. أوجد إحداثيات صورة انعكاسها في محور السينات، ثم إحداثيات صورة انعكاسها في محور الصادات.

(b) ارسم في المستوى الإحداثي الخط المستقيم ℓ ومعادلته $y = x$. أوجد إحداثيات صورة انعكاس النقطة $B(0, 4)$ في المستقيم ℓ، ثم إحداثيات صورة انعكاس النقطة $C(3, 0)$ في المستقيم ℓ.

(c) أوجد مجموعة حل المعادلة: $3 = \sqrt{x^2 + 5}$

2–5

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

Inverses and Square Root Functions

سوف تتعلم
- إيجاد معكوس الدالة.
- استخدام دوال الجذر التربيعي.

المفردات والمصطلحات
- المعكوس Inverse
- معكوس الدالة Inverse of a Function
- دوال الجذر التربيعي Square Root Functions

عمل تعاوني

هل تعلم أن هناك ارتباطًا بين طول قطعة الجليد الموضحة بالصورة وطول قطر أكبر مقطع دائري لها؟

1 يمكن استخدام الدالة $L = 11d - 0.5$، لمعرفة الطول التقريبي L لقطعة الجليد إذا علم طول قطرها d عند أكبر مقطع دائري لها.

a يبلغ طول قطر أكبر مقطع لقطعة جليدية مدلاة 5 cm أوجد طولها.

b اشرح الخطوات التي استخدمتها لإيجاد الطول في الجزء a.

2 a يبلغ طول قطعة جليدية مدلاة 27 cm أوجد طول قطر أكبر مقطع.

b اشرح الخطوات التي استخدمتها لإيجاد القطر في الفقرة a.

الخطوات التي سبق لك استخدامها لإيجاد طول قطر أكبر مقطع لقطعة جليدية مدلاة عند معرفة طولها مشابهة لتلك المستخدمة في إيجاد ما يسمى معكوس الدالة.

نشاط:

اعتبر الدالتين: $f(x) = 2x - 8$, $g(x) = \frac{x+8}{2}$

مجال الدالة f هو $\mathbb{R}$ ومجال الدالة g هو $\mathbb{R}$ أيضًا.

فإذا أخذنا أي عدد ينتمي لمجال الدالة f وليكن 6.

الدالتان: $g(x) = \frac{x+8}{2}$, $f(x) = 2x - 8$ كلًّا منهما تعكس عمليات الأخرى،

لذلك تسمى g معكوس الدالة f أو f معكوس الدالة g

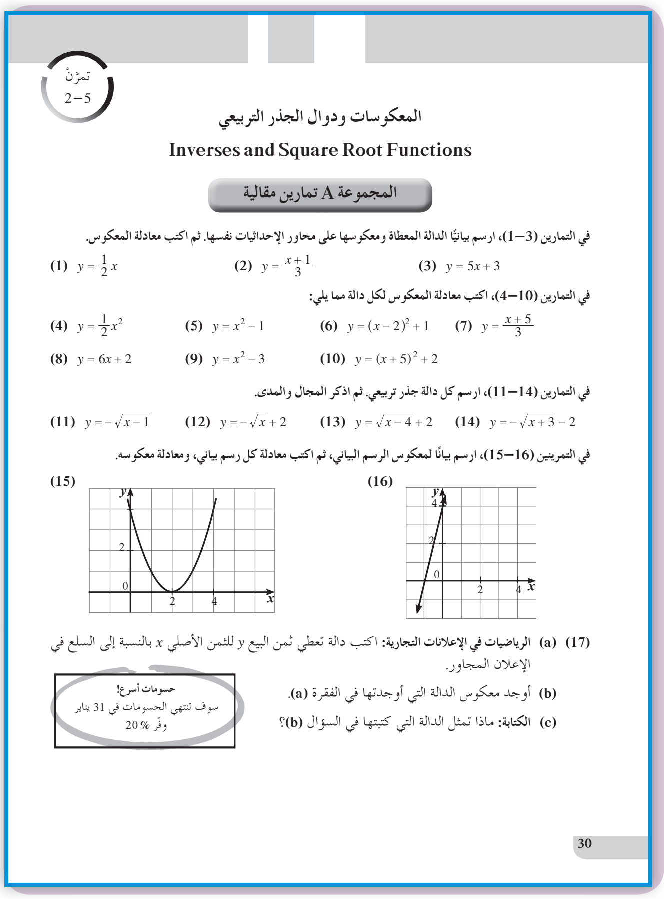
1 a ارسم الدالتين: f, g في مستوى إحداثي واحد.

b أوجد ثلاث نقاط على الرسم البياني للدالة f

c اعكس إحداثيات كل نقطة، ثم ارسم النقاط الجديدة.

ماذا تلاحظ؟

69



تمرَّنْ 2–5

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

Inverses and Square Root Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3–1)، ارسم بيانيًّا الدالة المعطاة ومعكوسها على محاور الإحداثيات نفسها. ثم اكتب معادلة المعكوس.

(1) $y = \frac{1}{2}x$ (2) $y = \frac{x+1}{3}$ (3) $y = 5x + 3$

في التمارين (10–4)، اكتب معادلة المعكوس لكل دالة مما يلي:

(4) $y = \frac{1}{2}x^2$ (5) $y = x^2 - 1$ (6) $y = (x-2)^2 + 1$ (7) $y = \frac{x+5}{3}$

(8) $y = 6x + 2$ (9) $y = x^2 - 3$ (10) $y = (x+5)^2 + 2$

في التمارين (14–11)، ارسم كل دالة جذر تربيعي. ثم اذكر المجال والمدى.

(11) $y = -\sqrt{x-1}$ (12) $y = -\sqrt{x} + 2$ (13) $y = \sqrt{x-4} + 2$ (14) $y = -\sqrt{x+3} - 2$

في التمرينين (16–15)، ارسم بيانًا لمعكوس الرسم البياني، ثم اكتب معادلة كل رسم بياني، ومعادلة معكوسه.

(15) (16)

(17) (a) **الرياضيات في الإعلانات التجارية:** اكتب دالة تعطي ثمن البيع y للثمن الأصلي x بالنسبة إلى السلع في الإعلان المجاور.

(b) أوجد معكوس الدالة التي أوجدتها في الفقرة (a).

(c) **الكتابة:** ماذا تمثل الدالة التي كتبتها في السؤال (b)؟

30

5 التدريس

تعرفت سابقًا ماهية الدالة الحقيقية ومتى تكون علاقة ما دالة، واستخدمت اختبار الخط المستقيم الرأسي لتتعرف إذا كان منحنى يمثّل دالة حقيقية أم لا. وفي هذا الدرس، سوف توجد معكوس دالة حقيقية وتختبر ما إذا كان هذا المعكوس يمثل دالة حقيقية أم لا. وبالتالي سوف يقودنا إلى التعامل مع دوال الجذر التربيعي انطلاقًا من معرفتنا بالدوال التربيعية التي درسناها في بداية هذه الوحدة.

من المهم جدًّا الإشارة إلى أن الطلاب قد تعاملوا سابقًا مع المعكوسات دون معرفتهم بذلك، فمثلًا في القاعدة: $d = v \times t$، أي المسافة = معدل السرعة × الزمن

عندما نعكس المعطيات نكتب: $v = \dfrac{d}{t}$ أو $t = \dfrac{d}{v}$

أو عند استخدام قاعدة المساحة في المستطيل: $A = L \cdot W$

عندما نعكس المعطيات نكتب: $L = \dfrac{A}{W}$ أو $W = \dfrac{A}{L}$

وهذه هي الفكرة الرئيسة في فقرة «نشاط»، لذا يطلب إلى المعلم إجراء نقاش موسع مع الطلاب أثناء التعامل مع مخطط: عدد يدخل ⟵ عدد يخرج.

في المثال التوضيحي:

ركّز انتباه الطلاب على الترابط بين العلاقة S ومعكوسها. فالزوج المرتب $(x\ ,\ y)$ في العلاقة S يصبح الزوج المرتب $(y\ ,\ x)$ في معكوس S. ساعدهم على اختبار الرسم البياني والتأكد من أن القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطة تمثل (x, y)، والنقطة التي تمثل (y, x) هي دائمًا عمودية على المستقيم الذي معادلته $y = x$ أخبرهم أن هذا المستقيم هو محور انعكاس لبيان العلاقة S وبيان معكوسها.

في المثال (1)

هذا المثال له أهمية كبرى، لأنه يوفر خطوات فعّالة ومدروسة ليتمكن الطالب من فهم التبديل الحاصل على إحداثيات النقطة انطلاقًا من حالات خاصة. فالنقطة $(0, 4)$ سوف تصبح $(4, 0)$، أي كل x سوف تصبح y وكل y سوف تصبح x ونلاحظ أيضًا أن معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية.

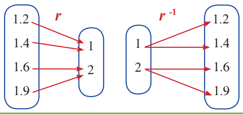
إذا كانت r علاقة تصل بين عنصر a من مجال r وعنصر b من مدى r فإن **معكوس العلاقة** r يصل من b إلى a.

إذا كان (a, b) زوج مرتب من علاقة r فإن (b, a) هو زوج مرتب من معكوس هذه العلاقة.

يبيّن المخطط أدناه علاقة r ومعكوسها r^{-1}

مدى العلاقة r هو مجال معكوس هذه العلاقة ومجال r هو مدى معكوسها.

معلومة: يعبر عن معكوس العلاقة r بالرمز r^{-1}.



مثال توضيحي

يبيّن الجدول المقابل علاقة S

x	1	2	3	4
y	−1	0	1	1

a أوجد معكوس العلاقة S

b مثّل بيان S وبيان معكوسها

c صف العلاقة بين المستقيم $y = x$ وبيان S وبيان معكوسها.

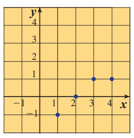
d هل العلاقة S تمثل دالة؟ هل معكوس S يمثل دالة؟

الحل: a نبدل قيم y , x في الجدول.

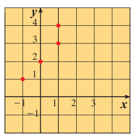
x	−1	0	1	1
y	1	2	3	4

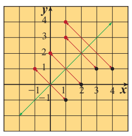
b بيان S وبيان معكوسها

بيان العلاقة S



بيان معكوس S





c المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان S وبيان معكوسها.

d العلاقة S تمثل دالة لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

بينما معكوس S لا يمثل دالة لأن العنصر (1) من المجال يقترن بعنصرين من المجال المقابل.

70

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت النقطة $M(x, y)$ تنتمي لبيان الدالة f فإن النقطة $N(y, x)$ تنتمي لبيان معكوس هذه الدالة. (a) (b)

(2) إذا كانت $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$ فإن الدالتين كل منهما معكوس للأخرى. (a) (b)

(3) المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان دالة f وبيان معكوسها. (a) (b)

(4) إذا مر بيان دالة بنقطة الأصل فإن بيان معكوسها يمر أيضًا بنقطة الأصل. (a) (b)

(5) لا يتغير مجال دالة الجذر التربيعي بعد إزاحة بيانها 3 وحدات يمينًا. (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة:

(6) إذا انتمت النقطة $A(2, 3)$ إلى بيان دالة فإن النقطة التي تنتمي إلى بيان معكوس تلك الدالة هي:

(a) $(-2, 3)$ (b) $(2, -3)$ (c) $(3, -2)$ (d) $(3, 2)$

(7) بيان الدالة $y = \sqrt{x+2} - 2$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = \sqrt{x}$:

(a) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأعلى (b) وحدتين إلى اليسار ووحدتين للأسفل
(c) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأعلى (d) وحدتين إلى اليمين ووحدتين للأسفل

(8) معكوس الدالة $y = x^2 + 2$ هو:

(a) $y = \sqrt{x-2}$ (b) $y = -\sqrt{x-2}$
(c) $y = \pm\sqrt{x-2}$ (d) ليس أيًّا مما سبق صحيحًا

(9) معكوس الدالة $y = 5x - 1$ هو:

(a) $y = 5x + 1$ (b) $y = \frac{x+1}{5}$
(c) $y = \frac{x}{5} + 1$ (d) $y = \frac{x}{5} - 1$

(10) مجال معكوس الدالة $y = \sqrt{x+3} - 1$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $(-1, \infty)$
(c) $(-\infty, 1)$ (d) $[-1, \infty)$

31

في المثال (2)

يساعد الطالب على فهم كيفية إيجاد معكوس علاقة من علاقة معطاة، حيث يمكن الإفادة من المثال التوضيحي إذ يفترض إبدال المتغيرين y, x ويتضح عندها أن معكوس العلاقة التي تمثل مستقيمًا سيكون علاقة تمثل مستقيمًا ويبقى المستقيم $y = x$ هو محور انعكاس بينهما.

في المثال (3)

يواجه الطالب في هذا المثال مشكلة وهي أن الدالة التي نبحث عن معكوسها هي دالة تربيعية وبالتالي عند التحويل بين y، x سوف يواجه مشكلة إيجاد الجذر التربيعي لذا على الطالب أن يتذكر دائمًا أن $a \geq 0$ ، $x^2 = a$ تعطي دائمًا $x = \pm\sqrt{a}$ لذا كان السؤال: هل معكوس دالة تربيعية هو دالة؟

وبالتالي، مناقشة الحلول في هذا المثال مهمة للإجابة عن السؤال أعلاه ومن هنا كان المدخل إلى دوال الجذر التربيعي.

في المثال (4)

يمكن الإشارة إلى دوال المرجع $y = \sqrt{x}$ أو $y = -\sqrt{x}$ ورسومها البيانية وانطلاقًا منها يمكن فهم الإزاحة على الصورة: $y = \sqrt{x-h} + k$ أو $y = -\sqrt{x-h} + k$، حيث h ،k كميتان ثابتتان.

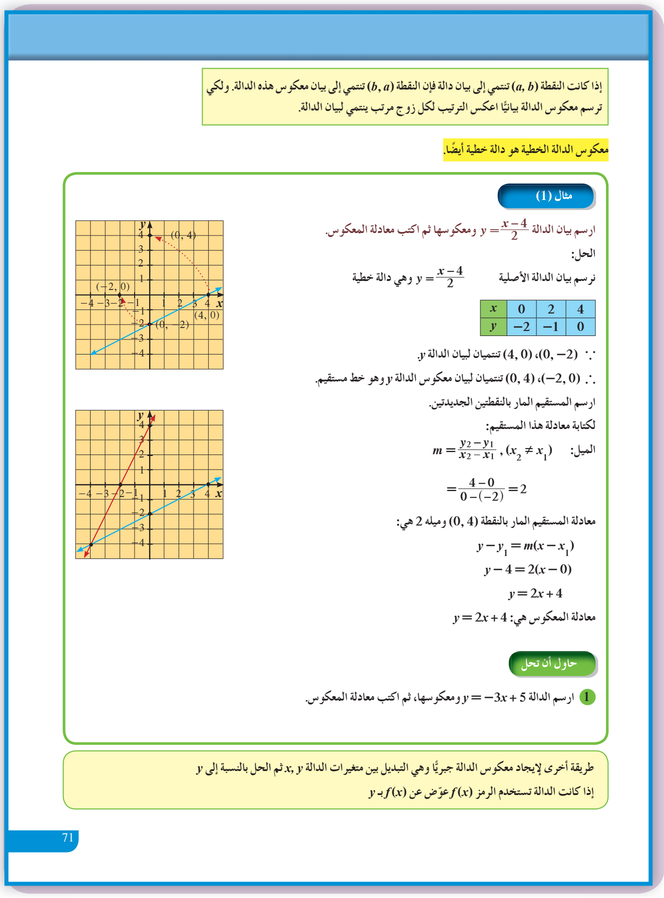
من المهم الإشارة إلى الطلاب أن معكوس دالة الجذر التربيعي هو دالة ولكن معكوس الدالة التربيعية ليس بالضرورة دالة، حيث يلزم شروط في مجال تعريفها.

6 الربط

يوفر المثال (5) الربط بين الواقع ودالة الجذر التربيعي، حيث العلاقة بين مساحة شاشة الإعلانات وطول القطر، علمًا أن شكل الشاشة هو مستطيل عمومًا.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب فيكتبون أن معكوس الدالة التربيعية هو دالة. ذكرهم دائمًا باستخدام اختبار الخط المستقيم الرأسي ليتأكدوا من عدم الوقوع في هذا الخطأ أثناء كتابتهم معكوس الدالة التربيعية.



إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي إلى بيان معكوس هذه الدالة. ولكي ترسم معكوس الدالة بيانيًا اعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة.

معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية أيضًا.

مثال (1)

ارسم بيان الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ ومعكوسها ثم اكتب معادلة المعكوس.

الحل:

نرسم بيان الدالة الأصلية $y = \frac{x-4}{2}$ وهي دالة خطية

x	0	2	4
y	-2	-1	0

∵ $(0, -2)$، $(4, 0)$ تنتميان لبيان الدالة y.

∴ $(-2, 0)$، $(0, 4)$ تنتميان لبيان معكوس الدالة y وهو خط مستقيم.

ارسم المستقيم المار بالنقطتين الجديدتين.

لكتابة معادلة هذا المستقيم:

الميل: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, (x_2 \neq x_1)$

$= \frac{4-0}{0-(-2)} = 2$

معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0, 4)$ وميله 2 هي:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = 2(x - 0)$

$y = 2x + 4$

معادلة المعكوس هي: $y = 2x + 4$

حاول أن تحل

1 ارسم الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها، ثم اكتب معادلة المعكوس.

طريقة أخرى لإيجاد معكوس الدالة جبريًا وهي التبديل بين متغيرات الدالة y $x,$ ثم الحل بالنسبة إلى y

إذا كانت الدالة تستخدم الرمز $f(x)$ عوّض عن $f(x)$ بـ y

71

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من فهمهم لمعكوس الدالة بشكل صحيح ومن أنهم يستخدمون الإزاحة في رسم دوال الجذر التربيعي.

اختبار سريع

1. أوجد معكوس الدالة: $y = 3x - 4$

   $y = \dfrac{x+4}{3}$

2. أوجد معكوس الدالة: $y = -x^2 + 4$

   هل المعكوس دالة؟ اشرح.

   $y = \pm\sqrt{-x+4}$ ليس دالة، لأنه توجد قيمتان للمتغير التابع y وذلك لقيم $x \le 4$

3. تمت إزاحة الرسم البياني للدالة: $y = \sqrt{x}$ 4 وحدات إلى اليسار، 3 وحدات إلى الأعلى. اكتب معادلة الدالة المزاحة.

   $y = \sqrt{x+4} + 3$

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

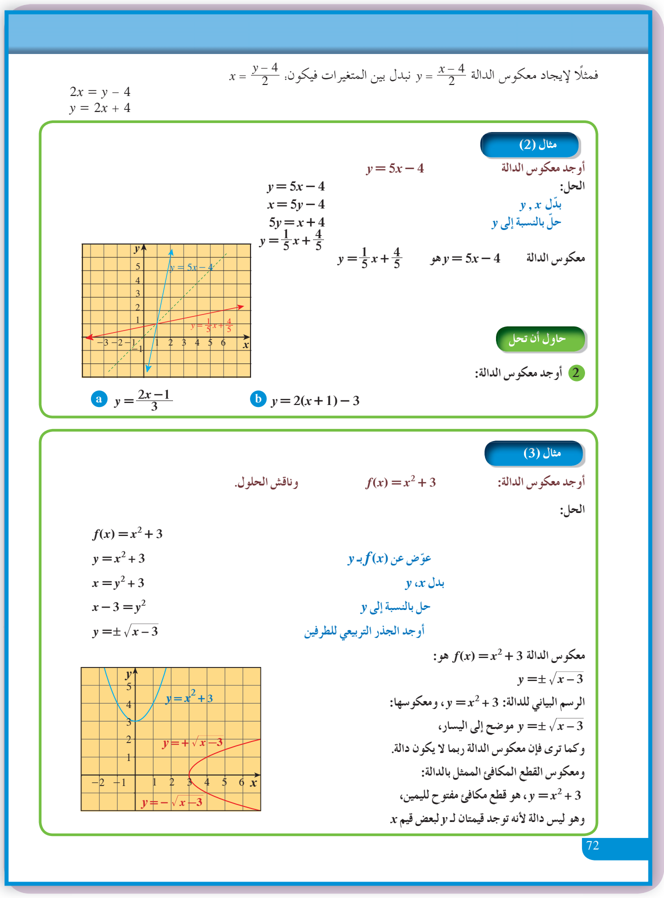
1. **(a)** $L = 11d - 0.5$

   $L = 11(5) - 0.5$ ،$L = 54.5\,\text{cm}$

   (b) نعوض d بقيمتها ونحل المعادلة.

2. **(a)** $27 = L = 11d - 0.5$, $d = 2.5$ cm

   (b) نعوض L بقيمتها ونحل المعادلة.



فمثلًا لإيجاد معكوس الدالة $y = \dfrac{x-4}{2}$ نبدل بين المتغيرات فيكون: $x = \dfrac{y-4}{2}$

$2x = y - 4$

$y = 2x + 4$

مثال (2)

أوجد معكوس الدالة $y = 5x - 4$

الحل:

	$y = 5x - 4$
بدّل x , y	$x = 5y - 4$
حلّ بالنسبة إلى y	$5y = x + 4$
	$y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

معكوس الدالة $y = 5x - 4$ هو $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

حاول أن تحل

2. أوجد معكوس الدالة:

   a) $y = \dfrac{2x-1}{3}$ b) $y = 2(x+1) - 3$

مثال (3)

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = x^2 + 3$ وناقش الحلول.

الحل:

	$f(x) = x^2 + 3$
عوّض عن $f(x)$ بـ y	$y = x^2 + 3$
بدل x، y	$x = y^2 + 3$
حل بالنسبة إلى y	$x - 3 = y^2$
أوجد الجذر التربيعي للطرفين	$y = \pm\sqrt{x-3}$

معكوس الدالة $f(x) = x^2 + 3$ هو:

$y = \pm\sqrt{x-3}$

الرسم البياني للدالة: $y = x^2 + 3$، ومعكوسها:

$y = \pm\sqrt{x-3}$ موضح إلى اليسار،

وكما ترى فإن معكوس الدالة ربما لا يكون دالة.

ومعكوس القطع المكافئ الممثل بالدالة:

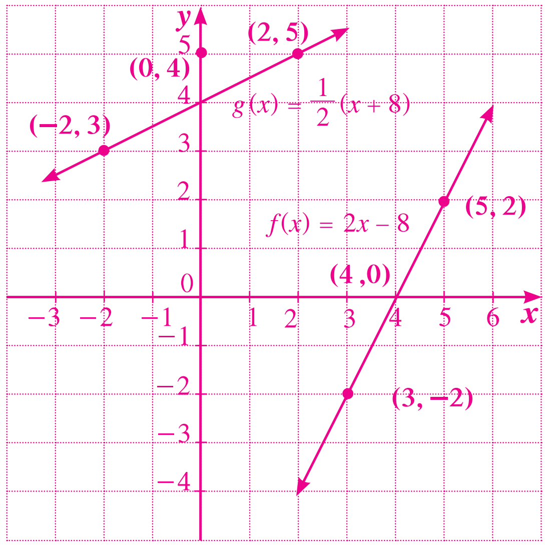
$y = x^2 + 3$، هو قطع مكافئ مفتوح لليمين،

وهو ليس دالة لأنه توجد قيمتان لـ y لبعض قيم x

72

«نشاط»

1 **(a)**



(b) $(3,-2)$

$(4,0)$

$(5,2)$

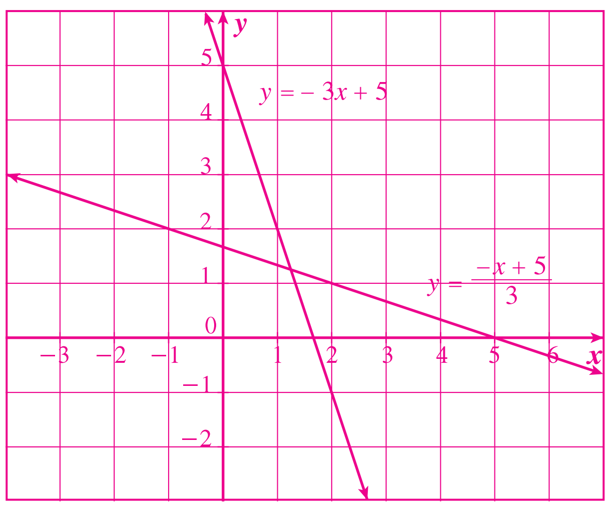
(c) $(-2,3),(0,4),(2,5)$

ينعكس ترتيب كل زوج مركب.

«حاول أن تحل»

1 معكوس: $y=-3x+5$

هو $y=\dfrac{-x+5}{3}$



مناقشة الحلول:

a ما معادلة المعكوس للدالة: $y=x^2+3$ عند $x \ge 0$؟ $y=\sqrt{x-3}$

b هل المعكوس دالة؟ نعم

c ما معادلة المعكوس للدالة: $y=x^2+3$ عند $x \le 0$؟ $y=-\sqrt{x-3}$

d هل المعكوس دالة؟ نعم

حاول أن تحل

3 أوجد معكوس الدالة: $f(x)=(x+3)^2-4$. ناقش الحلول.

دوال الجذر التربيعي **Square Root Functions**

المعادلة $y=\sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي.

الشكل المرسوم يمثل بيان هذه الدالة ويبدأ من $(0, 0)$، حيث إن الدالة معرفة فقط بالنسبة إلى صفر وإلى القيم الموجبة لـ x. أي أنها معرّفة عندما $x \ge 0$.

فيكون مجالها $[0, \infty)$. والمدى هو $[0, \infty)$ لأن $y \ge 0$ وهي قيم الدالة عند المجال المعطى.

التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $y=\sqrt{x-h}+k$

ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y=\sqrt{x}$ كالتالي:

- عندما تكون k, h موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى.
- وعندما تكون h سالبة يزاح البيان إلى اليسار.
- وعندما تكون k سالبة يزاح البيان إلى الأسفل.

فمثلًا بيان الدالة: $y=\sqrt{x-(-3)}-4$ أو $y=\sqrt{x+3}-4$ ينتج من إزاحة بيان الدالة $y=\sqrt{x}$ ثلاث وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأسفل.

مثال (4)

ارسم الدالة: $y=\sqrt{x-4}-2$ ، وعيّن المجال والمدى للدالة.

الحل:

أزح بيان دالة المرجع: $y=\sqrt{x}$،

4 وحدات يمينًا 2 وحدة إلى الأسفل.

يبدأ بيان الدالة $y=\sqrt{x-4}-2$ عند النقطة $(4, -2)$

ويبيّن الرسم البياني لها أن المجال $= [4, \infty)$

والمدى $= [-2, \infty)$

73

حاول أن تحل

4 (a) ارسم بيانيًّا: $y = \sqrt{x-2} + 1$

عيّن المجال والمدى للدالة.

(b) إذا تم إزاحة بيان الدالة: $y = \sqrt{x}$، 5 وحدات يمينًا 2 وحدة إلى الأسفل.

اكتب معادلة الدالة الناتجة عن الإزاحة.

يمكنك استخدام دالة الجذر التربيعي لتمثيل مواقف حياتية.

مثال (5) الصلة بالواقع

مقاس شاشة إعلانات هو طول قطر الشاشة «d» بالبوصة (in).

المعادلة: $d = \sqrt{2A}$، تقدر طول قطر شاشة إعلانات بالمساحة A.

لنفرض أن تاجرًا يريد شراء شاشة إعلانات مساحتها ضعف مساحة شاشته القديمة التي مساحتها $100\ \text{in}^2$، فما مقاس الشاشة التي يجب أن يشتريها؟

الحل:

مساحة الشاشة الجديدة $2 \times 100\ \text{in}^2$ أو $200\ \text{in}^2$.

الطريقة الأولى: استخدام التعويض

استخدام دالة الجذر التربيعي $d = \sqrt{2A}$

عوض بـ 200 عن A $= \sqrt{2(200)}$

يجب أن يشتري شاشة 20 in $= \sqrt{400} = 20$

الطريقة الثانية: الربط بالتكنولوجيا (إثرائي)

استخدام الآلة الحاسبة البيانية.

أدخل $y = \sqrt{2x}$.

اقرأ قيمة y عند $x = 200$

يجب أن يشتري شاشة 20 in

ملاحظة: $1\ \text{in} = 2.54\ \text{cm}$

حاول أن تحل

5 إذا كان لدى تاجر شاشة إعلانات قياسها 42 in (طول القطر 42 in).

فما هي مساحة الشاشة علمًا بأن المعادلة: $d = \sqrt{2A}$ تحدد العلاقة بين طول القطر d والمساحة A لشاشة الإعلانات؟

74

2 (a) $y = \dfrac{3x+1}{2}$

(b) $y = \dfrac{x+1}{2}$

3 $y = (x+3)^2 - 4$

لإيجاد المعكوس نبدل بين x, y

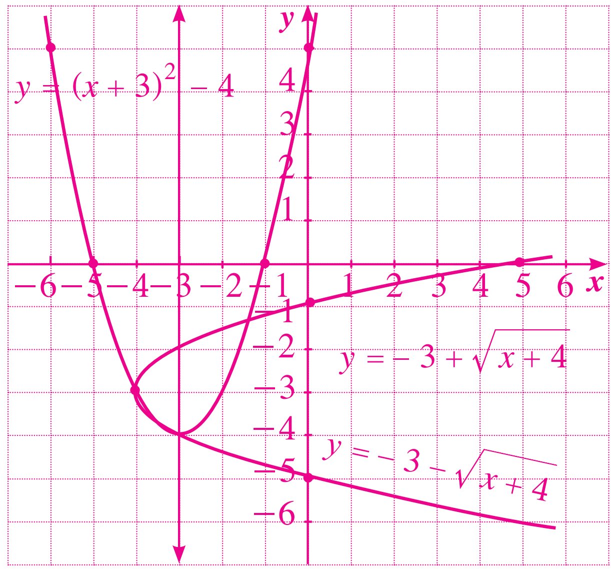
$x = (y+3)^2 - 4$ ومنه $y = -3 \pm \sqrt{x+4}$

فيكون لدينا دالتان:

$y_1 = -3 + \sqrt{x+4}$

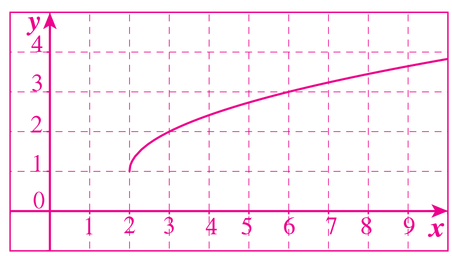
$y_2 = -3 - \sqrt{x+4}$

انظر الرسم البياني:



4 (a) $y = \sqrt{x-2} + 1$

المجال: $x \geq 2$، المدى: $y \geq 1$



(b) المعادلة الناتجة عن الإزاحة: $y = \sqrt{x-5} - 2$

5 مساحة الشاشة: $882\ \text{in}^2$

2–6: حل المتباينات

1 الأهداف

- يحل متباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يحل متباينات تتضمن حدوديات نسبية في متغير واحد.
- يوجد مجال دالة جذرية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

متباينة – حدوديات نسبية – متباينة من الدرجة الثانية.

3 الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب .

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد مجموعة حل المتباينة: $2x + 7 < 0$

(b) أوجد مجموعة حل المتباينة: $-3x + 4 \leq 7$

(c) حلّل المقدار: $x^2 - 5x + 6$ إلى عوامل خطية.

5 التدريس

تعرفت سابقًا إلى حلول المتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد، ومثّلت مجموعة الحلول على خط الأعداد.

في هذا الدرس، سوف تتعرف حلول متباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد فقط وأيضًا حلول متباينات ذات حدوديات نسبية بأشكال بسيطة. وهذه الحلول سوف تكون جبرية وبيانية لذا من المهم جدًّا الربط في ما بينها. فالحلول البيانية للمتباينة تساعد الطالب على فهم المتغير التابع y وعلاقته بالمتغير المستقل x.

2–6

حل المتباينات

Solving Inequalities

سوف تتعلم
- حل متباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- حل متباينات تتضمن حدوديات نسبية في متغير واحد.
- إيجاد مجال دالة جذرية.

المفردات والمصطلحات
- متباينة Inequality
- حدوديات نسبية Rational Expressions
- متباينة من الدرجة الثانية Quadratic Inequality

عمل تعاوني

أولًا: يبيّن الرسم البياني المقابل (1) منحنى $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ ومن الرسم أوجد:

a قيم x حيث $f(x) = 0$.

b قيم x حيث $f(x) > 0$.

c قيم x حيث $f(x) < 0$.

ثانيًا: يبيّن الرسم البياني المقابل (2) للدالة $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$

أجب عن الأسئلة a، b، c.

من العمل التعاوني السابق يمكننا أن نعبر عن اتحاد مجموعتي القيم $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ بصورة أخرى وهي $\mathbb{R}/[1, 5]$.

يبيّن الجدول التالي كيفية كتابة اتحاد فترتين بصورة أخرى في بعض الحالات.

رمز الفترة	صورة أخرى لرمز الفترة	تمثيل الفترة على خط الأعداد
$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R}/[a, b]$	a b
$(-\infty, a] \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R}/(a, b]$	a b
$(-\infty, a) \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R}/[a, b)$	a b
$(-\infty, a] \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R}/(a, b)$	a b

تذكر: إذا كان $a \times b = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$

مثال (1)

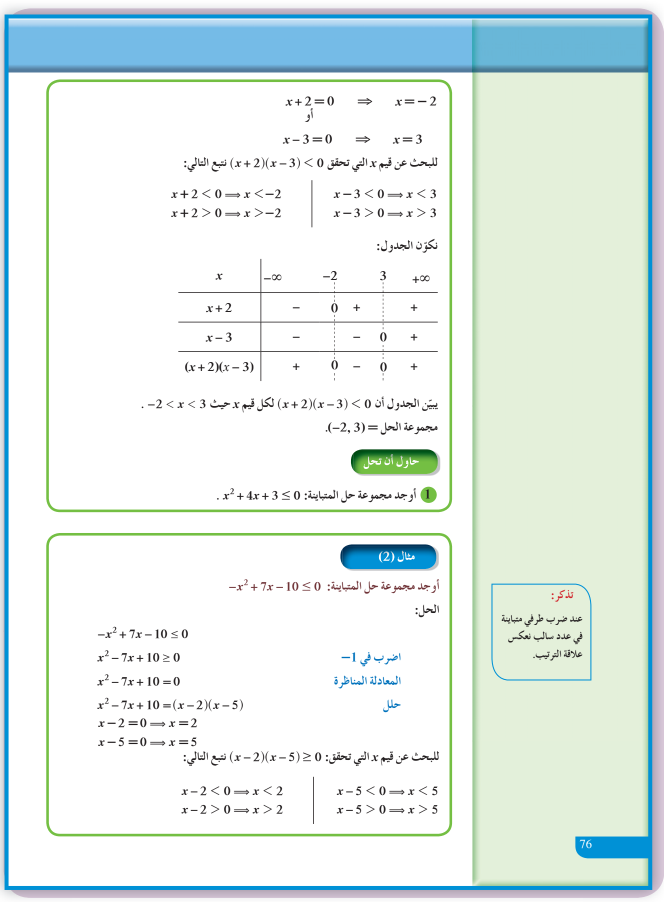
أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 - x - 6 < 0$.

الحل:

المعادلة المناظرة $x^2 - x - 6 = 0$

نحلل $(x+2)(x-3) = 0$

75



$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

أو

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

للبحث عن قيم x التي تحقق $(x+2)(x-3) < 0$ نتبع التالي:

$x - 3 < 0 \Longrightarrow x < 3$	$x + 2 < 0 \Longrightarrow x < -2$
$x - 3 > 0 \Longrightarrow x > 3$	$x + 2 > 0 \Longrightarrow x > -2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-2		3	$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$

يبيّن الجدول أن $(x+2)(x-3) < 0$ لكل قيم x حيث $-2 < x < 3$.

مجموعة الحل $= (-2, 3)$.

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $-x^2 + 7x - 10 \leq 0$

الحل:

$-x^2 + 7x - 10 \leq 0$

اضرب في -1 $x^2 - 7x + 10 \geq 0$

المعادلة المناظرة $x^2 - 7x + 10 = 0$

حلل $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$

$x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$

$x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$

للبحث عن قيم x التي تحقق: $(x-2)(x-5) \geq 0$ نتبع التالي:

$x - 5 < 0 \Longrightarrow x < 5$	$x - 2 < 0 \Longrightarrow x < 2$
$x - 5 > 0 \Longrightarrow x > 5$	$x - 2 > 0 \Longrightarrow x > 2$

تذكر: عند ضرب طرفي متباينة في عدد سالب نعكس علاقة الترتيب.

76

في المثالين (2) ,(1)

نلاحظ أن تحليل المقدار إلى عوامل خطية، ثم إيجاد مجموعة الحلول لكل عامل استنادًا إلى ما تعلمه الطالب في مرحلة سابقة، ثم التعبير عن مجموعة حل متباينة كل عامل بجدول يساعد على إيجاد مجموعة حل المتباينة من الدرجة الثانية.

في المثال (3)

يمكن استخدام هذا المثال في مواقف حياتية يحتاج إليها الأشخاص إذا كان لديهم شروط محددة في الإنشاءات والبناء.

في المثالين (5) ,(4)

يساعدان كثيرًا على فهم كيفية إيجاد مجموعة الحل عندما يكون لدينا متباينات من حدوديات نسبية. وذلك باستخدام الجدول لكل من حدوديات البسط والمقام.

في المثالين (7) ,(6)

يعالجان إشكالية العامل المشترك بين البسط والمقام في المتباينة الحدودية النسبية وهذا مهم جدًّا. ركز انتباه الطلاب إلى قيمة المتغير x عند تبسيط الحدودية النسبية، حيث لا يصح التبسيط مع العدد صفر.

في المثال (8)

من المهم جدًّا التركيز على طريقة إيجاد مجموعة الحل في استخدام الرسم البياني.

راجع مع الطلاب مجموعة الحل في فقرة «عمل تعاوني».

أعط أمثلة مشابهة، ومن ثم يمكن الانتقال إلى إيجاد مجموعة الحل لمتباينات تربط بين دالتين $f(x)$,$g(x)$

6 الربط

يمكن تعميم فكرة المثال (3) لاستخدامها في إقامة سور من الشريط الشائك حول مساحة من الأرض مستطيلة الشكل ومحاولة إيجاد طول هذه الحديقة وعرضها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في المتباينة ذات الحدوديات النسبية فيستخدمون الضرب التقاطعي.

أرشدهم إلى الطريقة الصحيحة وأخبرهم أن ذلك لا يصح إلا في المعادلة.

وقد يخطئ الطلاب في استبعاد أصفار المقام من مجموعة الحل. أرشدهم إلى تأكيد استبعادها بعد الاختصار.

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

يبيّن الجدول أن $(x-2)(x-5) \geq 0$ لكل قيم x حيث $x \leq 2$ أو $x \geq 5$.

$\therefore$ مجموعة الحل $= (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

أو $\mathbb{R} / (2, 5)$

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المتباينة: $-2x^2 + 5x - 3 > 0$.

مثال (3) **تطبيقات حياتية**

صمم مهندس مخططًا لحديقة منزل على شكل مستطيل طول أحد بعديها x ومحيطها 20 m.

a ما المجال الواقعي للمتغير x؟

b إذا اعتبرنا f دالة مساحة هذا المستطيل، فعبر عنها بدلالة x.

c ما مجموعة حل المتباينة $f(x) < 24$ ؟

d ما مجموعة حل المتباينة $f(x) > 9$ ؟

الحل:

a

$P = 2(L + W) = 20\ m$

$L + W = \frac{20}{2} = 10\ m$

إذا اعتبرنا أحد البعدين يساوي x $\therefore$ البعد الآخر $= 10 - x$

$\therefore$ المجال الواقعي للمتغير هو:

$0 < x < 10$

$x \in (0, 10)$

b المساحة = الطول × العرض

$f(x) = L \times W$

$f(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$

c $f(x) < 24$

$-x^2 + 10x < 24 \Longrightarrow -x^2 + 10x - 24 < 0$

77

تذكر: يمكنك ضرب طرفي المتباينة في (-1) للسهولة

المعادلة المناظرة $-x^2 + 10x - 24 = 0$

حلل $(-x + 4)(x - 6) = 0$

$x - 6 = 0$ أو $-x + 4 = 0$

$\therefore x = 6 \quad \therefore x = 4$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(-x + 4)(x - 6) < 0$ نتبع التالي:

$x - 6 < 0 \Longrightarrow x < 6$	$-x + 4 < 0 \Longrightarrow x > 4$
$x - 6 > 0 \Longrightarrow x > 6$	$-x + 4 > 0 \Longrightarrow x < 4$

نكوّن الجدول مع مراعاة $x \in (0, 10)$

x	0		4		6		10
$-x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-x+4)(x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

من الجدول: مجموعة الحل $= (0, 4) \cup (6, 10)$

d $f(x) > 9$

$-x^2 + 10x > 9 \Longrightarrow -x^2 + 10x - 9 > 0$

المعادلة المناظرة $-x^2 + 10x - 9 = 0$

حلل $(-x + 1)(x - 9) = 0$

$x - 9 = 0$ أو $-x + 1 = 0$

$\therefore x = 1$

$\therefore x = 9$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(-x + 1)(x - 9) > 0$ نتبع التالي:

$x - 9 < 0 \Longrightarrow x < 9$	$-x + 1 < 0 \Longrightarrow x > 1$
$x - 9 > 0 \Longrightarrow x > 9$	$-x + 1 > 0 \Longrightarrow x < 1$

نكوّن الجدول: مع مراعاة $x \in (0, 10)$

x	0		1		9		10
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-x+1)(x-9)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

من الجدول: مجموعة الحل $= (1, 9)$.

78

8 التقييم

تابع باهتمام أعمال الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم يجدون مجموعة الحلول الصحيحة في كل متباينة. ساعدهم على فهم الحلول في الرسوم البيانية.

اختبار سريع

1. أوجد مجموعة حل المتباينة: $-x^2+4x+5 \geq 0$

   $x \in [-1,5]$

2. لتكن x عرض مستطيل محيطه يساوي $30\ \text{m}$

   أوجد مساحة هذا المستطيل بدلالة x، ثم قيم x التي تحقق $f(x) \geq 14$

   نصف المحيط: $\frac{30}{2} = 15$

   الطول: $x - 15$، حيث $x \in (0,15)$

   المساحة: $f(x) = x(15-x) = -x^2+15x$

   $f(x) \geq 14$ تعطي: $-x^2+15x-14 \geq 0$

   نستنتج أن: $x \in [1,14]$

3. أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{4x+3}{x-2} \geq 3$، حيث $x \neq 2$

   $x \in (-\infty,-9] \cup (2,+\infty)$

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

أولًا:

(a) $x = 1\ ,\ x = 5$

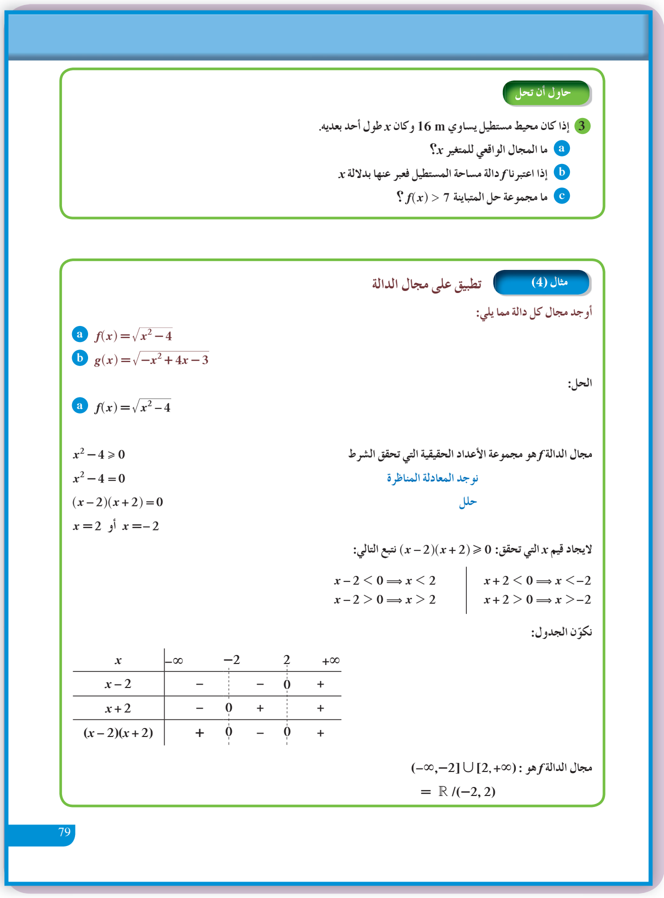
(b) $x < x < 5$

(c) $x < 1$ أو $x > 5$

ثانيًا: **(a)** $f(x) = 0$ عند $x = 3$

(b) $f(x) > 0$ إذا $x < 2$ أو $x > 3$

(c) $f(x) < 0$ إذا $2 < x < 3$



حاول أن تحل

3. إذا كان محيط مستطيل يساوي 16 m وكان x طول أحد بعديه.

   a. ما المجال الواقعي للمتغير x؟

   b. إذا اعتبرنا f دالة مساحة المستطيل فعبر عنها بدلالة x

   c. ما مجموعة حل المتباينة $f(x) > 7$؟

مثال (4) تطبيق على مجال الدالة

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

b. $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

الحل:

a. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

مجال الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $x^2-4 \geqslant 0$

نوجد المعادلة المناظرة $x^2-4=0$

حلل $(x-2)(x+2)=0$

$x=2$ أو $x=-2$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(x-2)(x+2) \geqslant 0$ نتبع التالي:

$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$ | $x-2<0 \Longrightarrow x<2$

$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$ | $x-2>0 \Longrightarrow x>2$

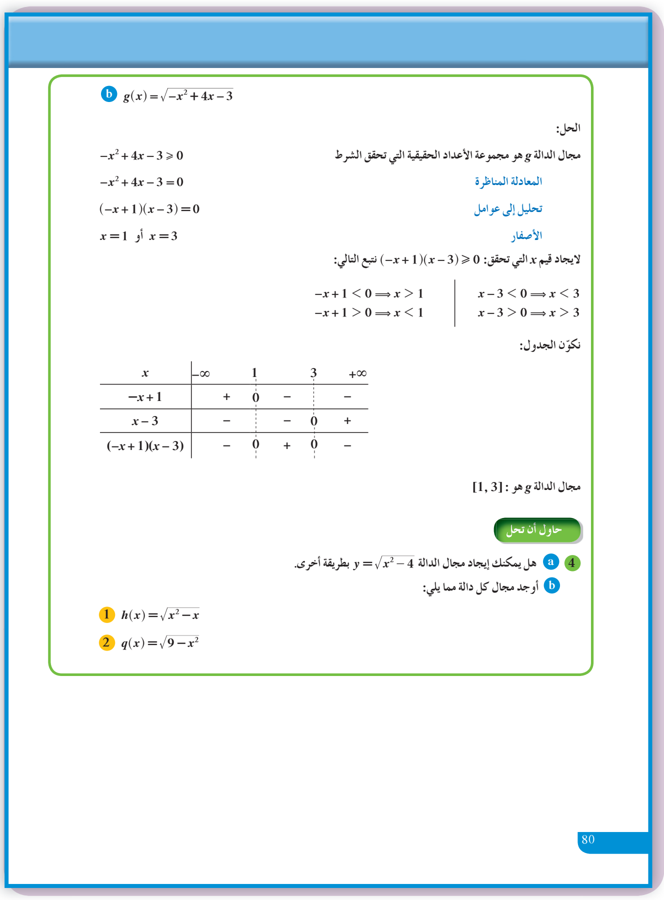
نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

مجال الدالة f هو: $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

$= \mathbb{R}/(-2,2)$

79



b. $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

الحل:

مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $-x^2+4x-3 \geqslant 0$

المعادلة المناظرة $-x^2+4x-3=0$

تحليل إلى عوامل $(-x+1)(x-3)=0$

الأصفار $x=1$ أو $x=3$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(-x+1)(x-3) \geqslant 0$ نتبع التالي:

$x-3<0 \Longrightarrow x<3$ | $-x+1<0 \Longrightarrow x>1$

$x-3>0 \Longrightarrow x>3$ | $-x+1>0 \Longrightarrow x<1$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-x+1)(x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

مجال الدالة g هو: $[1,3]$

حاول أن تحل

4. a. هل يمكنك إيجاد مجال الدالة $y=\sqrt{x^2-4}$ بطريقة أخرى.

   b. أوجد مجال كل دالة مما يلي:

   1. $h(x)=\sqrt{x^2-x}$

   2. $q(x)=\sqrt{9-x^2}$

80

«حاول أن تحل»

1. $[-3, -1]$

2. $(1, 1.5)$

3. **(a)** نصف المحيط: $\frac{16}{2} = 8$

$8 - x$ = عرض المستطيل أي $8 - x > 0$ ومنه

$0 < x < 8$

(b) $f(x) = x(8 - x)$

(c) $f(x) > 7$ تعطي $x(8 - x) > 7$

$-x^2 + 8x - 7 > 0 \Rightarrow 1 < x < 7$

4. **(a)** نعم، باستخدام متباينة المطلق كالتالي:

$x^2 - 4 \geqslant 0$

$x^2 \geqslant 4$

$|x| \geqslant 2$

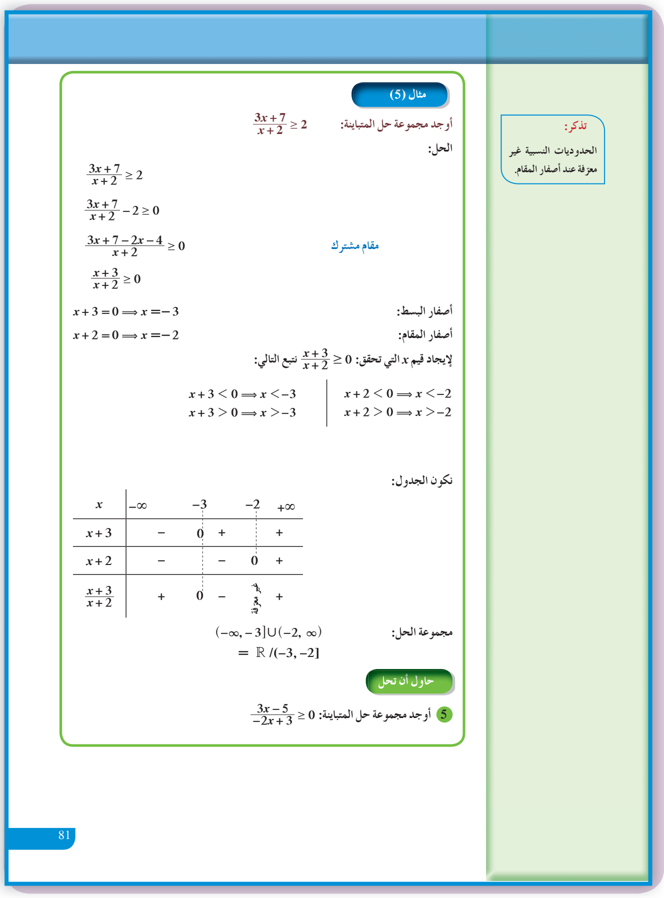
$x \geqslant 2$ أو $x \leqslant -2$

$\therefore$ مجال الدالة هو: $R \setminus (-2, 2)$

(b) **(1)** $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

(2) $[-3, 3]$

5. $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{3}$



مثال (5)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

الحل:

$\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

$\frac{3x+7}{x+2} - 2 \geq 0$

$\frac{3x+7-2x-4}{x+2} \geq 0$ مقام مشترك

$\frac{x+3}{x+2} \geq 0$

أصفار البسط: $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$

أصفار المقام: $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $\frac{x+3}{x+2} \geq 0$ نتبع التالي:

$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$ | $x+3<0 \Longrightarrow x<-3$

$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$ | $x+3>0 \Longrightarrow x>-3$

نكون الجدول:

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+3}{x+2}$		$+$	0	$-$	غير معرفة	$+$	

مجموعة الحل: $(-\infty, -3] \cup (-2, \infty)$

$= \mathbb{R} / (-3, -2]$

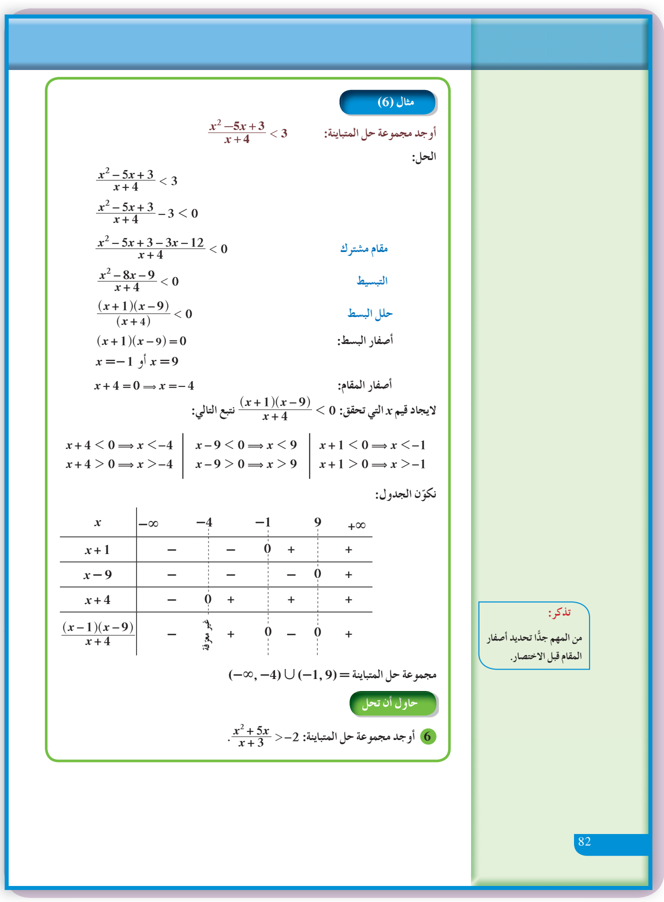
حاول أن تحل

5. أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

تذكر:

الحدوديات النسبية غير معرفة عند أصفار المقام.

81



مثال (6)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$

الحل:

$\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$

$\frac{x^2-5x+3}{x+4} - 3 < 0$

$\frac{x^2-5x+3-3x-12}{x+4} < 0$ مقام مشترك

$\frac{x^2-8x-9}{x+4} < 0$ التبسيط

$\frac{(x+1)(x-9)}{(x+4)} < 0$ حلل البسط

أصفار البسط: $(x+1)(x-9)=0$

$x=-1$ أو $x=9$

أصفار المقام: $x+4=0 \Longrightarrow x=-4$

لايجاد قيم x التي تحقق: $\frac{(x+1)(x-9)}{x+4} < 0$ نتبع التالي:

$x+1<0 \Longrightarrow x<-1$ | $x-9<0 \Longrightarrow x<9$ | $x+4<0 \Longrightarrow x<-4$

$x+1>0 \Longrightarrow x>-1$ | $x-9>0 \Longrightarrow x>9$ | $x+4>0 \Longrightarrow x>-4$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-4		-1		9		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-9$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(x-1)(x-9)}{x+4}$		$-$	غير معرفة	$+$	0	$-$	0	$+$	

مجموعة حل المتباينة $= (-\infty, -4) \cup (-1, 9)$

حاول أن تحل

6. أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2+5x}{x+3} > -2$.

تذكر:

من المهم جدًا تحديد أصفار المقام قبل الاختصار.

82

مثال (7)

أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$.

الحل:

تحليل البسط: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

تكتب المتباينة: $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)} > 0$

قبل التبسيط نحدد أصفار المقام: $x-3=0 \Longrightarrow x=3$

نبسط المتباينة: $\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} > 0 \qquad x \neq 3$

$x-2>0 \Longrightarrow x>2$

القيمة $x=3$ غير مقبولة لأنها صفر المقام

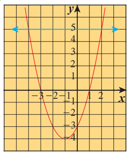
مجموعة الحل $= (2,\infty)/\{3\}$

$= (2,3)\cup(3,\infty)$

حاول أن تحل

7 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-49}{x+7} \le 0$.

مثال (8) تطبيق على الرسم البياني



يبيّن الرسم البياني منحنى الدالة:

$f(x)=x^2+2x-3$ والمستقيم $y=5$

a ادرس بيانيًّا المتباينة $y > f(x)$.

b ادرس بيانيًّا المتباينة $y < f(x)$.

c تحقق حسابيًّا من النتائج التي حصلت عليها في a و b.

الحل:

a في الشكل يقطع المستقيم $y=5$ منحنى الدالة f في النقطتين $(2,5)$، $(-4,5)$

نلاحظ أن $f(x)<5 \quad \forall\ x\in(-4,\ 2)$

b نلاحظ أن $f(x)>5 \quad \forall\ x\in(-\infty,\ -4)\cup(2,\ \infty)$

c للتحقق حسابيًّا:

نضع:

$f(x)<5$

$x^2+2x-3<5$

$x^2+2x-8<0$

المعادلة المناظرة $x^2+2x-8=0$

$(x-2)(x+4)=0$

$x=2$ أو $x=-4$

لإيجاد قيم x التي تحقق $(x-2)(x+4)<0$ نتبع التالي:

83

---

6 $\frac{(x+1)(x+6)}{(x+3)} > 0$

x	$-\infty \quad -6$	-3	-1	∞
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+6$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(x+1)(x+6)}{(x+3)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\therefore$ مجموعة حل المتباينة $= (-6,-3)\cup(-1,\ \infty)$

7 $\frac{(x-7)(x+7)}{x+7} < 0$

يمكن تبسيط الحدودية النسبية إذا كان العامل

$x+7\neq 0$

فيصبح $x\neq -7$ ومنه $x-7<0 \Rightarrow x<7$

لذا مجموعة الحل: $(-\infty,-7)\cup(-7,\ 7)$

تمرَّنْ 2−6

حل المتباينات

Solving Inequalities

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

(a) $(x-3)(2x+5)<0$ **(b)** $2x^2-3x-5\ge 0$ **(c)** $-3x^2+2x<-1$

(d) $4x^2+12x+9\ge 0$ **(e)** $-9x^2+6x<1$ **(f)** $21+4x>x^2$

(2) لنعتبر عرض مستطيل $(x-2)$ cm وطوله $2x$ cm

(a) وضّح لماذا يجب أن تكون قيمة x أكبر من 2

(b) اكتب المعادلة التي تعطي مساحة هذا المستطيل.

(c) علمًا أنّ x عدد صحيح، أوجد قيمة x لتكون مساحة المستطيل بين $90\ \text{cm}^2$ و $100\ \text{cm}^2$، ثم استنتج طول المستطيل وعرضه.

في التمارين (3–9)، حلّ المتباينات التالية:

(3) $\frac{x-1}{x^2-4}<0$ **(4)** $\frac{x^2-1}{x^2+1}\le 0$ **(5)** $\frac{x^2+x-12}{x^2-4x+4}>0$

(6) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}\le 0$ **(7)** $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}>0$ **(8)** $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}\geqslant 0$

❋ **(9)** $\frac{2x+1}{x}+\frac{3x}{1-2x}\leqslant 0$

(10) عمر جدّ أحمد يساوي 8 أضعاف عمر أحمد. بعد 3 سنوات، سيتخطى تربيع عمر أحمد ضعف عمر جدّه (للمرّة الأولى). أوجد عمر أحمد وعمر جدّه الآن.

(11) لنعتبر معادلة المستقيم $(d): y=-1$، أوجد بيانيًّا الحل لـ $f(x)=y,\ f(x)>y,\ f(x)<y$ في كلّ من الحالات التالية:

(a) $f(x)=2x^2+4x-1$ **(b)** $f(x)=x^2+1$ **(c)** $f(x)=-x^2+4x-1$

(12) لنعتبر معادلة المستقيم $(d): y=2$، أوجد بيانيًّا الحل لـ $f(x)\ge y,\ f(x)<y$ في كلّ من الحالتين التاليتين:

(a) $f(x)=3x^2+2$ **(b)** $f(x)=x^2-x-2$

32

8 يقطع المستقيم $x = -3$ منحنى الدالة:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ في نقطتين، حيث الإحداثيات السينية $x = 2$, $x = 4$

$2 < x < 4$ إذا كانت ، $f(x) < y$

$x \geq 4$ أو $x \leq 2$ إذا كانت ، $f(x) \geq y$

$x - 4 < 0 \Longrightarrow x < -4$ | $x - 2 < 0 \Longrightarrow x < 2$

$x + 4 > 0 \Longrightarrow x > -4$ | $x - 2 > 0 \Longrightarrow x > 2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول نستنتج: $\forall x \in (-4, 2)$ $f(x) < 5$

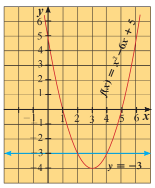
$\forall x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$ $f(x) > 5$

حاول أن تحل

8 يبيّن الرسم البياني منحنى الدالة:

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ والمستقيم $y = -3$.

ادرس بيانيًّا: $f(x) \geq y$, $f(x) < y$, $f(x) = y$



84

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5 — 1)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة:

(1) مجموعة حل المتباينة $(x+3)^2 > 0$ هي $\mathbb{R}$ — (a) (b)

(2) كل x ينتمي للفترة $(0, \infty)$ هو حل للمتباينة $\frac{x-1}{x^2-x} \geq 0$ — (a) (b)

(3) مجموعة حل المتباينة $(x+3)^2 + 2 < 1$ هي المجموعة الخالية ϕ — (a) (b)

(4) مجموعة حل المتباينة $\frac{x+2}{x+1} \geq 1$ هي $(-1, \infty)$ — (a) (b)

(5) مجموعة حل المتباينة $(-x-3)^2 < 0$ هي $\{3\}$ — (a) (b)

في التمارين (13—6)، ظلل رمز الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة.

(6) المعادلة المناظرة للمتباينة $-3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) \leq 2$ هي:

(a) $-3x^2 + 2x - \frac{5}{3} = 0$ (b) $x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$ (c) $-3x^2 + 4x - 3 = 0$ (d) $-3x^2 + 2x + 1 = 0$

(7) إن مجموعة حل المتباينة $(1-2x)(4+5x) < 0$ هي:

(a) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

(c) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$ (d) $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

(8) إن مجموعة حل المتباينة $\frac{(x^2+1)(x-3)}{x-3} > 0$ هي:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^*$ (c) $\mathbb{R} - \{3\}$ (d) $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

(9) المتباينة التي مجموعة حلها $[-2, 3]$ هي:

(a) $x^2 - x - 6 < 0$ (b) $x^2 - x - 6 \leq 0$ (c) $x^2 - x - 6 > 0$ (d) $x^2 - x - 6 \geq 0$

(10) مجموعة حل المتباينة $x^2 + |x| > 0$ هي:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R} - \{0\}$ (d) ليس أيًّا مما سبق صحيحًا

(11) إذا كانت $f(x) = \frac{x(x+1)}{(2x-3)(3x+2)}$ فإن قيم x التي تجعل f غير معرّفة هي:

(a) $\left\{\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$ (b) $\left\{\frac{-2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ (c) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ (d) $\left\{\frac{-2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$

(12) مجموعة حل المعادلة $x^2 + |x| - 2 = 0$ هي:

(a) $\{1, -2\}$ (b) $\{-1, 2\}$ (c) $\{-1, 1\}$ (d) $\{-2, 2\}$

(13) إذا كانت $f(x) = -3x^2 + x - \frac{1}{12}$ فإن قيم x التي تجعل $f(x)$ غير موجبة ولا تساوي الصفر هي:

(a) $(-\infty, 0)$ (b) $(0, \infty)$ (c) $\left\{\frac{1}{6}\right\}$ (d) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{6}\right\}$

33

المرشد لحل المسائل

إجابات «مسائل إضافية»

1. $\dfrac{300}{x} + \dfrac{300}{x-20} = 7.5$

سيكون معدل سرعته ذهابًا 91 km/h تقريبًا ومعدل سرعته إيابًا 71 km/h تقريبًا.

2. **(a)** $f(100) = -(100)^2 + 250(100) - 2\,400$

فيكون ربحه 12 600

(b)

$$f(x) = -(x^2 - 250x + 15\,625 - 15\,625) - 2\,400$$

$$f(x) = -(x - 125)^2 + 13\,225$$

يجب أن يبيع الحاسوب بمبلغ 125 دينارًا.

(c) أكبر ربح هو 13 225 دينارًا.

المرشد لحل المسائل

المسافة بين المدينة A والمدينة B على الطريق السريع هي 300 km قاد خالد سيارته من المدينة A باتجاه المدينة B بمعدل سرعة x km/h، وفي طريق العودة من المدينة B إلى المدينة A، كان معدل سرعته $(x-20)$ km/h

استغرقت هذه الرحلة 5 h 30 min

أوجد معدل سرعة السيارة ذهابًا وإيابًا.

كيف يمكنني حل هذه المسألة؟

أنا أعرف أن المسافة = الزمن × معدل السرعة.

لدي معدل السرعة x في الذهاب، ثم $x - 20$ في العودة.

أنا أعرف أن مجموع الزمن المستغرق هو: 5 h 30 min ويمكن تحويلها إلى 5.5

أنا أعرف المسافة بين المدينتين 300 km باستخدام القاعدة اكتب:

الزمن = المسافة / معدل السرعة — $\dfrac{300}{x} + \dfrac{300}{x-20} = 5.5$

المقام المشترك — $5.5x^2 - 710x + 6\,000 = 0$

بالتبسيط — $1.1x^2 - 142x + 1\,200 = 0$

أحلل المعادلة التربيعية إلى عوامل أولية:

بالقسمة على 1.1 — $x^2 - \dfrac{142}{1.1}x + \dfrac{1\,200}{1.1} = 0$

المربع الكامل — $\left(x - \dfrac{71}{1.1} - \dfrac{61}{1.1}\right)^2 - \dfrac{3\,721}{1.21} = 0$

التحليل — $\left(x - \dfrac{71}{1.1} - \dfrac{61}{1.1}\right)\left(x - \dfrac{71}{1.1} + \dfrac{61}{1.1}\right) = 0$

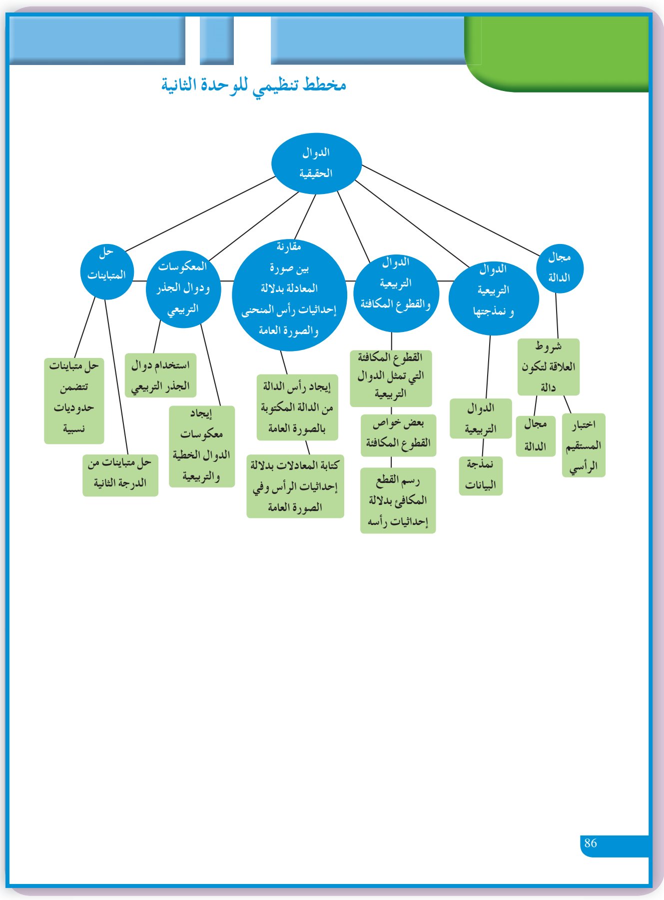
ومنه أحصل على قيمة مقبولة $x = 120$

أي أن معدل سرعة خالد في الذهاب هو 120 km/h، ومعدل سرعته في العودة 100 km/h

مسائل إضافية

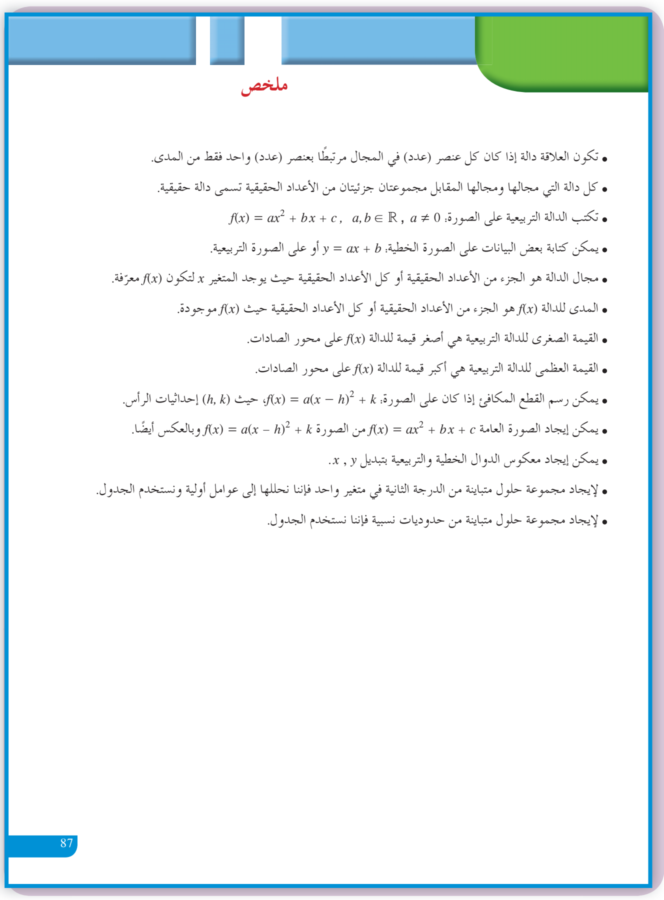
1. كم سيكون معدل سرعة السيارة إذا أراد خالد أن تكون مدة الرحلة المستغرقة 7 h 30 min؟
2. يبيع أحد المحلات الحواسيب، وقد لاحظ أن ربحه يمكن نمذجته بالمعادلة: $f(x) = -x^2 + 250x - 2\,400$، حيث x ثمن الحاسوب الواحد بالدينار الكويتي.
   - a) إذا باع الحاسوب الواحد بسعر 100 دينار، فما هو ربحه؟
   - b) إذا أراد البائع تحقيق أكبر ربح، فبكم سوف يبيع الحاسوب الواحد؟
   - c) ما قيمة أكبر ربح؟

85



مخطط تنظيمي للوحدة الثانية

86



ملخص

- تكون العلاقة دالة إذا كان كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر (عدد) واحد فقط من المدى.
- كل دالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.
- تكتب الدالة التربيعية على الصورة: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
- يمكن كتابة بعض البيانات على الصورة الخطية: $y = ax + b$ أو على الصورة التربيعية.
- مجال الدالة هو الجزء من الأعداد الحقيقية أو كل الأعداد الحقيقية حيث يوجد المتغير x لتكون $f(x)$ معرّفة.
- المدى للدالة $f(x)$ هو الجزء من الأعداد الحقيقية أو كل الأعداد الحقيقية حيث $f(x)$ موجودة.
- القيمة الصغرى للدالة التربيعية هي أصغر قيمة للدالة $f(x)$ على محور الصادات.
- القيمة العظمى للدالة التربيعية هي أكبر قيمة للدالة $f(x)$ على محور الصادات.
- يمكن رسم القطع المكافئ إذا كان على الصورة: $f(x) = a(x-h)^2 + k$، حيث (h, k) إحداثيات الرأس.
- يمكن إيجاد الصورة العامة $f(x) = ax^2 + bx + c$ من الصورة $f(x) = a(x-h)^2 + k$ وبالعكس أيضًا.
- يمكن إيجاد معكوس الدوال الخطية والتربيعية بتبديل x , y.
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد فإننا نحللها إلى عوامل أولية ونستخدم الجدول.
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من حدوديات نسبية فإننا نستخدم الجدول.

87

اختبار الوحدة الثانية

في التمرينين (2—1)، أوجد مجال كلّ من الدوال التالية:

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^2-4}+2}{2x-3}$ **(2)** $g(x)=\dfrac{\sqrt{-x+2}-3}{\sqrt{x^2-4}}$

(3) يبيّن الجدول العلاقة بين ربح إحدى الشركات y بآلاف الدنانير وعدد القطع المنتجة x

اكتب دالة تربيعية تنمذج العلاقة بين x, y

x	1	2	3	4	5
y	0	−1	0	3	8

في التمرينين (5—4)، ارسم كل مجموعة بيانات مما يلي، ثم اكتب معادلة كلّ منها:

(4)

x	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	−1	−3	−1	5	15	29

(5)

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−2	1	6	13	22

في التمرينين (7—6)، ارسم منحنى القطع المكافئ إذا عرفت إحداثيات الرأس ونقطة إضافية يمر بها.

(6) الرأس $V(0,0)$, $A(-3,3)$ **(7)** الرأس $V(1,5)$, $A(2,11)$

في التمارين (11—8)، ارسم كل دالة تربيعية. ثم حدّد إحداثيات الرأس.

(8) $f(x)=x^2-7$ **(9)** $f(x)=x^2+2x+6$

(10) $f(x)=-x^2+5x-3$ **(11)** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-8$

في التمارين (15—12)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(12) $y=4x+1$ **(13)** $y=\frac{2}{3}x-6$ **(14)** $y=x^2-10$ **(15)** $y=(x+2)^2-3$

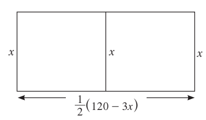
(16) **سؤال مفتوح:** اكتب معادلة دالة، حيث منحنى معكوسها هو قطع مكافئ.

في التمارين (20—17)، اكتب كل دالة بدلالة إحداثيات الرأس. ثم ارسم منحنى القطع المكافئ وحدّد إحداثيات الرأس.

(17) $y=x^2-6x+5$ **(18)** $y=-x^2+8x-10$

(19) $y=2x^2-3x+1$ **(20)** $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-9$

(21) أوجد أكبر مساحة لحديقة مكونة من مستطيلين لهما ضلع مشترك ويمكن إحاطتهما بشريط طوله 120 m. (انظر الصورة المقابلة).



(22) أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يلي:

(a) $x^2-8x+15\le 0$ **(b)** $-x^2+7x-120<0$ **(c)** $\dfrac{3x-4}{x-2}\ge -1\,(x\ne 2)$

(23) **(a)** ارسم منحنى الدالة: $f(x)=-x^2+4x-3$، والخط المستقيم $y=-8$ على شبكة إحداثيات واحدة.

(b) ادرس بيانيًّا: $f(x)>-8$, $f(x)<-8$, $f(x)=-8$

(c) تحقّق حسابيًّا من النتائج التي حصلت عليها في الفقرة **(b)**.

تمارين إثرائية

في التمرينين (2—1)، أوجد مجال كلّ من الدوال التالية:

(1) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}-\dfrac{x}{\sqrt{2+x}}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{9-x^2}}$ **(2)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2+7}-4}$

(3) في إحدى مباريات كرة القدم، تواجد أحد اللاعبين منفردًا وجهًا لوجه مع حارس مرمى الفريق المنافس فقرر رفع الكرة فوق الحارس آملًا ألا تعلو مرمى الفريق المنافس، وكان هذا اللاعب على بعد 16 m من خط المرمى، بينما الحارس يقف على بعد 7 m من اللاعب. ينمذج مسار الكرة المنطلقة من الأرض عبر تسديدة اللاعب على شكل قطع مكافئ معادلته: $y=a(x-10)^2+3$

(a) أوجد قيمة a معتبرًا نقطة انطلاق تسديدة اللاعب هي نقطة الأصل.

(b) علمًا أن الحارس عند استخدام يديه يصل إلى ارتفاع 2.53 m وأن ارتفاع المرمى هو 2.44 m فهل ستتخطى الكرة الحارس؟ وهل سيسجل اللاعب هدفًا؟

(4) في إحدى دورات كرة المضرب، تواجد أحد اللاعبين على بعد 3 m من الشبكة، فقرر اللاعب الثاني المتواجد على الخط الخلفي من الملعب رفع الكرة فوق منافسه على أن تأتي الكرة داخل ملعب منافسه. علمًا أن طول ملعب كرة المضرب 23.8 m تتوسطه الشبكة التي تقسم الملعب إلى قسمين متساويين.

(a) إذا اعتبرنا أن مسار الكرة من مضرب اللاعب على ارتفاع 1 m على شكل قطع مكافئ معادلته: $y=-0.08(x-9)^2+k$ فما قيمة k؟

(b) ما الارتفاع الأقصى للكرة عن أرض الملعب؟

(c) هل ستتخطى الكرة اللاعب المنافس إذا كان أقصى ارتفاع يمكن الوصول إليه باستخدام مضربه هو 3.3 m؟

(d) هل ستسقط الكرة داخل ملعب اللاعب المنافس؟ إذا كانت إجابتك نعم، أوجد بعدها عن خط الملعب.

(5) **(a)** ارسم بيانيًّا منحنى الدالة: $y=x^2-4x$

(b) أوجد معكوس الدالة، ثم ارسمه على المستوى الإحداثي نفسه.

في التمارين (10—6)، حلّ كلًّا من المتباينات التالية:

(6) $(x-3)(x+2)>(x-3)(2x-1)$ **(7)** $4x^2-9\le(3-2x)(x+1)$

(8) $x^2(x-3)>0$ **(9)** $(x-6)^2(x-5)>0$

(10) $\dfrac{3x-1}{(2x-7)^2}\ge 0$

(11) **(a)** أكمل الجدولين التاليين. اكتب في الصف الأخير من كل منهما الفرق بين قيم y المتتالية.

جدول (1)

x	0	1	2	3	4	5
$y=2x$	0	2	4	6	8	10
الفرق	2	2				

جدول (2)

x	0	1	2	3	4	5
$y=2x^2$	0	2	8	18	32	50
الفرق	2	6				

(b) أي من الدالتين دالة تربيعية؟

(c) أي نمط تراه في الصف الأخير من الجدول (1)؟ ومن الجدول (2)؟

(d) كوّن جدولًا لكلّ من الدالتين: $y=-x+4\,,\,y=-x^2+4$ مستخدمًا قيم x نفسها في الفقرة **(a)**. هل ترى الأنماط نفسها كما في الفقرة **(c)**؟

(e) كيف تساعدك قيم y لمجموعة البيانات في توقع ما إذا كانت الدالة الخطية أو الدالة التربيعية هي النموذج الأفضل؟

(12) يبيّن الجدول التالي العلاقة بين عمق المياه في المحيط y بالأمتار (m) وسرعة التسونامي x (متر في الثانية m/s).

x	52	58	61	65	71	76	82	98
y	270.40	336.40	372.10	422.50	504.10	577.60	672.40	960.40

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذج العلاقة بين x, y ثم تحقق.

(استخدام الآلة الحاسبة)

الوحدة الثالثة: كثيرات الحدود Polynomials

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 3: دوال القوى ومعكوساتها

جزء 1: استكشاف دوال القوى ومعكوساتها.

جزء 2: الدوال الزوجية والدوال الفردية.

جزء 3: معكوس العلاقة (r^{-1}).

2 – 3: الدوال الحدودية

جزء 1: الدالة الحدودية.

جزء 2: سلوك النهاية.

3 – 3: العوامل الخطية لكثيرات الحدود

جزء 1: عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود.

4 – 3: قسمة كثيرات الحدود

جزء 1: القسمة المطولة.

جزء 2: استخدام القسمة التركيبية.

5 – 3: حل معادلات كثيرات الحدود

جزء 1: حل المعادلات بالتحليل.

جزء 2: الأصفار النسبية الممكنة.

مقدمة الوحدة


الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود

Polynomials

مشروع الوحدة: المنحنيات بالتصميم

1 مقدمة المشروع: يمكن اعتبار المنحنى المرسوم في الشكل أدناه لدالة كثيرة الحدود. تعد هذه الحقيقة محور تصميم السيارة الحديثة. حيث يقوم المصمم أولًا بتصميم أشكال النماذج وفق مقياس معين، يوضح التصميم الأشياء الصغيرة مثل مقابض الأبواب. وعندما تكتمل عملية النمذجة، يتحول كل منحنى في التصميم إلى معادلة تضبط على الحاسوب بواسطة المصمم ويمكن إجراء بعض التعديلات الطفيفة على المعادلة. عندما ينتهي التصميم تستخدم هذه المعلومات لصنع القوالب اللازمة لإنتاج السيارة.

2 الهدف: البحث عن تصميم سيارة أو أي شيء آخر له أجزاء منحنية، والرسم على ورقة رسم بياني منحنى الشيء الذي اخترت البحث عنه.

3 اللوازم: أوراق رسم، شبكة مربعات، آلة حاسبة بيانية، حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

نمذج غطاء محرك سيارة جديدة بالمعادلة:

$$y = 0.00143x^4 + 0.00166x^3 - 0.236x^2 + 1.53x + 0.739 \quad , \quad x > 0$$

بيان هذه المعادلة مبين إلى اليسار.

a لنفرض أنك مصمم السيارة، ارسم منحنى تراه مناسبًا أكثر لغطاء المحرك.

b ميّز 4 نقاط على المنحنى واكتب إحداثياتها.

c أوجد المعادلة التكعيبية المتوافقة مع هذه النقاط.

استخدم المعادلة: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

d اختر قسمًا آخر منحنيًا من السيارة ثم اكتب معادلة تنمذج هذا القسم.

5 التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة. نفذ ملصقًا لعرض تصميمك ورسومك البيانية التي استخدمتها.

دروس الوحدة

دوال القوى ومعكوساتها	الدوال الحدودية	العوامل الخطية لكثيرات الحدود	قسمة كثيرات الحدود	حل معادلات كثيرات الحدود
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

88

الجبر هو أحد المجالات المهمة في الرياضيات، وقد جاء اسمه في كتاب عالم الرياضيات والفلك «محمد بن موسى الخوارزمي» تحت عنوان «الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقارنة»، وقد شرح «الخوارزمي» في هذا الكتاب كيفية استخدام العمليات الجبرية التي تنظم إيجاد الحلول للمعادلات الخطيّة والتربيعيّة والتي تعتبر جزءًا من معادلات كثيرات الحدود.

والمتعارف عليه أن الجبر ينقسم إلى عدة فروع:

(أ) الجبر الابتدائي: يتم فيه دراسة خصائص الأعداد الحقيقية، وتستخدم الرموز للتعبير عن المتغيرات والثوابت. كما يتم دراسة العمليات على الأعداد وكثيرات الحدود وطرائق إيجاد جذورها.

(ب) الجبر التجريدي: يتم فيه دراسة البنى الجبرية، مثل المجموعات والزمر والحلقات والحقول وفضاء المتجهات...

(ج) الجبر الخطي: يتم فيه دراسة المتجهات، التحويلات الخطية، نظم المعادلات الخطية.

والمهم لدينا الآن هو أن الجبر الابتدائي يتم تدريسه للطلاب في المرحلة الثانوية، حيث يتوجه إلى معرفة الرياضيات ما بعد الأعداد فيتعامل مع كثيرات الحدود والمعادلات وطرائق إيجاد الجذور لها.

ويعتمد على العمليات الأساسية: الجمع ومعكوسه الطرح، وعلى الضرب ومعكوسه القسمة، كما يعتمد على رقمين لهما أهمية كبرى هما: الصفر ويسمى المحايد الجمعي، والواحد ويسمى المحايد الضربي.

وفي الختام لا بد من الإشارة إلى النظرية الأساسية في علم الجبر لعالم الرياضيات «فريديريك غاوس» «Frederic Gauss» والتي تنص على ما يلي: «كل معادلة كثيرة الحدود، غير الحد الثابت، لها على الأقل جذر واحد».

مشروع الوحدة

يوفر هذا المشروع فرصة للطلاب لتعرف ناحية مهمة من فنون التصميم، وذلك باستخدام الرياضيات وخاصة الدوال الحدودية.

اطلب إليهم إجراء بحث مستفيض عن كيفية تصميم كل قطعة في السيارة، وكيفية استخدام منحنيات للدوال الحدودية. شجعهم على زيارة مؤسسات أو أصحاب اختصاص في عالم السيارات ليأخذوا أفكارًا تساعدهم على إتمام هذا المشروع.

اشرح لهم أن المعادلة الموجودة في هذا المشروع والتي تنمذج غطاء محرك سيارة جديدة لم تأت من المجهول بل هي نتيجة لدراسة تصاميم متعددة، ومن ثمّ تمّ استخدام إحداثيات بعض النقاط لإيجاد معادلة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة. أخبرهم أن تصميم السيارة يرتكز على الهيكل من الخارج لمعالجة الاحتكاك على الطريق، ومع الهواء، وتخفيض كمية الوقود المستهلكة.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

تحقق من عمل الطلاب في الخطوات من (a) إلى (d).

التقرير

من المهم جدًّا أن يعكس التقرير الجهد والأبحاث والدراسات لكل من شارك في تنفيذ المشروع.

اعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقش معهم النتائج والحسابات التي توصلت إليها، ثم أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة دوال خطية ورسمها بيانيًّا.
- تعلمت حل أنظمة معادلات أو متباينات خطية وحلها جبريًّا وبيانيًّا.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم معادلات تربيعية بيانيًّا.
- تعلمت حل متباينات تربيعية في متغير واحد.

ماذا سوف تتعلم؟

- استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.
- وصف منحنيات كثيرات الحدود.
- تحليل كثيرات الحدود إلى عوامل.
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- حل معادلات كثيرات الحدود بطرق مختلفة.
- قسمة كثيرات الحدود.
- إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود.

أضف إلى معلوماتك

عمر الخيام

هو شاعر وفيلسوف تخصص في الرياضيات.

اقترح طريقة لحل معادلات جبرية من الدرجة الثالثة تقوم على إيجاد التقاطع بين قطع مكافئ وقطع زائد.

وفي عصرنا الحالي، حيث يمكن استخدام الحاسوب في وضع رسوم دقيقة لدوال القوى. أصبحت طريقة عمر الخيام من أفضل الطرق المتبعة لحل معادلات الدرجة الثالثة.

مثال على ذلك:

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 - 3x = 2$$

$$2x^2 + 3x - 3 = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$

عمر الخيام

المصطلحات الأساسية

دالة القوى – معكوس دالة القوى – دالة زوجية – دالة فردية – درجة دالة كثيرة الحدود– الصورة العامة – سلوك النهاية – صورة عوامل – القيمة العظمى النسبية – القيمة الصغرى النسبية – نظرية العامل – القسمة المطولة – القسمة التركيبية – نظرية الباقي – جذور – أصفار كثيرة الحدود – تحليل إلى عوامل – الأصفار النسبية الممكنة.

89

سلّم التقييم

4	التصميم والرسوم صحيحة بالكامل – المعادلات دقيقة ومفصلة – الحسابات صحيحة – التقرير واضح ومعبر.
3	معظم التصاميم والرسوم صحيحة – معظم المعادلات دقيقة ومفصلة – أخطاء طفيفة في الحسابات – التقرير بمعظمه واضح.
2	بعض التصاميم والرسوم صحيحة – بعض المعادلات مفصلة – أخطاء كثيرة في الحسابات – التقرير بحاجة إلى تفصيل وإيضاح.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

3–1: دوال القوى ومعكوساتها

1 الأهداف

- يستكشف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- يستخدم القوى والجذور لحل المعادلات.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دالة القوى – دالة زوجية – دالة فردية – المجال.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب الدالة التربيعية: $y = x^2 - 4x + 3$ بدلالة إحداثيات الرأس، ثم مثّلها بيانيًّا.

ما هي معادلة خط التماثل؟

(b) أوجد معكوس الدالة: $y = x^2 - 4$

هل المعكوس هو دالة؟ اشرح إجابتك مستعينًا باختبار المستقيم الرأسي.

(c) حلل: $y = x^2 - 4$ إلى عوامل خطية، ثم أوجد مجموعة الحل عندما $y = 0$

5 التدريس

تساعد الآلة الحاسبة العلمية على وضع جداول لقيم x , y لدوال القوى مما يسمح بالمقارنة بينها.

ساعد الطلاب على استكشاف هذه العلاقات في الجداول الواردة في فقرة «عمل تعاوني».

3–1

دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

عمل تعاوني

1 استخدم آلة حاسبة لحل النظام: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 \end{cases}$ تحقق من كل حل.

2 يبيّن الجدول المقابل $y_1 = x^2$, $y_2 = x^4$

ما قيم x في الجدول التي تحقق $x^2 < x^4$؟

ما قيم x في الجدول التي تحقق $x^2 > x^4$؟

3 استخدم رسمًا بيانيًّا لإيجاد مجموعة حل كل من المتباينتين:

a $x^2 < x^4$ b $x^2 > x^4$

4 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^6 < x^4$

ارسم بيانيًّا دالة القوى: $y = x^6$ باستخدام آلة حاسبة بيانية وتحقق من إجابتك.

x	$y_1 = x^2$	$y_2 = x^4$
−1.6	2.56	6.5536
−1.2	1.44	2.0736
−0.8	0.64	0.4096
−0.4	0.16	0.0256
0	0	0
0.4	0.16	0.0256
0.8	0.64	0.4096
1.2	1.44	2.0736
1.6	2.56	6.5536

استكشاف دوال القوى ومعكوساتها

Exploring Power Functions and their Inverses

الدوال مثل: $y = x^4$، $w = 0.014\,c^3$ هي دوال قوى.

تكون دوال القوى على الشكل:

$y = ax^n, \ a \neq 0, \ n \in \mathbb{Z}^+$

مثال (1) تطبيقات حياتية

تستخدم الصيغة: $w = 0.014\,c^3$ لتقدير وزن w برتقالة بالجرام (g)، بدلالة c محيط أكبر مقطع دائري فيها بالسنتيمتر (cm). قدّر وزن برتقالة محيط أكبر مقطع دائري فيها 20 cm

الحل:

$w = 0.014\,c^3$

$= 0.014\,(20)^3$ عوّض عن c بـ 20

$= 112\,\text{g}$

يكون وزن البرتقالة التي يبلغ محيطها 20 cm حوالي 112 g

حاول أن تحل

1 قدّر وزن برتقالة محيط أكبر مقطع دائري فيها 22 cm باستخدام الصيغة في مثال (1).

سوف تتعلم

- استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.

المفردات والمصطلحات:

- دوال القوى Power Functions
- دالة فردية Odd Function
- دالة زوجية Even Function
- المجال Domain

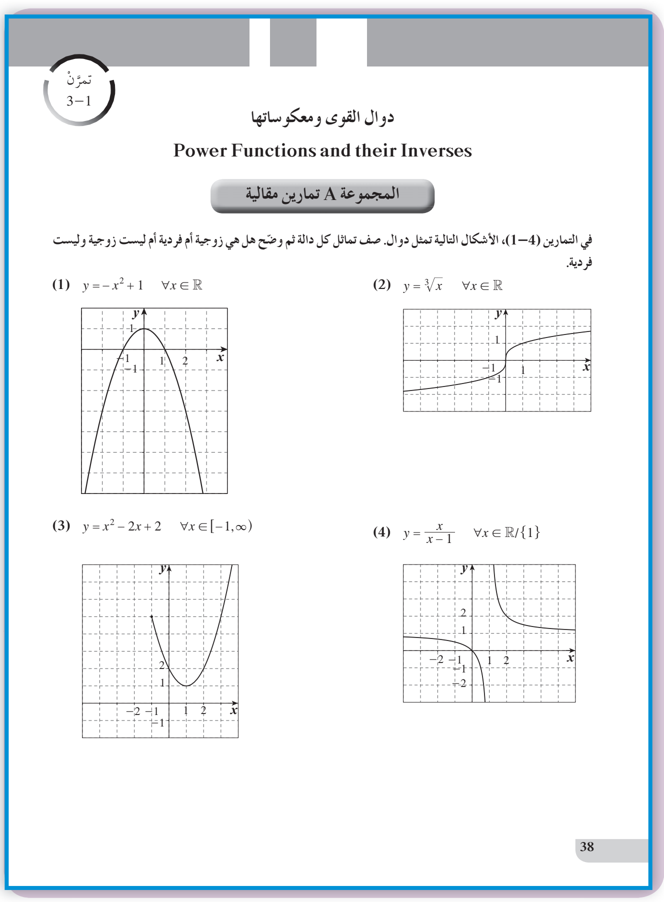
معلومة:

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة رمزها: $\mathbb{Z}^+$

ملاحظة:

$y = ax^n$ يمكن كتابتها أيضًا على الصورة: $f(x) = ax^n$

90



تمرَّنْ 3–1

دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

(1) $y = -x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $y = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $y = x^2 - 2x + 2 \quad \forall x \in [-1, \infty)$

(4) $y = \frac{x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{1\}$

38

ثمّ اطلب إليهم الربط بين النتائج التي توصلوا إليها بيانيًّا وتلك الموجودة على جدول القيم للدالتين:

$$y = x^2 \;,\; y = x^4$$

في المثال (1)

تستخدم دالة القوى في حالات متعددة من جوانب الحياة والبيئة، إذ نلاحظ أن: $w = 0.014c^3$ هي دالة قوى من الدرجة الثالثة تربط وزن برتقالة بالجرام (g) بمحيط أكبر مقطع دائري فيها بالسنتيمتر (cm). اطلب إلى الطلاب إيجاد قيمة c بدلالة w.

في المثالين (3), (4)

وضّح للطلاب أن معرفة الدوال الزوجية والدوال الفردية تساعدهم كثيرًا على رسم بيان الدالة، إذ يمكن رسم جزء من بيان الدالة واستنتاج الجزء الآخر بالانعكاس في محور الصادات أو في نقطة الأصل.

في المثالين (5), (6)

ذكّر الطلّاب بمعكوس الدالة (الدرس 5–2)، وأشر إلى أن معكوس الدالة ليس بالضرورة دالة، ثم لاحظ العلاقة بين مدى الدالة ومجال معكوسها.

6 الربط

يوفر المثالان (2) ,(1) فرصة جيدة أمام الطلاب لاستخدام دوال القوى ومعكوساتها في مواقف حياتية متعددة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يجد الطلاب صعوبة في التحويل بين دالة القوى ومعكوسها، ساعدهم على ربط $\sqrt[n]{x^m}$ بـ $x^{\frac{m}{n}}$ حيث إنّ:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة مهمة للمعلم كي يتابع طلابه، ويتأكد من مدى استيعابهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

مثال (2) علم الحيوان

الدالة $w(x) = 15.625x^3$، هي تقريب للوزن «w» بالكجم (kg) لأنثى الزرافة بدلالة طولها «x» بالمتر (m). أوجد وزن كل من إناث الزرافة التي طولها 3.268m , 3.175m

الحل:

احسب $w(x)$ للطولين.

$w(x) = 15.625\,x^3$

$w(3.175) = 15.625 \times (3.175)^3 \approx 500\,\text{kg}$

$w(3.268) = 15.625 \times (3.268)^3 \approx 545.34\,\text{kg}$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، أوجد وزن زرافة طولها 3.3 m

نشاط 1

يوضح الجدول المقابل بعض القيم للدالة $y = x^3$

x	y
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8
3	27

أكمل ما يلي:

a في أي ربعين من المستوى الإحداثي تتوقع ظهور الرسم البياني لهذه الدالة؟

b أكمل كل زوج من النقاط التي تنتمي إلى بيان الدالة: (4, 64)، $(-4, \square)$، $(-0.5, -0.125)$، $(\square, 0.125)$

c لنفرض أن النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان الدالة: $y = x^3$، فأي من النقاط التالية سوف تنتمي أيضًا إلى بيان هذه الدالة؟

1 $(a, -b)$ 2 $(-a, b)$ 3 $(-a, -b)$ 4 $(2a, 3b)$

مما سبق ومن فقرة «عمل تعاوني» لاحظنا أن بيان الدوال ذات الأسس الزوجية مثل: $y = x^4$، $y = x^2$ كما في الشكلين أدناه.

وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة $y = ax^n$ حيث n عددًا زوجيًّا موجبًا، $a \neq 0$.

الربط بالتكنولوجيا:

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

• في أعلى الشاشة اضغط على

يظهر على الشاشة

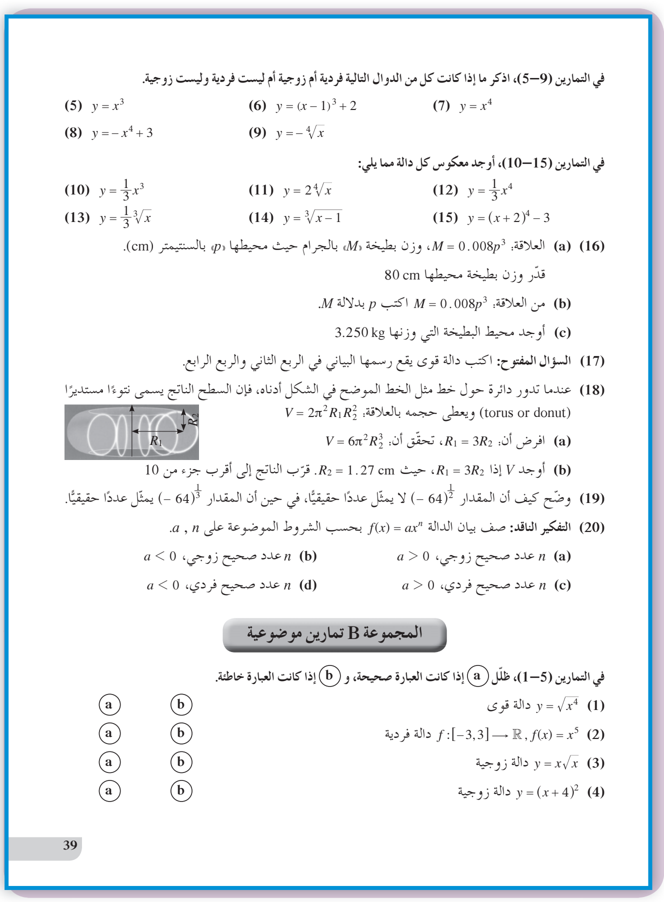
$y_1 = \square$
$y_2 = \square$
$y_3 = \square$
$y_4 = \square$

(يمكن رسم بيانات عدة دوال معًا) فمثلًا للحصول على بيان الدالة: $y = x^4$

• اضغط على المربع قرب y1 فتظهر علامة ✓ داخله

• اضغط على x ثم ^ يليه 4 ثم =

91



في التمارين (9–5)، اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

(5) $y = x^3$ (6) $y = (x-1)^3 + 2$ (7) $y = x^4$

(8) $y = -x^4 + 3$ (9) $y = -\sqrt[4]{x}$

في التمارين (15–10)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(10) $y = \frac{1}{3}x^3$ (11) $y = 2\sqrt[4]{x}$ (12) $y = \frac{1}{3}x^4$

(13) $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ (14) $y = \sqrt[3]{x-1}$ (15) $y = (x+2)^4 - 3$

(16) (a) العلاقة: $M = 0.008p^3$، وزن بطيخة «M» بالجرام حيث محيطها «p» بالسنتيمتر (cm).
قدّر وزن بطيخة محيطها 80 cm

(b) من العلاقة: $M = 0.008p^3$ اكتب p بدلالة M.

(c) أوجد محيط البطيخة التي وزنها 3.250 kg

(17) **السؤال المفتوح:** اكتب دالة قوى يقع رسمها البياني في الربع الثاني والربع الرابع.

(18) عندما تدور دائرة حول خط مثل الخط الموضح في الشكل أدناه، فإن السطح الناتج يسمى نتوءًا مستديرًا (torus or donut) ويعطى حجمه بالعلاقة: $V = 2\pi^2 R_1 R_2^2$

(a) افرض أن: $R_1 = 3R_2$، تحقّق أن: $V = 6\pi^2 R_2^3$

(b) أوجد V إذا $R_1 = 3R_2$، حيث $R_2 = 1.27$ cm. قرّب الناتج إلى أقرب جزء من 10

(19) وضّح كيف أن المقدار $(-64)^{\frac{1}{2}}$ لا يمثّل عددًا حقيقيًّا، في حين أن المقدار $(-64)^{\frac{1}{3}}$ يمثّل عددًا حقيقيًّا.

(20) **التفكير الناقد:** صف بيان الدالة $f(x) = ax^n$ بحسب الشروط الموضوعة على n , a.

(a) n عدد صحيح زوجي، $a > 0$ (b) n عدد صحيح زوجي، $a < 0$

(c) n عدد صحيح فردي، $a > 0$ (d) n عدد صحيح فردي، $a < 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $y = \sqrt{x^4}$ دالة قوى (a) (b)

(2) $f: [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^5$ دالة فردية (a) (b)

(3) $y = x\sqrt{x}$ دالة زوجية (a) (b)

(4) $y = (x+4)^2$ دالة زوجية (a) (b)

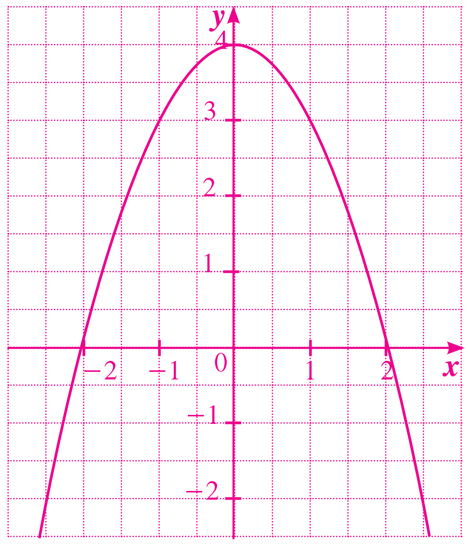
39

اختبار سريع

❶ أثبت أن: $f(x) = -x^2 + 4$ هي دالة زوجية. ثم مثّلها بيانيًّا.

$f(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = f(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$

لذا $f(x)$ هي دالة زوجية.

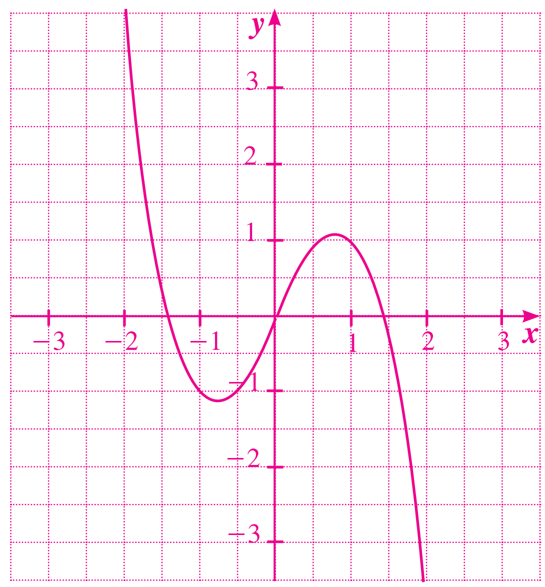


$f(x) = -x^2 + 4$

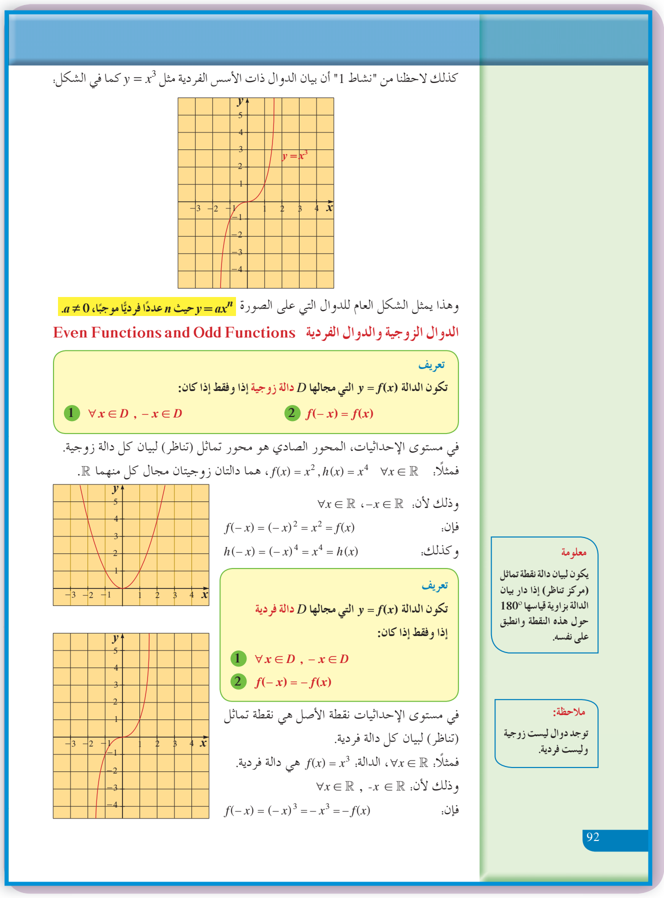
❷ أثبت أن: $f(x) = -x^3 + 2x$ هي دالة فردية. ثم مثّلها بيانيًّا.

$f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x =$
$-(-x^3 + 2x) = -f(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$

لذا $f(x)$ هي دالة فردية.



$f(x) = -x^3 + 2x$



كذلك لاحظنا من "نشاط 1" أن بيان الدوال ذات الأسس الفردية مثل $y = x^3$ كما في الشكل:

$y = x^3$

وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة **$y = ax^n$ حيث n عددًا فرديًّا موجبًا، $a \neq 0$.**

الدوال الزوجية والدوال الفردية Even Functions and Odd Functions

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D, -x \in D$
2. $f(-x) = f(x)$

في مستوى الإحداثيات، المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.

فمثلًا: $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^2, h(x) = x^4$، هما دالتان زوجيتان مجال كل منهما $\mathbb{R}$.

وذلك لأن: $\forall x \in \mathbb{R}$، $-x \in \mathbb{R}$

فإن: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

وكذلك: $h(-x) = (-x)^4 = x^4 = h(x)$

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة فردية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D, -x \in D$
2. $f(-x) = -f(x)$

في مستوى الإحداثيات نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

فمثلًا: $\forall x \in \mathbb{R}$، الدالة: $f(x) = x^3$ هي دالة فردية.

وذلك لأن: $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

فإن: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

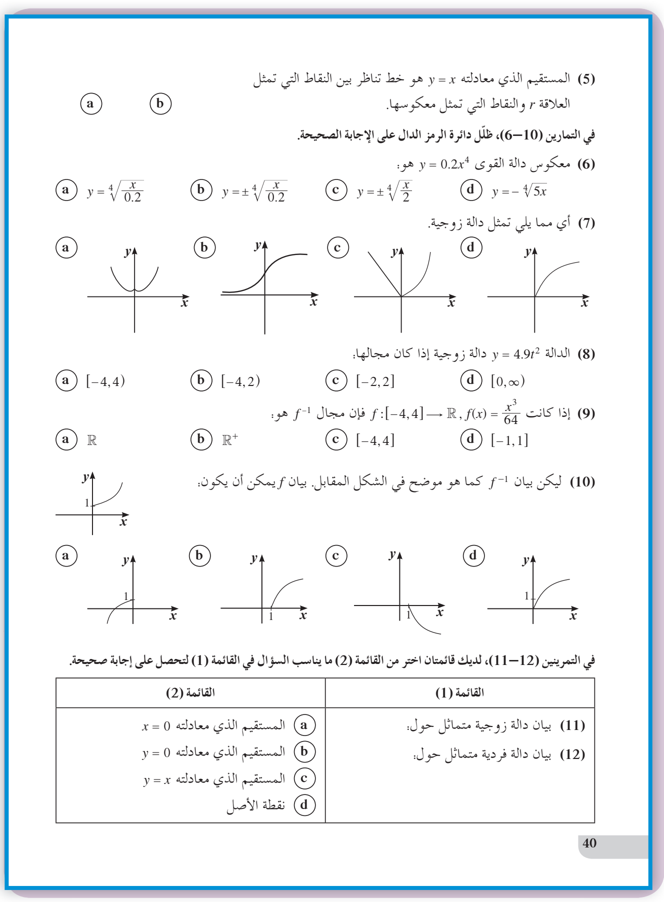
معلومة

يكون لبيان دالة نقطة تماثل (مركز تناظر) إذا دار بيان الدالة بزاوية قياسها 180° حول هذه النقطة وانطبق على نفسه.

ملاحظة:

توجد دوال ليست زوجية وليست فردية.

92



(5) المستقيم الذي معادلته $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها. ⓐ ⓑ

في التمارين (6—10)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس دالة القوى $y = 0.2x^4$ هو:

ⓐ $y = \sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ ⓑ $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ ⓒ $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$ ⓓ $y = -\sqrt[4]{5x}$

(7) أي مما يلي تمثل دالة زوجية.

ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ

(8) الدالة $y = 4.9t^2$ دالة زوجية إذا كان مجالها:

ⓐ $[-4,4)$ ⓑ $[-4,2)$ ⓒ $[-2,2]$ ⓓ $[0,\infty)$

(9) إذا كانت $f:[-4,4] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{64}$ فإن مجال f^{-1} هو:

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}^+$ ⓒ $[-4,4]$ ⓓ $[-1,1]$

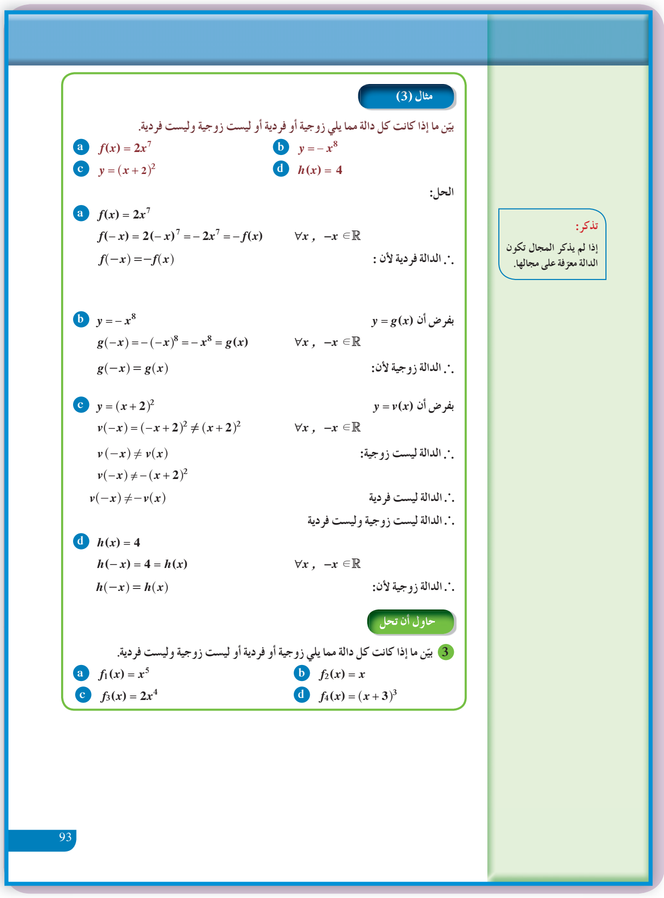
(10) ليكن بيان f^{-1} كما هو موضح في الشكل المقابل. بيان f يمكن أن يكون:

ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ

في التمرينين (11—12)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب السؤال في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(11) بيان دالة زوجية متماثل حول:	ⓐ المستقيم الذي معادلته $x = 0$
(12) بيان دالة فردية متماثل حول:	ⓑ المستقيم الذي معادلته $y = 0$
	ⓒ المستقيم الذي معادلته $y = x$
	ⓓ نقطة الأصل

40



مثال (3)

بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f(x)=2x^7$ b $y=-x^8$

c $y=(x+2)^2$ d $h(x)=4$

الحل:

a $f(x)=2x^7$

$f(-x)=2(-x)^7=-2x^7=-f(x)$ $\forall x\,,\ -x\in\mathbb{R}$

∴ الدالة فردية لأن: $f(-x)=-f(x)$

b $y=-x^8$ بفرض أن $y=g(x)$

$g(-x)=-(-x)^8=-x^8=g(x)$ $\forall x\,,\ -x\in\mathbb{R}$

∴ الدالة زوجية لأن: $g(-x)=g(x)$

c $y=(x+2)^2$ بفرض أن $y=v(x)$

$v(-x)=(-x+2)^2\neq(x+2)^2$ $\forall x\,,\ -x\in\mathbb{R}$

∴ الدالة ليست زوجية: $v(-x)\neq v(x)$

$v(-x)\neq-(x+2)^2$

∴ الدالة ليست فردية $v(-x)\neq-v(x)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

d $h(x)=4$

$h(-x)=4=h(x)$ $\forall x\,,\ -x\in\mathbb{R}$

∴ الدالة زوجية لأن: $h(-x)=h(x)$

حاول أن تحل

3 بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f_1(x)=x^5$ b $f_2(x)=x$

c $f_3(x)=2x^4$ d $f_4(x)=(x+3)^3$

تذكر: إذا لم يذكر المجال تكون الدالة معرّفة على مجالها.

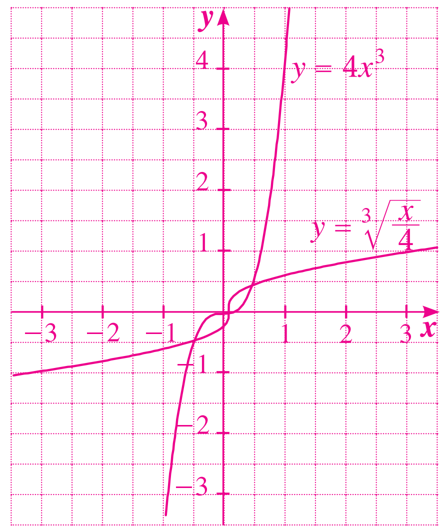
93

3 أوجد معكوس دالة القوى: $y=4x^3$،

ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا.

$$y=4x^3 \implies x=4y^3$$

$$y^3=\frac{x}{4} \implies y=\sqrt[3]{\frac{x}{4}}$$



9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 $x=0\,,1\,,-1$

2 $(-1.6\,,-1.2\,,1.2\,,1.6)$; $(-0.8\,,-0.4\,,0.4\,,0.8)$

3 **(a)** $(-\infty\,,-1)\cup(1\,,\infty)$

(b) $(-1\,,0)\cup(0\,,1)$

4 $(-1\,,0)\cup(0\,,1)$

تحقق من عمل الطلّاب

«حاول أن تحل»

1 $c=22\text{ cm}\ ,\ w\approx149\text{ g}$

2 $w(3.3)\approx561.5\text{Kg}$

3 **(a)** $f_1(x) = x^5$

$f_1(-x) = (-x)^5 = -x^5$

$= -f_1(x)$

$\therefore$ الدالة فردية.

(b) $f_2(x) = x$

$f_2(-x) = -x = -f_2(x)$

$\therefore$ الدالة فردية.

(c) $f_3(x) = 2x^4$

$f_3(-x) = 2(-x)^4 = 2x^4$

$= f_3(x)$

$\therefore$ الدالة زوجية.

(d) $f_4(x) = (x+3)^3$

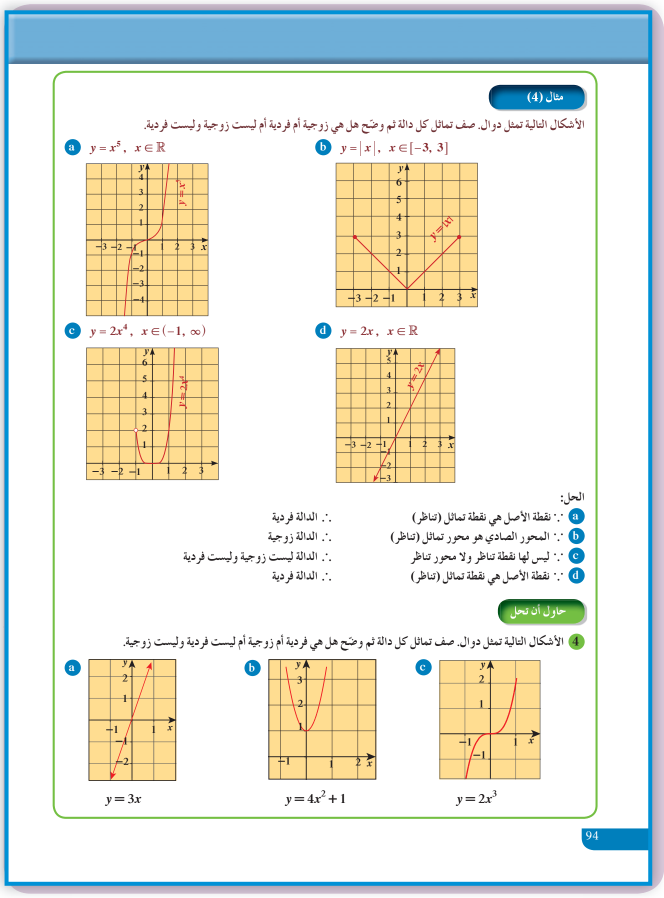
$f_4(-x) = (-x+3)^3 = -(x-3)^3$

$\therefore$ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

4 **(a)** نقطة الأصل هي نقطة تماثل $\therefore$ فردية.

(b) المحور الصادي هو محور تماثل $\therefore$ زوجية.

(c) نقطة الأصل هي نقطة تماثل $\therefore$ فردية.



مثال (4)

الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

a $y = x^5, \; x \in \mathbb{R}$

b $y = |x|, \; x \in [-3, 3]$

c $y = 2x^4, \; x \in (-1, \infty)$

d $y = 2x, \; x \in \mathbb{R}$

الحل:

a $\because$ نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) $\therefore$ الدالة فردية

b $\because$ المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) $\therefore$ الدالة زوجية

c $\because$ ليس لها نقطة تناظر ولا محور تناظر $\therefore$ الدالة ليست زوجية وليست فردية

d $\because$ نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) $\therefore$ الدالة فردية

حاول أن تحل

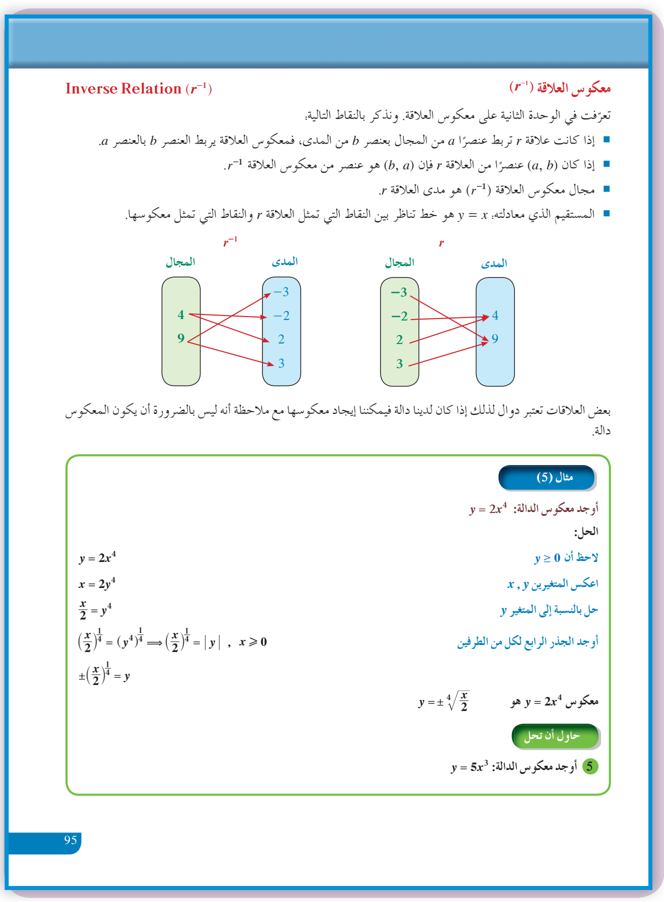
4 الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

a $y = 3x$

b $y = 4x^2 + 1$

c $y = 2x^3$

94



معكوس العلاقة (r^{-1}) — Inverse Relation (r^{-1})

تعرّفت في الوحدة الثانية على معكوس العلاقة. ونذكر بالنقاط التالية:

- إذا كانت علاقة r تربط عنصرًا a من المجال بعنصر b من المدى، فمعكوس العلاقة يربط العنصر b بالعنصر a.
- إذا كان (a, b) عنصرًا من العلاقة r فإن (b, a) هو عنصر من معكوس العلاقة r^{-1}.
- مجال معكوس العلاقة (r^{-1}) هو مدى العلاقة r.
- المستقيم الذي معادلته: $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.

بعض العلاقات تعتبر دوال لذلك إذا كان لدينا دالة فيمكننا إيجاد معكوسها مع ملاحظة أنه ليس بالضرورة أن يكون المعكوس دالة.

مثال (5)

أوجد معكوس الدالة: $y = 2x^4$

الحل:

لاحظ أن $y \geq 0$	$y = 2x^4$
اعكس المتغيرين x, y	$x = 2y^4$
حل بالنسبة إلى المتغير y	$\frac{x}{2} = y^4$
أوجد الجذر الرابع لكل من الطرفين	$\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = (y^4)^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \lvert y \rvert \;,\; x \geqslant 0$
	$\pm\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = y$

معكوس $y = 2x^4$ هو $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$

حاول أن تحل

5 أوجد معكوس الدالة: $y = 5x^3$

95

5 $y = 5x^3$

$\dfrac{y}{5} = x^3$

$\dfrac{x}{5} = y^3$

$y = \sqrt[3]{\dfrac{x}{5}}$

6 $y = x^2 + 4 \;,\; x \geq 0$

«تدريب»

المعكوس دالة , $y = x^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$

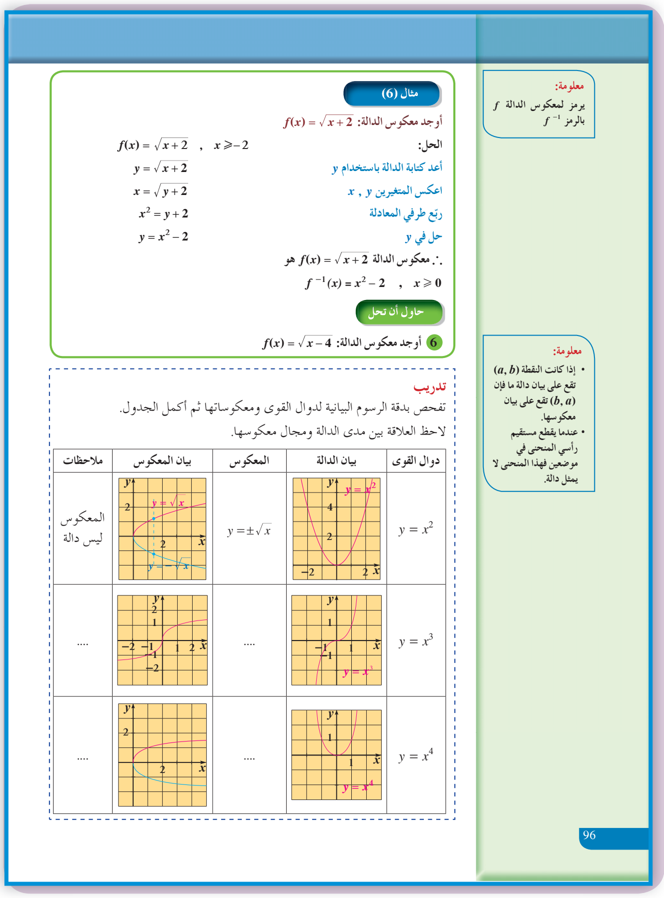
المعكوس ليس دالة , $y = x^4 \Rightarrow y = \pm\sqrt[4]{x}$

«نشاط 1»

(a) في الربع الأول والربع الثالث من المستوى الإحداثي

(b) $(0.5, 0.125) \;,\; (-4, -64)$

(c) $(-a, -b)$



مثال (6)

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x+2}$

الحل: $f(x) = \sqrt{x+2} \quad , \quad x \geqslant -2$

أعد كتابة الدالة باستخدام y $\qquad y = \sqrt{x+2}$

اعكس المتغيرين $x \, , \, y$ $\qquad x = \sqrt{y+2}$

ربّع طرفي المعادلة $\qquad x^2 = y + 2$

حل في y $\qquad y = x^2 - 2$

$\therefore$ معكوس الدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ هو

$f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad , \quad x \geqslant 0$

حاول أن تحل

6 أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x-4}$

معلومة:
يرمز لمعكوس الدالة f بالرمز f^{-1}

تدريب

تفحص بدقة الرسوم البيانية لدوال القوى ومعكوساتها ثم أكمل الجدول.

لاحظ العلاقة بين مدى الدالة ومجال معكوسها.

دوال القوى	بيان الدالة	المعكوس	بيان المعكوس	ملاحظات
$y = x^2$		$y = \pm\sqrt{x}$		المعكوس ليس دالة
$y = x^3$		....		....
$y = x^4$		....		....

معلومة:
- إذا كانت النقطة (a, b) تقع على بيان دالة ما فإن (b, a) تقع على بيان معكوسها.
- عندما يقطع مستقيم رأسي المنحنى في موضعين فهذا المنحنى لا يمثل دالة.

96

2–3: الدوال الحدودية

1 الأهداف

- يصف منحنيات كثيرات الحدود.
- ينمذج بيانات باستخدام دوال كثيرات الحدود.
- يصف سلوك النهاية لدوال كثيرات الحدود.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المعامل الرئيسي – حد تكعيبي – حد تربيعي – حد خطي – حد ثابت – سلوك النهاية – درجة – الصورة العامة – حدودية أو كثيرة حدود.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة: $y = x^2 + 2$، ثم اذكر ما إذا كانت زوجية أو فردية وحدد نوع التماثل.

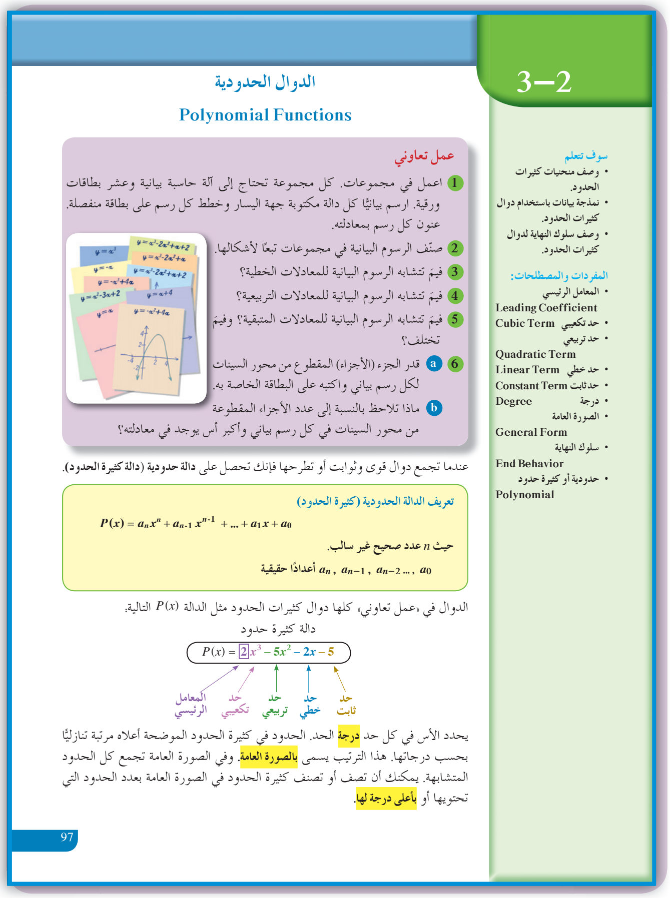
(b) ارسم بيان الدالة: $y = x^3 + x$، ثم اذكر ما إذا كانت زوجية أو فردية وحدد نوع التماثل.

(c) أوجد معكوس العلاقة r الممثلة على الجدول، ثم مثّل على مستوى إحداثي واحد العلاقة r ومعكوسها r^{-1}.

x	-1	0	1	2
y	3	1	-1	-3

5 التدريس

تابع عمل الطلاب بعناية في فقرة «عمل تعاوني» وبخاصة عند رسم بيان الدوال على الآلة الحاسبة البيانية، وعند محاولتهم رسم كل دالة على بطاقة. ناقش معهم الإجابات التي توصلوا إليها في الأسئلة (2)، (3)، (4)، (5)، لأن ذلك سوف يساعدهم كثيرًا على فهم طبيعة منحنيات دوال كثيرة الحدود، وسلوك النهاية لمنحنى كل دالة بحسب درجتها. توسع في هذه الفقرة في الشرح والنقاش والحوار.



3–2

الدوال الحدودية

Polynomial Functions

سوف تتعلم
- وصف منحنيات كثيرات الحدود.
- نمذجة بيانات باستخدام دوال كثيرات الحدود.
- وصف سلوك النهاية لدوال كثيرات الحدود.

المفردات والمصطلحات:
- المعامل الرئيسي Leading Coefficient
- حد تكعيبي Cubic Term
- حد تربيعي Quadratic Term
- حد خطي Linear Term
- حد ثابت Constant Term
- درجة Degree
- الصورة العامة General Form
- سلوك النهاية End Behavior
- حدودية أو كثيرة حدود Polynomial

عمل تعاوني

1 اعمل في مجموعات. كل مجموعة تحتاج إلى آلة حاسبة بيانية وعشر بطاقات ورقية. ارسم بيانيًّا كل دالة مكتوبة جهة اليسار وخطط كل رسم على بطاقة منفصلة. عنون كل رسم بمعادلته.

2 صنّف الرسوم البيانية في مجموعات تبعًا لأشكالها.

3 فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات الخطية؟

4 فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات التربيعية؟

5 فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات المتبقية؟ وفيمَ تختلف؟

6 a قدر الجزء (الأجزاء) المقطوع من محور السينات لكل رسم بياني واكتبه على البطاقة الخاصة به.

b ماذا تلاحظ بالنسبة إلى عدد الأجزاء المقطوعة من محور السينات في كل رسم بياني وأكبر أس يوجد في معادلته؟

عندما تجمع دوال قوى وثوابت أو تطرحها فإنك تحصل على **دالة حدودية (دالة كثيرة الحدود)**.

تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} \ldots , a_0$ أعدادًا حقيقية

الدوال في «عمل تعاوني» كلها دوال كثيرات الحدود مثل الدالة $P(x)$ التالية:

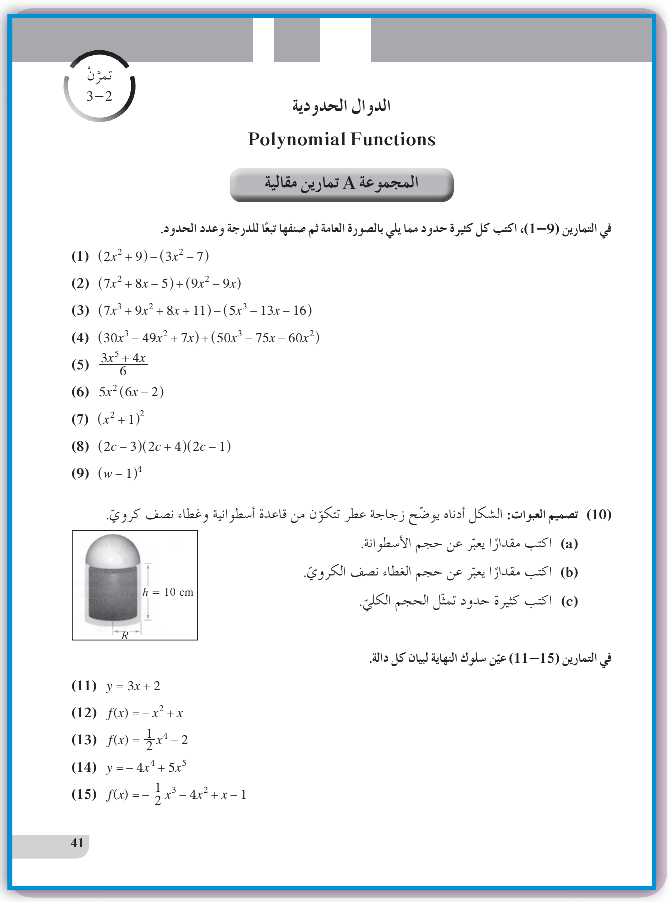
دالة كثيرة حدود

$$P(x) = \boxed{2}x^3 - 5x^2 - 2x - 5$$

المعامل الرئيسي — حد تكعيبي — حد تربيعي — حد خطي — حد ثابت

يحدد الأس في كل حد **درجة** الحد. الحدود في كثيرة الحدود الموضحة أعلاه مرتبة تنازليًّا بحسب درجاتها. هذا الترتيب يسمى **بالصورة العامة**. وفي الصورة العامة تجمع كل الحدود المتشابهة. يمكنك أن تصف أو تصنف كثيرة الحدود في الصورة العامة بعدد الحدود التي تحتويها أو **بأعلى درجة لها**.

97



تمرَّنْ 3–2

الدوال الحدودية

Polynomial Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–9)، اكتب كل كثيرة حدود مما يلي بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

(1) $(2x^2 + 9) - (3x^2 - 7)$

(2) $(7x^2 + 8x - 5) + (9x^2 - 9x)$

(3) $(7x^3 + 9x^2 + 8x + 11) - (5x^3 - 13x - 16)$

(4) $(30x^3 - 49x^2 + 7x) + (50x^3 - 75x - 60x^2)$

(5) $\dfrac{3x^5 + 4x}{6}$

(6) $5x^2(6x - 2)$

(7) $(x^2 + 1)^2$

(8) $(2c - 3)(2c + 4)(2c - 1)$

(9) $(w - 1)^4$

(10) **تصميم العبوات:** الشكل أدناه يوضّح زجاجة عطر تتكوّن من قاعدة أسطوانية وغطاء نصف كرويّ.

(a) اكتب مقدارًا يعبّر عن حجم الأسطوانة.

(b) اكتب مقدارًا يعبّر عن حجم الغطاء نصف الكرويّ.

(c) اكتب كثيرة حدود تمثّل الحجم الكليّ.

في التمارين (11–15) عيّن سلوك النهاية لبيان كل دالة.

(11) $y = 3x + 2$

(12) $f(x) = -x^2 + x$

(13) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$

(14) $y = -4x^4 + 5x^5$

(15) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + x - 1$

41

في المثال (1)

يساعد هذا المثال الطلاب على كتابة كل كثيرة حدود بالصورة العامة لإيجاد درجتها، وكتابة اسمها باستخدام عدد حدودها. ركز انتباه الطلاب على اسم كثيرة الحدود باستخدام درجتها. أخبرهم أنه يوجد كثيرة حدود ثابتة حيث درجتها الصفر وكثيرة حدود خطية درجتها واحد وكثيرة حدود تربيعية درجتها اثنان وكثيرة حدود تكعيبية ودرجتها ثلاثة. وضح لهم أنه من الدرجة الرابعة وما فوق نقول حدودية من الدرجة الرابعة أو حدودية من الدرجة الخامسة....

ألفت انتباه الطلاب إلى الفرق بين عدد الحدود ودرجة كثيرة الحدود لتفادي الالتباس.

في «نشاط إثرائي»

يوفر هذا النشاط فرصة أمام الطلاب لنمذجة بيانات واقعية بدالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة حيث إن هذه البيانات تتضمن خمس قيم. وبالتالي يمكن توقع نتائج معقولة تعبر عن تطور إنتاج الذهب في العالم خلال أي سنة.

في المثال (2)

ركز مع الطلاب على مفهوم سلوك النهاية انطلاقًا من درجة كل دالة كثيرة الحدود واستنادًا إلى إشارة المعامل الرئيسي في كل دالة. هذا المفهوم سيساعد الطلاب لاحقًا على تصحيح أخطاء الرسم البياني.

6 الربط

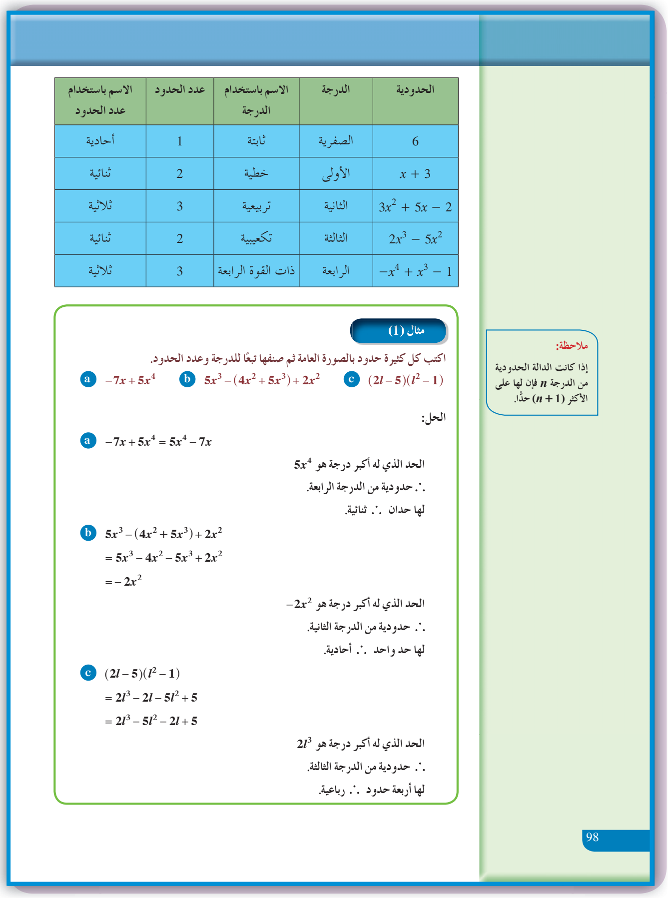
يربط النشاط الإثرائي بيانات من الحياة الواقعية بنموذج من الدوال الحدودية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد سلوك النهاية لبيان دالة كثيرة الحدود. ساعدهم على فهم سلوك النهاية بالترابط مع درجة الدالة وإشارة المعامل الرئيسي لهذه الدالة، من حيث كونها موجبة أو سالبة.

8 التقييم

لاحظ الطلاب أثناء إجابتهم عن فقرات «حاول أن تحل» لتكوّن فكرة واضحة عن مدى فهمهم لما ورد في هذا الدرس.



الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x + 3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2 + 5x - 2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3 - 5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4 + x^3 - 1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

مثال (1)

اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

(a) $-7x + 5x^4$ (b) $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$ (c) $(2l - 5)(l^2 - 1)$

الحل:

(a) $-7x + 5x^4 = 5x^4 - 7x$

الحد الذي له أكبر درجة هو $5x^4$

∴ حدودية من الدرجة الرابعة.

لها حدان ∴ ثنائية.

(b) $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$

$= 5x^3 - 4x^2 - 5x^3 + 2x^2$

$= -2x^2$

الحد الذي له أكبر درجة هو $-2x^2$

∴ حدودية من الدرجة الثانية.

لها حد واحد ∴ أحادية.

(c) $(2l - 5)(l^2 - 1)$

$= 2l^3 - 2l - 5l^2 + 5$

$= 2l^3 - 5l^2 - 2l + 5$

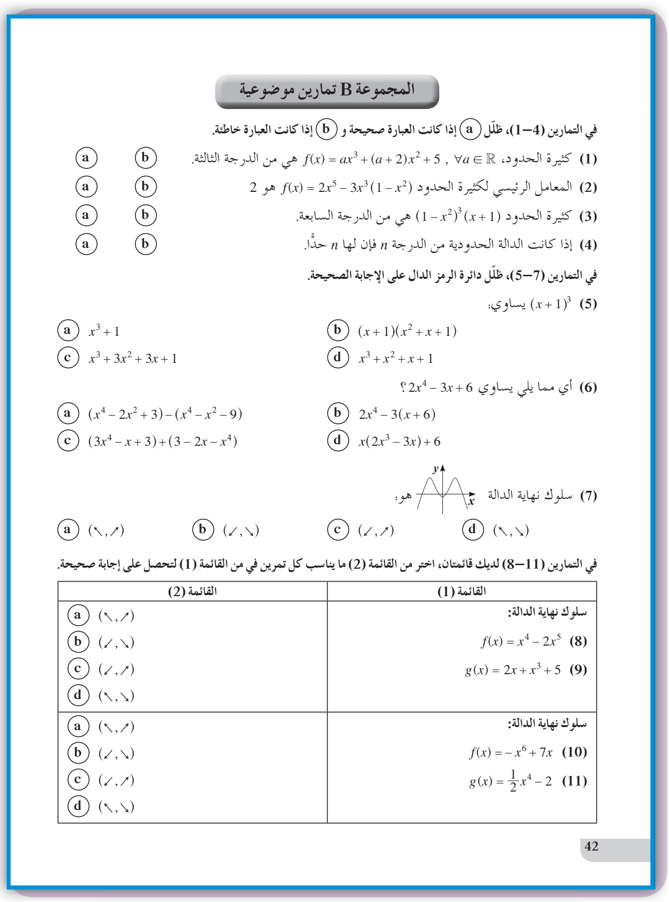
الحد الذي له أكبر درجة هو $2l^3$

∴ حدودية من الدرجة الثالثة.

لها أربعة حدود ∴ رباعية.

ملاحظة: إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها على الأكثر $(n+1)$ حدًّا.

98



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) كثيرة الحدود، $f(x) = ax^3 + (a+2)x^2 + 5\ ,\ \forall a \in \mathbb{R}$ هي من الدرجة الثالثة. (a) (b)

(2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $f(x) = 2x^5 - 3x^3(1 - x^2)$ هو 2 (a) (b)

(3) كثيرة الحدود $(1 - x^2)^3(x + 1)$ هي من الدرجة السابعة. (a) (b)

(4) إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها n حدًّا. (a) (b)

في التمارين (5—7)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) $(x+1)^3$ يساوي:

(a) $x^3 + 1$ (b) $(x+1)(x^2+x+1)$
(c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (d) $x^3 + x^2 + x + 1$

(6) أي مما يلي يساوي $2x^4 - 3x + 6$ ؟

(a) $(x^4 - 2x^2 + 3) - (x^4 - x^2 - 9)$ (b) $2x^4 - 3(x+6)$
(c) $(3x^4 - x + 3) + (3 - 2x - x^4)$ (d) $x(2x^3 - 3x) + 6$

(7) سلوك نهاية الدالة هو:

(a) $(\nwarrow, \nearrow)$ (b) $(\swarrow, \searrow)$ (c) $(\swarrow, \nearrow)$ (d) $(\nwarrow, \searrow)$

في التمارين (8—11) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في من القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
سلوك نهاية الدالة: (8) $f(x) = x^4 - 2x^5$ (9) $g(x) = 2x + x^3 + 5$	(a) $(\nwarrow, \nearrow)$ (b) $(\swarrow, \searrow)$ (c) $(\swarrow, \nearrow)$ (d) $(\nwarrow, \searrow)$
سلوك نهاية الدالة: (10) $f(x) = -x^6 + 7x$ (11) $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$	(a) $(\nwarrow, \nearrow)$ (b) $(\swarrow, \searrow)$ (c) $(\swarrow, \nearrow)$ (d) $(\nwarrow, \searrow)$

42

اختبار سريع

1. اكتب كثيرة الحدود بالصورة العامة، وصنفها من حيث الدرجة وعدد الحدود
$$2x(3x-5)+x^3-4x^2+2$$
$$6x^2-10x+x^3-4x^2+2=x^3+2x^2-10x+2$$
من الدرجة الثالثة، رباعية الحدود.

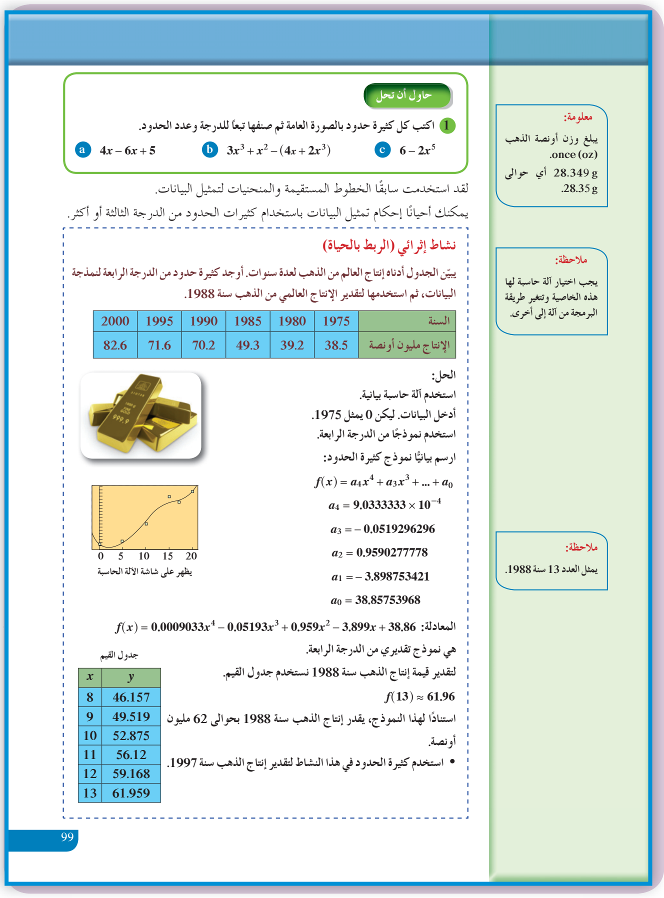
2. عيّن سلوك النهاية:

(a) $f(x)=-x^4+4x^2+5$

المعامل الرئيسي $= -1$ سالب. سلوك النهاية لجهة اليمين هو إلى أسفل. درجة كثيرة الحدود $= 4$ زوجية. سلوك النهاية لجهة اليسار مشابه لليمين، لذا سلوك النهاية: $(\swarrow,\searrow)$.

(b) $f(x)=x^5+3x^2-2$

المعامل الرئيسي $= 1$ موجب. سلوك النهاية لجهة اليمين هو إلى أعلى. درجة كثيرة الحدود $= 5$ فردية. سلوك النهاية لجهة اليسار معاكس لليمين، لذا سلوك النهاية: $(\swarrow,\nearrow)$.



حاول أن تحل

1 اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

a $4x-6x+5$ b $3x^3+x^2-(4x+2x^3)$ c $6-2x^5$

لقد استخدمت سابقًا الخطوط المستقيمة والمنحنيات لتمثيل البيانات.

يمكنك أحيانًا إحكام تمثيل البيانات باستخدام كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة أو أكثر.

نشاط إثرائي (الربط بالحياة)

يبيّن الجدول أدناه إنتاج العالم من الذهب لعدة سنوات. أوجد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة لنمذجة البيانات، ثم استخدمها لتقدير الإنتاج العالمي من الذهب سنة 1988.

السنة	1975	1980	1985	1990	1995	2000
الإنتاج مليون أونصة	38.5	39.2	49.3	70.2	71.6	82.6

الحل:

استخدم آلة حاسبة بيانية.

أدخل البيانات. ليكن 0 يمثل 1975.

استخدم نموذجًا من الدرجة الرابعة.

ارسم بيانيًّا نموذج كثيرة الحدود:

$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+...+a_0$

$a_4=9.0333333\times10^{-4}$

$a_3=-0.0519296296$

$a_2=0.9590277778$

$a_1=-3.898753421$

$a_0=38.85753968$

0 5 10 15 20

يظهر على شاشة الآلة الحاسبة

المعادلة: $f(x)=0.0009033x^4-0.05193x^3+0.959x^2-3.899x+38.86$

هي نموذج تقديري من الدرجة الرابعة.

لتقدير قيمة إنتاج الذهب سنة 1988 نستخدم جدول القيم.

$f(13)\approx 61.96$

استنادًا لهذا النموذج، يقدر إنتاج الذهب سنة 1988 بحوالى 62 مليون أونصة.

- استخدم كثيرة الحدود في هذا النشاط لتقدير إنتاج الذهب سنة 1997.

جدول القيم

x	y
8	46.157
9	49.519
10	52.875
11	56.12
12	59.168
13	61.959

معلومة:

يبلغ وزن أونصة الذهب once (oz). 28.349 g أي حوالى 28.35 g.

ملاحظة:

يجب اختيار آلة حاسبة لها هذه الخاصية وتتغير طريقة البرمجة من آلة إلى أخرى.

ملاحظة:

يمثل العدد 13 سنة 1988.

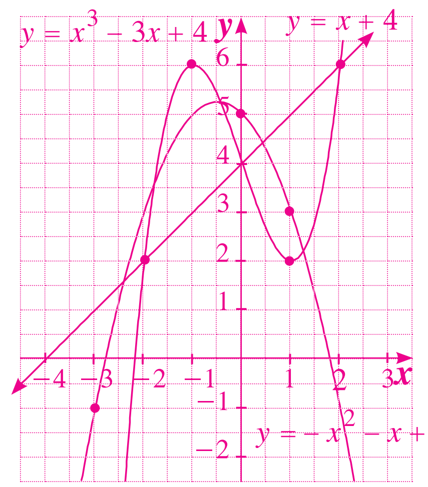
99

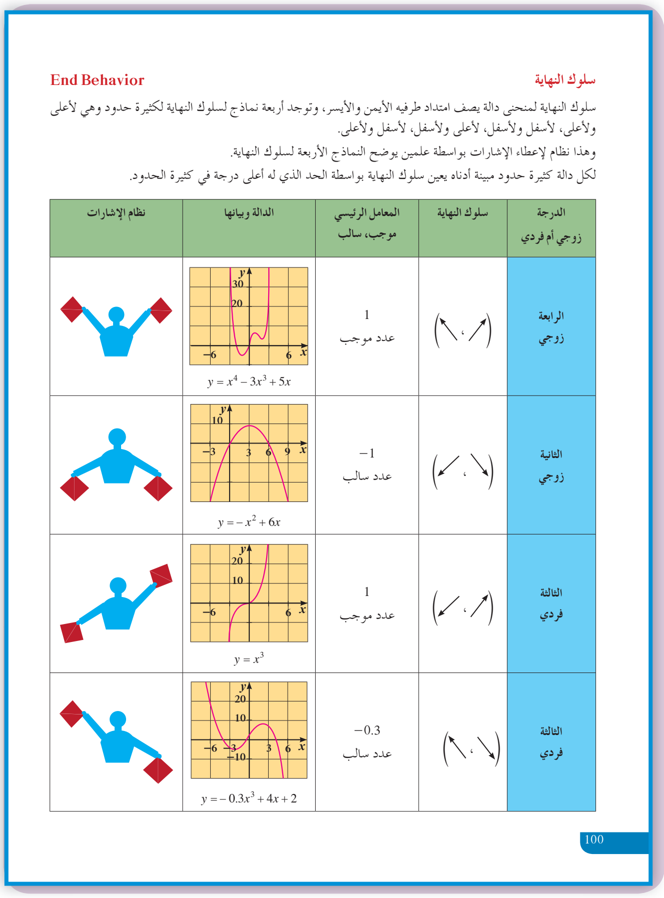
خلفية علمية

استخدم آلة حاسبة بيانية لتحدد أفضلية التمثيل بين النموذج الخطي والنموذج التربيعي والنموذج التكعيبي للبيانات في الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	6	5	2	6

أدخل البيانات إلى الآلة الحاسبة البيانية، ثم قارن بين البيانات التي تحصل عليها، تجد النموذج التكعيبي هو الأفضل، لأنك تلاحظ أن النموذج الخطي يمر بنقطتين فقط، وأن النموذج التربيعي يمر بثلاث نقاط، ولكن النموذج التكعيبي يمر بأربع نقاط.





سلوك النهاية **End Behavior**

سلوك النهاية لمنحنى دالة يصف امتداد طرفيه الأيمن والأيسر، وتوجد أربعة نماذج لسلوك النهاية لكثيرة حدود وهي لأعلى ولأعلى، لأسفل ولأسفل، لأعلى ولأسفل، لأسفل ولأعلى.

وهذا نظام لإعطاء الإشارات بواسطة علمين يوضح النماذج الأربعة لسلوك النهاية.

لكل دالة كثيرة حدود مبينة أدناه يعين سلوك النهاية بواسطة الحد الذي له أعلى درجة في كثيرة الحدود.

الدرجة زوجي أم فردي	سلوك النهاية	المعامل الرئيسي موجب، سالب	الدالة وبيانها	نظام الإشارات
الرابعة زوجي	(↖ ، ↗)	1 عدد موجب	$y = x^4 - 3x^3 + 5x$	
الثانية زوجي	(↙ ، ↘)	-1 عدد سالب	$y = -x^2 + 6x$	
الثالثة فردي	(↙ ، ↗)	1 عدد موجب	$y = x^3$	
الثالثة فردي	(↖ ، ↘)	-0.3 عدد سالب	$y = -0.3x^3 + 4x + 2$	

100

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

تحقق من إجابات الطلاب، وناقشهم في كل ما يتوصلون إليه من إجابات، ثم شجعهم على التعاون مع بعضهم بعضًا.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $-2x + 5$

من الدرجة الأولى، ثنائية الحدود.

(b) $x^3 + x^2 - 4x$

من الدرجة الثالثة، ثلاثية الحدود.

(c) $-2x^5 + 6$

من الدرجة الخامسة، ثنائية الحدود.

2 **(a)** كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي)

المعامل الرئيسي $= -1$ (سالب)

سلوك النهاية جهة اليمين لأسفل، سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لجهة اليمين.

$\therefore$ سلوك النهاية هو: $(\nwarrow, \searrow)$

(b) المعامل الرئيسي $= +4$ (موجب)

درجة كثيرة الحدود $= 4$ (زوجي)

سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى سلوك النهاية جهة اليسار مشابه لجهة اليمين.

$\therefore$ سلوك النهاية هو: $(\nwarrow, \nearrow)$

(c) كثيرة حدود من الثالثة (فردي)

المعامل الرئيسي $= 2$ (موجب)

سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى، وسلوك النهاية جهة اليسار معاكس لجهة اليمين.

$\therefore$ سلوك النهاية هو: $(\swarrow, \nearrow)$

(d) كثيرة حدود من الدرجة الرابعة (زوجي)

المعامل الرئيسي $= -1$ (سالب)

سلوك النهاية جهة اليمين لأسفل، سلوك النهاية جهة اليسار مشابه لجهة اليمين.

$\therefore$ سلوك النهاية هو: $(\swarrow, \searrow)$

مثال (2)

وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a $y = 4x^3 - 3x$

b $f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2$

c $g(x) = x^2 - 4x + 3$

d $h(x) = -x^3 + 2x + 2$

الحل:

a المعامل الرئيسي 4 (عدد موجب)

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

$\because$ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي).

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

$\therefore$ سلوك النهاية هو $(\swarrow ، \nearrow)$.

b المعامل الرئيسي -2 (عدد سالب)

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

$\because$ كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة (زوجي).

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

$\therefore$ سلوك النهاية هو $(\swarrow ، \searrow)$.

c المعامل الرئيسي 1 (عدد موجب)

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

$\because$ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (زوجي).

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

$\therefore$ سلوك النهاية هو $(\nwarrow ، \nearrow)$.

d المعامل الرئيسي -1 (عدد سالب)

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

$\because$ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي).

$\therefore$ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

$\therefore$ سلوك النهاية هو $(\nwarrow ، \searrow)$.

حاول أن تحل

2 وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a $y = -x^3 + 2x^2 + 6$

b $y = 4x^4 - 3x$

c $f(x) = 2x^3 - x$

d $h(x) = x - x^4$

101

«نشاط إثرائي» (الربط بالحياة)

نوجد: $f(22) = 0.0009033(22)^4 - 0.0519(22)^3$

$$+0.959(22)^2 - 3.899(22) + 38.86$$

ومنه (مليون أونصة) $f(22) \approx 76$

3–3: العوامل الخطية لكثيرات الحدود

1 الأهداف

- يحلل كثيرة الحدود إلى عوامل.
- يكتب دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- يربط بين الأصفار والعوامل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

عوامل دالة حدودية – أصفار دالة حدودية – القيمة العظمى – نظرية العامل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة التالية:

$y = x^2 + 4x + 3$

(b) حدّد سلوك النهاية لكل دالة مما يلي:

(1) $y = -x^2 + 3x - 5$

(2) $y = -x^3 + 4x^2 + 2$

(3) $y = x^3 + 4x - 1$

(4) $y = x^4 - 4x^2 + 3$


3–3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

Linear Factors of Polynomials

سوف تتعلم
- تحليل كثيرة الحدود إلى عوامل
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- الربط بين الأصفار والعوامل

المفردات والمصطلحات:
- القيمة العظمى Maximum Value
- عوامل دالة حدودية Factors of a Polynomial Function
- أصفار دالة حدودية Zeros of a Polynomial Function
- نظرية العامل Factor Theorem

معلومة: عندما نقول عوامل العدد فإننا نعني بها العوامل الموجبة والعوامل السالبة لهذا العدد. فمثلاً: عوامل العدد 6 هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

دعنا نفكر ونتناقش

كثيرة الحدود في صورة عوامل

من المفيد أحياناً التعامل مع كثيرات الحدود في صورة عوامل.
فمثلاً عوامل كثيرة الحدود x^3-2x^2-5x+6 هي:
$(x-1), (x+2), (x-3)$

1 كيف يمكنك التحقق من أن: $(x-1), (x+2), (x-3)$ هي عوامل لكثيرة الحدود x^3-2x^2-5x+6؟

2 ما العلاقة بين كل حد ثابت لعوامل كثيرة الحدود وعوامل الحد الثابت 6؟

عندما نحلل كثيرة الحدود إلى عوامل خطية فلا يمكن القيام بتحليلات أخرى لإيجاد عوامل إضافية.

مثال (1)

اكتب التعبير: $(x+1)(x+2)(x+5)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

الحل:

اضرب $(x+2)$، $(x+5)$: $(x+1)(x+2)(x+5)=(x+1)(x^2+5x+2x+10)$

بسّط $=(x+1)(x^2+7x+10)$

اضرب $=x^3+7x^2+10x+x^2+7x+10$

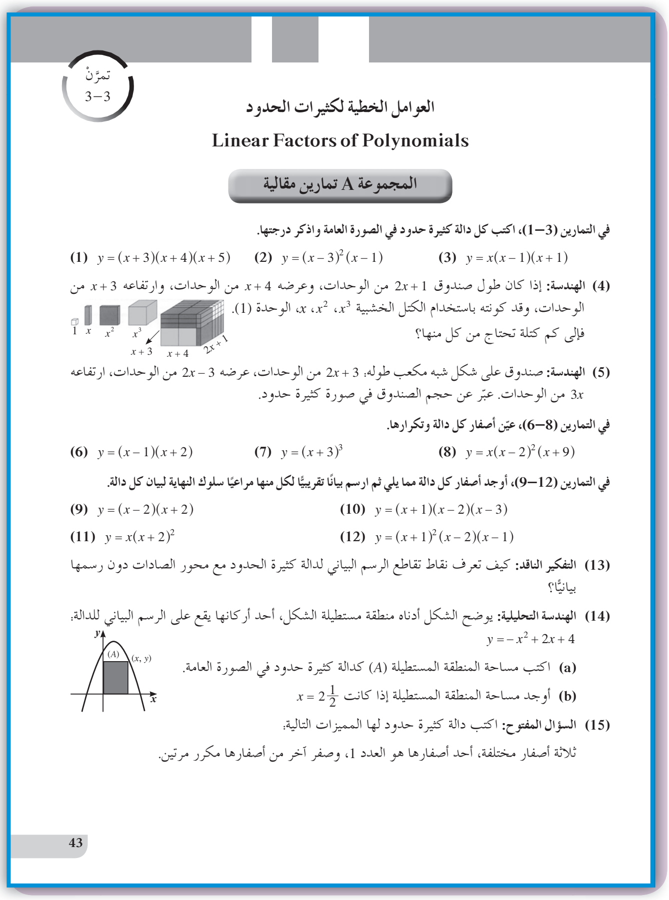
بسّط $=x^3+8x^2+17x+10$

الصورة العامة للتعبير $(x+1)(x+2)(x+5)$ هي $x^3+8x^2+17x+10$

حاول أن تحل

1 اكتب التعبير: $(x+1)(x+1)(x-2)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

102


تمرّن 3–3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

Linear Factors of Polynomials

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–3)، اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة واذكر درجتها.

(1) $y=(x+3)(x+4)(x+5)$ (2) $y=(x-3)^2(x-1)$ (3) $y=x(x-1)(x+1)$

(4) الهندسة: إذا كان طول صندوق $2x+1$ من الوحدات، وعرضه $x+4$ من الوحدات، وارتفاعه $x+3$ من الوحدات، وقد كونته باستخدام الكتل الخشبية x^3، x^2، x، الوحدة (1). فإلى كم كتلة تحتاج من كل منها؟

(5) الهندسة: صندوق على شكل شبه مكعب طوله $2x+3$ من الوحدات، عرضه $2x-3$ من الوحدات، ارتفاعه $3x$ من الوحدات. عبّر عن حجم الصندوق في صورة كثيرة حدود.

في التمارين (6–8)، عيّن أصفار كل دالة وتكرارها.

(6) $y=(x-1)(x+2)$ (7) $y=(x+3)^3$ (8) $y=x(x-2)^2(x+9)$

في التمارين (9–12)، أوجد أصفار كل دالة مما يلي ثم ارسم بيانًا تقريبيًا لكل منها مراعيًا سلوك النهاية لبيان كل دالة.

(9) $y=(x-2)(x+2)$ (10) $y=(x+1)(x-2)(x-3)$

(11) $y=x(x+2)^2$ (12) $y=(x+1)^2(x-2)(x-1)$

(13) التفكير الناقد: كيف تعرف نقاط تقاطع الرسم البياني لدالة كثيرة الحدود مع محور الصادات دون رسمهما بيانيًا؟

(14) الهندسة التحليلية: يوضح الشكل أدناه منطقة مستطيلة الشكل، أحد أركانها يقع على الرسم البياني للدالة. $y=-x^2+2x+4$

(a) اكتب مساحة المنطقة المستطيلة (A) كدالة كثيرة حدود في الصورة العامة.

(b) أوجد مساحة المنطقة المستطيلة إذا كانت $x=2\frac{1}{2}$

(15) السؤال المفتوح: اكتب دالة كثيرة حدود لها المميزات التالية.

ثلاثة أصفار مختلفة، أحد أصفارها هو العدد 1، وصفر آخر من أصفارها مكرر مرتين.

43

5 التدريس

يوفر هذا الدرس فرصة أمام الطلاب لتبيان العلاقة بين الصورة العامة لدالة كثيرة الحدود وتحليلها إلى عوامل خطية، مما يساعد كثيرًا على إيجاد الحلول الجبرية لمعادلات كثيرات الحدود، كما أنه يركز على العلاقة بين الحلول الجبرية والحلول البيانية لكثيرات الحدود من درجات مختلفة.

في المثالين (2) ,(1)

ينمذجان العلاقة بين الصورة التحليلية إلى عوامل والصورة العامة وبالعكس. فنرى أنه بتفكيك الصورة التحليلية نحصل على الصورة العامة، كما أن تحليل الصورة العامة يعطينا الصورة التحليلية إلى عوامل خطية.

في المثال (3)

ينمذج حالة واقعية إلى دالة كثيرة الحدود يستخدم فيها الصورة التحليلية والرسم البياني لإيجاد قيمة عظمى لحجم علبة ضمن شروط محددة.

في المثال (4)

يساعد الطالب على إيجاد أصفار الدالة وتكوين جدول قيم لرسم منحنى تقريبي لدالة كثيرة الحدود مراعيًا سلوك النهاية، وذلك من دون استخدام الآلة الحاسبة.

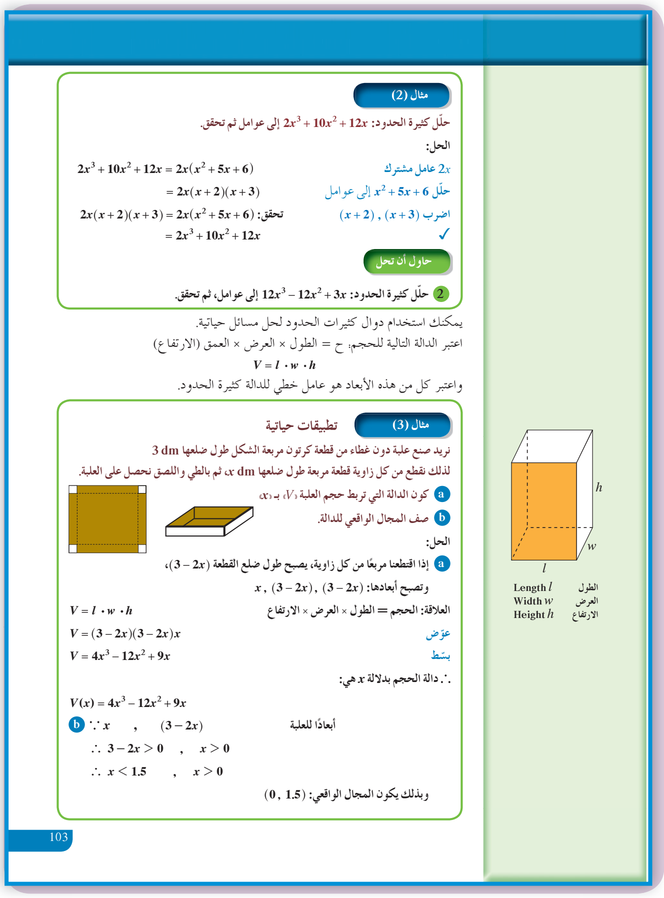
في المثال (5)

وضح للطلاب كيفية كتابة العوامل الخطية لدالة كثيرة الحدود إذا عرفت أصفارها.

أخبرهم أن $x = a$ هي أحد أصفار الدالة، فإن $(x - a)$ هو عامل خطي لهذه الدالة.

6 الربط

يوفر المثال (3) فرصة أمام الطلاب لربط حالة حياتية بدالة كثيرة الحدود، لإيجاد نتائج محددة لا يمكن الحصول عليها إلا برسم منحنى الدالة.


مثال (2)

حلّل كثيرة الحدود: $2x^3 + 10x^2 + 12x$ إلى عوامل ثم تحقق.

الحل:

$2x$ عامل مشترك: $2x^3 + 10x^2 + 12x = 2x(x^2 + 5x + 6)$

حلّل $x^2 + 5x + 6$ إلى عوامل: $= 2x(x+2)(x+3)$

اضرب $(x+3)$, $(x+2)$ — تحقق: $2x(x+2)(x+3) = 2x(x^2 + 5x + 6)$

✓ $= 2x^3 + 10x^2 + 12x$

حاول أن تحل

2 حلّل كثيرة الحدود: $12x^3 - 12x^2 + 3x$ إلى عوامل، ثم تحقق.

يمكنك استخدام دوال كثيرات الحدود لحل مسائل حياتية.

اعتبر الدالة التالية للحجم: ح = الطول × العرض × العمق (الارتفاع)

$$V = l \cdot w \cdot h$$

واعتبر كل من هذه الأبعاد هو عامل خطي للدالة كثيرة الحدود.

مثال (3) تطبيقات حياتية

نريد صنع علبة دون غطاء من قطعة كرتون مربعة الشكل طول ضلعها 3 dm لذلك نقطع من كل زاوية قطعة مربعة طول ضلعها x dm، ثم بالطي واللصق نحصل على العلبة.

a كون الدالة التي تربط حجم العلبة (V) بـ (x).

b صف المجال الواقعي للدالة.

الحل:

a إذا اقتطعنا مربعًا من كل زاوية، يصبح طول ضلع القطعة $(3 - 2x)$،
وتصبح أبعادها: x , $(3-2x)$, $(3-2x)$

العلاقة: الحجم = الطول × العرض × الارتفاع: $V = l \cdot w \cdot h$

عوّض: $V = (3-2x)(3-2x)x$

بسّط: $V = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

∴ دالة الحجم بدلالة x هي:

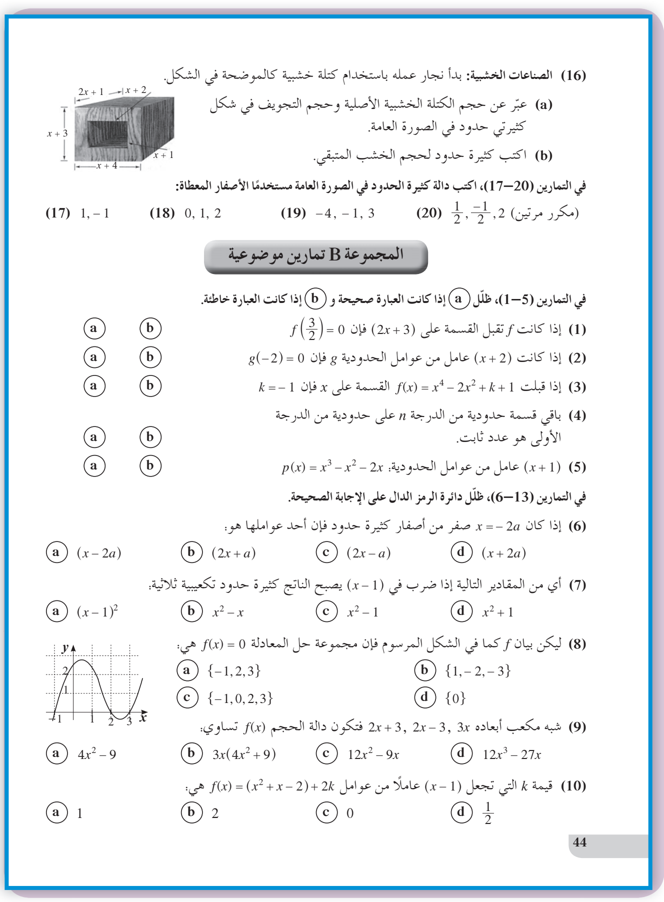
$V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

b $\because x \ , \ (3-2x)$ أبعادًا للعلبة

$\therefore 3 - 2x > 0 \ , \ x > 0$

$\therefore x < 1.5 \ , \ x > 0$

وبذلك يكون المجال الواقعي: $(0 , 1.5)$


(16) **الصناعات الخشبية:** بدأ نجار عمله باستخدام كتلة خشبية كالموضحة في الشكل.

(a) عبّر عن حجم الكتلة الخشبية الأصلية وحجم التجويف في شكل كثيرتي حدود في الصورة العامة.

(b) اكتب كثيرة حدود لحجم الخشب المتبقي.

في التمارين (20—17)، اكتب دالة كثيرة الحدود في الصورة العامة مستخدمًا الأصفار المعطاة:

(17) $1, -1$ (18) $0, 1, 2$ (19) $-4, -1, 3$ (20) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 2$ (مكرر مرتين)

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f تقبل القسمة على $(2x+3)$ فإن $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ (a) (b)

(2) إذا كانت $(x+2)$ عامل من عوامل الحدودية g فإن $g(-2) = 0$ (a) (b)

(3) إذا قبلت $f(x) = x^4 - 2x^2 + k + 1$ القسمة على x فإن $k = -1$ (a) (b)

(4) باقي قسمة حدودية من الدرجة n على حدودية من الدرجة الأولى هو عدد ثابت. (a) (b)

(5) $(x+1)$ عامل من عوامل الحدودية: $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$ (a) (b)

في التمارين (13—6)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $x = -2a$ صفر من أصفار كثيرة حدود فإن أحد عواملها هو:

(a) $(x-2a)$ (b) $(2x+a)$ (c) $(2x-a)$ (d) $(x+2a)$

(7) أي من المقادير التالية إذا ضرب في $(x-1)$ يصبح الناتج كثيرة حدود تكعيبية ثلاثية:

(a) $(x-1)^2$ (b) $x^2 - x$ (c) $x^2 - 1$ (d) $x^2 + 1$

(8) ليكن بيان f كما في الشكل المرسوم فإن مجموعة حل المعادلة $f(x) = 0$ هي:

(a) $\{-1, 2, 3\}$ (b) $\{1, -2, -3\}$
(c) $\{-1, 0, 2, 3\}$ (d) $\{0\}$

(9) شبه مكعب أبعاده $2x+3,\ 2x-3,\ 3x$ فتكون دالة الحجم $f(x)$ تساوي:

(a) $4x^2 - 9$ (b) $3x(4x^2 + 9)$ (c) $12x^2 - 9x$ (d) $12x^3 - 27x$

(10) قيمة k التي تجعل $(x-1)$ عاملًا من عوامل $f(x) = (x^2 + x - 2) + 2k$ هي:

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في كتابة دالة كثيرة الحدود إذا عرفت أصفارها. اعرض أمامهم حالتين مثل: $x = 2$ أو $x = -3$ لتحديد العامل الخطي المقابل فيكون $(x - 2)$ هو عامل خطي، ثم $(x + 3)$ هو عامل خطي آخر. ركّز معهم على أن x أيضًا عامل خطي صفره الصفر.

8 التقييم

تساعد فقرات «حاول أن تحل» المعلم على تكوين فكرة واضحة عن إمكانيات طلابه في التعامل مع دالة كثيرة الحدود، عند تحليلها إلى عوامل خطية أو كتابتها بالصورة العامة.

اختبار سريع

1. اكتب: $(2x - 1)(-3x + 4)(x - 2)$ بالصورة العامة.

$-6x^3 + 23x^2 - 26x + 8$

2. حلل كثيرة الحدود: $-3x^3 + 27x$ إلى عوامل خطية.

$-3x(x - 3)(x + 3)$

3. اكتب دالة كثيرة الحدود حيث أصفارها: $4, -2, 3$ بالصورة العامة.

$f(x) = (x - 4)(x + 2)(x - 3) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

حاول أن تحل

3 قطعة خشب على شكل شبه مكعب طولها 12 cm وعرضها 8 cm وسماكتها x cm. اقتطع من إحدى زواياها مكعب طول حرفه x cm

a كوّن الدالة التي تربط حجم قطعة الخشب المتبقي بـ x

b صف المجال الواقعي للدالة.

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ من مثال (3)

ونلاحظ أن:

$x = 1.5$ هو صفر مكرر و $x = 0$ هو صفر بسيط

الأجزاء المقطوعة من محور السينات تسمى **أصفار الدالة**، لأن قيمة الدالة تساوي صفرًا عند هذه الأجزاء.

نستنتج أن القيمة العظمى للدالة على المجال $(0, 1.5)$ هي 2 عندما تكون $x = 0.5$.

أي أن القيمة العظمى لحجم العلبة هي $2\ dm^3$ عندما يكون ارتفاع العلبة 0.5 dm وطول ضلع القاعدة المربعة:

$3 - 2 \times (0.5) = 2\ dm$

عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود

Factors and Zeros of a Polynomial Function

إذا كانت دالة كثيرة الحدود في صورة العوامل، فإنه بإمكانك استخدام خاصية الضرب في الصفر لإيجاد القيم التي تجعل الدالة تساوي صفرًا.

مثال (4)

أوجد أصفار $y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$، ثم ارسم بيانًا تقريبيًا للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

الحل:

باستخدام خاصية الضرب في الصفر، أوجد صفرًا لكل عامل خطي.

$x - 2 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x + 3 = 0$

$x = 2$ ، $x = -1$ ، $x = -3$

$\therefore$ أصفار الدالة هي: $2, -1, -3$

مراجعة سريعة:

تنص خاصية الضرب في الصفر على أنه عندما يساوي ناتج الضرب صفرًا، فإن أحد العوامل على الأقل يجب أن يساوي صفرًا.

104

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 – 2 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

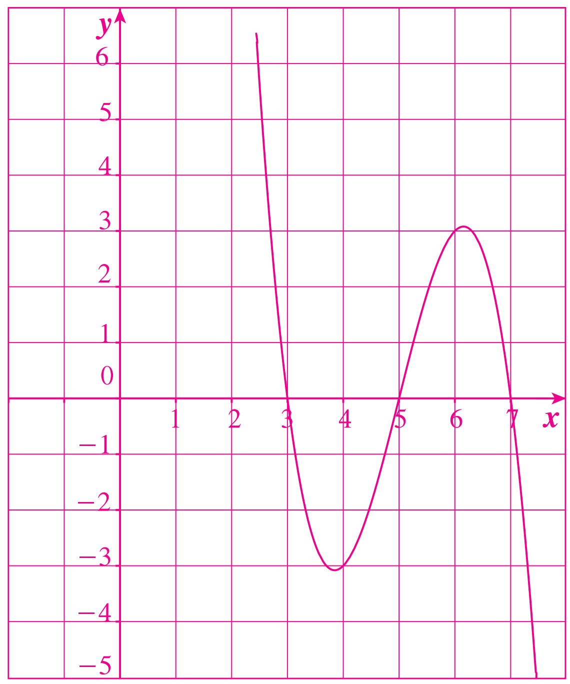
1 $x^3 - 3x - 2$

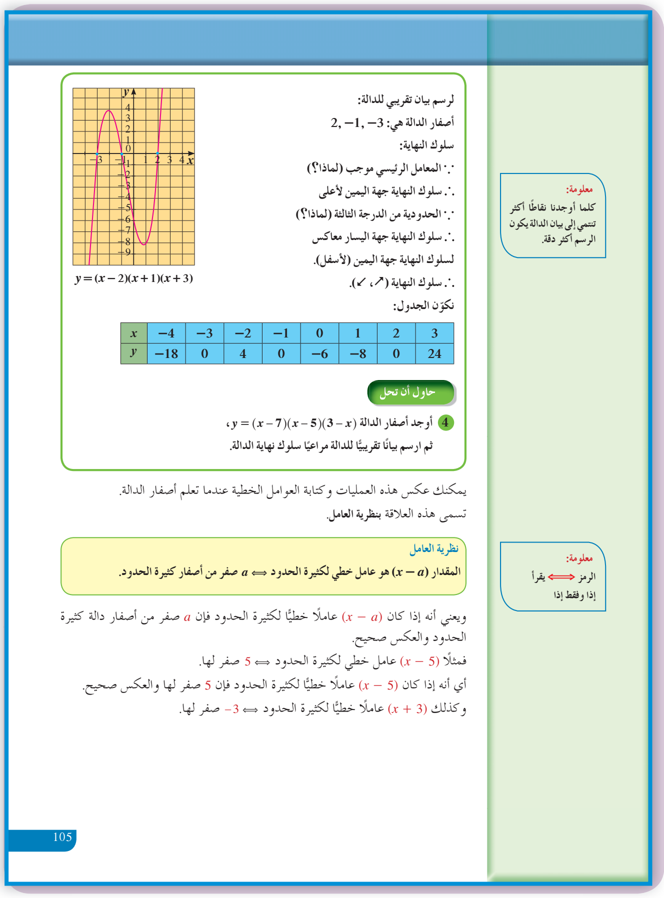
2 $3x(2x-1)^2$

3 **(a)** $V(x) = 96x - x^3$

(b) $0 < x < 8$

4 $x = 3$ أو $x = 5$ أو $x = 7$





لرسم بيان تقريبي للدالة:

أصفار الدالة هي: $-3, -1, 2$

سلوك النهاية:

∵ المعامل الرئيسي موجب (لماذا؟)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى

∵ الحدودية من الدرجة الثالثة (لماذا؟)

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس

لسلوك النهاية جهة اليمين (لأسفل).

∴ سلوك النهاية (↗، ↙).

نكوّن الجدول:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	0	4	0	-6	-8	0	24

$y = (x-2)(x+1)(x+3)$

حاول أن تحل

4 أوجد أصفار الدالة $y = (x-7)(x-5)(3-x)$، ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

يمكنك عكس هذه العمليات وكتابة العوامل الخطية عندما تعلم أصفار الدالة.
تسمى هذه العلاقة **بنظرية العامل**.

نظرية العامل

المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

ويعني أنه إذا كان $(x - a)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن a صفر من أصفار دالة كثيرة الحدود والعكس صحيح.
فمثلًا $(x - 5)$ عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ 5 صفر لها.
أي أنه إذا كان $(x - 5)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن 5 صفر لها والعكس صحيح.
وكذلك $(x + 3)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ -3 صفر لها.

معلومة: كلما أوجدنا نقاطًا أكثر تنتمي إلى بيان الدالة يكون الرسم أكثر دقة.

معلومة: الرمز $\Longleftrightarrow$ يقرأ إذا وفقط إذا

105

5 **(a)** $f(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$

(b) $f(x) = x(x+4)(x+2)$

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$

(c) $f(x) = (x-3)^2(x+1)$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

(d) يمكن ضرب العامل x في الدالة الحدودية بعدد ثابت لا يساوي الصفر: $f(x) = x(x+4)(x+2)$، علمًا أن الصفر مضروبًا بأي عدد حقيقي يكون الناتج صفرًا.

(e) لا، إذا ضربت $f(x)$ بـ k حيث $k \neq 0$ نحصل على دالة جديدة لها أصفار $f(x)$ نفسها.

مثال (5)

اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: 3 , 3 , -2 في الصورة العامة.

الحل:

∵ أصفار الدالة هي:

-2 , 3 , 3

∴ عوامل كثيرة الحدود هي: $(x-3)$, $(x-3)$, $(x-(-2))$

$f(x) = (x+2)(x-3)(x-3)$

$= (x+2)(x^2-6x+9)$ اضرب $(x-3)(x-3)$

$= x(x^2-6x+9) + 2(x^2-6x+9)$ خاصية التوزيع

$= x^3 - 6x^2 + 9x + 2x^2 - 12x + 18$

$= x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ بسّط

∴ الدالة هي:

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

حاول أن تحل

5 (a) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 1 , -2 , -4

(b) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 0 , -2 , -4

(c) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و -1 صفر بسيط.

(d) التفكير الناقد: اشرح لماذا الصفر عند 0 في (b) يعطي أكثر من إمكانية واحدة للإجابة.

(e) هل كل دالة من الدوال التي حصلت عليها من (b) , (a) وحيدة؟ فسر إجابتك.

نلاحظ مما سبق أن لنظرية العامل أربعة مفاهيم مرتبطة بكثيرة الحدود.

وهذه الأفكار متكافئة، بمعنى أنك إذا علمت إحداها، فسوف تعلم الكل.

1 $(x = +1)$ حل للمعادلة: $x^2 + 3x - 4 = 0$

2 $(+1)$ جزء مقطوع من محور السينات لمنحنى الدالة: $y = x^2 + 3x - 4$

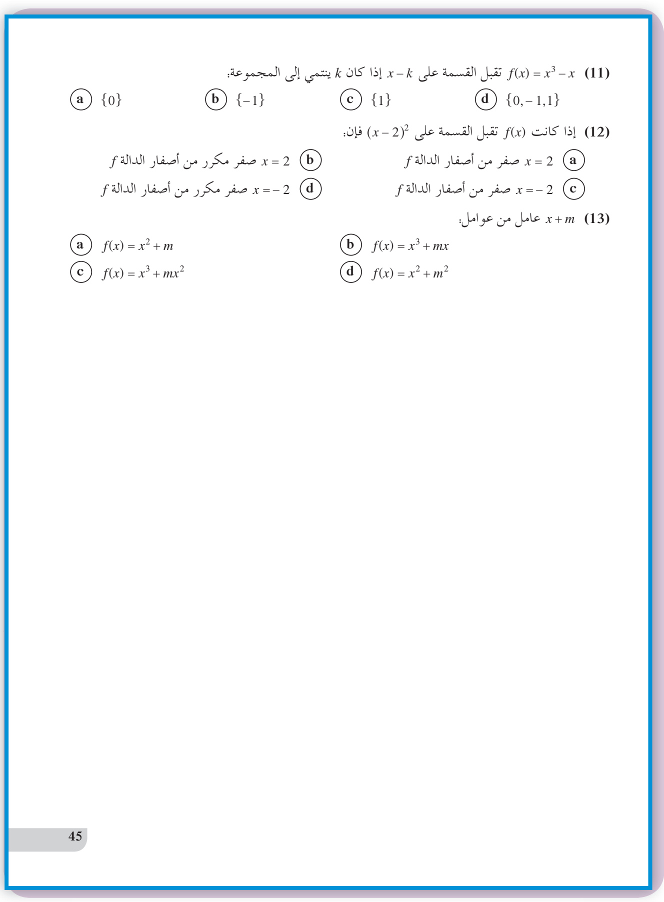
3 $(+1)$ صفر من أصفار الدالة: $y = x^2 + 3x - 4$

4 $(x-1)$ عامل من عوامل كثيرة حدود: $x^2 + 3x - 4$

معلومة:

عندما يكرر عامل خطي في كثيرة الحدود، فإن صفر الدالة يكرر أيضًا ويسمى في هذه الحالة «صفر مكرر».

106



(11) $f(x) = x^3 - x$ تقبل القسمة على $x-k$ إذا كان k ينتمي إلى المجموعة:

(a) $\{0\}$ (b) $\{-1\}$ (c) $\{1\}$ (d) $\{0, -1, 1\}$

(12) إذا كانت $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-2)^2$ فإن:

(a) $x = 2$ صفر من أصفار الدالة f

(b) $x = 2$ صفر مكرر من أصفار الدالة f

(c) $x = -2$ صفر من أصفار الدالة f

(d) $x = -2$ صفر مكرر من أصفار الدالة f

(13) $x + m$ عامل من عوامل:

(a) $f(x) = x^2 + m$

(b) $f(x) = x^3 + mx$

(c) $f(x) = x^3 + mx^2$

(d) $f(x) = x^2 + m^2$

45

3–4: قسمة كثيرات الحدود

1 الأهداف

- يوجد ناتج قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة.
- يوجد ناتج قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة التركيبية.
- يوجد الباقي باستخدام نظرية الباقي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

القسمة المطولة – القسمة التركيبية – ناتج القسمة – المقسوم – المقسوم عليه – نظرية الباقي – باقي القسمة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

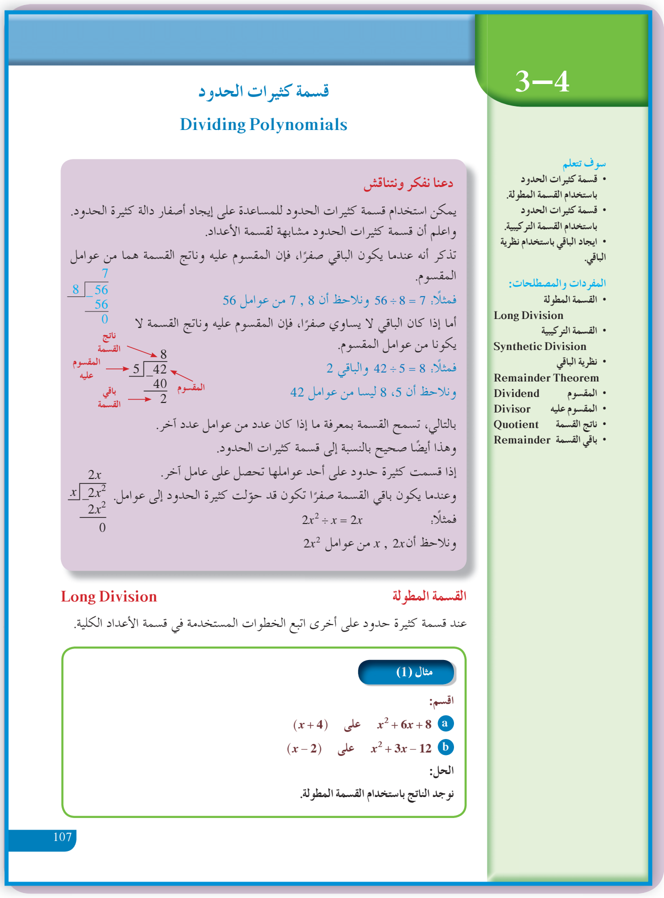
اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب $f(x) = (2x-3)(x+1)(x-4)$ بالصورة العامة، ثم أوجد $f(1), f(-1)$.

(b) اكتب أصفار المعادلة التالية:

$$(x+1)(2x+3)(3x-4) = 0$$

(c) اكتب دالة كثيرة حدود أصفارها: $-1, 2, 3, -2$



3–4

قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

سوف تتعلم

- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة.
- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة التركيبية.
- ايجاد الباقي باستخدام نظرية الباقي.

المفردات والمصطلحات:

- القسمة المطولة Long Division
- القسمة التركيبية Synthetic Division
- نظرية الباقي Remainder Theorem
- المقسوم Dividend
- المقسوم عليه Divisor
- ناتج القسمة Quotient
- باقي القسمة Remainder

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن استخدام قسمة كثيرات الحدود للمساعدة على إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود. واعلم أن قسمة كثيرات الحدود مشابهة لقسمة الأعداد.

تذكر أنه عندما يكون الباقي صفرًا، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة هما من عوامل المقسوم.

فمثلًا: $56 \div 8 = 7$ ونلاحظ أن 8 , 7 من عوامل 56

أما إذا كان الباقي لا يساوي صفرًا، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة لا يكونا من عوامل المقسوم.

فمثلًا: $42 \div 5 = 8$ والباقي 2

ونلاحظ أن 5، 8 ليسا من عوامل 42

ناتج القسمة
المقسوم عليه
المقسوم
باقي القسمة

بالتالي، تسمح القسمة بمعرفة ما إذا كان عدد من عوامل عدد آخر.

وهذا أيضًا صحيح بالنسبة إلى قسمة كثيرات الحدود.

إذا قسمت كثيرة حدود على أحد عواملها تحصل على عامل آخر.

وعندما يكون باقي القسمة صفرًا تكون قد حوّلت كثيرة الحدود إلى عوامل.

فمثلًا: $2x^2 \div x = 2x$

ونلاحظ أن $2x$, x من عوامل $2x^2$

القسمة المطولة Long Division

عند قسمة كثيرة حدود على أخرى اتبع الخطوات المستخدمة في قسمة الأعداد الكلية.

مثال (1)

اقسم:

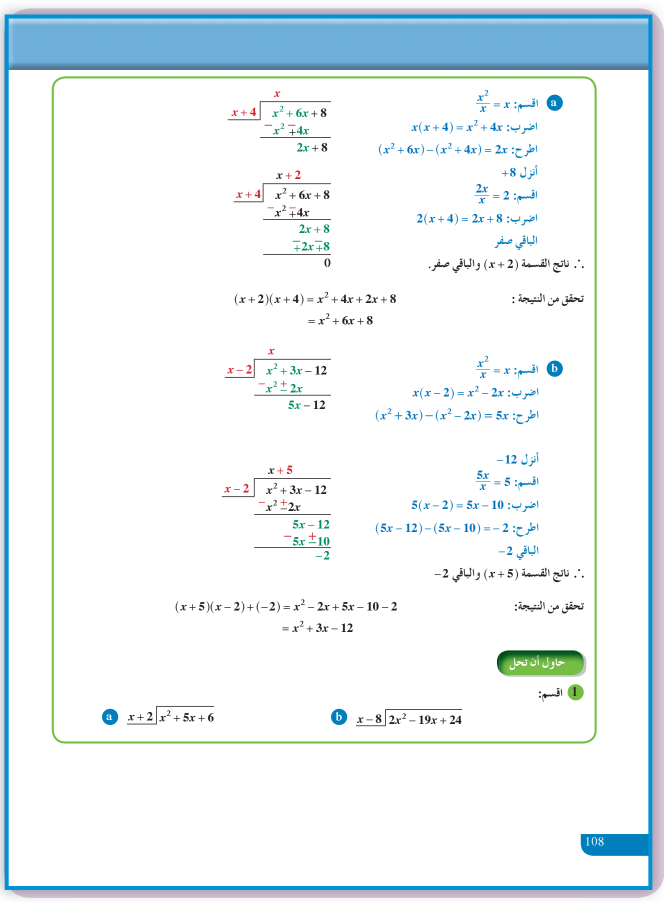
a x^2+6x+8 على $(x+4)$

b $x^2+3x-12$ على $(x-2)$

الحل:

نوجد الناتج باستخدام القسمة المطولة.

107



a اقسم: $\frac{x^2}{x} = x$

اضرب: $x(x+4) = x^2+4x$

اطرح: $(x^2+6x)-(x^2+4x) = 2x$

أنزل $+8$

اقسم: $\frac{2x}{x} = 2$

اضرب: $2(x+4) = 2x+8$

الباقي صفر

∴ ناتج القسمة $(x+2)$ والباقي صفر.

تحقق من النتيجة :

$$(x+2)(x+4) = x^2+4x+2x+8 = x^2+6x+8$$

b اقسم: $\frac{x^2}{x} = x$

اضرب: $x(x-2) = x^2-2x$

اطرح: $(x^2+3x)-(x^2-2x) = 5x$

أنزل -12

اقسم: $\frac{5x}{x} = 5$

اضرب: $5(x-2) = 5x-10$

اطرح: $(5x-12)-(5x-10) = -2$

الباقي -2

∴ ناتج القسمة $(x+5)$ والباقي -2

تحقق من النتيجة:

$$(x+5)(x-2)+(-2) = x^2-2x+5x-10-2 = x^2+3x-12$$

حاول أن تحل

1 اقسم:

a $x+2 \overline{)\, x^2+5x+6}$

b $x-8 \overline{)\, 2x^2-19x+24}$

108

5 التدريس

بعد أن تعرف الطالب العمليات الثلاث على الدوال كثيرات الحدود (الجمع والطرح والضرب)، سوف يتعرف الآن قسمة كثيرات الحدود وذلك باستخدام طريقتين مختلفتين.

أخبر الطلاب أن الطريقة المطولة يمكن استخدامها عند قسمة كثيرات الحدود مهما كانت درجة المقسوم ودرجة المقسوم عليه، أما طريقة القسمة التركيبية فتستخدم عندما يكون المقسوم عليه كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الصورة: $(x+a)$.

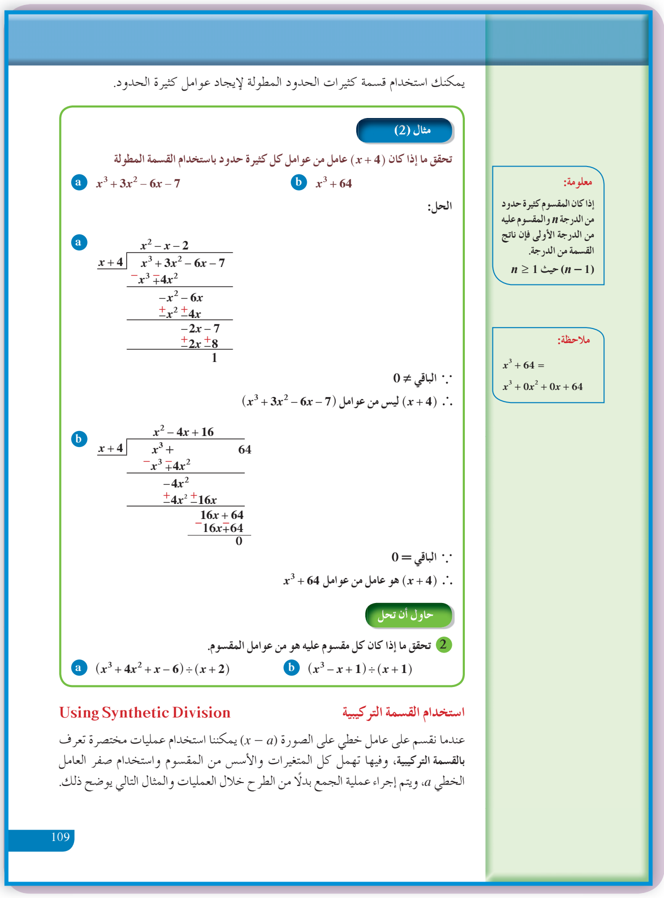
شدّد على الطلاب البدء أولًا بترتيب كثيرات الحدود تنازليًّا بحسب الحدود المكونة.

وعند القسمة يجب دائمًا في كل مرحلة قسمة الحد الأكبر من المقسوم على الحد الأكبر من المقسوم عليه، ولكن عند ضرب الناتج يجب إجراء الضرب مع كل حدود المقسوم عليه، وهذا يحدث مع كل خطوة في عملية القسمة المطولة.

لذا، فمن المستحسن متابعة عمل الطلاب بدقة.

في المثالين (2), (1)

ركّز على فكرة أنه عندما نحصل على باقٍ غير الصفر فإن المقسوم عليه لا يمثل أحد عوامل المقسوم، أما إذا كان الباقي يساوي صفرًا، فإن المقسوم عليه هو حتمًا أحد عوامل المقسوم.



يمكنك استخدام قسمة كثيرات الحدود المطولة لإيجاد عوامل كثيرة الحدود.

مثال (2)

تحقق ما إذا كان $(x+4)$ عامل من عوامل كل كثيرة حدود باستخدام القسمة المطولة

a x^3+3x^2-6x-7 b x^3+64

الحل:

a
$$\begin{array}{r|l} & x^2-x-2 \\ x+4 & x^3+3x^2-6x-7 \\ & \underline{-x^3 \mp 4x^2} \\ & -x^2-6x \\ & \underline{\pm x^2 \pm 4x} \\ & -2x-7 \\ & \underline{\pm 2x \pm 8} \\ & 1 \end{array}$$

∵ الباقي $\neq 0$

∴ $(x+4)$ ليس من عوامل (x^3+3x^2-6x-7)

b
$$\begin{array}{r|l} & x^2-4x+16 \\ x+4 & x^3+ \quad\quad 64 \\ & \underline{-x^3 \mp 4x^2} \\ & -4x^2 \\ & \underline{\pm 4x^2 \pm 16x} \\ & 16x+64 \\ & \underline{-16x \mp 64} \\ & 0 \end{array}$$

∵ الباقي $=0$

∴ $(x+4)$ هو عامل من عوامل x^3+64

حاول أن تحل

2 تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

a $(x^3+4x^2+x-6)\div(x+2)$ b $(x^3-x+1)\div(x+1)$

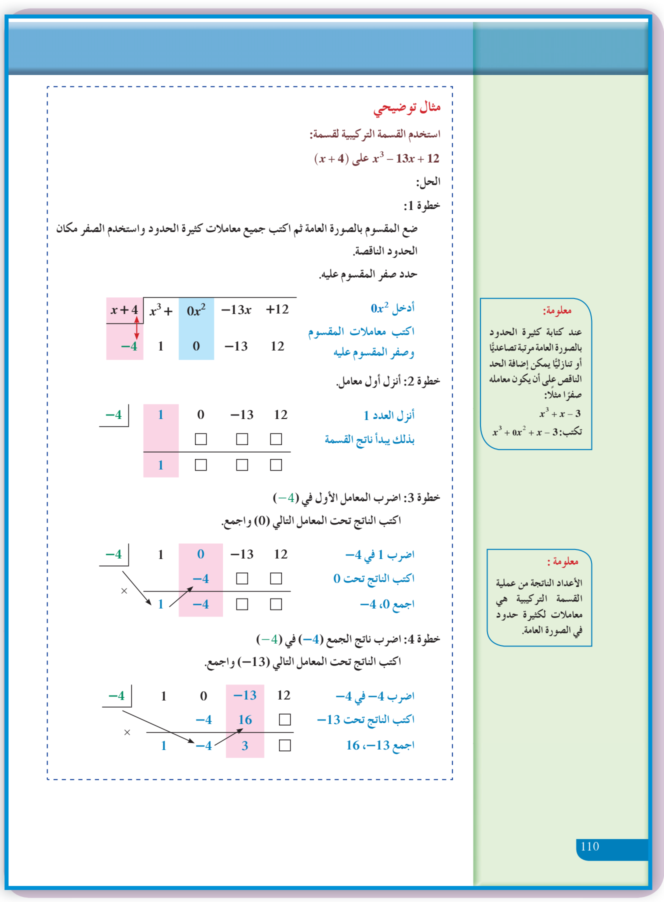
استخدام القسمة التركيبية Using Synthetic Division

عندما نقسم على عامل خطي على الصورة $(x-a)$ يمكننا استخدام عمليات مختصرة تعرف **بالقسمة التركيبية**، وفيها تهمل كل المتغيرات والأسس من المقسوم واستخدام صفر العامل الخطي a، ويتم إجراء عملية الجمع بدلًا من الطرح خلال العمليات والمثال التالي يوضح ذلك.

معلومة: إذا كان المقسوم كثيرة حدود من الدرجة n والمقسوم عليه من الدرجة الأولى فإن ناتج القسمة من الدرجة $(n-1)$ حيث $n \geq 1$

ملاحظة: $x^3+64=$ $x^3+0x^2+0x+64$

109



مثال توضيحي

استخدم القسمة التركيبية لقسمة:

$x^3-13x+12$ على $(x+4)$

الحل:

خطوة 1:

ضع المقسوم بالصورة العامة ثم اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود واستخدم الصفر مكان الحدود الناقصة.

حدد صفر المقسوم عليه.

$x+4$	x^3+	$0x^2$	$-13x$	$+12$
-4	1	0	-13	12

أدخل $0x^2$
اكتب معاملات المقسوم وصفر المقسوم عليه

خطوة 2: أنزل أول معامل.

-4	1	0	-13	12
		□	□	□
	1	□	□	□

أنزل العدد 1
بذلك يبدأ ناتج القسمة

خطوة 3: اضرب المعامل الأول في (-4)
اكتب الناتج تحت المعامل التالي (0) واجمع.

-4	1	0	-13	12
		-4	□	□
×	1	-4	□	□

اضرب 1 في -4
اكتب الناتج تحت 0
اجمع 0، -4

خطوة 4: اضرب ناتج الجمع (-4) في (-4)
اكتب الناتج تحت المعامل التالي (-13) واجمع.

-4	1	0	-13	12
		-4	16	□
×	1	-4	3	□

اضرب -4 في -4
اكتب الناتج تحت -13
اجمع -13، 16

معلومة: عند كتابة كثيرة الحدود بالصورة العامة مرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا يمكن إضافة الحد الناقص على أن يكون معامله صفرًا مثلًا: x^3+x-3 تكتب: x^3+0x^2+x-3

معلومة : الأعداد الناتجة من عملية القسمة التركيبية هي معاملات لكثيرة حدود في الصورة العامة.

110

في المثال (3)

القسمة التركيبية هي طريقة سريعة، ولكنها تستخدم في حالات خاصة، أي عندما يكون المقسوم عليه على الصورة $(x+a)$.

دع الطلاب يحلون تمارين متعددة لكي يتمكنوا من استيعاب الخطوات المتبعة في هذه العملية، ثم أخبرهم أنه يمكن اختصار هذه الخطوات كما هو موضح في المثال (4).

في المثال (7)

أخبرهم أن نظرية الباقي لا يمكن استخدامها إلا إذا كان المقسوم عليه كثيرة حدود من الدرجة الأولى، أي على الصورة $(ax+b)$.

6 الربط

يوفر المثالان (6) ,(5) الربط بين حالة حياتية واقعية تستخدم فيها القسمة بين كثيرات الحدود لإيجاد عوامل المقسوم.

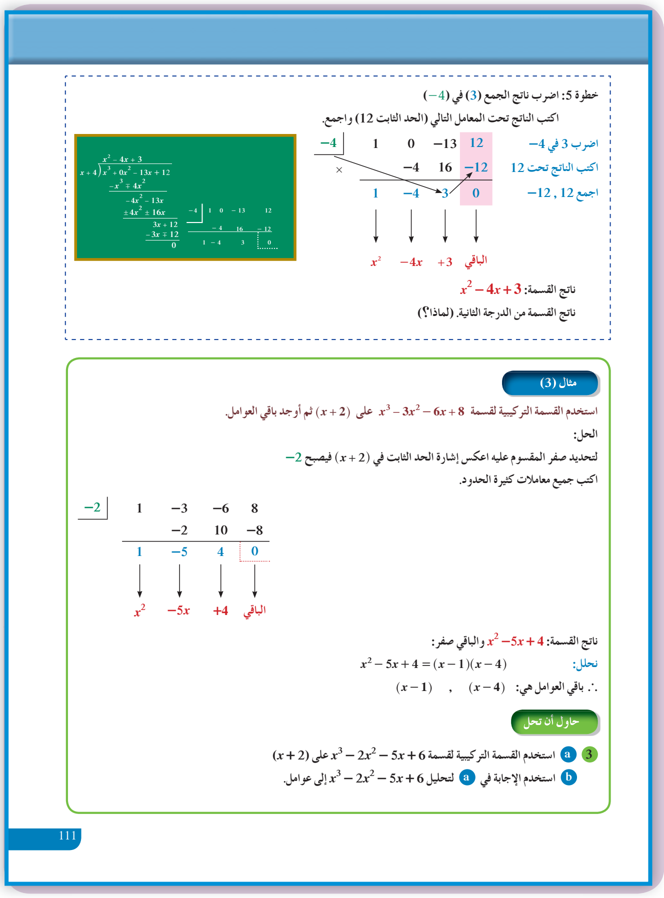
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في استخدام القسمة التركيبية، وذلك في العمليات على الأعداد.

ساعدهم على تخطي هذه الأخطاء بعدة أمثلة تحت إشرافك.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب بدقة في فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من حسن أدائهم في قسمة كثيرات الحدود.



خطوة 5: اضرب ناتج الجمع (3) في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (الحد الثابت 12) واجمع.

اضرب 3 في -4	-4	1	0	-13	12
اكتب الناتج تحت 12			-4	16	-12
اجمع 12 , -12		1	-4	3	0
		x^2	$-4x$	$+3$	الباقي

ناتج القسمة: x^2-4x+3

ناتج القسمة من الدرجة الثانية. (لماذا؟)

مثال (3)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3-3x^2-6x+8 على $(x+2)$ ثم أوجد باقي العوامل.

الحل:

لتحديد صفر المقسوم عليه اعكس إشارة الحد الثابت في $(x+2)$ فيصبح -2

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

-2	1	-3	-6	8
		-2	10	-8
	1	-5	4	0
	x^2	$-5x$	$+4$	الباقي

ناتج القسمة: x^2-5x+4 والباقي صفر:

نحلل: $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

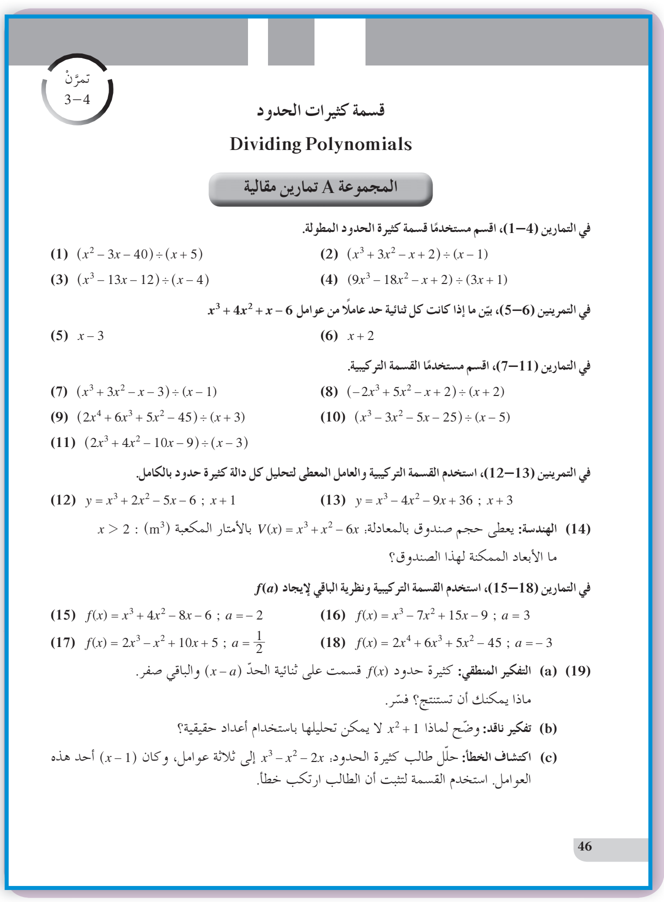
$\therefore$ باقي العوامل هي: $(x-4)$, $(x-1)$

حاول أن تحل

3 (a) استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3-2x^2-5x+6 على $(x+2)$

(b) استخدم الإجابة في (a) لتحليل x^3-2x^2-5x+6 إلى عوامل.

111



تمرَّنْ 3–4

قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4—1)، اقسم مستخدمًا قسمة كثيرة الحدود المطولة.

(1) $(x^2-3x-40)\div(x+5)$

(2) $(x^3+3x^2-x+2)\div(x-1)$

(3) $(x^3-13x-12)\div(x-4)$

(4) $(9x^3-18x^2-x+2)\div(3x+1)$

في التمرينين (6—5)، بيّن ما إذا كانت كل ثنائية حد عاملًا من عوامل x^3+4x^2+x-6

(5) $x-3$

(6) $x+2$

في التمارين (11—7)، اقسم مستخدمًا القسمة التركيبية.

(7) $(x^3+3x^2-x-3)\div(x-1)$

(8) $(-2x^3+5x^2-x+2)\div(x+2)$

(9) $(2x^4+6x^3+5x^2-45)\div(x+3)$

(10) $(x^3-3x^2-5x-25)\div(x-5)$

(11) $(2x^3+4x^2-10x-9)\div(x-3)$

في التمرينين (13—12)، استخدم القسمة التركيبية والعامل المعطى لتحليل كل دالة كثيرة حدود بالكامل.

(12) $y=x^3+2x^2-5x-6\ ;\ x+1$

(13) $y=x^3-4x^2-9x+36\ ;\ x+3$

(14) **الهندسة:** يعطى حجم صندوق بالمعادلة: $V(x)=x^3+x^2-6x$ بالأمتار المكعبة (m^3) : $x>2$
ما الأبعاد الممكنة لهذا الصندوق؟

في التمارين (18—15)، استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد $f(a)$

(15) $f(x)=x^3+4x^2-8x-6\ ;\ a=-2$

(16) $f(x)=x^3-7x^2+15x-9\ ;\ a=3$

(17) $f(x)=2x^3-x^2+10x+5\ ;\ a=\frac{1}{2}$

(18) $f(x)=2x^4+6x^3+5x^2-45\ ;\ a=-3$

(19) (a) **التفكير المنطقي:** كثيرة حدود $f(x)$ قسمت على ثنائية الحدّ $(x-a)$ والباقي صفر.
ماذا يمكنك أن تستنتج؟ فسّر.

(b) **تفكير ناقد:** وضّح لماذا x^2+1 لا يمكن تحليلها باستخدام أعداد حقيقية؟

(c) **اكتشاف الخطأ:** حلّل طالب كثيرة الحدود: x^3-x^2-2x إلى ثلاثة عوامل، وكان $(x-1)$ أحد هذه العوامل. استخدم القسمة لتثبت أن الطالب ارتكب خطأ.

46

اختبار سريع

1. اقسم: $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ باستخدام القسمة المطولة.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - 7x + 5 \\ \hline x+2 & 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 \\ & \underline{-2x^3 - 4x^2} \\ & 0 - 7x^2 - 9x + 10 \\ & \underline{+7x^2 + 14x} \\ & 0 + \quad 5x + 10 \\ & \underline{-5x - 10} \\ & 0 \end{array}$$

2. استخدم القسمة التركيبية لتوجد ناتج قسمة $2x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 20x + 15$ على $(x-2)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 2 & -5 & -11 & 20 & 15 \\ & & 4 & -2 & -26 & -12 \\ \hline & 2 & -1 & -13 & -6 & 3 \end{array}$$

ناتج القسمة $= 2x^3 - x^2 - 13x - 6$ والباقي $= 3$

3. من دون استخدام أي طريقة في القسمة، أوجد الباقي عند قسمة $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 6x + 2$ على $(x+2)$. ماذا تستنتج؟ اشرح.

باستخدام نظرية الباقي نوجد $f(-2)$

$f(-2) = -2(-2)^4 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 2 = -6$

فيكون الباقي $= -6$، لذا $(x+2)$ ليس من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$

9 إجابات وحلول

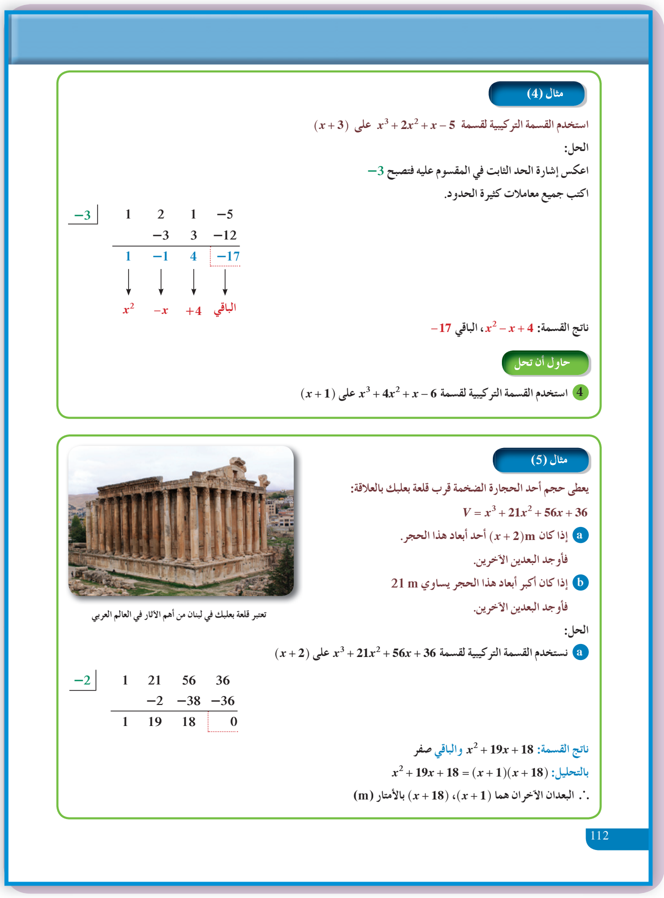
«حاول أن تحل»

1. (a)

$$\begin{array}{r|l} & x + 3 \\ \hline x+2 & x^2 + 5x + 6 \\ & \underline{-x^2 - 2x} \\ & 3x + 6 \\ & \underline{-3x - 6} \\ & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 3 \\ \hline x-8 & 2x^2 - 19x + 24 \\ & \underline{-2x^2 + 16x} \\ & -3x + 24 \\ & \underline{+3x - 24} \\ & 0 \end{array}$$



مثال (4)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 2x^2 + x - 5$ على $(x+3)$

الحل:

اعكس إشارة الحد الثابت في المقسوم عليه فتصبح -3

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 2 & 1 & -5 \\ & & -3 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & -17 \\ & x^2 & -x & +4 & \text{الباقي} \end{array}$$

ناتج القسمة: $x^2 - x + 4$، الباقي -17

حاول أن تحل

4. استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 4x^2 + x - 6$ على $(x+1)$

مثال (5)

يعطى حجم أحد الحجارة الضخمة قرب قلعة بعلبك بالعلاقة:

$V = x^3 + 21x^2 + 56x + 36$

a) إذا كان $(x+2)$m أحد أبعاد هذا الحجر. فأوجد البعدين الآخرين.

b) إذا كان أكبر أبعاد هذا الحجر يساوي 21 m فأوجد البعدين الآخرين.

تعتبر قلعة بعلبك في لبنان من أهم الآثار في العالم العربي

الحل:

a) نستخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 21x^2 + 56x + 36$ على $(x+2)$

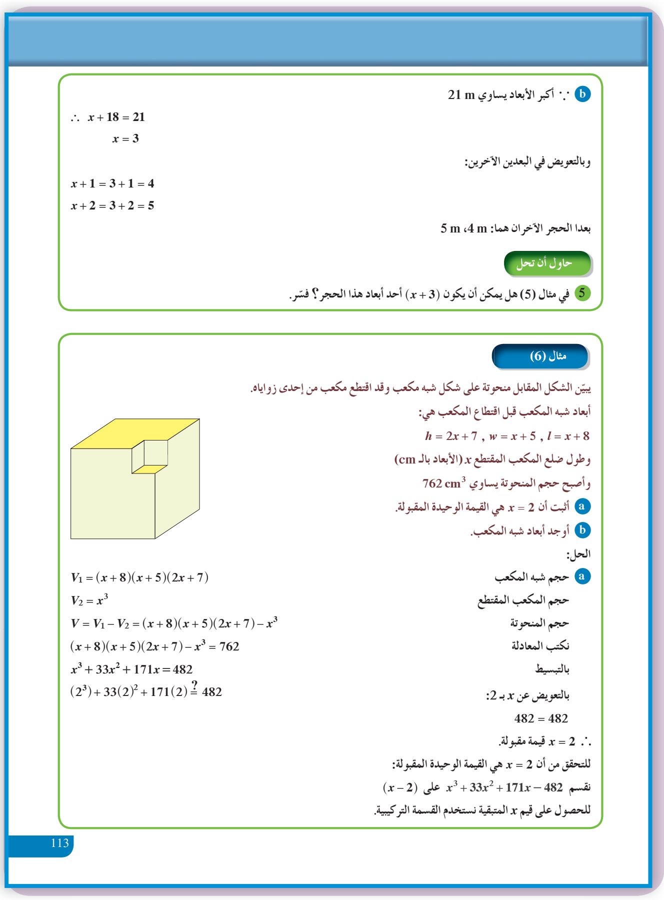
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 21 & 56 & 36 \\ & & -2 & -38 & -36 \\ \hline & 1 & 19 & 18 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة: $x^2 + 19x + 18$ والباقي صفر

بالتحليل: $x^2 + 19x + 18 = (x+1)(x+18)$

$\therefore$ البعدان الآخران هما $(x+1)$، $(x+18)$ بالأمتار (m)

112



b) $\because$ أكبر الأبعاد يساوي 21 m

$\therefore \ x + 18 = 21$

$x = 3$

وبالتعويض في البعدين الآخرين:

$x + 1 = 3 + 1 = 4$

$x + 2 = 3 + 2 = 5$

بعدا الحجر الآخران هما: 4 m، 5 m

حاول أن تحل

5. في مثال (5) هل يمكن أن يكون $(x+3)$ أحد أبعاد هذا الحجر؟ فسّر.

مثال (6)

يبيّن الشكل المقابل منحوتة على شكل شبه مكعب وقد اقتطع مكعب من إحدى زواياه.

أبعاد شبه المكعب قبل اقتطاع المكعب هي:

$h = 2x + 7$, $w = x + 5$, $l = x + 8$

وطول ضلع المكعب المقتطع x (الأبعاد بالـ cm)

وأصبح حجم المنحوتة يساوي $762\ cm^3$

a) أثبت أن $x = 2$ هي القيمة الوحيدة المقبولة.

b) أوجد أبعاد شبه المكعب.

الحل:

a) حجم شبه المكعب $V_1 = (x+8)(x+5)(2x+7)$

حجم المكعب المقتطع $V_2 = x^3$

حجم المنحوتة $V = V_1 - V_2 = (x+8)(x+5)(2x+7) - x^3$

نكتب المعادلة $(x+8)(x+5)(2x+7) - x^3 = 762$

بالتبسيط $x^3 + 33x^2 + 171x = 482$

بالتعويض عن x بـ 2: $(2^3) + 33(2)^2 + 171(2) \stackrel{?}{=} 482$

$482 = 482$

$\therefore$ $x = 2$ قيمة مقبولة.

للتحقق من أن $x = 2$ هي القيمة الوحيدة المقبولة:

نقسم $x^3 + 33x^2 + 171x - 482$ على $(x-2)$

للحصول على قيم x المتبقية نستخدم القسمة التركيبية.

113

2 **(a)**

$$
\begin{array}{r}
x^2+2x-3 \\
x+2\,\overline{)\,x^3+4x^2+x-6} \\
\underline{-x^3-2x^2} \\
0+2x^2+x-6 \\
\underline{-2x^2-4x} \\
0-3x-6 \\
\underline{+3x+6} \\
0
\end{array}
$$

فيكون $(x+2)$ هو أحد عوامل: x^3+4x^2+x-6

(b)

$$
\begin{array}{r}
x^2-x \\
x+1\,\overline{)\,x^3-x+1} \\
\underline{-x^3-x^2} \\
0-\ \ x^2-x+1 \\
\underline{+x^2+x} \\
1
\end{array}
$$

بما أن الباقي 1، لذا $(x+1)$ ليس من عوامل (x^3-x+1)

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x-a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

مثال (7)

باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$ على $(x+4)$

ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

الحل:

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$

استخدم نظرية الباقي

$f(-4) = (-4)^4 - 5(-4)^2 + 4(-4) + 12$

$= 256 - 80 - 16 + 12$

$= 172$

∴ باقي القسمة = 172

وللتحقق من صحة الإجابة نستخدم القسمة التركيبية.

−4	1	0	−5	4	12
		−4	16	−44	160
	1	−4	11	−40	172 الباقي

حاول أن تحل

7 استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$ على $(x+1)$، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

115

2	1	33	171	−482
		2	70	482
	1	35	241	0

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 + 35x + 241$

باستخدام الآلة الحاسبة، جذرا المعادلة التربيعية $x^2 + 35x + 241 = 0$ هما: $x_1 \approx -9.42$, $x_2 \approx -25.58$

وهما يعطيان قيمًا سالبة لطول المكعب.

∴ القيمتان مرفوضتان.

b بالتعويض عن x بـ 2 نحصل على: $l = 10$ cm , $w = 7$ cm , $h = 11$ cm

حاول أن تحل

6 مبنى على شكل شبه مكعب، يعطى حجمه بالعلاقة: $V = x^3 + 4x^2 - x - 4$ إذا كان:

a $(x+4)$ أحد أبعاد المبنى. فأوجد البعدين الآخرين.

b أصغر أبعاد المبنى يساوي 10 m فأوجد البعدين الآخرين.

مثال توضيحي

لتكن: $f(x) = x^2 - 2x - 8$

a أوجد ناتج قسمة $f(x)$ على $(x-4)$ ثم أوجد $f(+4)$

b أوجد ناتج قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ ثم أوجد $f(-1)$

نلاحظ أن $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-4)$

أي أن $(x-4)$ أحد عواملها

∴ 4 أحد أصفارها

أي أن $f(4) = 0$

بينما $f(x)$ لا تقبل القسمة على $(x+1)$

أي أن $(x+1)$ ليس من عواملها

∴ (-1) ليس من أصفارها.

لأن $f(-1) = -5$ لا يساوي الصفر وهو باقي القسمة.

114

في التمارين (20—22)، اقسم ما يلي:

(20) $(2x^3 + 9x^2 + 14x + 5) \div (2x+1)$

(21) $(x^5 + 1) \div (x+1)$

(22) $(3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 2) \div (3x-2)$

في التمارين (23—25)، اقسم ثمّ أوجد نمطًا في الإجابات.

(23) $(x^2 - 1) \div (x-1)$

(24) $(x^3 - 1) \div (x-1)$

(25) $(x^4 - 1) \div (x-1)$

(26) مستخدمًا الأنماط، اقسم $(x^5 - 1) \div (x-1)$

في التمارين (27—29)، اقسم ثمّ أوجد نمطًا في الإجابات.

(27) $(x^3 + 1) \div (x+1)$

(28) $(x^5 + 1) \div (x+1)$

(29) $(x^7 + 1) \div (x+1)$

(30) مستخدمًا الأنماط، أوجد $(x^9 + 1) \div (x+1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x+\alpha)$ يساوي صفرًا فإن α عامل من عوامل f — (a) (b)

(2) الدالة $f(x) = (x-2)^2 - 1$ تقبل القسمة على $(x-1)$ — (a) (b)

(3) باقي قسمة $(x^3 + a^3)$ على $(x-a)$ هو $2a^3$ — (a) (b)

(4) ناتج قسمة حدودية من الدرجة n حيث $n \geqslant 2$ على حدودية من الدرجة الثانية تكون حدودية من الدرجة $(n-2)$ — (a) (b)

(5) ناتج قسمة حدودية من الدرجة السادسة على حدودية من الدرجة الثالثة تكون حدودية من الدرجة الثانية. — (a) (b)

في التمارين من (6—11)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) باقي قسمة $f(x)$ على $g(x) = x-k$ هو:

(a) $g(k)$ (b) $f(k)$ (c) $f(-k)$ (d) $-k$

(7) باقي قسمة $(x^4 + 2)$ على $(x-3)$ هو:

(a) 3 (b) 27 (c) 81 (d) 83

47

3 **(a)**

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

فيكون ناتج القسمة $x^2 - 4x + 3$ والباقي $= 0$

(b) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

$\therefore\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$

4

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & -1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & -4 \end{array}$$

ناتج القسمة $= x^2 + 3x - 2$ والباقي $= -4$

5 نستخدم القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 21 & 56 & 36 \\ & & -3 & -54 & -6 \\ \hline & 1 & 18 & 2 & 30 \end{array}$$

ناتج القسمة $= x^2 + 18x + 2$ والباقي $= 30$، لذا $(x+3)$ ليست من أبعاد هذا الحجر.

6 **(a)** $V = (x+4)(x-1)(x+1)$

(b) $x - 1 = 10 \Rightarrow x = 11$

$x + 1 = 12\ ,\ x + 4 = 15$

7 نوجد $f(-1)$ حيث إن:

$f(-1) = 2(-1)^4 + 6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 60$

$f(-1) = -69$ أي أن الباقي $= -69$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 6 & -5 & 0 & -60 \\ & & -2 & -4 & +9 & -9 \\ \hline & 2 & 4 & -9 & +9 & -69 \end{array}$$

(8) ناتج قسمة $(2x^4 - 8x^2)$ على $(x+2)$ يساوي:

ⓐ $2x^3 - 4x^2$ ⓑ $2x^3 - 8x^2$ ⓒ $x^3 - 4x^2$ ⓓ $2x^3 - 4x^2 + 2x$

(9) إذا كان 0 هو باقي قسمة $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + kx - 1$ على $(x+1)$ فإن k تساوي:

ⓐ 7 ⓑ -7 ⓒ -3 ⓓ 3

(10) إذا كان باقي قسمة $f(x) = x^4 - kx^2 + x - k$ على $(x-1)$ هو 3 فإن k تساوي:

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ 3 ⓒ $-\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{5}{2}$

(11) إذا كان $f(-1) = f(0) = f(3) = -2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون:

ⓐ $x^3 - x^2 + 3x - 2$ ⓑ $x^3 - 2x^2 - 3x$

ⓒ $2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ ⓓ $2x^3 - 4x^2 - 6x - 2$

5–3: حل معادلات كثيرات الحدود

1 الأهداف

- يحل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل.
- يحل معادلات كثيرات الحدود بالأصفار الممكنة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

أصفار نسبية ممكنة – المُعامل الرئيسي – عامل مشترك – تحليل بالتقسيم.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اقسم: $2x^2 - 5x + 3$ على $(x - 1)$

(b) استخدم المميز لإيجاد جذور المعادلة:

$$x^2 - 25x + 150 = 0$$

(c) أثبت أن $(x + 2)$ هو عامل خطي للدالة:

$2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$ باستخدام القسمة التركيبية،
ثم استخدم المميز لإيجاد عوامل الدالة التربيعية.

5 التدريس

سوف تساعد، دروس هذه الوحدة، الطالب على حل المعادلات المكونة من كثيرات الحدود بدرجات مختلفة وذلك باستخدام التحليل إلى عوامل أو باستخدام الرسم البياني. وهنا لا بد من الإشارة إلى أنه يمكن استخدام المميز: $\Delta = b^2 - 4ac$ عندما نجد أحد العوامل من الدرجة الثانية، وهذا يسهل كثيرًا في حل المعادلة كثيرة الحدود. فالمعادلة: $(2x - 5)(5x^2 + 9x - 2) = 0$ تعطي: $2x - 5 = 0$ أو $5x^2 + 9x - 2 = 0$ حل المعادلة الأولى $x = \frac{5}{2}$، أما المعادلة الثانية فيكون من الأفضل استخدام المميز، لأن تحليلها إلى عوامل صعب.

3–5

حل معادلات كثيرات الحدود

Solving Polynomial Equations

سوف تتعلم
- حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل.
- حل معادلات كثيرات الحدود بيانيًا.

المفردات والمصطلحات:
- أصفار نسبية ممكنة Possible Rational Zeros
- المعامل الرئيسي Leading Coefficient
- عامل مشترك Common Factor
- تحليل بالتقسيم Factorising by Division

الربط بالتكنولوجيا: يمكنك حل معادلات كثيرة الحدود بواسطة آلة حاسبة بيانية وباستخدام TABLE أو TRACE ثم CALC و ZOOM. وسوف تساعدك الاختيارات المتاحة بالآلة على إيجاد الحلول.

دعنا نفكر ونتناقش

(a) يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^3 + 3x^2$

مثّل بيانيًا $g(x) = x + 3$ على الشبكة البيانية نفسها. ثم استخدم الرسم لإيجاد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 3x^2 = x + 3$

بيانيًا هناك 3 نقاط تقاطع.

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع: $-3\ ,\ -1\ ,\ 1$

$\therefore$ للمعادلة $x^3 + 3x^2 = x + 3$ ثلاثة حلول: $x = -3,\ x = -1,\ x = 1$

$\therefore$ مجموعة الحل: $\{-3, -1, 1\}$

(b) يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

استخدم الشكل لإيجاد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

(c) قارن بين مجموعتي الحل في (b) , (a) . فسّر.

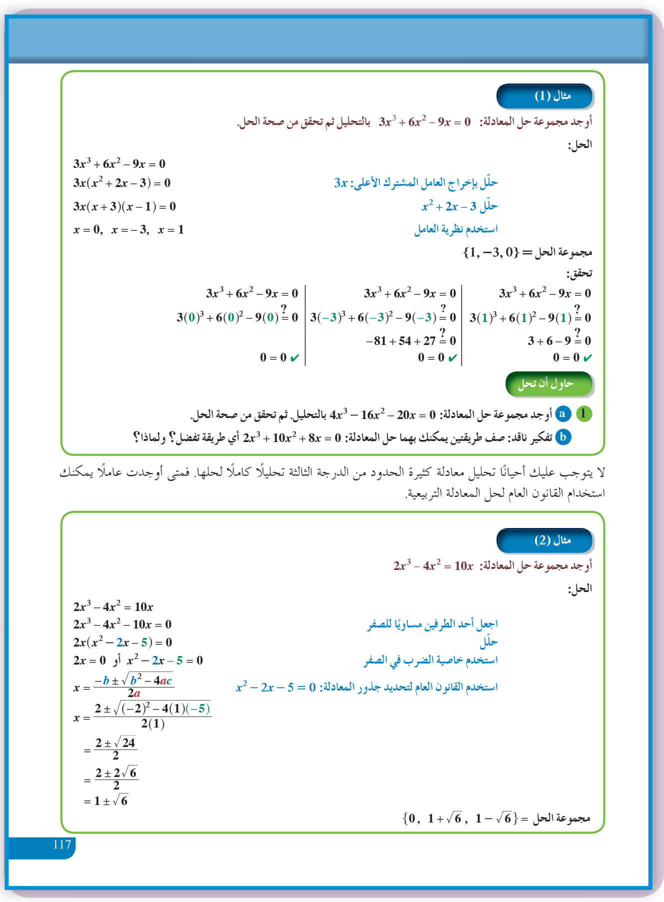
حل المعادلات بالتحليل Solving Equations by Factorising

عندما تحلل كثيرة الحدود، فإنك تحول شكلها من مجموع (أو فرق) حدود إلى ناتج ضرب عوامل كما هو موضح بالجدول.

الصورة العامة	الصورة بالتحليل (العوامل)
$x^2 - 4x - 12$	$(x + 2)(x - 6)$
$3x^3 - 12x$	$3x(x - 2)(x + 2)$
$3x^2 + 5x + 2$	$(3x + 2)(x + 1)$
$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$	$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

يمكنك حل بعض معادلات كثيرات الحدود بالتحليل واستخدام خاصية الضرب في الصفر أو نظرية العامل.

116



مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$ بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$

$3x(x^2 + 2x - 3) = 0$ حلّل بإخراج العامل المشترك الأعلى: $3x$

$3x(x + 3)(x - 1) = 0$ حلّل $x^2 + 2x - 3$

$x = 0,\ x = -3,\ x = 1$ استخدم نظرية العامل

مجموعة الحل = $\{1, -3, 0\}$

تحقق:

$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$	$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$	$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$
$3(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) \stackrel{?}{=} 0$	$3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 9(-3) \stackrel{?}{=} 0$	$3(0)^3 + 6(0)^2 - 9(0) \stackrel{?}{=} 0$
$3 + 6 - 9 \stackrel{?}{=} 0$	$-81 + 54 + 27 \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$ ✓	$0 = 0$ ✓	$0 = 0$ ✓

حاول أن تحل

1 (a) أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ بالتحليل. ثم تحقق من صحة الحل.

(b) تفكير ناقد: صف طريقتين يمكنك بهما حل المعادلة: $2x^3 + 10x^2 + 8x = 0$ أي طريقة تفضل؟ ولماذا؟

لا يتوجب عليك أحيانًا تحليل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة تحليلًا كاملًا لحلها. فمتى أوجدت عاملًا يمكنك استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2x^3 - 4x^2 = 10x$

الحل:

$2x^3 - 4x^2 = 10x$

$2x^3 - 4x^2 - 10x = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$2x(x^2 - 2x - 5) = 0$ حلّل

$2x = 0$ أو $x^2 - 2x - 5 = 0$ استخدم خاصية الضرب في الصفر

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استخدم القانون العام لتحديد جذور المعادلة: $x^2 - 2x - 5 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$

$= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$= 1 \pm \sqrt{6}$

مجموعة الحل = $\{0,\ 1 + \sqrt{6},\ 1 - \sqrt{6}\}$

117

فنجد: $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{121}}{10}$ أي: $x = -2$ أو $x = \dfrac{1}{5}$

في الأمثلة (3) ,(2) ,(1)

شجّع الطلاب على محاولة استخراج عوامل لمعادلة كثيرات الحدود، وعندما يصبح الباقي كثيرة حدود من الدرجة الثانية، اطلب إليهم استخدام التحليل أو المميز: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ لإيجاد بقية العوامل حيث: $\Delta = b^2 - 4ac$

ركّز لديهم فكرة أن $x = a$ أحد الأصفار يعني أن $(x - a)$ هو أحد العوامل.

حفّزهم على التأكّد من صحة الحلول التي توصلوا إليها وذلك بالتعويض.

في المثال (4)

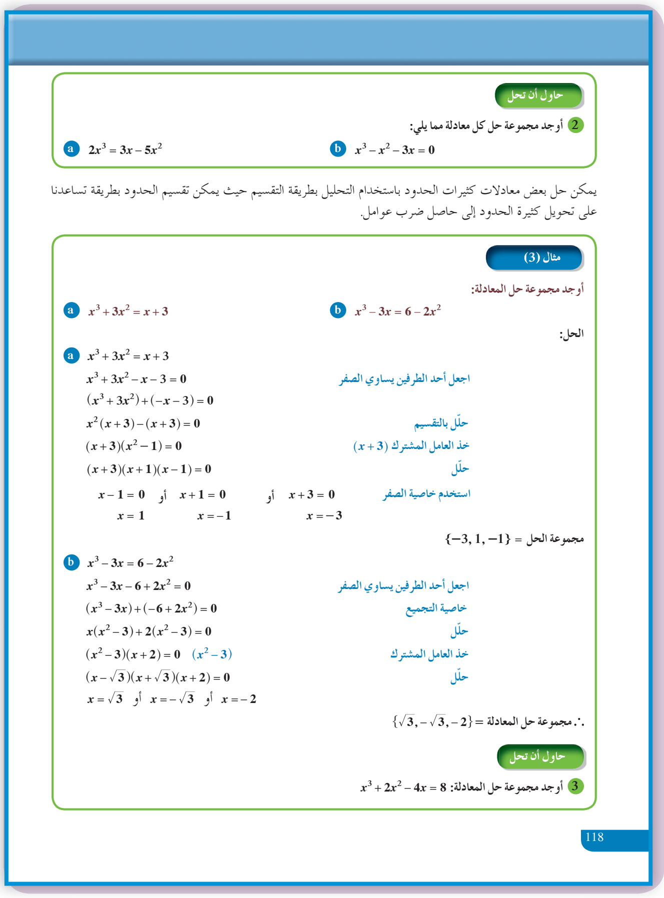
تعتبر محاولة البحث عن مجموعة الحل لأي معادلة حدودية مهمة جدًّا، وتأتي طريقة عوامل الحد الثابت وعوامل الحد الرئيسي كأصفار للمعادلة في مقدمة هذه المحاولات.

أخبر الطلاب أن في المعادلة من الدرجة الثالثة نكتفي بإيجاد واحد من أصفار المعادلة، ثم نستخدم طريقة القسمة على العامل المقابل لهذا الصفر، وبعد ذلك نستخدم التحليل أو المميز.

أمّا في المعادلة من الدرجة الرابعة فنحاول إيجاد اثنين من الأصفار، ثم نستخدم طريقة القسمة على ناتج ضرب العاملين المقابلين للصفرين، وبعد ذلك نستخدم التحليل أو المميز.

6 الربط

في تطبيقات حياتية «إثرائية»، حيث نوجد أبعاد قفص باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة له حجم ثابت، وذلك عن طريق الرسم البياني.



حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a $2x^3 = 3x - 5x^2$ b $x^3 - x^2 - 3x = 0$

يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود باستخدام التحليل بطريقة التقسيم حيث يمكن تقسيم الحدود بطريقة تساعدنا على تحويل كثيرة الحدود إلى حاصل ضرب عوامل.

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$ b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

الحل:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

$(x^3 + 3x^2) + (-x - 3) = 0$

$x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$ حلّل بالتقسيم

$(x + 3)(x^2 - 1) = 0$ خذ العامل المشترك $(x + 3)$

$(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$ حلّل

استخدم خاصية الصفر $x + 3 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x - 1 = 0$

$x = -3$ $x = -1$ $x = 1$

مجموعة الحل = $\{-3, 1, -1\}$

b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

$x^3 - 3x - 6 + 2x^2 = 0$ اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

$(x^3 - 3x) + (-6 + 2x^2) = 0$ خاصية التجميع

$x(x^2 - 3) + 2(x^2 - 3) = 0$ حلّل

$(x^2 - 3)(x + 2) = 0$ $(x^2 - 3)$ خذ العامل المشترك

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 2) = 0$ حلّل

$x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ أو $x = -2$

∴ مجموعة حل المعادلة = $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\}$

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

118

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في استخدام التحليل إلى عوامل.

ساعدهم على استخدام عوامل الحد الثابت في كثيرة الحدود كأعداد صحيحة ثم تطبيق نظرية الباقي، إذا كان يساوي صفرًا يكون لديك عامل من العوامل.

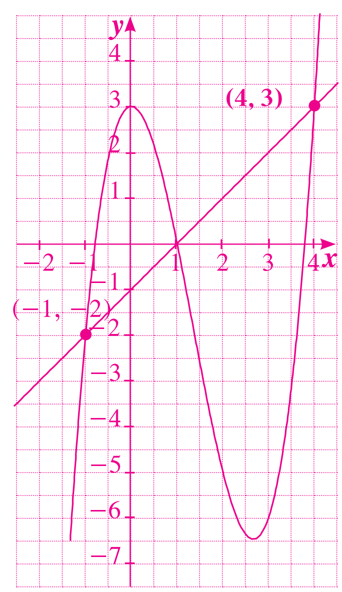
8 التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لما ورد من مفاهيم ومهارات في هذا الدرس.

اختبار سريع

1 حلّ بيانيًّا المعادلة: $x^3 - 4x + 3 = x - 1$

نأخذ $y_1 = x^3 - 4x^2 + 3\ ,\ y_2 = x - 1$



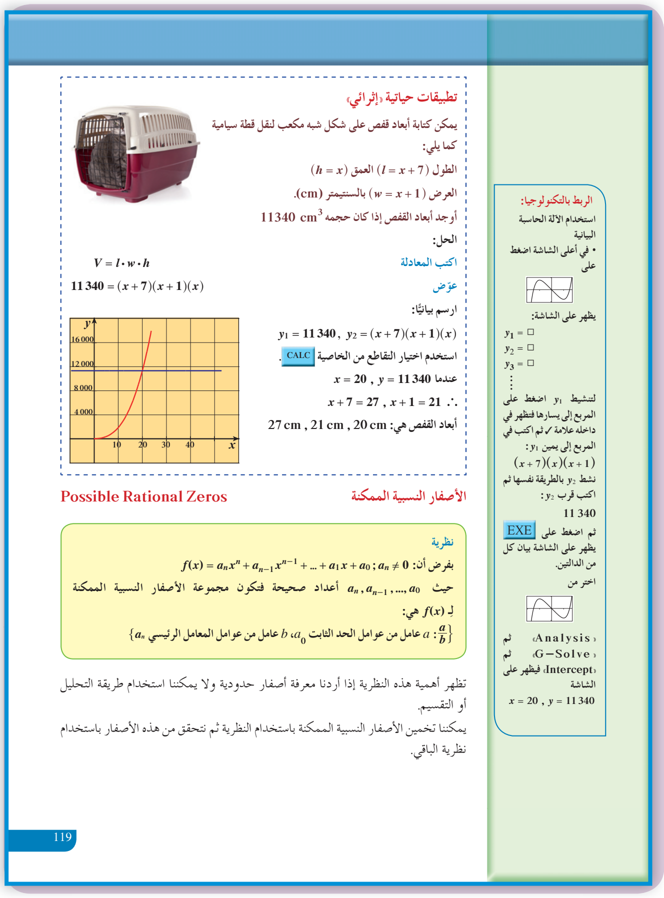
يوضح الرسم البياني أن مجموعة الحل $= \{4, -1\}$

2 أوجد حل المعادلة: $3x^3 - 2x^2 - 17x - 12 = 0$ بالتحليل.

نجد أن $x = -1$ هي حل للمعادلة، وبالقسمة على $(x+1)$ نجد الناتج $3x^2 - 5x - 12$.

وباستخدام المميز $\Delta = 169$ ؛ $x = -\frac{4}{3}$ أو $x = 3$

وبالتالي، مجموعة الحل $= \left\{3, -\frac{4}{3}, -1\right\}$



تطبيقات حياتية «إثرائي»

يمكن كتابة أبعاد قفص على شكل شبه مكعب لنقل قطة سيامية كما يلي:

الطول $(l = x + 7)$ العمق $(h = x)$

العرض $(w = x + 1)$ بالسنتيمتر (cm).

أوجد أبعاد القفص إذا كان حجمه $11340\ cm^3$

الحل:

اكتب المعادلة $V = l \cdot w \cdot h$

عوّض $11\,340 = (x+7)(x+1)(x)$

ارسم بيانيًّا:

$y_1 = 11\,340\ ,\ y_2 = (x+7)(x+1)(x)$

استخدم اختيار التقاطع من الخاصية CALC.

عندما $x = 20\ ,\ y = 11\,340$

$\therefore\ x + 7 = 27\ ,\ x + 1 = 21$

أبعاد القفص هي: $27\ cm\ ,\ 21\ cm\ ,\ 20\ cm$

الربط بالتكنولوجيا:

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

• في أعلى الشاشة اضغط على

يظهر على الشاشة:

$y_1 = \square$

$y_2 = \square$

$y_3 = \square$

⋮

لتنشيط y_1 اضغط على المربع إلى يسارها فتظهر في داخله علامة ✓ ثم اكتب في المربع إلى يمين y_1:

$(x+7)(x)(x+1)$

نشط y_2 بالطريقة نفسها ثم اكتب قرب y_2:

11 340

ثم اضغط على EXE يظهر على الشاشة بيان كل من الدالتين.

اختر من

«Analysis» ثم «G−Solve» ثم «Intercept» فيظهر على الشاشة

$x = 20\ ,\ y = 11\,340$

الأصفار النسبية الممكنة Possible Rational Zeros

نظرية

بفرض أن: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\ ;\ a_n \neq 0$

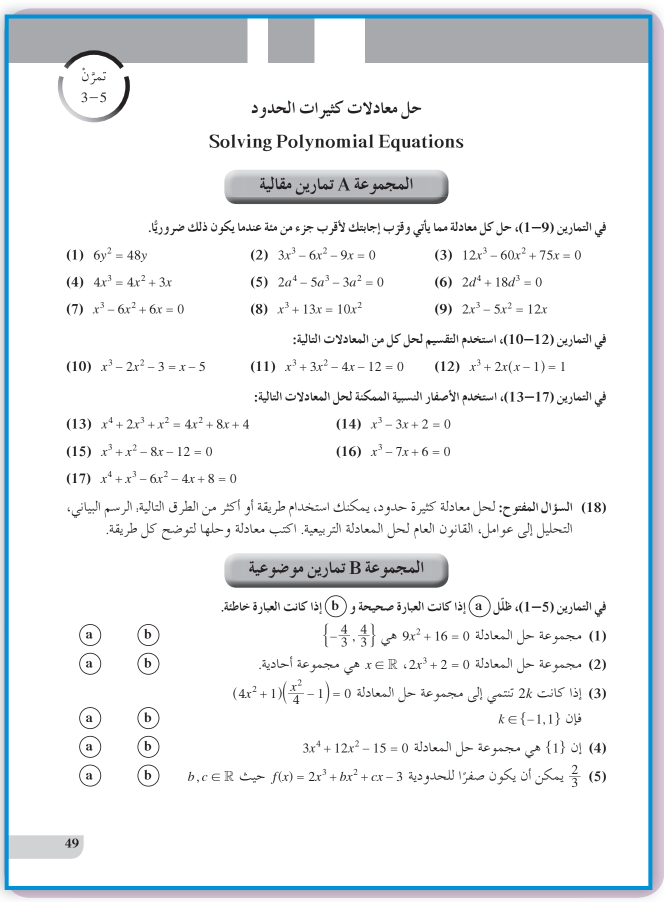
حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

$\left\{\frac{a}{b}\right.$: a عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $\left.a_n\right\}$

تظهر أهمية هذه النظرية إذا أردنا معرفة أصفار حدودية ولا يمكننا استخدام طريقة التحليل أو التقسيم.

يمكننا تخمين الأصفار النسبية الممكنة باستخدام النظرية ثم نتحقق من هذه الأصفار باستخدام نظرية الباقي.

119



تمرَّنْ 3−5

حل معادلات كثيرات الحدود

Solving Polynomial Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−9)، حل كل معادلة مما يأتي وقرّب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضروريًّا.

(1) $6y^2 = 48y$ **(2)** $3x^3 - 6x^2 - 9x = 0$ **(3)** $12x^3 - 60x^2 + 75x = 0$

(4) $4x^3 = 4x^2 + 3x$ **(5)** $2a^4 - 5a^3 - 3a^2 = 0$ **(6)** $2d^4 + 18d^3 = 0$

(7) $x^3 - 6x^2 + 6x = 0$ **(8)** $x^3 + 13x = 10x^2$ **(9)** $2x^3 - 5x^2 = 12x$

في التمارين (10−12)، استخدم التقسيم لحل كل من المعادلات التالية:

(10) $x^3 - 2x^2 - 3 = x - 5$ **(11)** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ **(12)** $x^3 + 2x(x-1) = 1$

في التمارين (13−17)، استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

(13) $x^4 + 2x^3 + x^2 = 4x^2 + 8x + 4$ **(14)** $x^3 - 3x + 2 = 0$

(15) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ **(16)** $x^3 - 7x + 6 = 0$

(17) $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$

(18) **السؤال المفتوح:** لحل معادلة كثيرة حدود، يمكنك استخدام طريقة أو أكثر من الطرق التالية: الرسم البياني، التحليل إلى عوامل، القانون العام لحل المعادلة التربيعية. اكتب معادلة وحلها لتوضح كل طريقة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجموعة حل المعادلة $9x^2 + 16 = 0$ هي $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$ (a) (b)

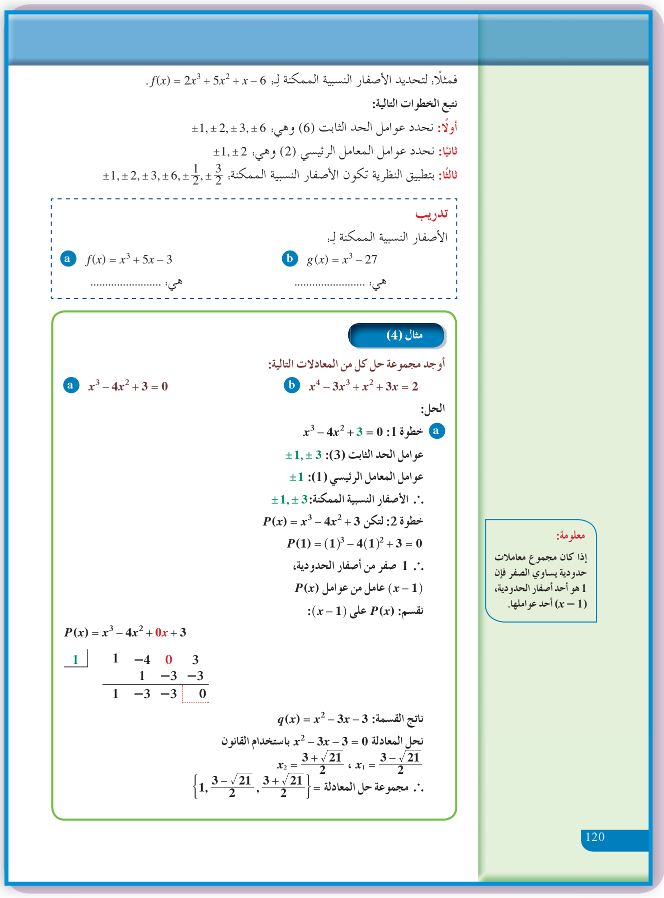
(2) مجموعة حل المعادلة $2x^3 + 2 = 0$، $x \in \mathbb{R}$ هي مجموعة أحادية. (a) (b)

(3) إذا كانت $2k$ تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة $(4x^2+1)\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0$ فإن $k \in \{-1, 1\}$ (a) (b)

(4) إن $\{1\}$ هي مجموعة حل المعادلة $3x^4 + 12x^2 - 15 = 0$ (a) (b)

(5) $\frac{2}{3}$ يمكن أن يكون صفرًا للحدودية $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 3$ حيث $b, c \in \mathbb{R}$ (a) (b)

49


فمثلًا: لتحديد الأصفار النسبية الممكنة لِـ: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 6$.

نتبع الخطوات التالية:

أولًا: نحدد عوامل الحد الثابت (6) وهي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

ثانيًا: نحدد عوامل المعامل الرئيسي (2) وهي: $\pm 1, \pm 2$

ثالثًا: بتطبيق النظرية تكون الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

تدريب

الأصفار النسبية الممكنة لِـ:

(a) $f(x) = x^3 + 5x - 3$ هي: ....

(b) $g(x) = x^3 - 27$ هي: ....

مثال (4)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

(a) $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

(b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$

الحل:

(a) خطوة 1: $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

عوامل الحد الثابت (3): $\pm 1, \pm 3$

عوامل المعامل الرئيسي (1): ± 1

$\therefore$ الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 3$

خطوة 2: لتكن $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3 = 0$

$\therefore$ 1 صفر من أصفار الحدودية،

$(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم: $P(x)$ على $(x - 1)$:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 0x + 3$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ & & 1 & -3 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 - 3x - 3$

نحل المعادلة $x^2 - 3x - 3 = 0$ باستخدام القانون

$x_1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ ، $x_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \left\{1, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right\}$

معلومة:

إذا كان مجموع معاملات حدودية يساوي الصفر فإن 1 هو أحد أصفار الحدودية، $(x - 1)$ أحد عواملها.

120

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $4x(x+1)(x-5) = 0$

مجموعة الحل $= \{0, -1, 5\}$

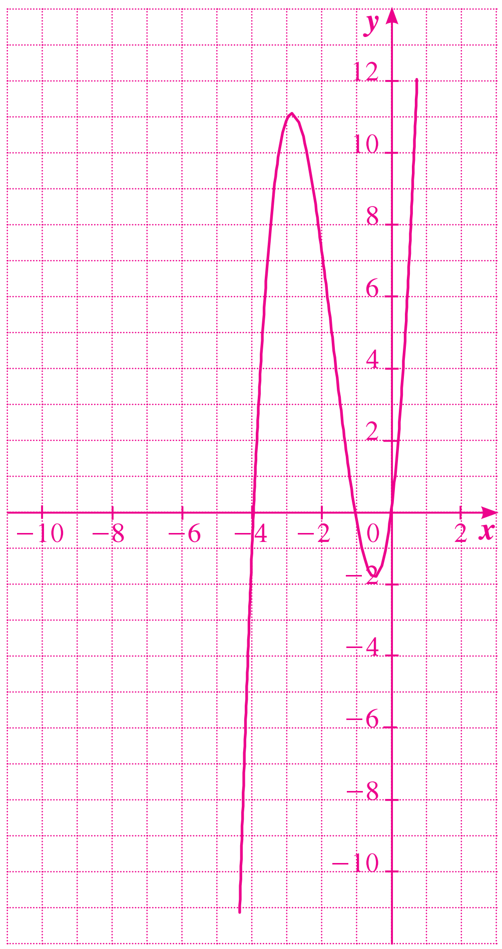
(b) $2x(x+1)(x+4) = 0$

طريقة أولى:

مجموعة الحل $= \{-4, -1, 0\}$

طريقة ثانية: الرسم البياني للدالة: (باستخدام الآلة الحاسبة)

$f(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x$



نأخذ تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات فنجد مجموعة الحل $= \{-4, -1, 0\}$

الرسم البياني أسرع وأفضل. يمكن أن تتنوع الإجابات.

2 (a) $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

$x(2x^2 + 5x - 3) = 0$

مجموعة الحل $= \left\{0, -3, \frac{1}{2}\right\}$

(b) $x(x^2 - x - 3) = 0$

مجموعة الحل $= \{0, -1.3, 2.3\}$

3 تعطي: $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

$x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$

أي: $(x+2)(x^2-4) = 0$

ومنه $(x+2)(x+2)(x-2) = 0$

مجموعة الحل $= \{2, -2\}$

4 (a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x^2 + 3x - 2 = 0$

$x^2(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 2) = 0$

$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1) = 0$

$(x-1)(x-2)(x-1)(x+1) = 0$

وبالتالي، مجموعة الحل $= \{-1, 1, 2\}$

(b) 1 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

عوامل الحد الثابت: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

عوامل العامل الرئيسي: ± 1

فتكون الأصفار النسبية: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$x = -1$ هي صفر للمعادلة لذا نقسم على $(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & -1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

الناتج $= x^2 - 4$ والباقي $= 0$

التحليل $= (x+1)(x-2)(x+2)$

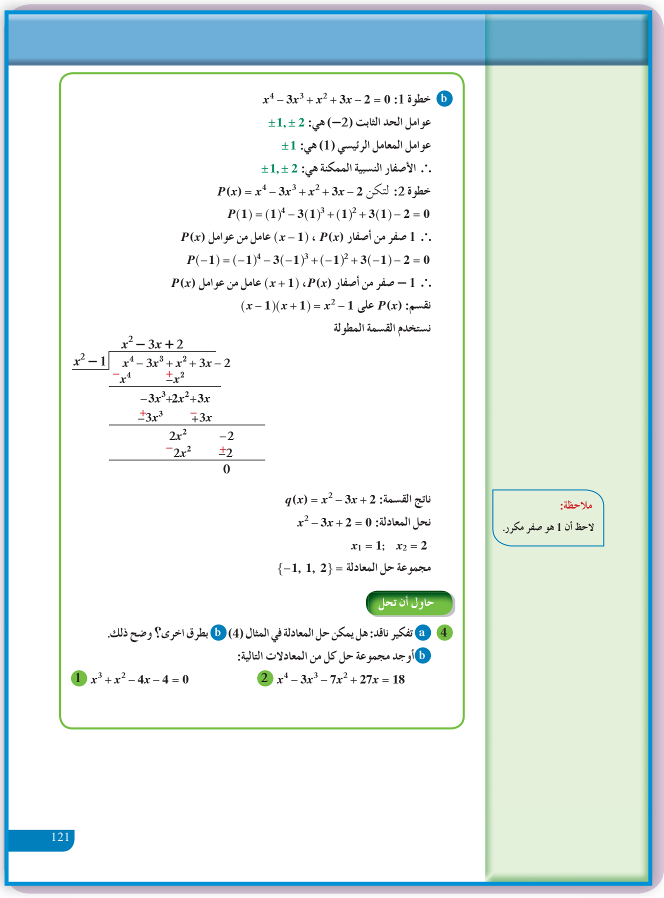
مجموعة الحل $= \{-2, -1, 2\}$

أو: $x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$

$\Longrightarrow (x+1)(x^2-4) = 0$

$\Longrightarrow (x+1)(x-2)(x+2) = 0$

مجموعة الحل $= \{-2, -1, 2\}$



b خطوة 1: $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

عوامل الحد الثابت (-2) هي: $\pm 1, \pm 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1) هي: ± 1

∴ الأصفار النسبية الممكنة هي: $\pm 1, \pm 2$

خطوة 2: لتكن $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$P(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + (1)^2 + 3(1) - 2 = 0$

∴ 1 صفر من أصفار $P(x)$ ، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 0$

∴ -1 صفر من أصفار $P(x)$، $(x+1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم: $P(x)$ على $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

نستخدم القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 3x + 2 \\ \hline x^2 - 1 & x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ & \underline{-x^4 \qquad \pm x^2} \\ & \quad -3x^3 + 2x^2 + 3x \\ & \quad \underline{\pm 3x^3 \qquad \mp 3x} \\ & \qquad 2x^2 \qquad -2 \\ & \qquad \underline{-2x^2 \qquad \pm 2} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 - 3x + 2$

نحل المعادلة: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1; \quad x_2 = 2$

مجموعة حل المعادلة $= \{-1, 1, 2\}$

ملاحظة:
لاحظ أن 1 هو صفر مكرر.

حاول أن تحل

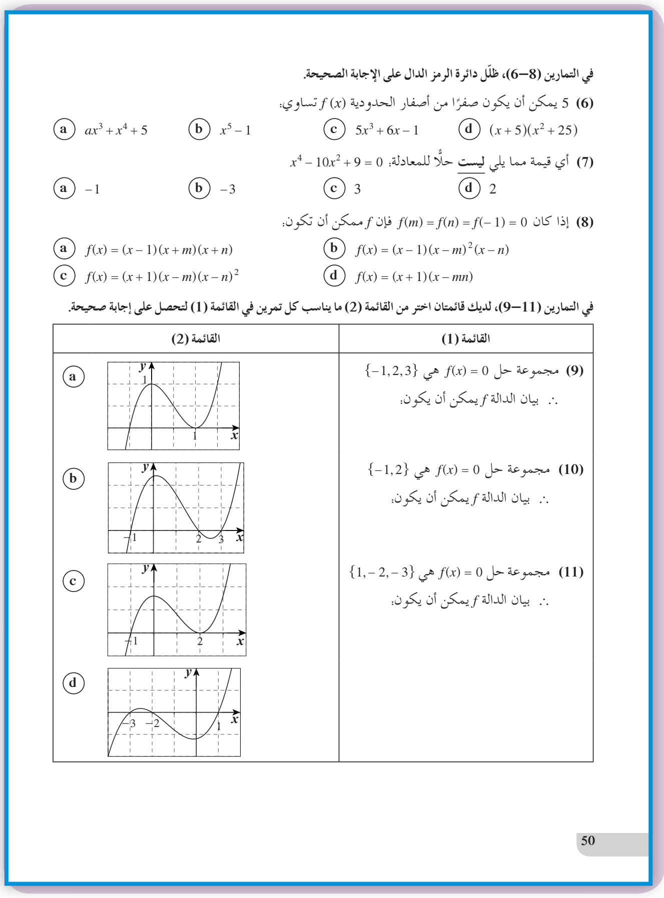
4 a تفكير ناقد: هل يمكن حل المعادلة في المثال (4) b بطرق اخرى؟ وضح ذلك.

b أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

1 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

2 $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x = 18$

121



في التمارين (8–6)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) 5 يمكن أن يكون صفرًا من أصفار الحدودية $f(x)$ تساوي:

ⓐ ax^3+x^4+5 ⓑ x^5-1 ⓒ $5x^3+6x-1$ ⓓ $(x+5)(x^2+25)$

(7) أي قيمة مما يلي ليست حلًّا للمعادلة: $x^4-10x^2+9=0$

ⓐ -1 ⓑ -3 ⓒ 3 ⓓ 2

(8) إذا كان $f(m)=f(n)=f(-1)=0$ فإن f ممكن أن تكون:

ⓐ $f(x)=(x-1)(x+m)(x+n)$ ⓑ $f(x)=(x-1)(x-m)^2(x-n)$

ⓒ $f(x)=(x+1)(x-m)(x-n)^2$ ⓓ $f(x)=(x+1)(x-mn)$

في التمارين (11–9)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مجموعة حل $f(x)=0$ هي $\{-1,2,3\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	ⓐ
(10) مجموعة حل $f(x)=0$ هي $\{-1,2\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	ⓑ
(11) مجموعة حل $f(x)=0$ هي $\{1,-2,-3\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	ⓒ
	ⓓ

50

2 $x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0$

عوامل الحد الثابت: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18$

عوامل العامل الرئيسي ±1، فتكون الأصفار النسبية هي:

$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18$

1 هو صفر للمعادلة:

$(1)^4-3(1)^3-7(1)^2+27(1)-18=0$

2 هو صفر للمعادلة:

$(2)^4-3(2)^3-7(2)^2+27(2)-18=0$

وبالتالي، $(x-1),(x-2)$ عاملان للمعادلة

تقسم على $(x-1)(x-2)$

$$\begin{array}{r} x^2-9 \\ x^2-3x+2\,\overline{)\,x^4-3x^3-7x^2+27x-18} \\ \underline{-x^4+3x^3-2x^2} \\ -9x^2+27x-18 \\ \underline{+9x^2-27x+18} \\ 0 \end{array}$$

ويصبح تحليل المعادلة:

$(x-2)(x-1)(x-3)(x+3)=0$

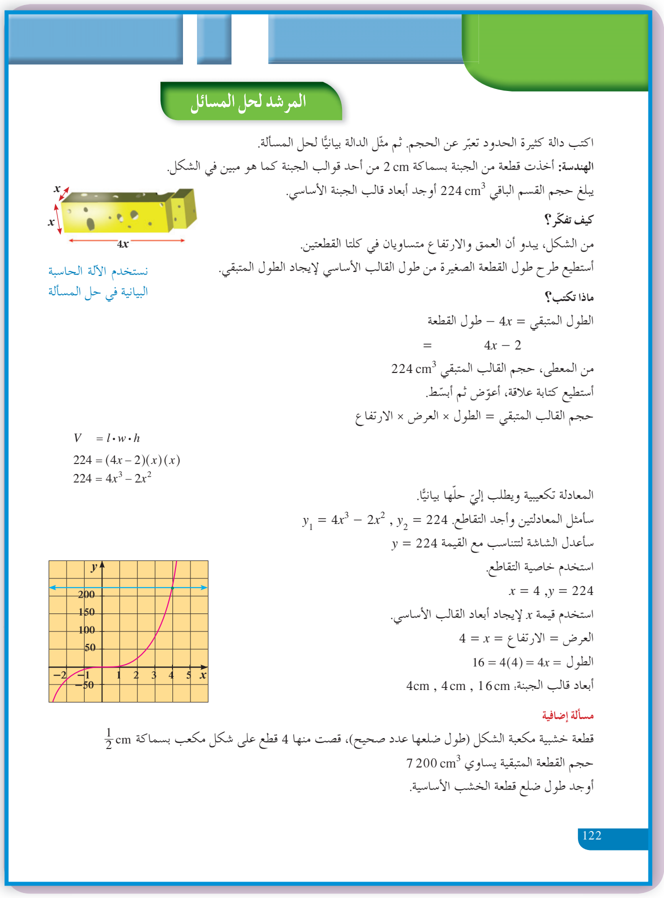
مجموعة الحل $\{-3,1,2,3\}=0$

«**تدريب**»

(a) $\pm1,\pm3$

(b) $\pm1,\pm3,\pm9,\pm27$

المرشد لحل المسائل



المرشد لحل المسائل

اكتب دالة كثيرة الحدود تعبّر عن الحجم. ثم مثّل الدالة بيانيًّا لحل المسألة.

الهندسة: أخذت قطعة من الجبنة بسماكة 2 cm من أحد قوالب الجبنة كما هو مبين في الشكل.
يبلغ حجم القسم الباقي $224\ cm^3$ أوجد أبعاد قالب الجبنة الأساسي.

نستخدم الآلة الحاسبة البيانية في حل المسألة

كيف تفكّر؟

من الشكل، يبدو أن العمق والارتفاع متساويان في كلتا القطعتين.
أستطيع طرح طول القطعة الصغيرة من طول القالب الأساسي لإيجاد الطول المتبقي.

ماذا تكتب؟

الطول المتبقي = $4x$ − طول القطعة
= $4x - 2$

من المعطى، حجم القالب المتبقي $224\ cm^3$
أستطيع كتابة علاقة، أعوّض ثم أبسّط.
حجم القالب المتبقي = الطول × العرض × الارتفاع

$$V = l \cdot w \cdot h$$
$$224 = (4x-2)(x)(x)$$
$$224 = 4x^3 - 2x^2$$

المعادلة تكعيبية ويطلب إليّ حلّها بيانيًّا.
سأمثل المعادلتين وأجد التقاطع. $y_1 = 4x^3 - 2x^2$, $y_2 = 224$
سأعدل الشاشة لتتناسب مع القيمة $y = 224$
استخدم خاصية التقاطع.
$x = 4$,$y = 224$
استخدم قيمة x لإيجاد أبعاد القالب الأساسي.
العرض = الارتفاع = $x = 4$
الطول = $4x = 4(4) = 16$
أبعاد قالب الجبنة: $4cm$, $4cm$, $16cm$

مسألة إضافية

قطعة خشبية مكعبة الشكل (طول ضلعها عدد صحيح)، قصت منها 4 قطع على شكل مكعب بسماكة $\frac{1}{2}$ cm
حجم القطعة المتبقية يساوي $7\,200\ cm^3$
أوجد طول ضلع قطعة الخشب الأساسية.

122

إجابة «مسألة إضافية»

ليكن x طول ضلع القطعة الخشبية التي قصت من الشكل
فيكون حجمها $\frac{1}{2}x^2$
نكتب المعادلة:

$$V = 4\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 7\,200$$
$$= 2x^2 + 7\,200$$

أقرب عدد صحيح مكعب إلى 200 7 هو 000 8
وبالتالي، طول ضلع الخشبة $20\ cm$
لاحظ أن: $19^3 = 6\,859 < 7\,200$

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة

ملخص

- تكون دالة القوى على الشكل: $y = ax^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 0$
- الدالة الزوجية هي دالة مجال تعريفها D، تحقق: $\forall x, -x \in D$, $f(-x) = f(x)$ والعكس صحيح.
- في مستوى إحداثي، المحور الصادي هو محور تماثل لبيان الدوال الزوجية.
- الدالة الفردية هي دالة مجال تعريفها D، تحقق: $\forall x, -x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ والعكس صحيح.
- نقطة الأصل هي نقطة تماثل لبيان الدوال الفردية.
- إذا كانت النقطة (a, b) تقع على بيان دالة ما فإن (b, a) تقع على بيان معكوسها.
- الدالة الحدودية $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ حيث n عدد صحيح غير سالب، $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ أعداد حقيقية.
- في الصورة العامة لدالة حدودية ترتب الحدود تنازليًّا وتجمع الحدود المتشابهة.
- يصف سلوك النهاية لرسم بياني امتداد طرفيه الأيمن والأيسر.
- القيمة العظمى هي أكبر قيمة لِـ y في فترة محددة.
- القيمة الصغرى هي أصغر قيمة لِـ y في فترة محددة.
- المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود إذا وفقط إذا a صفر من أصفار كثيرة حدود.
- إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت فإن الباقي هو $f(a)$
- بفرض أن $a_n \neq 0$, $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:
$\{\frac{a}{b}: a$ عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $a_n\}$

123

اختبار الوحدة الثالثة

في التمارين (4–1)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(1) $y=\frac{1}{2}x^4$ **(2)** $y=(x+1)^3$ **(3)** $y=(x+1)^2-3$ **(4)** $y=\sqrt{x+5}$

في التمارين (7–5)، اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة، ثم صنّفها بحسب عدد الحدود وبحسب الدرجة.

(5) $f(x)=3x^2-7x^4+9-x^4$ **(6)** $f(x)=11x^2+8x-3x^2$ **(7)** $f(x)=2x(x-3)(x+2)$

في التمرينين (9–8)، أوجد أصفار الدالة ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا لها مراعيًا سلوك النهاية. (قرّب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة).

(8) $f(x)=x(x-3)(x+2)$ **(9)** $f(x)=(x-2)^2(x-1)$

في التمارين (13–10)، حلّ كل معادلة. أعط الإجابة الدقيقة أو قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

(10) $(x-3)(x^2+3x-4)=0$ **(11)** $(x+2)(x^2+5x+1)=0$

(12) $x^3-2x^2-x+2=0$ **(13)** $x^4-2x^2-x+2=0$

في التمرينين (15–14)، اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة إذا علمت أصفارها:

(14) $0,\ 4,\ -2$ **(15)** $2\ ,\ -1$ (مكرر مرتين)

في التمرينين (17–16)، اقسم مستخدمًا قسمة كثيرة الحدود المطولة.

(16) $(x^3+7x^2-36)\div(x+3)$ **(17)** $(x^3+7x^2-5x-6)\div(x+2)$

في التمرينين (19–18)، اقسم مستخدمًا القسمة التركيبية.

(18) $(x^3+x^2+x-14)\div(x-3)$ **(19)** $(x^4-5x^2+4x+12)\div(x+1)$

في التمرينين (21–20)، استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد $f(a)$

(20) $f(x)=2x^4+19x^3-2x^2-44x-24\ ,\ a=\frac{-2}{3}$

(21) $f(x)=-x^3-x^2+x\ ,\ a=0$

تمارين إثرائية

(1) لتكن: $g(x)=(m+1)x^3+11x^2+4x-4$

أوجد قيمة m بحيث يكون $\frac{1}{2}$ أحد أصفار كثيرة الحدود.

(2) أوجد مجموعة حل:

(a) $2x^4+x^3-11x^2+11x-3=0$ **(b)** $4x^4-x^2+6x-9=0$

(3) أوجد قيمة a بحيث تكون: $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-(a+5)x-(a-3)$ قابلة للقسمة على $(x+1)^2$

(4) بسّط ما يلي: $\frac{x^3-7x+6}{x^4+x^3-5x^2+x-6}$

(5) $g(x)=4x^4-11x^3-2x^2+23x-14$

(a) حلّل $g(x)$ إلى عوامل.

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة: $g(x)=0$. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

(6) لتكن: $f(x)=x^3-(3a+2b)x^2+(a+b)x$

(a) أوجد قيم a, b بحيث تكون $(x-1),(x-2)$ من عوامل $f(x)$

(b) حلّل في هذه الحالة $f(x)$ إلى عوامل.

(7) أوجد دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تقبل القسمة على $(2x-1),(x+5)$ وباقي قسمتها على $(x-3)$ يساوي 40

(8) لتكن: $g(x)=x^3+8$

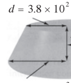
(a) أوجد صفرًا لكثيرة الحدود.

(b) حلّل $g(x)$ إلى عوامل.

(9) **(a)** اكتب $V(x)=(x^2+ax+b)^2$ في الصورة العامة.

(b) أثبت أن: $f(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x+1$ هي مربع لكثيرة حدود من الدرجة الثانية.

(10) أوجد نموذجًا تكعيبيًّا للدالة التي تمر في: $(2,0),(1,-1),(0,0),(-1,-3)$، ثم استخدم هذا النموذج لتقدير قيمة y عندما $x=17$



(11) **الهندسة:** استخدم العلاقة: $V=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rd+d^2)$، لإيجاد حجم المخروط الناقص الموضح في الشكل.

اكتب إجابتك في الصورة العلمية.

(12) **الهندسة:** صندوق يقل عرضه 2 m عن طوله، و يقل ارتفاعه 1 m عن طوله.

أوجد طول الصندوق عندما يكون حجمه $60\ m^3$

(13) تريد شركة للتخزين صنع صندوق للتخزين حجمه مثلي حجم أكبر صندوق تخزين لديها، إذا كانت أبعاد أكبر صندوق تخزين لديها هي 120 cm طولًا، 100 cm عرضًا،

90 cm ارتفاعًا، ويراد صنع الصندوق الجديد بزيادة كل بعد المقدار نفسه، فأوجد الزيادة في كل بعد.

(14) **الحساب الذهني:** إذا كان ناتج ضرب ثلاثة أعداد صحيحة متتالية: $(n-1),\ n,\ (n+1)$ هو 210، فاكتب معادلة وأوجد حلها لإيجاد الأعداد.

(15) **الهندسة:** حجم خزّان (V) يمثّل بالدالة: $V(x)=x^3+8x^2+15x$. لنفرض أن x تمثل العرض، $x+3$ تمثّل الطول، $x+5$ تمثل الارتفاع، حجم الخزّان $70\ m^3$، فما أبعاده؟

الوحدة الرابعة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

4 – 1: استكشاف النماذج الأسية

جزء 1: استخدام الدوال الأسية.

4 – 2: الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

جزء 1: التمثيل البياني للدوال الأسية.

جزء 2: الرمز e.

4 – 3: الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

جزء 1: كتابة المقادير اللوغاريتمية وحسابها.

جزء 2: التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية.

جزء 3: انسحاب الدوال اللوغاريتمية.

4 – 4: خواص اللوغاريتمات

جزء 1: خواص اللوغاريتمات.

جزء 2: تطبيقات على خواص اللوغاريتمات.

4 – 5: المعادلات الأسية واللوغاريتمية

جزء 1: حل معادلات أسية.

جزء 2: حل معادلات لوغاريتمية.

4 – 6: اللوغاريتم الطبيعي

مقدمة الوحدة

الوحدة الرابعة

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

مشروع الوحدة: الآثار المتبقية

1 مقدمة المشروع: علماء الآثار هم مجموعة من العلماء يهتمون بدراسة إنجازات الحضارات القديمة من خلال آثارها الباقية. نذكر منها على سبيل المثال المومياوات المصرية الشهيرة التي حفظت منذ حوالى 400 3 سنة ق. م ولا تزال معروضة حتى الآن في المتحف الوطني المصري.

2 الهدف: في هذه الوحدة، سوف تتحرى طرائق مختلفة لتحديد عمرقطعة أثرية.

3 اللوازم: آلة حاسبة علمية.

4 أسئلة حول التطبيق:

إحدى طرائق تأريخ الإبداعات الإنسانية تسمى التأريخ بالكربون المشع.

العناصر التي تمّ سردها في الجدول تمّ اكتشافها داخل المقابر الأثرية.

استخدم العلاقة: $t = 1.904 \times 10^4 \times \log\left(\frac{13.7}{n}\right)$

حيث تمثل "t" عمر العنصر بالسنوات، و"n" عدد انبعاثات أشعة بيتا كل دقيقة لكل جرام من الكربون في العنصر.

المومياء

العنصر	وزن الكربون بالجرام (g)	انبعاثات أشعة بيتا لكل دقيقة
عظم ماموث	400	1 640 ± 30
شظايا عظمية	15	61.5 ± 1.5
قطعة فخار	25	342 ± 7
فحم نباتي	10	41.0 ± 1.3
قصبة رمح	250	1 020 ± 30

الماموث

a احسب عمر كل عنصر.

b ما الاستثناء في البيانات أعلاه؟ كيف يمكنك تفسيره؟

c التأريخ بالإشعاع الكربوني هي طريقة لاستخدام معلومات عن فترة نصف العمر لنظير ما لتحديد عمر عنصر، للكربون (c − 14) هي 40 ± 730 5 سنة. مقبض فأس فيه 42 g من الكربون (c − 14) يعتقد أنه كان موجودًا منذ حوالى 040 19سنة.

اشرح كيف يمكن لعالم آثار استخدام العلاقة أعلاه لإيجاد معدل انبعاث أشعة بيتا من مقبض الفأس.

5 التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة. ضمّن تقريرك صورًا لآثار قديمة وملصقًا ورسومًا بيانية سبق أن استخدمتها.

دروس الوحدة

استكشاف النماذج الأسية	الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًا	الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًا	خواص اللوغاريتمات	المعادلات الأسية واللوغاريتمية	اللوغاريتم الطبيعي
4−1	4−2	4−3	4−4	4−5	4−6

124

يدرس علماء الآثار أي دليل قد يساعدهم على التعرف إلى حياة البشر الذين عاشوا على سطح الأرض في العصور القديمة، فتتنوع الأدلة الأثرية بين بقايا مدينة وبعض قطع الحجارة والعظام والأواني وغيرها. يستخدم علماء الآثار تقنيات مغناطيسية ووسائل خاصة بهدف جمع الدلائل الأثرية بطريقة دقيقة ومنهجية، ثم ينظمون سجلات تفصيلية عن هذه الآثار.

الهدف الأساسي لعلم الآثار هو دراسة الإنسان منذ بداية ظهوره، ومخلفاته التي تركها على مدى العصور، والحقبات التي مرت.

من المعروف أنه تبعًا لبعض التقديرات، فإن عمر الإنسان على الأرض يعود إلى حوالى عشرة ملايين سنة. لذا يعتبر علم الآثار مهمًّا في الكشف عن حضارات وثقافات لم تكن الكتابة خلالها معروفة. وذلك أن الكتابة لا يعدو تاريخ معرفتها أكثر من ستة آلاف سنة، وهي قد بدأت في وادي النيل وفي بلاد ما بين النهرين وذلك في القرن الثاني والثلاثين قبل الميلاد. يركز عالم الآثار اهتمامه على كل شيء يعثر عليه لأنه يجد فيه مادته التي يبني عليها معلوماته.

أدّى العثور في تربة جافة في مدينة «أور» في العراق على طبعة قيثارة من الخشب بليت بالكامل مما أدى إلى إعادة تشكيلها وهي تعود إلى عصر حضارة «سومر».

مشروع الوحدة

يقدم مشروع الوحدة إحدى الوسائل المستخدمة في تأريخ الإبداعات الإنسانية وتعرف الحضارات التي سادت على الأرض في العصور الغابرة.

إن استخدام الكربون المشع في العلاقة:

$t = 1.904 \times 10^4 \times \log \dfrac{13.7}{n}$ يوفر لعالم الآثار فرصة لإيجاد عمر العنصر بالسنوات بدلالة انبعاث أشعة بيتا.

حيث log هي اختصار لكلمة logarithm اعتيادي وأساسه العدد 10، n عدد انبعاثات أشعة بيتا في الدقيقة.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) عظم ماموث: 9976 سنة

شظايا عظمية: 9976 سنة

قطعة فخار: 12 سنة

فحم نباتي: 9976 سنة

قصبة رمح: 10016 سنة

(b) إن عمر قطعة الفخار لم يتطابق مع أعمار بقية العناصر في الجدول.

(c) في العلاقة نعوض المتغير التابع t بالقيمة 040 19، ونوجد قيمة n، ثم نضرب قيمة n في العدد 42 فنحصل على الإجابة.

التقرير

اكتب تقريرًا مفصلًا عن النتائج التي توصلت إليها. اعرض مشروعك مصورًا أمام زملائك في غرفة الصف. ناقش معهم جميع النقاط الواردة، ثم أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًا، وتأكد من حساباتك.

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نمذجة الدوال الخطية وحل معادلات خطية.
- تعلمت نمذجة الدوال التربيعية وحل معادلات تربيعية.
- تعلمت نمذجة دوال كثيرات الحدود وحل معادلات كثيرات الحدود.
- تعلمت إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- تمثيل النمو الأسي والتضاؤل الأسي.
- تمثيل بيان بعض الدوال الأسية.
- استخدام الرمز e كأساس.
- إيجاد قيمة المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.
- اختصار المقادير اللوغاريتمية وفكها.
- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات والأسس لحل معادلات لوغاريتمية.
- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

الدوال الأسية – معامل النمو – معامل التضاؤل – الرمز e – الدوال اللوغاريتمية – اللوغاريتمات المعتادة – المعادلات الأسية – اللوغاريتم الطبيعي.

أضف إلى معلوماتك

تستخدم الدوال الأسية لتمثيل الاضمحلال الإشعاعي في المادة الإشعاعية، ولتمثيل نمو البكتيريا، ولحل المسائل التي تتضمن نموًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. فإنك تحتاج إلى معرفة كيفية استخدام الدوال الأسية ومعكوساتها وهي الدوال اللوغاريتمية.

معلومة جغرافية:

جزيرة فيلكا (فيلجا) جزيرة كويتية تبلغ مساحتها $43\ km^2$. تقع في الركن الشمالي الغربي من الخليج العربي وتبعد 20 km عن سواحل مدينة الكويت. تتخذ شكل مثلث قاعدته من الغرب ورأسه في الجنوب الشرقي. يُعتقد أن اسمها مشتق من كلمة إغريقية تعني نقطة تمركز أو موقع بعيد. تُعد أرضها من الأراضي الطينية الصالحة للزراعة.

وفي الجزيرة أيضًا آثار تعود للاسكندر المقدوني ومقام للعبد الصالح الخضر وتلال أثرية تعود إلى الألف الثالث قبل الميلاد. في عام 1973 عثر في الجزيرة على «حجر سويتلس» منقوش عليه باللغة اليونانية وإثر هذا الاكتشاف بدأت عمليات التنقيب عن الآثار مما أظهر ارتباط الجزيرة بحضارة دلمون تلك الحضارة التي كانت تضم البحرين والساحل الشرقي لشبه الجزيرة العربية.

125

سلّم التقييم

4	الحسابات دقيقة بالكامل – البحث والشروح موثقة وصحيحة – العرض واضح ويقدم المعطيات بطريقة منطقية.
3	معظم الحسابات دقيقة – البحث والشروح بحاجة إلى بعض الإيضاح – معظم العرض واضح.
2	تتضمن الحسابات أخطاء كثيرة – البحث والشروح غير واضحة – العرض غير منظم وغير مقبول.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة.

4–1: استكشاف النماذج الأسية

1 الأهداف

- يتعرف كيفية تمثيل النمو الأسي وتطبيقاته.
- يتعرف كيفية تمثيل التضاؤل الأسي وتطبيقاته.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الدوال الأسية – عامل النمو – عامل التضاؤل – النسبة المئوية للتغير – نمو أسي – تضاؤل أسي – عامل التغير – معدل التغير.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد ناتج ما يلي:

(a) $x^3 \times x^4$

(b) $(x^2)^5$

(c) $\dfrac{x^7}{x^3}$

(d) $x^4 \times y^2 \times x^5 \times y^{-1}$

(2) إذا كان $f(x) = 2^{x+1}$، فأوجد:

(a) $f(-1)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(0.1)$

5 التدريس

سوف يتعرف الطالب نموذج الدالة الأسية حيث يستكشف لأول مرة، دالة أساسها ثابت والأس متغير، بعد أن كان يتعامل مع دوال مكونة من حدوديات أساسها متغير وأسها ثابت. لذا، كان من المهم متابعة عمل الطلاب في فقرة «عمل تعاوني» للتأكد من كونهم قد تفهموا أن كل فريقين سوف يتنافسان في كل مباريات، وأنه في كل دورة جميع الفرق المتبقية سوف تشارك في المباراة. أخبرهم أن عدد الفرق المشاركة هو 64 وعدد المباريات في الدورة الأولى هو 32، ويجب أن يكون هناك فريق رابح في كل لعبة، ولا يوجد انسحابات من بين الفرق المشاركة.

4–1

سوف تتعلم
- تمثيل النمو الأسي.
- تمثيل التضاؤل الأسي.

المفردات والمصطلحات:
- الدوال الأسية Exponential Functions
- عامل النمو Growth Factor
- عامل التضاؤل Decay Factor
- النسبة المئوية للتغير Percent of Change
- نمو أسي Exponential Growth
- تضاؤل أسي Exponential Decay
- عامل التغير Variation Factor
- معدل التغير Rate of Change

استكشاف النماذج الأسية

Exploring Exponential Models

عمل تعاوني

تقام في دولة الكويت مسابقات لكرة قدم الصالات ويشترك فيها 64 فريقًا مختلفًا، على أن يستبعد الفريق الخاسر من المنافسة في كل مباراة.

1 اعمل مع زميل لك لتحديد عدد الفرق المتبقية في المسابقة بعد الدور الأول من المسابقة.

2 a أكمل الجدول حتى يتبقى فريق واحد.

بعد الدور (x)	عدد الفرق المتبقية في المسابقة (y)
0	64
1	
2	
⋮	⋮

b كم دورًا يجب لعبه حتى نهاية المسابقة؟

3 عيّن النقاط (x, y) من جدولك على ورقة رسم بياني.

4 هل الرسم البياني يمثل دالة خطية؟ فسّر إجابتك.

5 كيف تقارن عدد الفرق المتبقية في كل دور بعدد الفرق في الدور الذي يسبقه؟

استخدام الدوال الأسية Using Exponential Functions

تعتبر الدالة التي تمثل عدد الفرق المتبقية في مسابقة كرة قدم الصالات بعد كل دورة مثالًا على الدالة الأسية.

الدالة:

$y = ab^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(عدد ثابت) $a \in \mathbb{R}^*$

(الأساس) $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

تسمى دالة أسية.

الدالة الأسية التي فيها $a > 0$ يمكن أن تستخدم كنموذج للنمو أو للتضاؤل معتمدًا على قيمة b، كالتالي:

126

تمرّنْ 4–1

استكشاف النماذج الأسية

Exploring Exponential Models

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5–1)، اذكر ما إذا كانت كل دالة تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. ما النسبة المئوية لزيادة الدالة أو نقصانها؟

(1) $y = 1298(1.63)^x$ **(2)** $y = 0.65(1.3)^x$ **(3)** $f(x) = 2(0.65)^x$

(4) $f(t) = 0.8\left(\frac{1}{8}\right)^t$ **(5)** $y = 5(6)^x$

(6) **الدراسات الاجتماعية:** يعرض الجدول التالي معلومات عن عدد السكان في أكبر أربع مدن في العالم في سنة 1994.

الترتيب في سنة 1994	المدينة (الدولة)	عدد السكان في سنة 1994	متوسط معدل النمو السنوي (I)
1	طوكيو (اليابان)	26 518 000	1.4%
2	نيويورك (الولايات المتحدة)	16 271 000	0.3%
3	ساوباولو (البرازيل)	16 110 000	2.0%
4	مكسيكو (المكسيك)	15 525 000	0.7%

(a) لنفترض استمرار هذه المعدلات للنمو، اكتب معادلة تمثّل النمو المستقبلي لعدد السكان في كل مدينة.

(b) استخدم معادلاتك كي تتوقع عدد سكان كل مدينة في سنة 2004. هل تغير الترتيب؟

في التمرينين (8–7)، مثّل كل دالة بيانيًّا. بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا محددًا العامل.

(7) $y = 100(0.5)^x$ **(8)** $f(x) = 2^x$

(9) **السؤال المفتوح:** اكتب مسألة حياتية تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا لكل دالة في التمرينين (7) و(8).

(10) **الاقتصاد:** افترض أنك تريد شراء سيارة ثمنها 4 500 دينار. من المتوقع أن تنخفض قيمتها بمعدل 20% سنويًّا، إذا أخذت قرضًا مدته أربع سنوات لشراء السيارة، فكم ستكون قيمة السيارة بعد أن تسدد القرض في أربع سنوات؟

في التمارين (14–11)، اكتب دالة أسيّة لتمثيل (نمذجة) كل موقف مما يلي. أوجد قيمة الدالة بعد خمس سنوات.

(11) تجمّع من الضفادع مؤلف من 250 ضفدعة، يتزايد بمعدل 22% سنويًّا.

(12) مجموعة طوابع ثمنها 35 دينارًا، يتزايد ثمنها بمعدل 7.5% سنويًّا.

54

في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب ملاحظة الفرق بين x^2, 2^x. دعهم يكونون جدولًا للدالة x^2 بالقيم نفسها التي استخدمت للدالة 2^x، ثم رسم بيان الدالة x^2 لملاحظة الفرق بينهما. اسألهم ما إذا كانت هذه الدالة تزايدية أم تناقصية.

في المثال (2)

اسأل ما إذا كانت هذه الدالة تزايدية أم تناقصية، وكيفية اختلافها عن الدالة في المثال (1). اطلب إليهم التمعن بأساس كل دالة، ثم كتابة الاستنتاج.

في المثال (3)

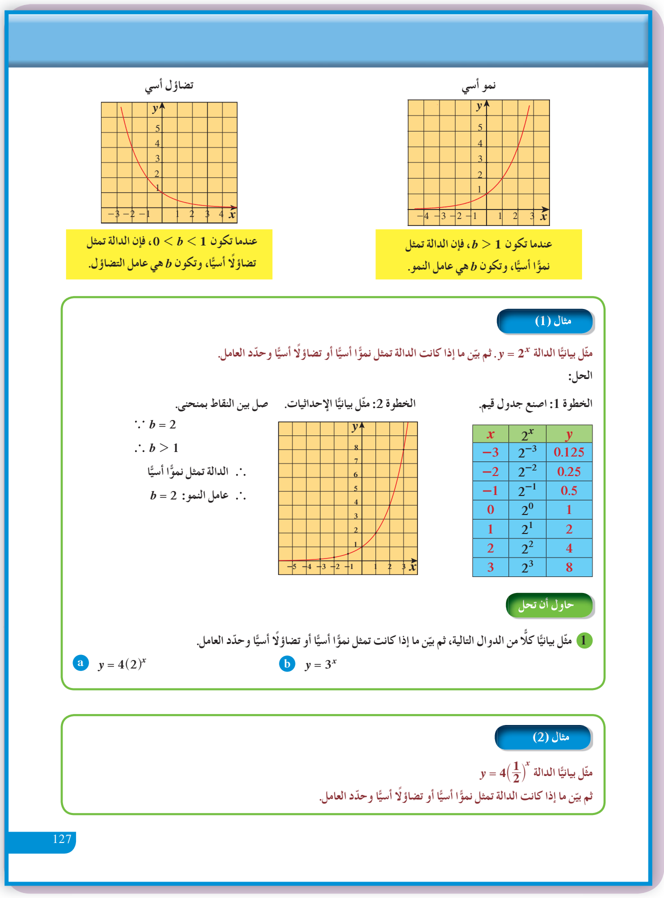
هو تطبيق الدالة الأسية على نمو السكان. ساعدهم على فهم عامل النمو. أخبرهم أن عامل النمو (عامل التضاؤل) سيكون دائمًا هو الأساس في الدالة الأسية، وأن $b = 1 + \mathrm{I}$، حيث I هو معدّل التغير (موجبًا أو سالبًا).

في المثال (4)

يبيّن كيفية إيجاد دالة أسية إذا كان رسمها البياني يمر عبر نقطتين، علمًا بأن الدالة الأسية $y = ab^x$ تتضمن ثابتين a, b لذا يجب معرفة إحداثيات نقطتين.

في المثال (5)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطالب لتعرف كيفية استخدام الدالة الأسية في الانخفاض (التناقص) باستخدام القاعدة $y = ab^x$، حيث b هي أساس الدالة الأسية، وهي قيمة الانخفاض (التناقص) وتكون قيمة ثابتة.



تضاؤل أسي

نمو أسي

عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا، وتكون b هي عامل التضاؤل.

عندما تكون $b > 1$، فإن الدالة تمثل نموًّا أسيًّا، وتكون b هي عامل النمو.

مثال (1)

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 2^x$. ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	2^x	y
-3	2^{-3}	0.125
-2	2^{-2}	0.25
-1	2^{-1}	0.5
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الإحداثيات. صل بين النقاط بمنحنى.

$\because b = 2$

$\therefore b > 1$

$\therefore$ الدالة تمثل نموًّا أسيًّا

$\therefore$ عامل النمو: $b = 2$

حاول أن تحل

1 مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية، ثم بيّن ما إذا كانت تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

a $y = 4(2)^x$

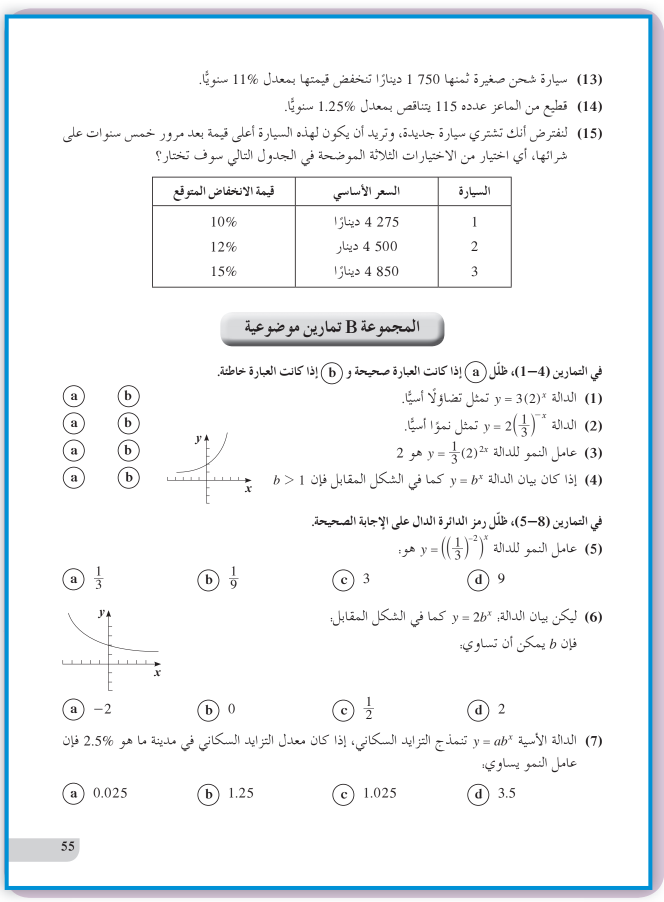
b $y = 3^x$

مثال (2)

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

127



(13) سيارة شحن صغيرة ثمنها 1 750 دينارًا تنخفض قيمتها بمعدل 11% سنويًّا.

(14) قطيع من الماعز عدده 115 يتناقص بمعدل 1.25% سنويًّا.

(15) لنفترض أنك تشتري سيارة جديدة، وتريد أن يكون لهذه السيارة أعلى قيمة بعد مرور خمس سنوات على شرائها، أي اختيار من الاختيارات الثلاثة الموضحة في الجدول التالي سوف تختار؟

السيارة	السعر الأساسي	قيمة الانخفاض المتوقع
1	4 275 دينارًا	10%
2	4 500 دينار	12%
3	4 850 دينارًا	15%

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = 3(2)^x$ تمثل تضاؤلًا أسيًّا. (a) (b)

(2) الدالة $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ تمثل نموًّا أسيًّا. (a) (b)

(3) عامل النمو للدالة $y = \frac{1}{3}(2)^{2x}$ هو 2 (a) (b)

(4) إذا كان بيان الدالة $y = b^x$ كما في الشكل المقابل فإن $b > 1$ (a) (b)

في التمارين (5–8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) عامل النمو للدالة $y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x$ هو:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) 3 (d) 9

(6) ليكن بيان الدالة: $y = 2b^x$ كما في الشكل المقابل:

فإن b يمكن أن تساوي:

(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

(7) الدالة الأسية $y = ab^x$ تنمذج التزايد السكاني، إذا كان معدل التزايد السكاني في مدينة ما هو 2.5% فإن عامل النمو يساوي:

(a) 0.025 (b) 1.25 (c) 1.025 (d) 3.5

55

6 الربط

المثالان (5) ,(3) يوفران فرصة أمام الطلاب لتعرف كيفية استخدام الدوال الأسية، لإيجاد التزايد أو التناقص في عدد السكان أو في استهلاك منتج معين خلال فترة زمنية محددة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة النسبة المئوية لتزايد عدد السكان، فمثلًا 2% زيادة قد يحولونها إلى 0.2 في الصورة العشرية وهذا خطأ.

أخبرهم أن 2% هي $\frac{2}{100}$ وهي أصغر من 1، لذا تكون 2% هي 0.02 وليس 0.2 والتي تعادل 20%.

a أوجد عامل النمو.

b كوّن الدالة الأسية التي تنمذج التغير السكاني حيث بلغ عدد سكان الكويت من المواطنين 1 038 598 مواطنًا في سنة 2007.

(المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء)

c إذا افترضنا أن معدل التزايد ثابت، فكم سيكون عدد سكان الكويت من المواطنين سنة 2013؟

الحل:

a عامل النمو:

$(I = 2.44\% = \frac{2.44}{100} = 0.0244)$ $b = 1 + I = 1 + 0.0244$ $\therefore b = 1.0244$

b يتزايد السكان أسيًا لذلك نستخدم الدالة الأسية $y = ab^x$،
حيث x عدد السنوات بعد 2007، y عدد السكان بالمليون.

أي أن:

$y = a(1.0244)^x$

(عدد السكان سنة 2007) $y = 1\,038\,598$

عندما $x = 0$ (سنة البدء 2007) $1\,038\,598 = a(1.0244)^0$

$1\,038\,598 = a \times 1$

أي عدد غير صفري مرفوع للأس صفر يساوي واحد $a = 1\,038\,598$

$\therefore$ دالة التغير السكاني هي: $y = 1\,038\,598(1.0244)^x$

c سنة 2013 هي السنة السادسة $y = 1\,038\,598(1.0244)^6$

أي أن $x = 6$ $y \approx 1\,200\,231$

من المتوقع أن يصبح عدد مواطني الكويت مليون ومئتي ألف و 231 نسمة في سنة 2013.

حاول أن تحل

3 من المعلومات في مثال (3)

a إذا بقي معدل التزايد ثابتًا، فكم تتوقع أن يكون عدد مواطني الكويت سنة 2017؟

b التفكير الناقد: لماذا قد لا يكون التوقع صحيحًا لسنة 2017؟

يمكن كتابة دالة أسية بمعلومية نقطتين على رسمها البياني.

مثال (4)

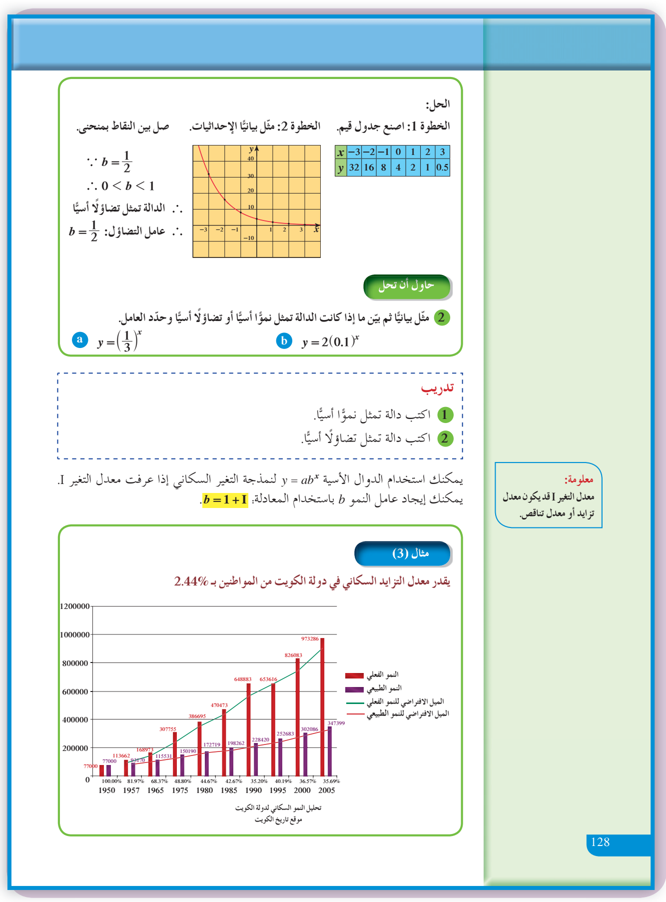
اكتب دالة أسية: $y = ab^x$، يمر بيانها بالنقطتين: $P(2, 2)$, $Q(3, 4)$

الحل:

استخدم الدالة الأسية $y = ab^x$

عوّض عن (x, y) بـ $(2, 2)$ $ab^2 = 2$

129



الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم. الخطوة 2: مثّل بيانيًا الإحداثيات. صل بين النقاط بمنحنى.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	32	16	8	4	2	1	0.5

$\because b = \frac{1}{2}$

$\therefore 0 < b < 1$

$\therefore$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًا

$\therefore$ عامل التضاؤل: $b = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

2 مثّل بيانيًا ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًا أسيًا أو تضاؤلًا أسيًا وحدّد العامل.

a $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b $y = 2(0.1)^x$

تدريب

1 اكتب دالة تمثل نموًا أسيًا.

2 اكتب دالة تمثل تضاؤلًا أسيًا.

يمكنك استخدام الدوال الأسية $y = ab^x$ لنمذجة التغير السكاني إذا عرفت معدل التغير I.

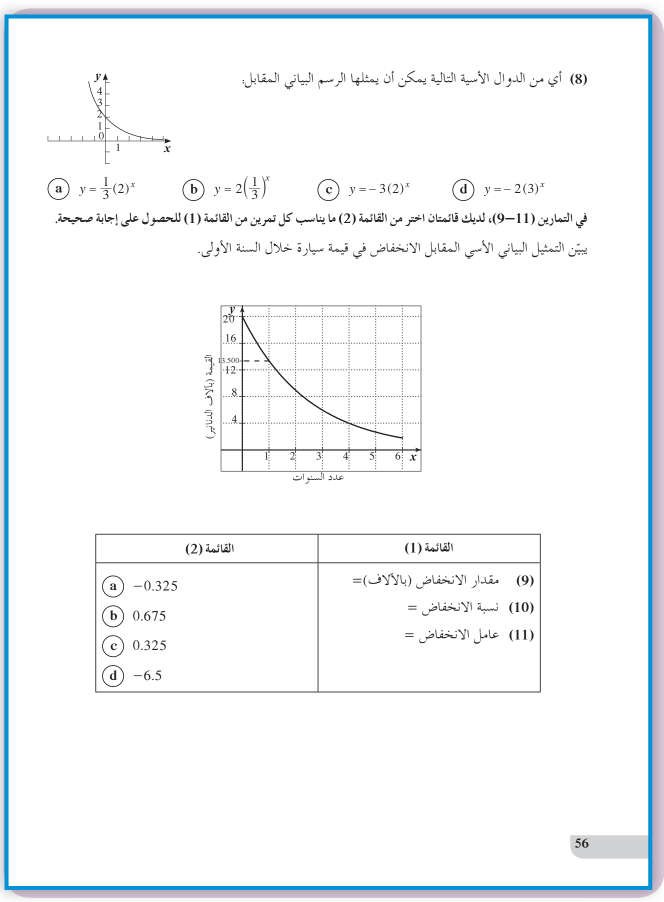
يمكنك إيجاد عامل النمو b باستخدام المعادلة: $b = 1 + I$.

معلومة: معدل التغير I قد يكون معدل تزايد أو معدل تناقص.

مثال (3)

يقدر معدل التزايد السكاني في دولة الكويت من المواطنين بـ 2.44%

128



(8) أي من الدوال الأسية التالية يمكن أن يمثلها الرسم البياني المقابل.

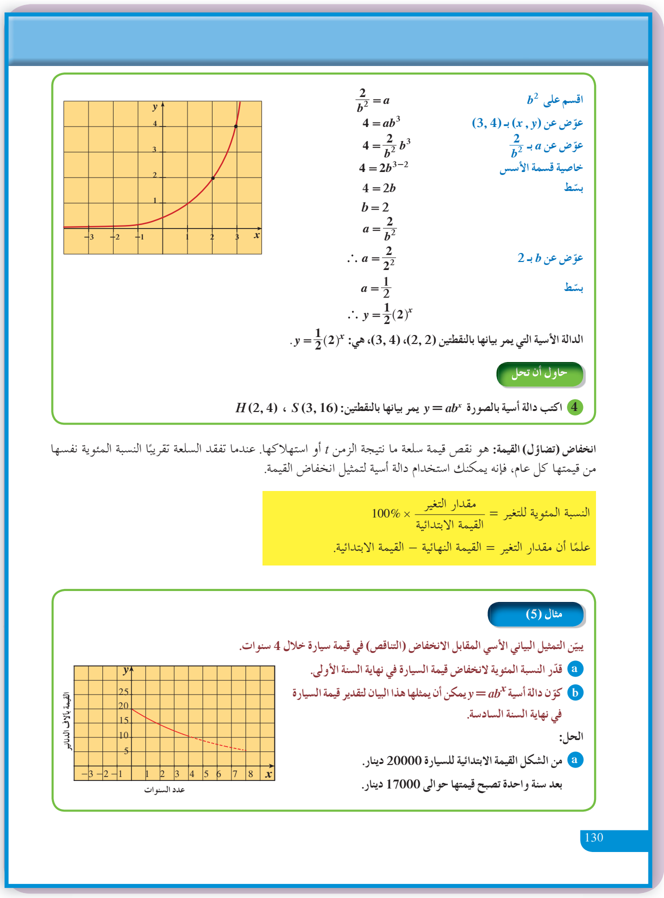
a $y = \frac{1}{3}(2)^x$ b $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$ c $y = -3(2)^x$ d $y = -2(3)^x$

في التمارين (9–11)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) للحصول على إجابة صحيحة.

يبيّن التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض في قيمة سيارة خلال السنة الأولى.

القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مقدار الانخفاض (بالآلاف) =	a −0.325
(10) نسبة الانخفاض =	b 0.675
(11) عامل الانخفاض =	c 0.325
	d −6.5

56


اقسم على b^2 $\quad \frac{2}{b^2} = a$

عوّض عن (x, y) بـ $(3, 4)$ $\quad 4 = ab^3$

عوّض عن a بـ $\frac{2}{b^2}$ $\quad 4 = \frac{2}{b^2} b^3$

خاصية قسمة الأسس $\quad 4 = 2b^{3-2}$

بسّط $\quad 4 = 2b$

$b = 2$

$a = \frac{2}{b^2}$

عوّض عن b بـ 2 $\quad \therefore a = \frac{2}{2^2}$

بسّط $\quad a = \frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{2}(2)^x$

الدالة الأسية التي يمر بيانها بالنقطتين $(2, 2)$، $(3, 4)$، هي: $y = \frac{1}{2}(2)^x$.

حاول أن تحل

4 اكتب دالة أسية بالصورة $y = ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $S(3, 16)$ ، $H(2, 4)$

انخفاض (تضاؤل) القيمة: هو نقص قيمة سلعة ما نتيجة الزمن t أو استهلاكها. عندما تفقد السلعة تقريبًا النسبة المئوية نفسها من قيمتها كل عام، فإنه يمكنك استخدام دالة أسية لتمثيل انخفاض القيمة.

النسبة المئوية للتغير $= \frac{\text{مقدار التغير}}{\text{القيمة الابتدائية}} \times 100\%$

علمًا أن مقدار التغير = القيمة النهائية − القيمة الابتدائية.

مثال (5)

يبيّن التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض (التناقص) في قيمة سيارة خلال 4 سنوات.

a قدّر النسبة المئوية لانخفاض قيمة السيارة في نهاية السنة الأولى.

b كوّن دالة أسية $y = ab^x$ يمكن أن يمثلها هذا البيان لتقدير قيمة السيارة في نهاية السنة السادسة.

الحل:

a من الشكل القيمة الابتدائية للسيارة 20000 دينار.

بعد سنة واحدة تصبح قيمتها حوالي 17000 دينار.

130

8 التقييم

تساعد فقرات «حاول أن تحل» المعلم على متابعة الطلاب وإدراك مدى فهمهم هذا النموذج الجديد من الدوال.

اختبار سريع

1 هل الدالة $y = 234(0.87)^x$ تمثل نموًّا أسيًّا أم تضاؤلًا أسيًّا؟ اشرح. تضاؤلًا أسيًّا. الأساس أصغر من 1

2 اشتريت حاسوبًا بسعر 350 دينارًا وتتوقع أن يتناقص سعره 25% كل سنة. كم سيصبح سعره بعد 4 سنوات؟ 110.7 دنانير

3 مستعمرة حشرات مؤلفة من 414 حشرة تتزايد بمعدل 45% كل أسبوع، كم سيكون عدد حشرات هذه المستعمرة بعد 4 أسابيع؟ 1 830 حشرة

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 32 فرقة

2 (a)

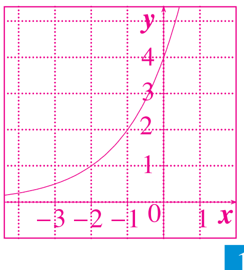
بعد الدور (x)	عدد الفرق المتبقية في المسابقة (y)
0	64
1	32
2	16
3	8
4	4
5	2
6	1

(b) 6 أدوار بـ 63 مباراة.

5 − 3 تحقق من عمل الطلاب.

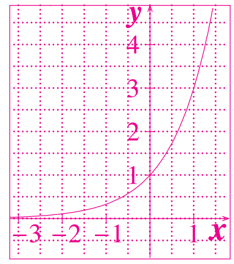
«حاول أن تحل»

1 (a) $y = 4(2)^x$



(b) $y = 3^x$

x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3



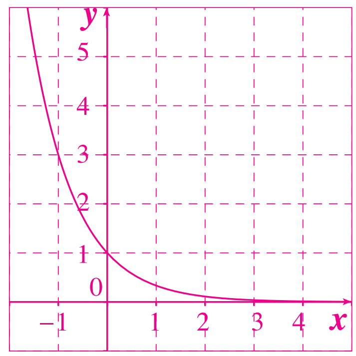
2 **(a)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	y
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$

$\because b = \frac{1}{3},\ 0 < b < 1$

$\therefore$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا

$\therefore$ عامل التضاؤل $b = \frac{1}{3}$



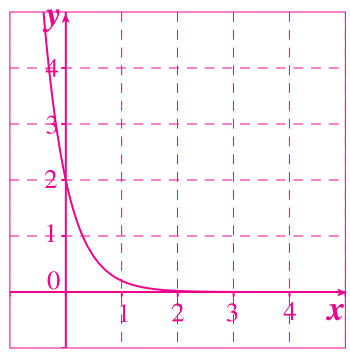
(b) $y = 2 \times (0.1)^x$

x	0	1	2	3
y	2	0.2	0.02	0.002

$\because b = 0.1,\ 0 < b < 1$

$\therefore$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا

$\therefore$ عامل التضاؤل $b = 0.1$



3 $y = 1\,038\,598(1.0244)^{10} \approx 1\,321\,731$

(a) أي أن عدد سكان الكويت سوف يكون تقريبًا 1 321 731 نسمة.

(b) لأن نسبة الزيادة قد لا تكون ثابتة أي 2.44%.

4 الدالة الأسية بالصيغة القياسية هي: $y = a(b)^x$


نسبة التغير = (القيمة النهائية − القيمة الابتدائية) ÷ القيمة الابتدائية

$\text{Decay Ratio} = \frac{17\,000 - 20\,000}{20\,000}$

$= -0.15$

النسبة المئوية للتغير: $-0.15 \times 100\% = -15\%$

تنخفض قيمة السيارة بمقدار 15% في العام الأول.

b نستخدم الدالة الأسية: $y = ab^x$ لتقدير قيمة السيارة بعد 6 سنوات،

حيث (x) عدد السنوات، (y) قيمة السيارة بالدينار، b هو عامل الانخفاض (التضاؤل).

$\therefore$ عامل الانخفاض $b = 1 + \mathrm{I}$، حيث I معدل التغير.

عامل الانخفاض: $b = 1 - 0.15 = 0.85$

عوّض عن y بـ 20 000، عن x بـ 0 $\quad 20\,000 = a(0.85)^0$

$a = 20\,000$

$\therefore y = 20\,000(0.85)^x$

عوّض عن x بـ 6 $\quad y = 20\,000(0.85)^6$

بسّط $\quad y \approx 7\,542.99$

تصبح قيمة السيارة بعد 6 سنوات حوالى 7540 دينارًا.

حاول أن تحل

5 يبيّن التمثيل البياني الأسي أدناه الانخفاض (التناقص) في قيمة حاسوب خلال 4 سنوات.

a قدّر النسبة المئوية للانخفاض في نهاية السنة الأولى.

b كوّن دالة أسية $y = ab^x$ يمكن أن يمثلها هذا البيان ثم استخدمها لتقدير قيمة الحاسوب في نهاية السنة الرابعة.

131

يجب إيجاد a, b

$y = \frac{1}{4}(4)^x$

5 (a) مقدار التغيير: $1600 - 2100 = -500$

$\therefore$ قيمة الانخفاض: 500

النسبة المئوية للتغير:

$\frac{-500}{2100} \times 100\% \approx -23.8\%$

(b) الدالة الأسية تكتب على الشكل التالي:

$y = a(b)^x$ ؛ $2100 = a(b)^0$

ومنه $a = 2100$

ثم $b = 1 + \mathrm{I}$

أي $b = 1 - 0.238$

$b = 0.762$

تصبح الدالة الأسية: $y = 2100(0.762)^x$

قيمة الحاسوب في السنة الرابعة:

708 دنانير تقريبًا

«تدريب»

1 $y = 2(3)^x$

2 $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$

2–4: الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

1 الأهداف

- يرسم التمثيل البياني لبعض الدوال الأسية.
- يحدد دور الثوابت في الدوال الأسية.
- يستخدم العدد e كأساس في الدوال الأسية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

انعكاس – انسحاب – العدد e.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة: $y = 3(2)^x$

(b) ارسم بيان الدالة: $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x$

(c) أوجد قيم: a, b في الدالة: $y = a(b)^x$ إذا كان الرسم البياني لهذه الدالة يمر بالنقاط: $(25, 1), (75, 2)$.

5 التدريس

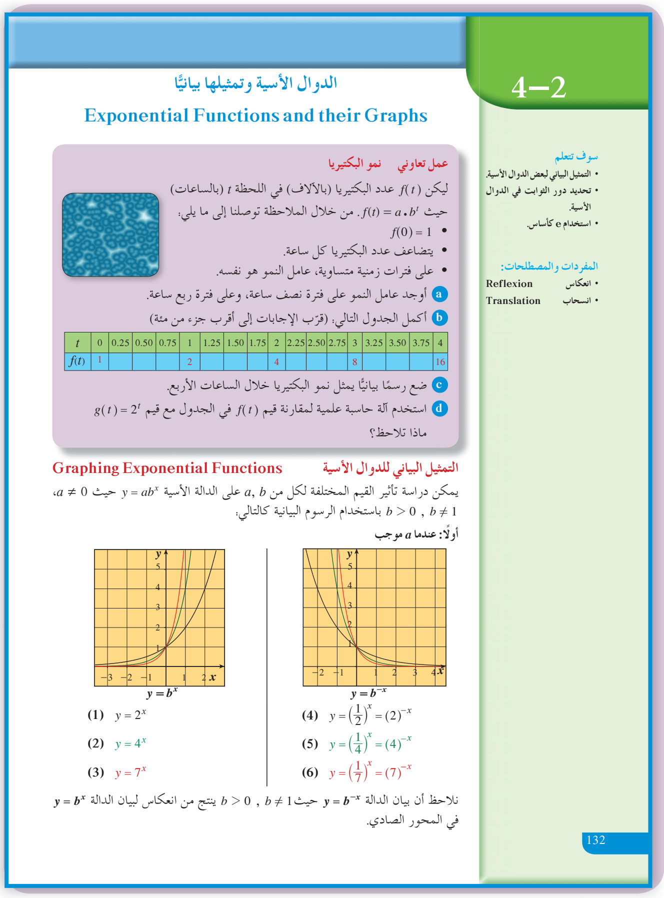
تعتبر الدوال الأسية ذات أهمية كبرى لما لها من استخدامات في التطبيقات الحياتية.

في المثال (1)

ركز انتباه الطلاب على جدول القيم، اسألهم إذا لاحظوا ما يحدث لقيم 3^x و $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ عندما تتزايد x في العمود الأول لجهة اليسار. اطلب إليهم الربط بين قيم 3^x وقيم $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ على الجدول عند القيم -1، -2 والقيم 1، 2. شجعهم على استنتاج التزايد على منحنى 3^x واستنتاج التناقص على منحنى $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ وذلك عند تزايد المتغير x.

في المثال (2)

اشرح للطلاب أن الدالة $y = ab^x, (a < 0)$ لها منحنى وهو انعكاس لمنحنى الدالة $y = ab^x, (a > 0)$ في محور السينات. شجعهم على ملاحظة قيم $\frac{1}{2}(2)^x$ وقيم $-\frac{1}{2}(2)^x$



4–2

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

Exponential Functions and their Graphs

سوف تتعلم
- التمثيل البياني لبعض الدوال الأسية.
- تحديد دور الثوابت في الدوال الأسية.
- استخدام e كأساس.

المفردات والمصطلحات:
- انعكاس Reflexion
- انسحاب Translation

عمل تعاوني نمو البكتيريا

ليكن $f(t)$ عدد البكتيريا (بالآلاف) في اللحظة t (بالساعات) حيث $f(t) = a \bullet b^t$. من خلال الملاحظة توصلنا إلى ما يلي:
- $f(0) = 1$
- يتضاعف عدد البكتيريا كل ساعة.
- على فترات زمنية متساوية، عامل النمو هو نفسه.

(a) أوجد عامل النمو على فترة نصف ساعة، وعلى فترة ربع ساعة.

(b) أكمل الجدول التالي: (قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة)

t	0	0.25	0.50	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25	2.50	2.75	3	3.25	3.50	3.75	4
$f(t)$	1				2				4				8				16

(c) ضع رسمًا بيانيًّا يمثل نمو البكتيريا خلال الساعات الأربع.

(d) استخدم آلة حاسبة علمية لمقارنة قيم $f(t)$ في الجدول مع قيم $g(t) = 2^t$ ماذا تلاحظ؟

التمثيل البياني للدوال الأسية Graphing Exponential Functions

يمكن دراسة تأثير القيم المختلفة لكل من a, b على الدالة الأسية $y = ab^x$ حيث $a \neq 0$، $b > 0$, $b \neq 1$ باستخدام الرسوم البيانية كالتالي:

أولًا: عندما a موجب

$y = b^x$

(1) $y = 2^x$

(2) $y = 4^x$

(3) $y = 7^x$

$y = b^{-x}$

(4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2)^{-x}$

(5) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4)^{-x}$

(6) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = (7)^{-x}$

نلاحظ أن بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي.

132

تمرَّنْ 4–2

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

Exponential Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية:

(1) $y = 4^x$ (2) $y = 6^x + 3$ (3) $y = 2^{-x}$ (4) $y = -3^{x+4}$

في التمارين (5–8)، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية مستخدمًا دالة المرجع:

(5) $y = (5)^x - 1$ (6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ (7) $y = (4)^{x-2} + 3$ (8) $y = -2(3)^{2x} + 1$

في التمارين (9–13)، استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرّبًا الناتج إلى أربعة أرقام عشرية.

(9) e^3 (10) $5e^6$ (11) $\left(\frac{5}{4}\right)e^{\frac{1}{2}}$

(12) $\frac{4}{e^6}$ (13) e^e

(14) أوجد قيمة a التي يصبح عندها الرسم البياني للدالة: $y = ab^x$ خطًّا أفقيًّا.

(15) (a) **الكيمياء:** تعطي العلاقة: $A = Pe^{-0.0001t}$ الكمية المتبقية «A» بالميكروجرام من مادة إشعاعية معينة بعد «t» سنة من التضاؤل؛ «P» هي الكمية الأولية للمادة المشعة. استخدم العلاقة لإكمال الجدول التالي:

الكمية الأولية من المادة (P)	السنوات (t)	الكمية المتبقية من المادة (A)
10 000	5	
7 500	5	
6 000	5	
5 000	5	
2 500	5	
2 000	5	

(b) قارن بين قيم كل من P , A. ماذا تلاحظ؟

(16) **علم المحيطات:** كلما غصنا في أعماق المحيط، قلت شدة أشعة الشمس. إذا كانت شدة أشعة الشمس على سطح المحيط هي y، فإن النسبة المئوية من y التي تصل إلى عمق x m تعطى بالعلاقة: $y = 20 \times (0.92)^x$ (يعد هذا النموذج مناسبًا للأعماق من 6 m إلى 180 m تحت مستوى سطح البحر).

(a) أوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس الموجودة على عمق 15 m تحت مستوى سطح البحر.

(b) إذا كان أقصى عمق مسجل لرياضة الغطس هو 107 m تحت مستوى سطح البحر، فأوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس عند هذا العمق.

57

على الجدول عندما تتغير x. اعرض أمامهم على جهاز الإسقاط أمثلة متعددة عن بيان دالتين حيث إشارة a سالبة وموجبة.

في المثال (3)

شجع الطلاب على استخدام الانسحاب في التمثيلات البيانية للدوال الأسية لأنه يساعدهم كثيرًا. فسّر لهم جيّدًا الرموز المستخدمة وكيفية التعامل معها بين الدالتين: $y = ab^x$ ، $y = a(b)^{x-h} + k$.

في المثال (5)

يعالج هذا المثال حالة خاصة من قيم b في الدالة الأسية، حيث $b = e$ علمًا أن: $e \simeq 2.718$، أي أن الدالة $y = e^x$ هي تزايدية لأن $e > 1$. أخبرهم أن $y = e^{-x}$ هي دالة تناقصية.

تطبيق إثرائي (الطب)

يبيّن كيفية تطبيق التضاؤل باستخدام الدالة الأسية وذلك على مادة مشعة تستخدم في المستشفيات. اشرح لهم معنى نصف العمر. ثم اطلب إليهم إجراء بحث أو القيام بزيارة لمستشفى للتعرف أكثر إلى طبيعة هذه المادة.

6 الربط

التطبيق الإثرائي في الطب يوفر الربط بين الدوال الأسية لجهة التضاؤل والمواقف التي تهم كل واحد منا في حياته اليومية.

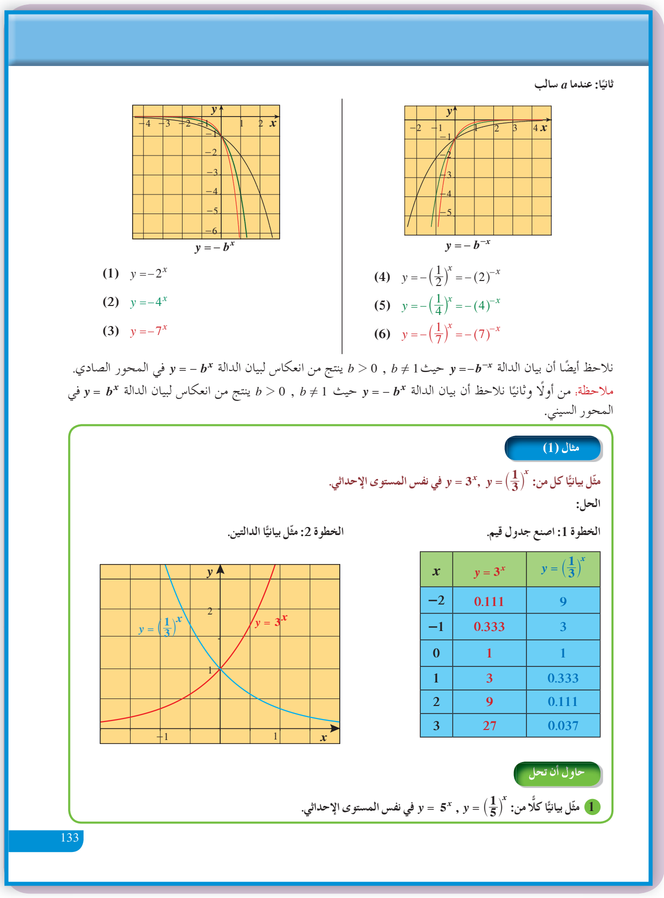
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام الإزاحة (الانسحاب) مع الدالة $y = a(b)^{x-h} + k$ والدالة الأساسية $y = a(b)^x$.

شدّد على فكرة أن h هي إزاحة إلى اليمين إذا كانت موجبة وإزاحة إلى اليسار إذا كانت سالبة، وأن k إزاحة إلى أعلى إذا كانت موجبة وإزاحة إلى أسفل إذا كانت سالبة.

8 التقييم

تابع الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من إمكانياتهم على إستيعاب المفاهيم والمهارات التي اكتسبوها في هذا الدرس.


ثانيًا: عندما a سالب

$y = -b^{-x}$

(4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x = -(2)^{-x}$
(5) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x = -(4)^{-x}$
(6) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x = -(7)^{-x}$

$y = -b^x$

(1) $y = -2^x$
(2) $y = -4^x$
(3) $y = -7^x$

نلاحظ أيضًا أن بيان الدالة $y = -b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = -b^x$ في المحور الصادي.

ملاحظة: من أولًا وثانيًا نلاحظ أن بيان الدالة $y = -b^x$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور السيني.

مثال (1)

مثّل بيانيًا كل من: $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	$y = 3^x$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−2	0.111	9
−1	0.333	3
0	1	1
1	3	0.333
2	9	0.111
3	27	0.037

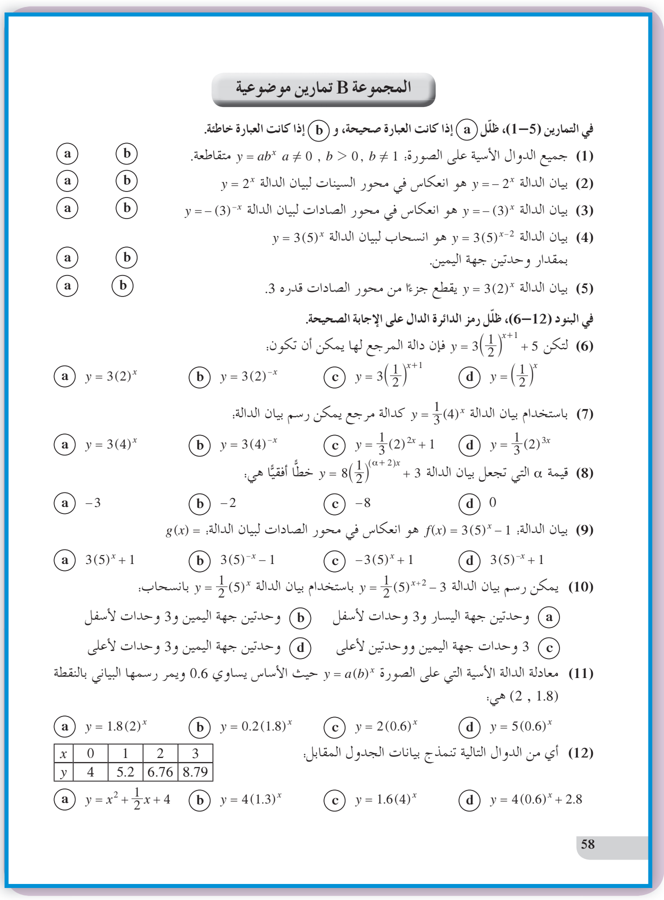
الخطوة 2: مثّل بيانيًا الدالتين.

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $y = 3^x$

حاول أن تحل

1 مثّل بيانيًا كلًّا من: $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = 5^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

133


المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) جميع الدوال الأسية على الصورة: $y = ab^x$ $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ متقاطعة. (a) (b)

(2) بيان الدالة $y = -2^x$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة $y = 2^x$ (a) (b)

(3) بيان الدالة $y = -(3)^x$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة $y = -(3)^{-x}$ (a) (b)

(4) بيان الدالة $y = 3(5)^{x-2}$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = 3(5)^x$ بمقدار وحدتين جهة اليمين. (a) (b)

(5) بيان الدالة $y = 3(2)^x$ يقطع جزءًا من محور الصادات قدره 3. (a) (b)

في البنود (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 5$ فإن دالة المرجع لها يمكن أن تكون:

(a) $y = 3(2)^x$ (b) $y = 3(2)^{-x}$ (c) $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ (d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(7) باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{3}(4)^x$ كدالة مرجع يمكن رسم بيان الدالة:

(a) $y = 3(4)^x$ (b) $y = 3(4)^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} + 1$ (d) $y = \frac{1}{3}(2)^{3x}$

(8) قيمة α التي تجعل بيان الدالة $y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+2)x} + 3$ خطًّا أفقيًّا هي:

(a) -3 (b) -2 (c) -8 (d) 0

(9) بيان الدالة: $f(x) = 3(5)^x - 1$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة: $g(x) =$

(a) $3(5)^x + 1$ (b) $3(5)^{-x} - 1$ (c) $-3(5)^x + 1$ (d) $3(5)^{-x} + 1$

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^{x+2} - 3$ باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^x$ بانسحاب:

(a) وحدتين جهة اليسار و3 وحدات لأسفل (b) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأسفل
(c) 3 وحدات جهة اليمين ووحدتين لأعلى (d) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأعلى

(11) معادلة الدالة الأسية التي على الصورة $y = a(b)^x$ حيث الأساس يساوي 0.6 ويمر رسمها البياني بالنقطة (2 , 1.8) هي:

(a) $y = 1.8(2)^x$ (b) $y = 0.2(1.8)^x$ (c) $y = 2(0.6)^x$ (d) $y = 5(0.6)^x$

(12) أي من الدوال التالية تنمذج بيانات الجدول المقابل:

x	0	1	2	3
y	4	5.2	6.76	8.79

(a) $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ (b) $y = 4(1.3)^x$ (c) $y = 1.6(4)^x$ (d) $y = 4(0.6)^x + 2.8$

58

اختبار سريع

1. استخدم آلة حاسبة لمعرفة قيمة $\frac{e^5}{3}$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. 49.4711
2. اكتب دالة أسية أساسها 2 وتمر بالنقطة (3, 12). $y = \frac{3}{2}(2)^x$

9 إجابات وحلول

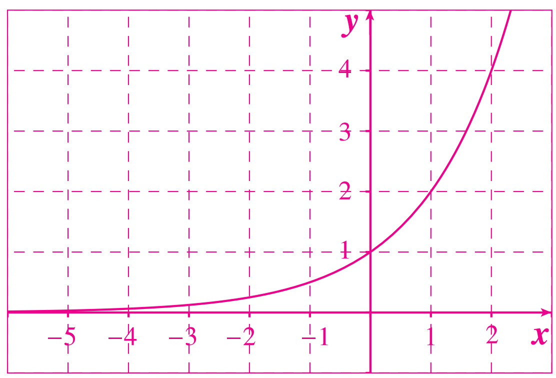
«عمل تعاوني»

(a) عامل النمو ثابت وهو 2.

(b)

t	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.50	1.75
$f(t)$	1	1.19	1.41	1.68	2	2.38	2.83	3.36
2	2.25	2.50	2.75	3	3.25	3.50	3.75	4
4	4.76	5.66	6.73	8	9.51	11.31	13.45	16

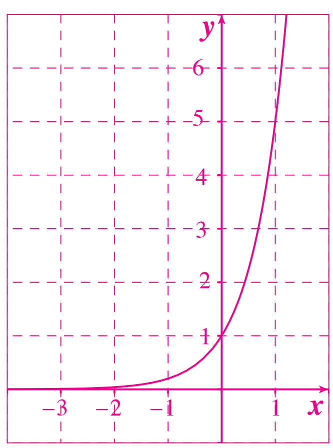
(c) $y = 2^x$

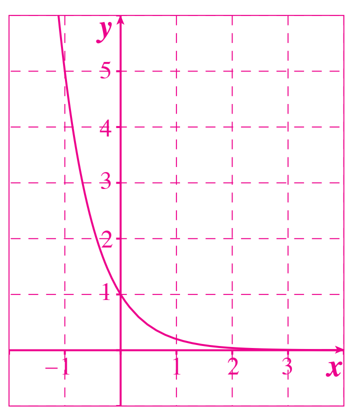


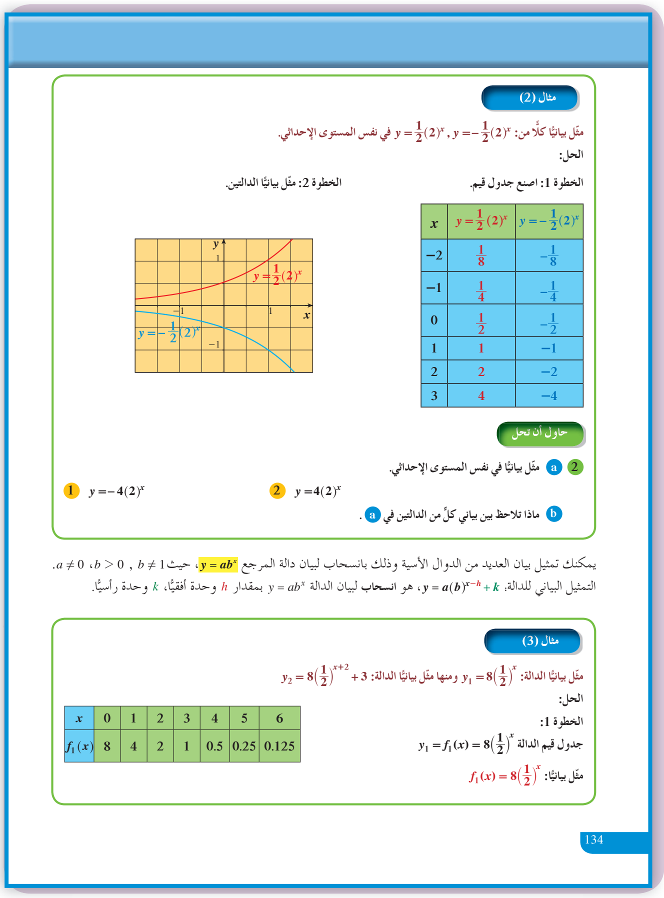
(d) تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$







مثال (2)

مثّل بيانيًّا كلًّا من: $y = \frac{1}{2}(2)^x$, $y = -\frac{1}{2}(2)^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	$y = \frac{1}{2}(2)^x$	$y = -\frac{1}{2}(2)^x$
−2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
−1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	1	−1
2	2	−2
3	4	−4

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الدالتين.

حاول أن تحل

2 (a) مثّل بيانيًّا في نفس المستوى الإحداثي.

1. $y = -4(2)^x$
2. $y = 4(2)^x$

(b) ماذا تلاحظ بين بياني كلٍّ من الدالتين في (a).

يمكنك تمثيل بيان العديد من الدوال الأسية وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع $y = ab^x$، حيث $b \neq 1$, $b > 0$، $a \neq 0$. التمثيل البياني للدالة: $y = a(b)^{x-h} + k$، هو **انسحاب** لبيان الدالة $y = ab^x$ بمقدار h وحدة أفقيًّا، k وحدة رأسيًّا.

مثال (3)

مثّل بيانيًّا الدالة: $y_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ومنها مثّل بيانيًّا الدالة: $y_2 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

الحل:

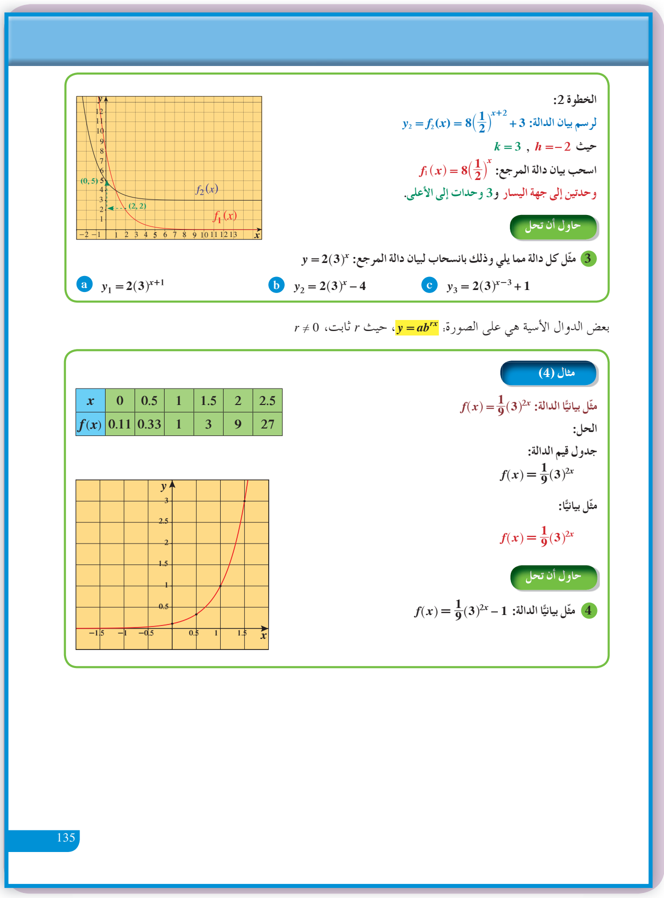
الخطوة 1:

جدول قيم الدالة $y_1 = f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

مثّل بيانيًّا: $f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

134



الخطوة 2:

لرسم بيان الدالة: $y_2 = f_2(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

حيث $h = -2$, $k = 3$

اسحب بيان دالة المرجع: $f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

وحدتين إلى جهة اليسار و3 وحدات إلى الأعلى.

حاول أن تحل

3 مثّل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع: $y = 2(3)^x$

(a) $y_1 = 2(3)^{x+1}$ (b) $y_2 = 2(3)^x - 4$ (c) $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$

بعض الدوال الأسية هي على الصورة: $y = ab^{rx}$، حيث r ثابت، $r \neq 0$

مثال (4)

مثّل بيانيًا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

الحل:

جدول قيم الدالة:

$f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	0.11	0.33	1	3	9	27

مثّل بيانيًا:

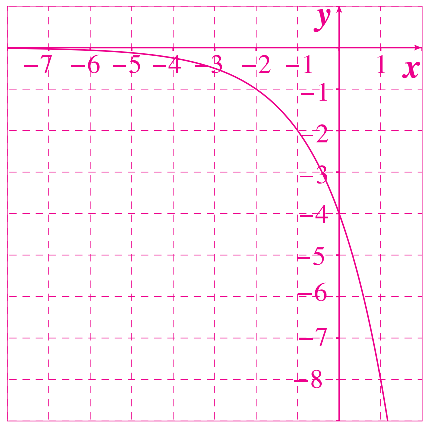
$f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

حاول أن تحل

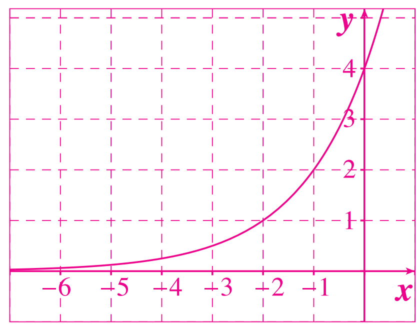
4 مثّل بيانيًا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$

135

2 **(a)** **(1)** $y = -4(2)^x$

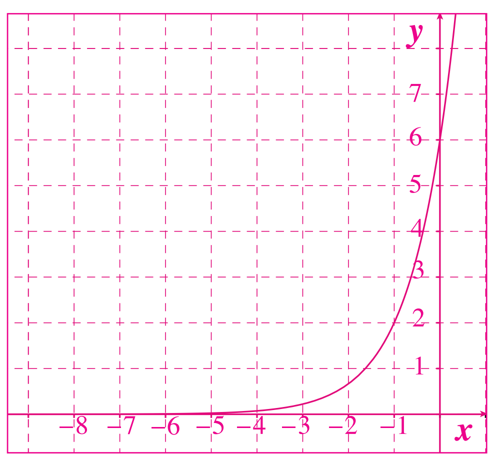


(2) $y = 4(2)^x$



(b) بيان الأولى يمثل تضاؤلًا أسيًّا أما بيان الثانية فيمثل نموًّا أسيًّا.

3 **(a)** $y_1 = 2(3)^{x+1}$



تطبيق إثرائي (الطب)

فترة نصف العمر لمادة مشعة هو الوقت الذي تستغرقه المادة في تضاؤل أو تحلل نصفها. لنفرض أن إحدى المستشفيات تحضر 100 mg مزودة بتكنيشيوم (Tc − 99 m)، حيث فترة نصف عمره 6 ساعات.

a ضع جدولًا يوضح كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية في نهاية كل فترة 6 ساعات لمدة 36 ساعة.

b اكتب معادلة لوصف الدالة الأسية.

c استخدم الدالة لإيجاد كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية بعد 75 ساعة.

الحل:

a كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) تقل بمقدار النصف كل 6 ساعات.

تكنيشيوم (Tc − 99 m) الكمية الحالية (mg)	عدد الساعات المستغرق	عدد مرات نصف العمر (6 h)
100	0	0
50	6	1
25	12	2
12.5	18	3
6.25	24	4
3.125	30	5
1.5625	36	6

b الكمية الابتدائية للتكنيشيوم (Tc − 99 m) هي 100 mg

عامل التضاؤل هو $b = \frac{1}{2}$، نصف العمر 6 h

افرض أن: y تمثل كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m)

(x) عدد الساعات المستغرق ، $\left(\frac{1}{6}\right)x$ عدد أنصاف العمر.

اكتب: $y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}x}$

c

$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}x}$

عوّض عن x بـ 75 $\quad y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}\times 75}$

بسّط $\quad y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{12.5}$

≈ 0.01726

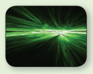
تبلغ كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية بعد 75 h حوالى 0.017 mg

الكيمياء

التكنيشيوم Technetium (Tc − 99 m) هو مادة مشعة. كثيرًا ما تستخدم لتشخيص أمراض الغدد الدرقية، والمخ، والكبد، والكلى.

أشعة جاما

عندما يتحلل التكنيشيوم (Tc − 99 m) تنبعث طاقة منخفضة من أشعة جاما.



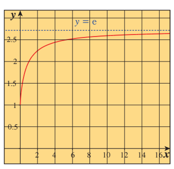
136

Symbol e الرمز e

التمثيل البياني أدناه هو جزء من بيان الدالة: $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

عندما يأخذ x قيمًا أكبر فأكبر تقترب قيم y من 2.718 هذه القيمة تسمّى e وهو عدد غير نسبي ويساوي تقريبًا 2.71828 تستخدم الدوال الأسية التي أساسها e لوصف النمو (التزايد) أو التضاؤل (التناقص) المستمر. وفي آلتك الحاسبة يوجد مفتاح e أو e^x أو $(e^{\square})$.

x	$f(x)$
2	2.25
4	2.4414
6	2.5216
8	2.5658
10	2.5937
12	2.613
14	2.6272
16	2.6379



معلومة:

أول من استخدم الرمز e هو الرياضي السويسري أويلر في العام 1748. وقد عرّف الدالة الأسية على أنها معكوس دالة اللوغاريتم الطبيعي.

مثال (5)

a استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم التالية (مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من ألف):

$e^2, \quad e^{-1}, \quad e^{\frac{1}{3}}, \quad e^{\frac{3}{4}}, \quad 4e^{-1.5}$

b ارسم بيان: $y = e^x$

الحل:

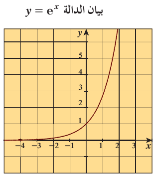
a $e^2 \approx 7.389 \quad e^{-1} \approx 0.368 \quad e^{\frac{1}{3}} \approx 1.396$

$e^{\frac{3}{4}} \approx 2.117 \quad 4e^{-1.5} \approx 0.893$

b جدول قيم $y = e^x$

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.135	0.37	1	2.718	7.39	20

بيان الدالة $y = e^x$



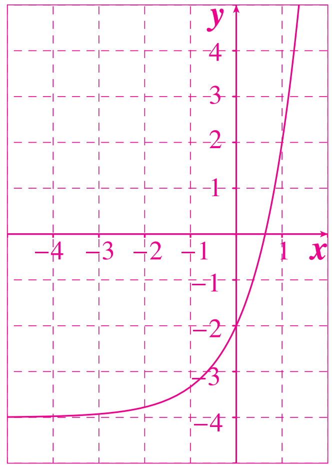
حاول أن تحل

5 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيم كل مما يلي:
(قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

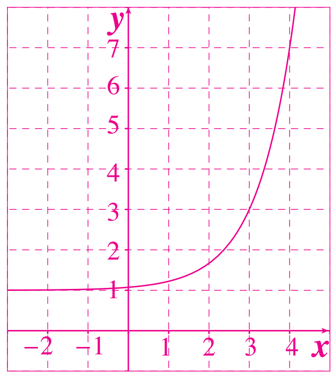
a e^4 b e^{-3} c $e^{\frac{1}{2}}$

137

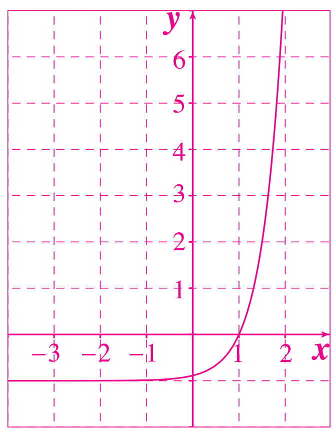
(b) $y_2 = 2(3)^x - 4$



(c) $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$



4 $y = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$



5 **(a)** $e^4 \approx 54.598$

(b) $e^{-3} \approx 0.0498$

(c) $e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$

4–3: الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

1 الأهداف

- يستخدم رموز اللوغاريتمات.
- يوجد قيم المقادير اللوغاريتمية.
- يمثّل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مقادير لوغاريتمية – اللوغاريتمات المعتادة – الدوال اللوغاريتمية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show)– حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة: $y = (2)^x$

(b) ارسم بيان الدالة: $y = e^x$

(c) ارسم بيان الدالة: 10^x

(d) أوجد حل المعادلة: $27 = 9^{x-3}$

(e) أوجد معكوس الدالة: $y = x^2$

5 التدريس

تعرفت بعض الدوال ومثلتها بيانيًّا، كما أنك أوجدت معكوس هذه الدوال وتمثيلها البياني. وفي هذا الدرس، سوف تتعرف معكوس الدالة الأسية وهي الدالة اللوغاريتمية.

تكمن أهمية هذه الدالة بأنها فتحت آفاقًا واسعة أمام العلماء في تبسيط العمليات على الأعداد، ووفرت لهم فرصًا كبيرة لمعالجة مواقف حياتية.

في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب إجراء مقارنة حول كمية الطاقة المنطلقة من زلزالين مختلفين في القوة بحسب مقياس ريختر.


4–3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

Logarithmic Functions and their Graphs

سوف تتعلم
- استخدام رموز اللوغاريتمات.
- إيجاد قيم المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

المفردات والمصطلحات:
- مقادير لوغاريتمية Logarithmic Expressions
- اللوغاريتمات المعتادة Common Logarithms
- الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

عمل تعاوني

1 باستخدام الدالة الأسية $y = 10^x$، أكمل الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								

2 لكل زيادة وحدة في x، صف الزيادة المناظرة في y.

3 صف الزيادة في y إذا كانت x تتزايد بمقدار 1.5؛ بمقدار 0.5

كتابة المقادير اللوغاريتمية وحسابها

Writing and Calculating Logarithmic Expressions

قوة الزلزال هي قياس كمية الطاقة المنطلقة (E). يقيس مقياس ريختر قوة الزلازل باستخدام الصورة الأسية فمثلًا الزلزال الذي تبلغ قوته 5 درجات بمقياس ريختر طاقته المنطلقة (E) تساوي 30 × الطاقة المنطلقة من الزلزال الذي قوته 4 درجات.

مقياس ريختر

مثال (1)

سجل زلزال مكسيكو سنة 1995 بقوة 8.0 درجات على مقياس ريختر.
وقد سجل أيضًا زلزال في واشنطن سنة 2011 بقوة 6.8 درجات.
كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو أكبر من كمية الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن؟
(إرشاد: استعن بمقياس ريختر)

الحل:

∵ قوة زلزال مكسيكو 8 درجات.

∴ الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو = $E \times 30^8$

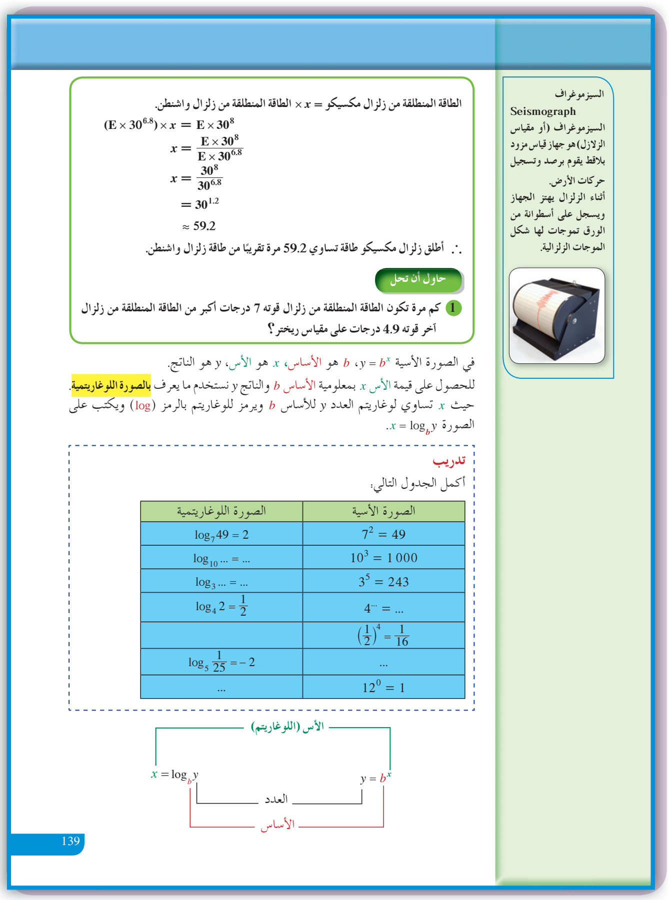
∵ قوة زلزال واشنطن 6.8 درجات.

∴ الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن = $E \times 30^{6.8}$

معلومة:
لم يكن تشارلز ريختر Charles F. Richter) (1900–1985) راضيًا عن مقياس روسي (Rossi) الذي يعود للعام 1880 ولم يكن راضيًا أيضًا عن مقياس مركالي (Mercalli) الذي يعود للعام 1902 لذلك اقترح عام 1935 مقياسه الشهير لقياس قوة الزلازل.
في العام 1977 اقترح هيروكاناموري مقياسًا جديدًا أكثر تطورًا لقياس قوة الزلازل.
أقوى زلزال سجل على مقياس ريختر هو زلزال التشيلي في 22 مايو 1960.

تشارلز ريختر

138


الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو = x × الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن.

$$(E \times 30^{6.8}) \times x = E \times 30^8$$
$$x = \frac{E \times 30^8}{E \times 30^{6.8}}$$
$$x = \frac{30^8}{30^{6.8}}$$
$$= 30^{1.2}$$
$$\approx 59.2$$

∴ أطلق زلزال مكسيكو طاقة تساوي 59.2 مرة تقريبًا من طاقة زلزال واشنطن.

حاول أن تحل

1 كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال قوته 7 درجات أكبر من الطاقة المنطلقة من زلزال آخر قوته 4.9 درجات على مقياس ريختر؟

في الصورة الأسية $y = b^x$، b هو الأساس، x هو الأس، y هو الناتج.
للحصول على قيمة الأس x بمعلومية الأساس b والناتج y نستخدم ما يعرف **بالصورة اللوغاريتمية**.
حيث x تساوي لوغاريتم العدد y للأساس b ويرمز للوغاريتم بالرمز (log) ويكتب على الصورة $x = \log_b y$.

تدريب

أكمل الجدول التالي:

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$10^3 = 1\,000$	$\log_{10} ... = ...$
$3^5 = 243$	$\log_3 ... = ...$
$4^{...} = ...$	$\log_4 2 = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	
...	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$
$12^0 = 1$	...

السيزموغراف Seismograph
السيزموغراف (أو مقياس الزلازل) هو جهاز قياس مزود بلاقط يقوم برصد وتسجيل حركات الأرض.
أثناء الزلزال يهتز الجهاز ويسجل على أسطوانة من الورق تموجات لها شكل الموجات الزلزالية.

139

في المثال (2)

شدّد للطلاب على فكرة العلاقة التي تربط بين الدالة الأسية ومعكوسها وهي الدالة اللوغاريتمية. اكتب على السبورة $y = b^x$. أخبرهم أن b هي أساس الدالة الأسية وهي قيمة ثابتة، وأن x هو المتغير. أكّد لهم أن معكوس هذه الدالة لا يمكن إيجاده بالطرق التي استخدمناها سابقًا أي بحل المعادلة وإيجاد x بدلالة y. شجعهم على كتابة عدة مرات ما يلي: $y = b^x$ معكوسها $x = \log_b y$.

أعط أمثلة لترسيخ مفهوم هذه العلاقة.

في المثال (3)

يساعد هذا المثال على فهم كيفية استخدام الدالة اللوغاريتمية في مواقف حياتية، وذلك بتحويل الدالة الأسية وإيجاد معكوسها.

في المثال (4)

يساهم هذا المثال في إيجاد مجال التعريف بالدالة اللوغاريتمية، ويساعد الطلاب على إيجاد فترة المتغير x عندما يكون متغير الدالة اللوغاريتمية بدلالة x، والمهم هو معرفة الطالب أنه من الواجب دائمًا المحافظة على الشرط القائل بأن متغير الدالة اللوغاريتمية يجب أن يكون دائمًا قيمة موجبة.

في المثال (5)

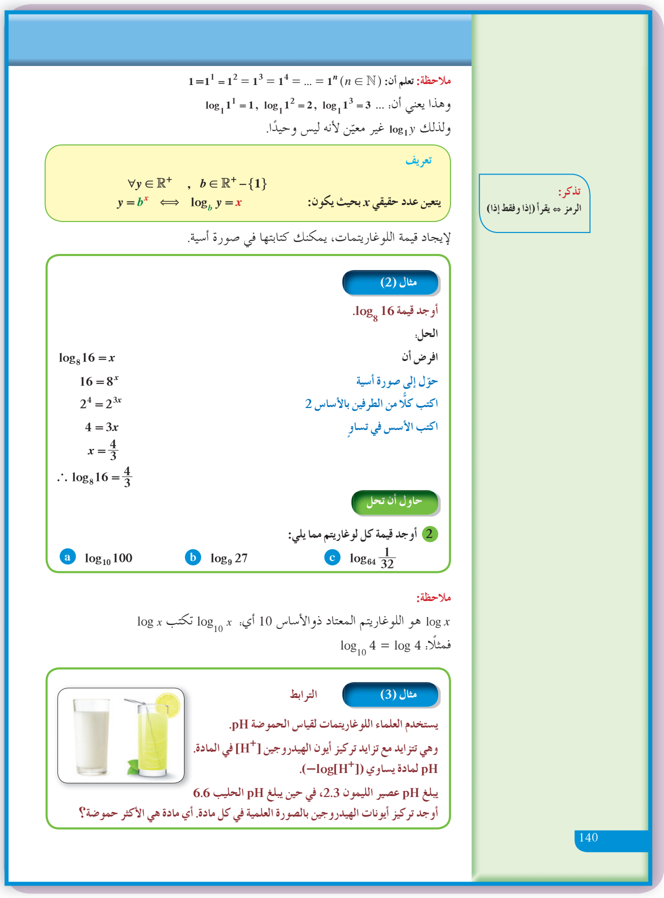
يبيّن هذا المثال بشكل واضح العلاقة بين منحنى الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية، فيكون معكوس الدالة الأسية هو أيضًا دالة.

في المثال (6)

يساعد على استخدام دالة المرجع والانسحاب الأفقي والرأسي لرسم دالة لوغاريتمية، ويوضح العلاقة بين $\log_b x$ و $\log_b (x-h)+k$.

6 الربط

يوفر المثالان (3) ,(1) الربط بين الدوال اللوغاريتمية ومواقف حياتية خاصة في مجالي قياس الزلازل وقياس درجة الحموضة، وكيفية استخدام هذه الدوال وتبسيط الحلول.



ملاحظة: تعلم أن: $1 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 = \ldots = 1^n \ (n \in \mathbb{N})$

وهذا يعني أن: $\ldots \ \log_1 1^1 = 1, \ \log_1 1^2 = 2, \ \log_1 1^3 = 3$

ولذلك $\log_1 y$ غير معيّن لأنه ليس وحيدًا.

تعريف

$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

يتعين عدد حقيقي x بحيث يكون: $y = b^x \iff \log_b y = x$

تذكر: الرمز ⇔ يقرأ (إذا وفقط إذا)

لإيجاد قيمة اللوغاريتمات، يمكنك كتابتها في صورة أسية.

مثال (2)

أوجد قيمة $\log_8 16$.

الحل:

افرض أن $\log_8 16 = x$

حوّل إلى صورة أسية $16 = 8^x$

اكتب كلًّا من الطرفين بالأساس 2 $2^4 = 2^{3x}$

اكتب الأسس في تساوٍ $4 = 3x$

$x = \frac{4}{3}$

$\therefore \log_8 16 = \frac{4}{3}$

حاول أن تحل

2 أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

a $\log_{10} 100$ b $\log_9 27$ c $\log_{64} \frac{1}{32}$

ملاحظة:

$\log x$ هو اللوغاريتم المعتاد ذوالأساس 10 أي: $\log_{10} x$ تكتب $\log x$

فمثلًا: $\log_{10} 4 = \log 4$

مثال (3) الترابط

يستخدم العلماء اللوغاريتمات لقياس الحموضة pH.

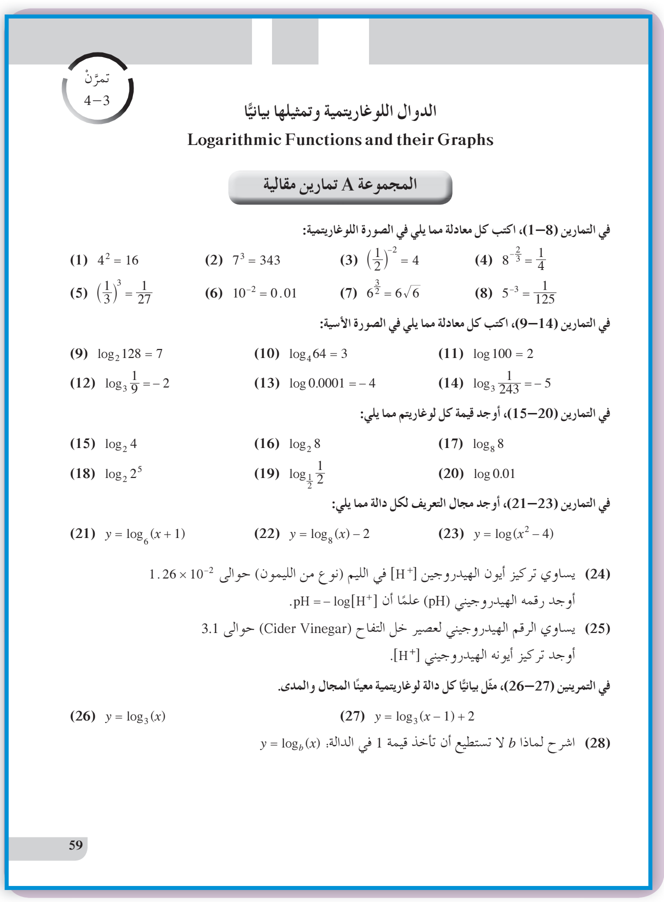
وهي تتزايد مع تزايد تركيز أيون الهيدروجين $[H^+]$ في المادة.

pH لمادة يساوي $(-\log[H^+])$.

يبلغ pH عصير الليمون 2.3، في حين يبلغ pH الحليب 6.6

أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية في كل مادة. أي مادة هي الأكثر حموضة؟

140



تمرَّنْ 4−3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

Logarithmic Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

(1) $4^2 = 16$ (2) $7^3 = 343$ (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ (4) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ (6) $10^{-2} = 0.01$ (7) $6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$ (8) $5^{-3} = \frac{1}{125}$

في التمارين (14–9)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

(9) $\log_2 128 = 7$ (10) $\log_4 64 = 3$ (11) $\log 100 = 2$

(12) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (13) $\log 0.0001 = -4$ (14) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

في التمارين (20–15)، أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(15) $\log_2 4$ (16) $\log_2 8$ (17) $\log_8 8$

(18) $\log_2 2^5$ (19) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ (20) $\log 0.01$

في التمارين (23–21)، أوجد مجال التعريف لكل دالة مما يلي:

(21) $y = \log_6 (x+1)$ (22) $y = \log_8 (x) - 2$ (23) $y = \log (x^2 - 4)$

(24) يساوي تركيز أيون الهيدروجين $[H^+]$ في الليم (نوع من الليمون) حوالى 1.26×10^{-2} أوجد رقمه الهيدروجيني (pH) علمًا أن $pH = -\log[H^+]$.

(25) يساوي الرقم الهيدروجيني لعصير خل التفاح (Cider Vinegar) حوالى 3.1 أوجد تركيز أيونه الهيدروجيني $[H^+]$.

في التمرينين (27–26)، مثّل بيانيًّا كل دالة لوغاريتمية معينًا المجال والمدى.

(26) $y = \log_3 (x)$ (27) $y = \log_3 (x-1) + 2$

(28) اشرح لماذا b لا تستطيع أن تأخذ قيمة 1 في الدالة: $y = \log_b (x)$

59

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحويل الدالة $y = b^x$ إلى دالة لوغاريتمية. ساعدهم ، من خلال عدة أمثلة مشابهة للمثال (2)، على كتابة $y = b^x$ أو $\log_b y = x$ بعد تبديل المتغيرات.

8 التقييم

تابع باهتمام أعمال الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتدرك مدى قدرة الطلاب على الربط بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية.

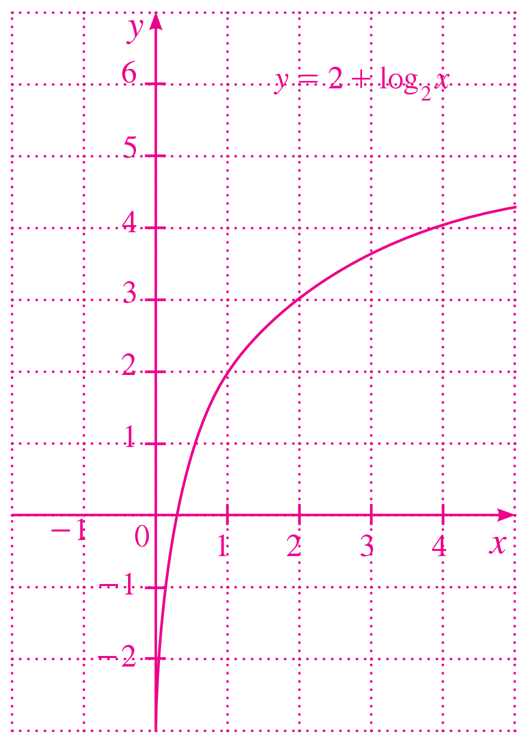
اختبار سريع

1 اكتب: $5^{-2} = \frac{1}{25}$ في الصورة اللوغاريتمية.

$\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$

2 اكتب $\log_3 81 = 4$ في الصورة الأسية. $3^4 = 81$

3 مثّل بيانيًّا الدالة: $y = 2 + \log_2 x$



معلومة:
شراب القيقب أو الأسفندن (Maple Syrup) هو شراب مصنوع من نسغ (عصارة) أشجار القيقب السكري التي تنبت بكثرة في كندا لذا فورقتها موجودة على العلم الكندي. تخزن الأشجار خلال البرد النشأ في جذوعها وجذورها الذي ما يلبث أن يتحول بعد ذلك إلى سكر يرتفع في النسغ في الربيع فيتم ثقب فتحات في جذوعها لجمع النسغ الناضج الذي تتم معالجته وتصنيعه بالتسخين لإنتاج شراب مركز ذي لون ذهبي. فوائده كثيرة، ويعتبر سكان أميركا الشمالية الأصليون أول من قاموا بجمع هذا الشراب واستخدامه.

شجرة القيقب

شراب القيقب

الحل:

تركيز أيونات الهيدروجين في عصير الليمون	تركيز أيونات الهيدروجين في الحليب
$pH = -\log[H^+]$	$pH = -\log[H^+]$
$2.3 = -\log[H^+]$	$6.6 = -\log[H^+]$
$\log[H^+] = -2.3$	$\log[H^+] = -6.6$
$[H^+] = 10^{-2.3}$ باستخدام الآلة الحاسبة	$[H^+] = 10^{-6.6}$
$\approx 5 \times 10^{-3}$ باستخدام الآلة الحاسبة	$\approx 2.5 \times 10^{-7}$

$\because\ 5 \times 10^{-3} > 2.5 \times 10^{-7}$

$\therefore$ تركيز أيونات الهيدروجين في العصير أكثر منه في الحليب.

$\therefore$ عصير الليمون أكثر حموضة.

حاول أن تحل

3 أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية لشراب القيقب (Maple Syrup)، حيث $pH = 5.2$.

التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية Graphing Logarithmic Functions

الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.

تعريف: الدالة اللوغاريتمية

$\forall x > 0\ ,\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن الدالة: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_b x$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b

مثال (4)

أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = \log_5(6x)$

b $f(x) = \log(3 - x)$

c $g(x) = \log_2(x^2)$

d $h(x) = 4\log_3(5 - 3x)$

الحل:

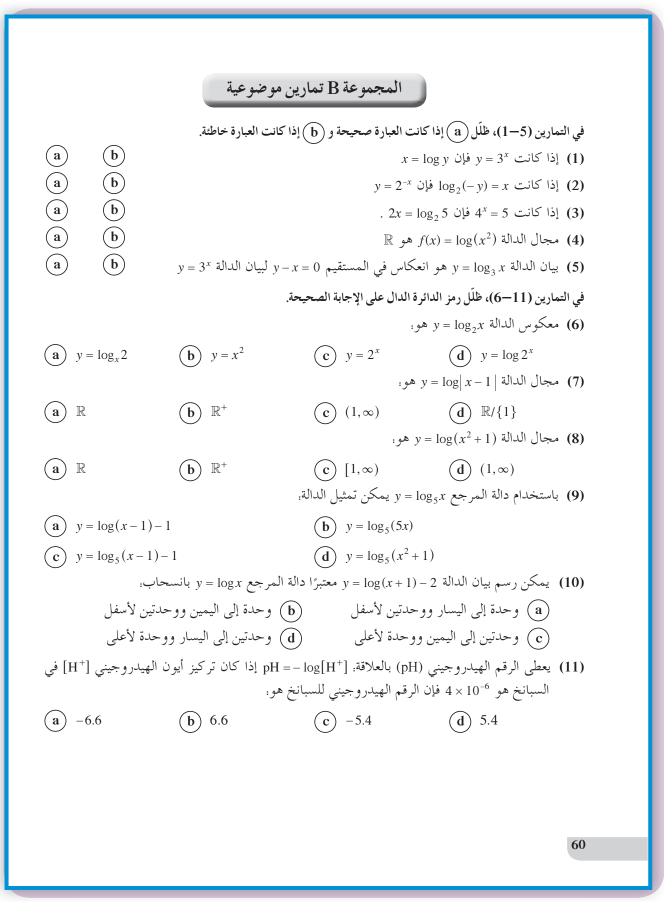
a $\because\ 6x > 0 \Rightarrow x > 0$

$\therefore$ مجال الدالة $= (0, +\infty)$

b $\because\ 3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$

$\therefore$ مجال الدالة $= (-\infty, 3)$

141



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 3^x$ فإن $x = \log y$ (a) (b)

(2) إذا كانت $\log_2(-y) = x$ فإن $y = 2^{-x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت $4^x = 5$ فإن $2x = \log_2 5$. (a) (b)

(4) مجال الدالة $f(x) = \log(x^2)$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

(5) بيان الدالة $y = \log_3 x$ هو انعكاس في المستقيم $y - x = 0$ لبيان الدالة $y = 3^x$ (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس الدالة $y = \log_2 x$ هو:

(a) $y = \log_x 2$ (b) $y = x^2$ (c) $y = 2^x$ (d) $y = \log 2^x$

(7) مجال الدالة $y = \log|x - 1|$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $(1, \infty)$ (d) $\mathbb{R}/\{1\}$

(8) مجال الدالة $y = \log(x^2 + 1)$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $[1, \infty)$ (d) $(1, \infty)$

(9) باستخدام دالة المرجع $y = \log_5 x$ يمكن تمثيل الدالة:

(a) $y = \log(x - 1) - 1$ (b) $y = \log_5(5x)$

(c) $y = \log_5(x - 1) - 1$ (d) $y = \log_5(x^2 + 1)$

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \log(x + 1) - 2$ معتبرًا دالة المرجع $y = \log x$ بانسحاب:

(a) وحدة إلى اليسار ووحدتين لأسفل (b) وحدة إلى اليمين ووحدتين لأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين ووحدة لأعلى (d) وحدتين إلى اليسار ووحدة لأعلى

(11) يعطى الرقم الهيدروجيني (pH) بالعلاقة: $pH = -\log[H^+]$ إذا كان تركيز أيون الهيدروجيني $[H^+]$ في السبانخ هو 4×10^{-6} فإن الرقم الهيدروجيني للسبانخ هو:

(a) -6.6 (b) 6.6 (c) -5.4 (d) 5.4

60

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

3 – 1 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 $\dfrac{E \times 30^{7}}{E \times 30^{4.9}} = 30^{2.1} = 1265$

أي أن طاقة الزلزال 7 درجات تساوي تقريبًا 1 265 مرة طاقة الزلزال 4.9 درجات.

2 **(a)** $\log_{10} 10^{2} = x$;

$10^{x} = 10^{2}; x = 2$

(b) $9^{x} = 27; 3^{2x} = 3^{3}$;

$x = \dfrac{3}{2}$

(c) $64^{x} = \dfrac{1}{32}$

$2^{6x} = 2^{-5}$

$6x = -5$

$x = -\dfrac{5}{6}$

3 $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^{+}]$

$5.2 = -\log[\mathrm{H}^{+}]$

$\log[\mathrm{H}^{+}] = -5.2$

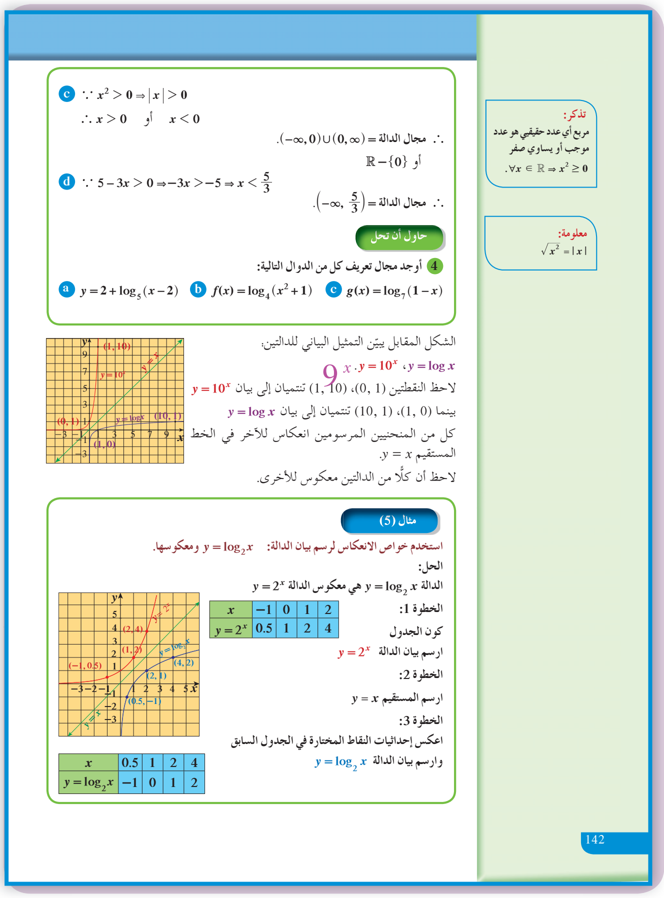
$\mathrm{H}^{+} = 10^{-5.2}$

$\mathrm{H}^{+} \approx 6.31 \times 10^{-6}$

4 **(a)** $x - 2 > 0$; $x \in (2, \infty)$

(b) $x^{2} + 1 > 0$; $x \in (-\infty, \infty)$

(c) $1 - x > 0$; $x \in (-\infty, 1)$



c $\because x^2 > 0 \Rightarrow |x| > 0$

$\therefore x > 0$ أو $x < 0$

$\therefore$ مجال الدالة $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

أو $\mathbb{R} - \{0\}$

d $\because 5 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -5 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$

$\therefore$ مجال الدالة $= \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$.

تذكر: مربع أي عدد حقيقي هو عدد موجب أو يساوي صفر $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$.

معلومة: $\sqrt{x^2} = |x|$

حاول أن تحل

4 أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = 2 + \log_5(x-2)$ b $f(x) = \log_4(x^2+1)$ c $g(x) = \log_7(1-x)$

الشكل المقابل يبيّن التمثيل البياني للدالتين:

$y = \log x$ ، $y = 10^x$.

لاحظ النقطتين (0, 1)، (1, 10) تنتميان إلى بيان $y = 10^x$

بينما (1, 0)، (10, 1) تنتميان إلى بيان $y = \log x$

كل من المنحنيين المرسومين انعكاس للآخر في الخط المستقيم $y = x$.

لاحظ أن كلًّا من الدالتين معكوس للأخرى.

مثال (5)

استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_2 x$ ومعكوسها.

الحل:

الدالة $y = \log_2 x$ هي معكوس الدالة $y = 2^x$

الخطوة 1: كون الجدول

x	−1	0	1	2
$y = 2^x$	0.5	1	2	4

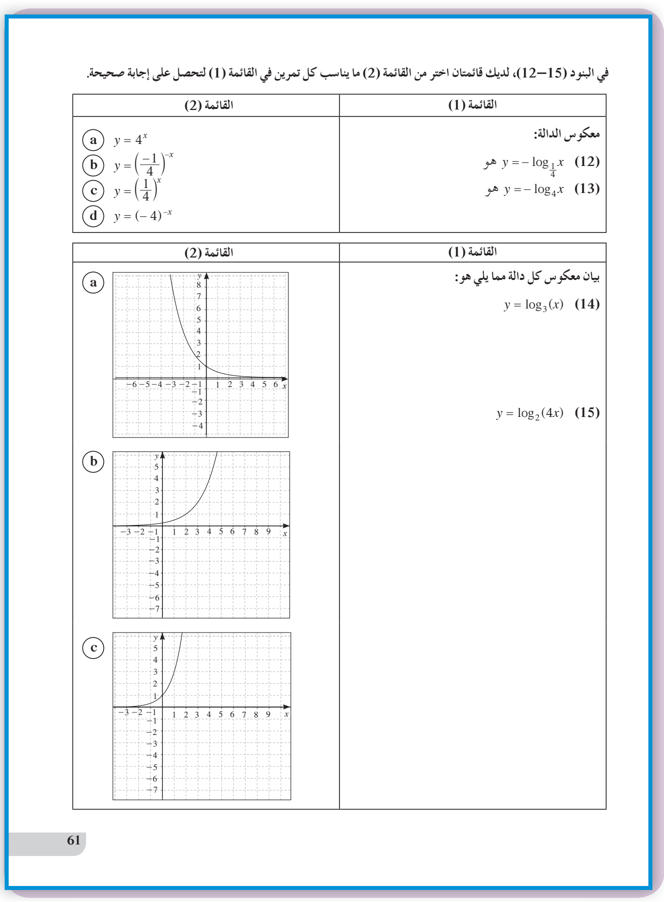
ارسم بيان الدالة $y = 2^x$

الخطوة 2: ارسم المستقيم $y = x$

الخطوة 3: اعكس إحداثيات النقاط المختارة في الجدول السابق وارسم بيان الدالة $y = \log_2 x$

x	0.5	1	2	4
$y = \log_2 x$	−1	0	1	2

142

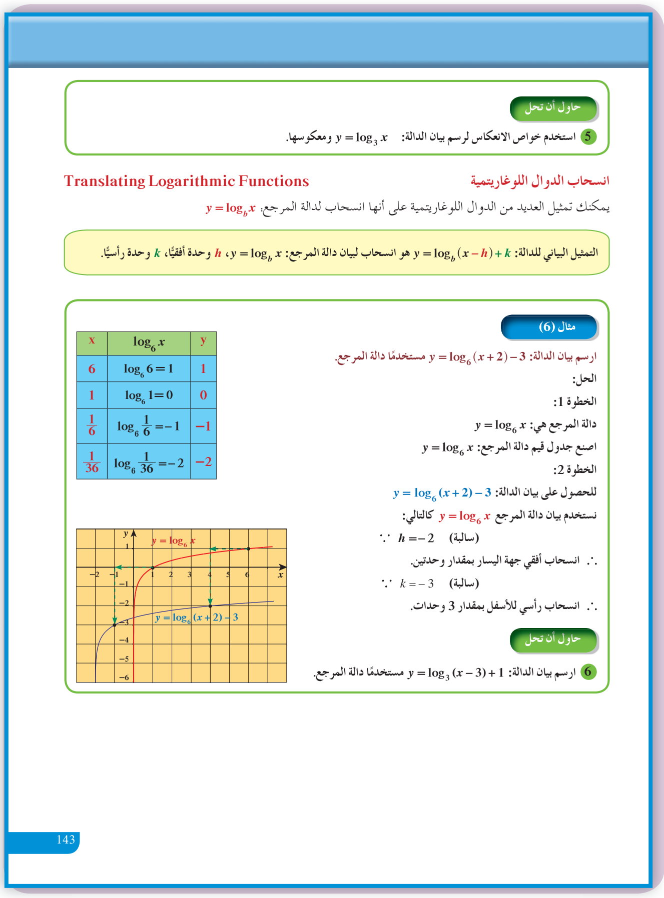


في البنود (12–15)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
معكوس الدالة: (12) $y = -\log_{\frac{1}{4}} x$ هو (13) $y = -\log_4 x$ هو	a $y = 4^x$ b $y = \left(\frac{-1}{4}\right)^{-x}$ c $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ d $y = (-4)^{-x}$

القائمة (1)	القائمة (2)
بيان معكوس كل دالة مما يلي هو: (14) $y = \log_3(x)$ (15) $y = \log_2(4x)$	a b c

61



حاول أن تحل

5 استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_3 x$ ومعكوسها.

انسحاب الدوال اللوغاريتمية **Translating Logarithmic Functions**

يمكنك تمثيل العديد من الدوال اللوغاريتمية على أنها انسحاب لدالة المرجع: $y = \log_b x$

التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b(x-h)+k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع: $y = \log_b x$، h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

مثال (6)

ارسم بيان الدالة: $y = \log_6(x+2)-3$ مستخدمًا دالة المرجع.

الحل:

الخطوة 1:

دالة المرجع هي: $y = \log_6 x$

اصنع جدول قيم دالة المرجع: $y = \log_6 x$

x	$\log_6 x$	y
6	$\log_6 6 = 1$	1
1	$\log_6 1 = 0$	0
$\frac{1}{6}$	$\log_6 \frac{1}{6} = -1$	-1
$\frac{1}{36}$	$\log_6 \frac{1}{36} = -2$	-2

الخطوة 2:

للحصول على بيان الدالة: $y = \log_6(x+2)-3$

نستخدم بيان دالة المرجع $y = \log_6 x$ كالتالي:

$\because\ h = -2$ (سالبة)

$\therefore$ انسحاب أفقي جهة اليسار بمقدار وحدتين.

$\because\ k = -3$ (سالبة)

$\therefore$ انسحاب رأسي للأسفل بمقدار 3 وحدات.

حاول أن تحل

6 ارسم بيان الدالة: $y = \log_3(x-3)+1$ مستخدمًا دالة المرجع.

«تدريب»

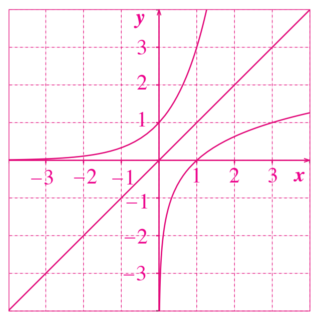
الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية
$\log_7 49 = 2$	$7^2 = 49$
$\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
$\log_3 243 = 5$	$3^5 = 243$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	$4^{\frac{1}{2}} = 2$
$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
$\log_{12} 1 = 0$	$12^0 = 1$

5 نرسم بيان الدالة: $y = \log_3 x$

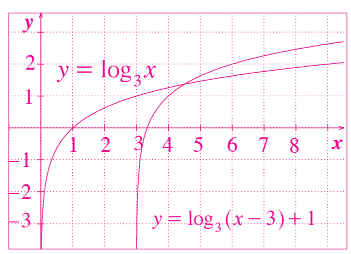
x	1	3	9
y	0	1	2

ثم نرسم بيان الدالة $y = 3^x$ باستخدام نقاط الجدول التالي:

x	0	1	2
y	1	3	9



6 $y = \log_3(x-3)+1$ هو إزاحة لمنحنى الدالة: $y = \log_3 x$، 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.



4–4: خواص اللوغاريتمات

1 الأهداف

- يتعرف خواص اللوغاريتمات.
- يختصر المقادير اللوغاريتمية ويفكها.
- يطبق خواص اللوغاريتمات.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

خاصية الضرب – خاصية القسمة – خاصية القوى – شدة الصوت – مستوى شدة الصوت.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد قيمة: $\frac{4^x}{4^y}$, $(3x)(3y)$

(b) ارسم على مستوى إحداثي واحد الدالتين:

$y = \log x$, $y = 10^x$ ماذا تلاحظ؟

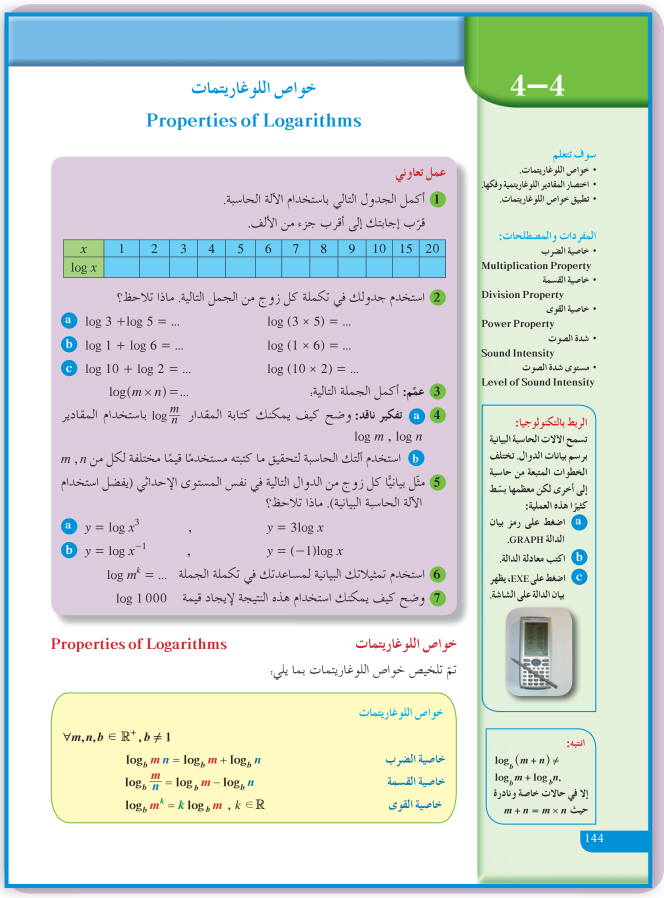
(c) هل يمكن تبسيط المقدار $4^x \times 5^x$؟ اشرح.

(d) هل يمكن تبسيط المقدار $\frac{7^x}{9^y}$؟ اشرح.

5 التدريس

تابع الطلاب بدقة وهم ينفذون فقرة «عمل تعاوني» باستخدام الآلة الحاسبة. أرشدهم إلى كيفية استخدام المفاتيح وبخاصة أن الآلة الحاسبة تحمل فقط مفتاحين لقيم اللوغاريتم: واحد يوجد عليه **log** فقط وهذا يعني اللوغاريتم المعتاد حيث الأساس 10 ويقابله الرمز log فقط، والثاني يوجد عليه ***ln*** وهذا يعني اللوغاريتم الطبيعي وأساسه العدد e ويقابله الرمز *ln* وهذا اللوغاريتم سوف نتعرف إليه لاحقًا.

وضّح للطلاب كيفية استخدام الخواص اللوغاريتمية لما لها من أهمية في التحويلات بين الأعداد. أعطِ أمثلة متعددة تتناول خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى، مشابهة للأمثلة (1), (2), (3) .



4–4

خواص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

عمل تعاوني

1 أكمل الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة.

قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من الألف.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$\log x$												

2 استخدم جدولك في تكملة كل زوج من الجمل التالية. ماذا تلاحظ؟

a $\log 3 + \log 5 = ...$, $\log(3 \times 5) = ...$

b $\log 1 + \log 6 = ...$, $\log(1 \times 6) = ...$

c $\log 10 + \log 2 = ...$, $\log(10 \times 2) = ...$

3 **عمّم:** أكمل الجملة التالية: $\log(m \times n) = ...$

4 a **تفكير ناقد:** وضح كيف يمكنك كتابة المقدار $\log \frac{m}{n}$ باستخدام المقادير $\log m$, $\log n$

b استخدم آلتك الحاسبة لتحقيق ما كتبته مستخدمًا قيمًا مختلفة لكل من m , n

5 مثّل بيانيًّا كل زوج من الدوال التالية في نفس المستوى الإحداثي (يفضل استخدام الآلة الحاسبة البيانية). ماذا تلاحظ؟

a $y = \log x^3$, $y = 3\log x$

b $y = \log x^{-1}$, $y = (-1)\log x$

6 استخدم تمثيلاتك البيانية لمساعدتك في تكملة الجملة $\log m^k = ...$

7 وضح كيف يمكنك استخدام هذه النتيجة لإيجاد قيمة $\log 1\,000$

خواص اللوغاريتمات Properties of Logarithms

تمّ تلخيص خواص اللوغاريتمات بما يلي:

خواص اللوغاريتمات

$\forall m,n,b \in \mathbb{R}^+ , b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k \log_b m$, $k \in \mathbb{R}$

سوف تتعلم

- خواص اللوغاريتمات.
- اختصار المقادير اللوغاريتمية وفكها.
- تطبيق خواص اللوغاريتمات.

المفردات والمصطلحات:

- خاصية الضرب Multiplication Property
- خاصية القسمة Division Property
- خاصية القوى Power Property
- شدة الصوت Sound Intensity
- مستوى شدة الصوت Level of Sound Intensity

الربط بالتكنولوجيا:

تسمح الآلات الحاسبة البيانية برسم بيانات الدوال. تختلف الخطوات المتبعة من حاسبة إلى أخرى لكن معظمها بسّط كثيرًا هذه العملية:

a اضغط على رمز بيان الدالة GRAPH.

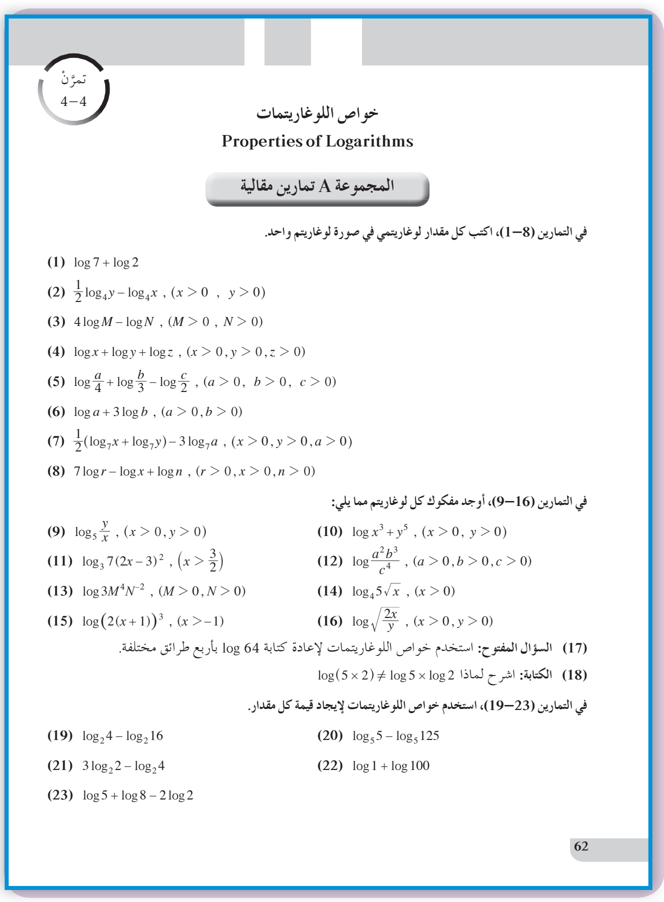
b اكتب معادلة الدالة.

c اضغط على EXE، يظهر بيان الدالة على الشاشة.

انتبه:

$\log_b(m+n) \neq \log_b m + \log_b n$، إلا في حالات خاصة ونادرة حيث $m + n = m \times n$

144



تمرَّنْ 4–4

خواص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد.

(1) $\log 7 + \log 2$

(2) $\frac{1}{2}\log_4 y - \log_4 x$, $(x > 0 , y > 0)$

(3) $4\log M - \log N$, $(M > 0 , N > 0)$

(4) $\log x + \log y + \log z$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$

(5) $\log\frac{a}{4} + \log\frac{b}{3} - \log\frac{c}{2}$, $(a > 0, b > 0, c > 0)$

(6) $\log a + 3\log b$, $(a > 0, b > 0)$

(7) $\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 y) - 3\log_7 a$, $(x > 0, y > 0, a > 0)$

(8) $7\log r - \log x + \log n$, $(r > 0, x > 0, n > 0)$

في التمارين (16–9)، أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

(9) $\log_5 \frac{y}{x}$, $(x > 0, y > 0)$

(10) $\log x^3 + y^5$, $(x > 0, y > 0)$

(11) $\log_3 7(2x-3)^2$, $\left(x > \frac{3}{2}\right)$

(12) $\log\frac{a^2b^3}{c^4}$, $(a > 0, b > 0, c > 0)$

(13) $\log 3M^4N^{-2}$, $(M > 0, N > 0)$

(14) $\log_4 5\sqrt{x}$, $(x > 0)$

(15) $\log\big(2(x+1)\big)^3$, $(x > -1)$

(16) $\log\sqrt{\frac{2x}{y}}$, $(x > 0, y > 0)$

(17) **السؤال المفتوح:** استخدم خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة $\log 64$ بأربع طرائق مختلفة.

(18) **الكتابة:** اشرح لماذا $\log(5 \times 2) \neq \log 5 \times \log 2$

في التمارين (23–19)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار.

(19) $\log_2 4 - \log_2 16$

(20) $\log_5 5 - \log_5 125$

(21) $3\log_2 2 - \log_2 4$

(22) $\log 1 + \log 100$

(23) $\log 5 + \log 8 - 2\log 2$

62

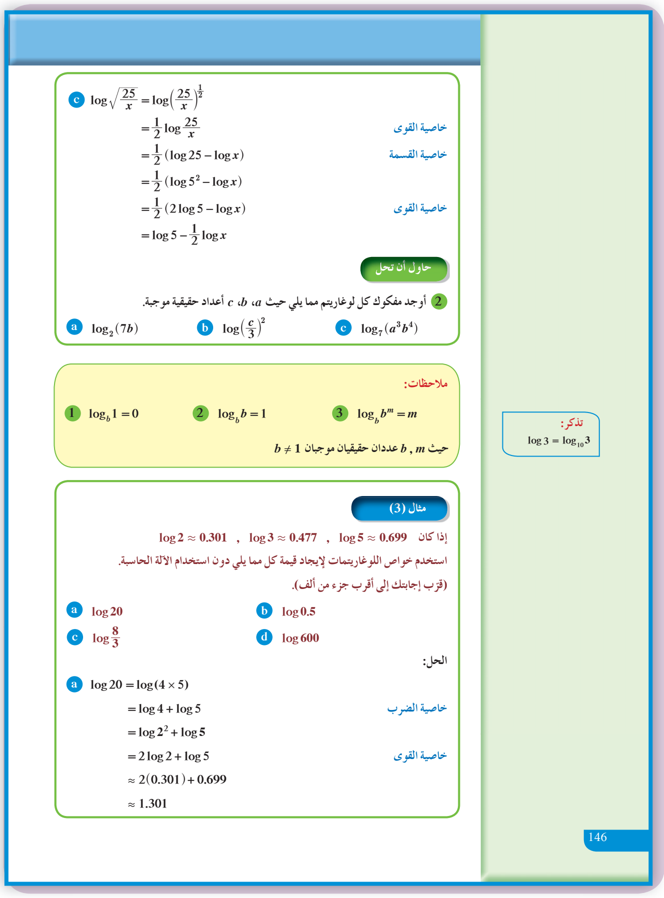
في المثال (4)

اعرض أمام الطلاب عددًا من الحالات تساهم في فهم أهمية اللوغاريتم عند حساب شدّة الصوت أو كيفية تخفيضه إلى مستويات معينة.

اطلب إليهم دراسة شدة الصوت في مواقف حياتية مستخدمًا اللوغاريتمات.

6 الربط

يمكن الاستفادة من المثال (4) للربط بين شدّة الصوت في أماكن معينة واللوغاريتمات.



c $\log\sqrt{\frac{25}{x}} = \log\left(\frac{25}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{25}{x}$ خاصية القوى

$= \frac{1}{2}(\log 25 - \log x)$ خاصية القسمة

$= \frac{1}{2}(\log 5^2 - \log x)$

$= \frac{1}{2}(2\log 5 - \log x)$ خاصية القوى

$= \log 5 - \frac{1}{2}\log x$

حاول أن تحل

2 أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث a، b، c أعداد حقيقية موجبة.

a $\log_2(7b)$ b $\log\left(\frac{c}{3}\right)^2$ c $\log_7(a^3b^4)$

ملاحظات:

1 $\log_b 1 = 0$ 2 $\log_b b = 1$ 3 $\log_b b^m = m$

حيث m , b عددان حقيقيان موجبان $b \neq 1$

تذكر: $\log 3 = \log_{10} 3$

مثال (3)

إذا كان $\log 5 \approx 0.699$, $\log 3 \approx 0.477$, $\log 2 \approx 0.301$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة.

(قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

a $\log 20$ b $\log 0.5$

c $\log\frac{8}{3}$ d $\log 600$

الحل:

a $\log 20 = \log(4 \times 5)$

$= \log 4 + \log 5$ خاصية الضرب

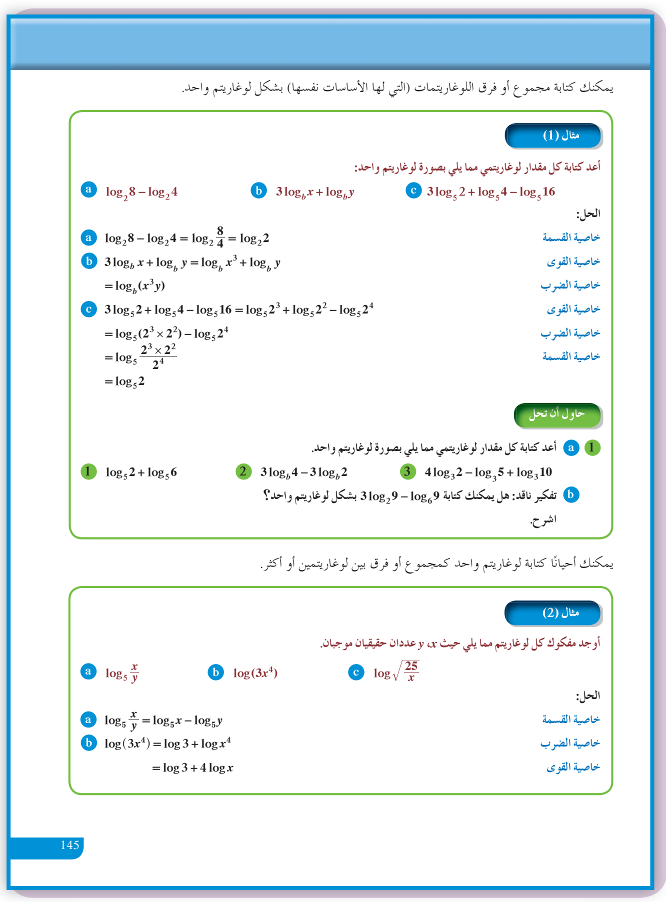
$= \log 2^2 + \log 5$

$= 2\log 2 + \log 5$ خاصية القوى

$\approx 2(0.301) + 0.699$

≈ 1.301

146



يمكنك كتابة مجموع أو فرق اللوغاريتمات (التي لها الأساسات نفسها) بشكل لوغاريتم واحد.

مثال (1)

أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد:

a $\log_2 8 - \log_2 4$ b $3\log_b x + \log_b y$ c $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16$

الحل:

a $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2\frac{8}{4} = \log_2 2$ خاصية القسمة

b $3\log_b x + \log_b y = \log_b x^3 + \log_b y$ خاصية القوى

$= \log_b(x^3y)$ خاصية الضرب

c $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16 = \log_5 2^3 + \log_5 2^2 - \log_5 2^4$ خاصية القوى

$= \log_5(2^3 \times 2^2) - \log_5 2^4$ خاصية الضرب

$= \log_5\frac{2^3 \times 2^2}{2^4}$ خاصية القسمة

$= \log_5 2$

حاول أن تحل

1 a أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد.

1 $\log_5 2 + \log_5 6$ 2 $3\log_b 4 - 3\log_b 2$ 3 $4\log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

b تفكير ناقد: هل يمكنك كتابة $3\log_2 9 - \log_6 9$ بشكل لوغاريتم واحد؟ اشرح.

يمكنك أحيانًا كتابة لوغاريتم واحد كمجموع أو فرق بين لوغاريتمين أو أكثر.

مثال (2)

أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث x، y عددان حقيقيان موجبان.

a $\log_5\frac{x}{y}$ b $\log(3x^4)$ c $\log\sqrt{\frac{25}{x}}$

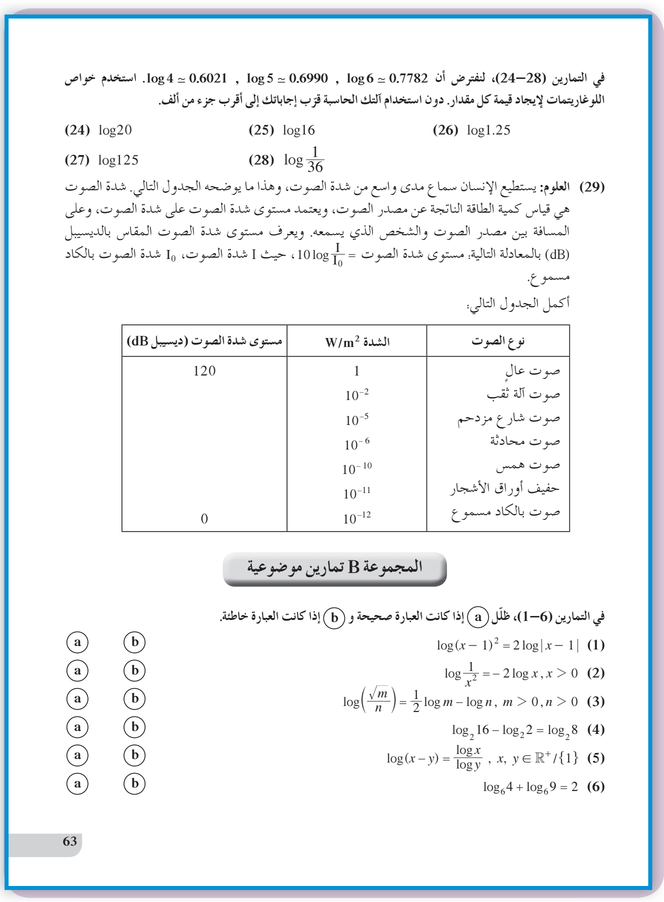
الحل:

a $\log_5\frac{x}{y} = \log_5 x - \log_5 y$ خاصية القسمة

b $\log(3x^4) = \log 3 + \log x^4$ خاصية الضرب

$= \log 3 + 4\log x$ خاصية القوى

145



في التمارين (24–28)، لنفترض أن $\log 6 \simeq 0.7782$, $\log 5 \simeq 0.6990$, $\log 4 \simeq 0.6021$. استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. دون استخدام آلتك الحاسبة قرّب إجاباتك إلى أقرب جزء من ألف.

(24) $\log 20$ (25) $\log 16$ (26) $\log 1.25$

(27) $\log 125$ (28) $\log\frac{1}{36}$

(29) **العلوم:** يستطيع الإنسان سماع مدى واسع من شدة الصوت، وهذا ما يوضحه الجدول التالي. شدة الصوت هي قياس كمية الطاقة الناتجة عن مصدر الصوت، ويعتمد مستوى شدة الصوت على شدة الصوت، وعلى المسافة بين مصدر الصوت والشخص الذي يسمعه. ويعرف مستوى شدة الصوت المقاس بالديسيبل (dB) بالمعادلة التالية: مستوى شدة الصوت $= 10\log\frac{I}{I_0}$، حيث I شدة الصوت، I_0 شدة الصوت بالكاد مسموع.

أكمل الجدول التالي:

نوع الصوت	الشدة W/m^2	مستوى شدة الصوت (ديسيبل dB)
صوت عالٍ	1	120
صوت آلة ثقب	10^{-2}	
صوت شارع مزدحم	10^{-5}	
صوت محادثة	10^{-6}	
صوت همس	10^{-10}	
حفيف أوراق الأشجار	10^{-11}	
صوت بالكاد مسموع	10^{-12}	0

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل a إذا كانت العبارة صحيحة و b إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log(x-1)^2 = 2\log|x-1|$ a b

(2) $\log\frac{1}{x^2} = -2\log x , x > 0$ a b

(3) $\log\left(\frac{\sqrt{m}}{n}\right) = \frac{1}{2}\log m - \log n ,\ m > 0 , n > 0$ a b

(4) $\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2 8$ a b

(5) $\log(x-y) = \frac{\log x}{\log y}$, $x,\ y \in \mathbb{R}^+/\{1\}$ a b

(6) $\log_6 4 + \log_6 9 = 2$ a b

63

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في العلاقة بين $\log_3(xy), \log_3 y, \log_3 x$ فيكتبون على سبيل المثال:

$$\log_3(x+y) = \log_3 x \cdot \log_3 y$$

$$\log_3(x \cdot y) = \log_3 x \cdot \log_3 y$$

أكد لهم أن اللوغاريتم له خاصية التحويل من الضرب إلى الجمع كالتالي: $\log_3(xy) = \log_3 x + \log_3 y$

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» لتقف على إمكانيتهم في فهم عمليات التحويل المستخدمة في خاصيات الضرب والقسمة والقوى.

اختبار سريع

1 أعد كتابة كل تعبير مما يلي:

(a) $\log x + \log y$ $\quad \log(xy)$

(b) $2\log_3 x - \log_3 x$ $\quad \log_3 x$

(c) $\log 3 + \log 4$ $\quad \log 12$

2 أوجد قيمة التعبير: $\log_2 8 - \log_2 2$ $\quad 2$

---

b $\log 0.5 = \log \frac{1}{2}$

$= \log(2)^{-1}$

$= -\log 2$ خاصية القوى

≈ -0.301

c $\log \frac{8}{3} = \log 8 - \log 3$ خاصية القسمة

$= \log 2^3 - \log 3$

$= 3\log 2 - \log 3$ خاصية القوى

$\approx 3(0.301) - 0.477 \approx 0.426$

d $\log 600 = \log(2^3 \times 3 \times 5^2)$

$= \log 2^3 + \log 3 + \log 5^2$ خاصية الضرب

$= 3\log 2 + \log 3 + 2\log 5$ خاصية القوى

$\approx 3 \times 0.301 + 0.477 + 2 \times 0.699 \approx 2.778$

حاول أن تحل

3 **باستخدام المعطيات في مثال (3) أوجد:**

a $\log 30$ $\quad$ b $\log 4.5$

c $\log \frac{1}{25}$ $\quad$ d $\log 1200$

تطبيقات على خواص اللوغاريتمات:

شدة الصوت هو قياس الطاقة المحمولة بالموجة الصوتية. والصوت ذو الشدة الكبيرة هو الصوت الذي يبدو عاليًا جدًّا.

تستخدم اللوغاريتمات لقياس **مستوى شدة الصوت Sound Intensity Level.**

شدة الصوت هي كثافة طاقة الصوت على مساحة معينة وتحسب بقسمة طاقة الصوت على المساحة.

يعطى مستوى شدة الصوت بالعلاقة:

$$L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

حيث: L تمثل مستوى شدة الصوت وتقاس بوحدة الديسيبل (dB)

I تمثل شدة الصوت وتقاس بالوات/ متر مربع (w/m^2)

I_0 أقل صوت تستطيع أذن إنسان عادية أن تميزه (عتبة السمع) وتمثل عددًا ثابتًا يساوي 10^{-12}

147

في التمارين (7—13)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) المقدار $2\log_4 8 + \log_5 125$ يساوي:

a 4 $\quad$ b 5 $\quad$ c 6 $\quad$ d 15

(8) إذا كان $\log 5 = y$, $\log 3 = x$ فإن $\log 45$ تساوي:

a $x+y$ $\quad$ b $2x+y$ $\quad$ c $2y+x$ $\quad$ d x^2y

(9) $x > 0$, $\log_2 x + \log_2 2x + \log_2 \frac{1}{x^2}$ يساوي:

a 1 $\quad$ b 2 $\quad$ c x $\quad$ d $2x$

(10) إذا كان $\log 2 = m, \log 3 = n$ فإن المقدار $m+n-1$ يساوي:

a $\log 0.06$ $\quad$ b $\log 0.6$ $\quad$ c $\log 6$ $\quad$ d $\log 60$

(11) عندما $n = 2$, $m = 3$ فإن المقدار الأكبر قيمة فيما يلي هو:

a $\log n^2 - \log m^3$ $\quad$ b $\log m^2 - \log n^2$ $\quad$ c $3\log n - 2\log m$ $\quad$ d $2\log m - 3\log n$

(12) مفكوك المقدار $\log\left(\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}}\right)$ هو:

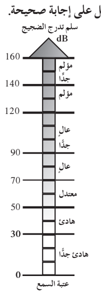
a $3\log\frac{8}{x^3}$ $\quad$ b $\frac{1}{3}(\log(8-x^3))$ $\quad$ c $\log 2 - \log x$ $\quad$ d $\log 2 - 3\log x$

(13) إذا كان مستوى شدة صوت صفارة إنذار (L) تساوي 140 dB والتي تقاس بالعلاقة: $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$ فإن شدة صوتها I تساوي:

a 1 $\quad$ b 1000 $\quad$ c 10 $\quad$ d 100

في التمرينين (14—15)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

استخدم العلاقة: $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$ والشكل المقابل.



القائمة (1)	القائمة (2)
إذا كانت شدة صوت ما (I) هي:	a هادئة
(14) 10^{-5} فإن قوته تكون:	b مؤلمة
(15) 1.65×10^{-2} فإن قوته تكون:	c عالية
	d عالية جدًّا

64

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

7 – 1 تحقق من إجابات الطلاب، وتأكد من حسن استخدامهم لمفتاح اللوغاريتم الاعتيادي على الآلة الحاسبة **log**

«حاول أن تحل»

1 (a) (1) $\log_5 12$

(2) $\log_b 2^3 = \log_b 8$

(3) $5\log_3 2 = \log_3 32$

(b) لا. لأن الأساس مختلف حيث $2 \neq 6$

2 (a) $\log_2 7 + \log_2 b$

(b) $2\log c - 2\log 3$

(c) $3\log_7 a + 4\log_7 b$

3 (a) $\log 30 = \log 5 + \log 2 + \log 3 \approx 1.477$

(b) $\log 4.5 = \log \frac{9}{2} = 2\log 3 - \log 2 \approx 0.653$

(c) $\log \frac{1}{25} = -2\log 5 \approx -1.398$

(d) $\log 1200 = 2\log 2 + \log 3 + 2\log 10 \approx 3.079$

4 $L_1 - L_2 = 10\log \frac{I}{I_0} - 10\log 0.25\frac{I}{I_0} \approx 6.02$

سوف يكون الانخفاض حوالي $6\,dB$.

«تدريب»

نوع الصوت	الشدّة w/m^2	مستوى شدة الصوت	قوة الصوت
صوت صفارة إنذار	10^2	140	مؤلم جدًا
صوت مصنع	10^{-2}	100	عالٍ جدًّا
صوت منظف غبار	10^{-5}	70	عالٍ
صوت دقات الساعة	10^{-8}	40	هادئ
صوت تساقط أوراق الشجر	10^{-10}	20	هادئ جدًّا

5–4: المعادلات الأسية واللوغاريتمية

1 الأهداف

- يحل معادلات أسية.
- يستخدم اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.
- يستخدم الأسس لحل المعادلات اللوغاريتمية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلات أسية – معادلات لوغاريتمية – قاعدة تغيير الأساس.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب $y = 4^x$ بالصورة اللوغاريتمية.

(b) اكتب $y = \log_7 x$ بالصورة الأسية.

(c) اكتب المقدار: $\log_6 x + \log_6 (3x)$ بصيغة لوغاريتم واحد.

(d) اكتب المقدار $\log 35 - \log 5$ بصيغة لوغاريتم واحد.

(e) اكتب المقدار $4 \log_8 3 + 6 \log_8 2$ بصيغة لوغاريتم واحد.

(f) اكتب المقدار: $\log 5 + \log_2 3$ بصيغة لوغاريتم واحد.

5 التدريس

تعرفنا الدالة اللوغاريتمية على أنها معكوس للدالة الأسية، وبالتالي لحل معادلة لوغاريتمية نحن نحتاج إلى استخدام الدالة الأسية.

كما أنه لحل دالة أسية، نحتاج إلى استخدام دالة لوغاريتمية وبالتالي نحن بحاجة دائمًا إلى آلة حاسبة لتعطينا قيم اللوغاريتم الاعتيادي log ولكن السؤال الأهم، هل تتضمن المعادلة دائمًا لوغاريتمًا اعتياديًّا log؟ بالطبع يوجد لدينا لوغاريتمات لها أساسات غير الأساس 10، لذا كان لا بد من إيجاد علاقة تحويل بين اللوغاريتمات ذات الأساسات المختلفة.

4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Equations

سوف تتعلم

- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.
- استخدام الأسس لحل المعادلات اللوغاريتمية.

المفردات والمصطلحات:

- معادلات أسية Exponential Equations
- معادلات لوغاريتمية Logarithmic Equations
- قاعدة تغيير الأساس Change of Base Formula

مواصفات الحصان العربي

هو من أقدم سلالات الخيول، صغير الحجم، له قدرة عالية على تحمل المشاق، قليل الأمراض، شجاع بالفطرة، وفيّ لصاحبه، يتكيف مع تقلبات المناخ وهو أيضًا محب للموسيقى.

عمل تعاوني

الأحياء: تصف العلاقة $F = kw^{\frac{2}{3}}$، كمية الطعام F بالكجم (kg) التي يجب أن يتناولها حيوان ثديي يوميًّا (في هذه العلاقة k هي ثابت التغير الذي يعتمد على النوع، w هي وزن الحيوان).

اعمل مع زميل لك:

a لحساب وزن فيل كبير حيث: $F = 145$ kg، $k = 0.421$ باستخدام الآلة الحاسبة.

1 عوّض عن قيم k , F في العلاقة $F = kw^{\frac{2}{3}}$ وأوجد قيمة $w^{\frac{2}{3}}$

2 أوجد قيمة w

3 كيف يمكنك حل المعادلة $F = kw^{\frac{2}{3}}$ لإيجاد $w^{\frac{2}{3}}$؟ صف الناتج إذا ما تم رفع كل من طرفي المعادلة للقوة $\frac{3}{2}$، ثم اكتب العلاقة الناتجة.

b الحصان العربي من الثدييات. إذا اعتبرنا أن وزنه المثالي 400 kg ويأكل يوميًّا 15 kg فما قيمة الثابت k؟

حل معادلات أسيّة Solving Exponential Equations

تعلمت في ما سبق حل معادلة أسية مثل $7^{3x} = 49$ وذلك بتوحيد الأساس ومساواة الأسس.

سوف تتعلم في هذا الدرس حل معادلات أسية على الصورة: $b^{kx} = a$ حيث يتضمن الأس المتغير x وذلك باستخدام اللوغاريتمات:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$
$$a = b \Leftrightarrow \log_m a = \log_m b$$

لحل معادلات أسية يمكننا أخذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة.

مثال (1)

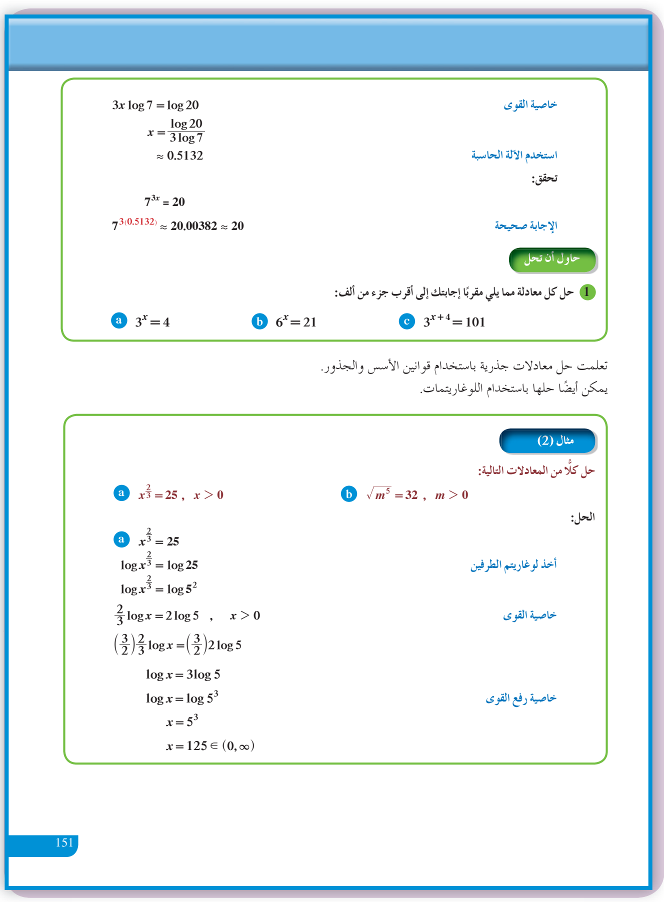
حل المعادلة التالية، ثم تحقق: $7^{3x} = 20$

الحل:

$7^{3x} = 20$

خذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة $\log 7^{3x} = \log 20$

150



خاصية القوى $3x \log 7 = \log 20$

$x = \frac{\log 20}{3 \log 7}$

استخدم الآلة الحاسبة ≈ 0.5132

تحقق:

$7^{3x} = 20$

الإجابة صحيحة $7^{3(0.5132)} \approx 20.00382 \approx 20$

حاول أن تحل

1 حل كل معادلة مما يلي مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من ألف:

c $3^{x+4} = 101$ b $6^x = 21$ a $3^x = 4$

تعلمت حل معادلات جذرية باستخدام قوانين الأسس والجذور.
يمكن أيضًا حلها باستخدام اللوغاريتمات.

مثال (2)

حل كلًّا من المعادلات التالية:

b $\sqrt{m^5} = 32$, $m > 0$ a $x^{\frac{2}{3}} = 25$, $x > 0$

الحل:

a $x^{\frac{2}{3}} = 25$

أخذ لوغاريتم الطرفين $\log x^{\frac{2}{3}} = \log 25$

$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 5^2$

خاصية القوى $\frac{2}{3} \log x = 2 \log 5$, $x > 0$

$\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2}{3} \log x = \left(\frac{3}{2}\right) 2 \log 5$

$\log x = 3 \log 5$

خاصية رفع القوى $\log x = \log 5^3$

$x = 5^3$

$x = 125 \in (0, \infty)$

151

في المثالين (2) , (1)

لحل معادلة أسية، نجد أننا بحاجة إلى تطبيق اللوغاريتم الاعتيادي **log** على الآلة الحاسبة.

في المثالين (4) ,(3)

اطلب إليهم كتابة قاعدة تغيير الأساس عدة مرات لكي يتمكنوا من استخدامها. أخبرهم أن ذلك ضروري كي يتمكنوا من استخدام الآلة الحاسبة. فعلى سبيل المثال، لإيجاد $\log_7 32$. لا يوجد على الآلة الحاسبة $\log_7$ (أي لوغاريتم أساسه 7) لذا نحن بحاجة إلى قاعدة التحويل فنكتب:

$$\log_7 32 = \frac{\log 32}{\log 7}$$

$$\log_7 32 \approx 1.781$$

تطبيق إثرائي

يبيّن كيفية تطبيق مواقف حياتية باستخدام الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية لإيجاد الحلول المطلوبة. كما أن الرسم البياني يساعد أيضًا على إيجاد حلول تقريبية.

في المثال (5)

لحل معادلة لوغاريتمية، يجب استخدام الصيغة الأسية مما يساعد على عزل المتغير، وبالتالي إيجاد القيمة التي تحقق المعادلة.

ركّز مع الطلاب على خواص اللوغاريتم التي سبق أن تعرفوها.

نبّه الطلاب إلى ما يلي:

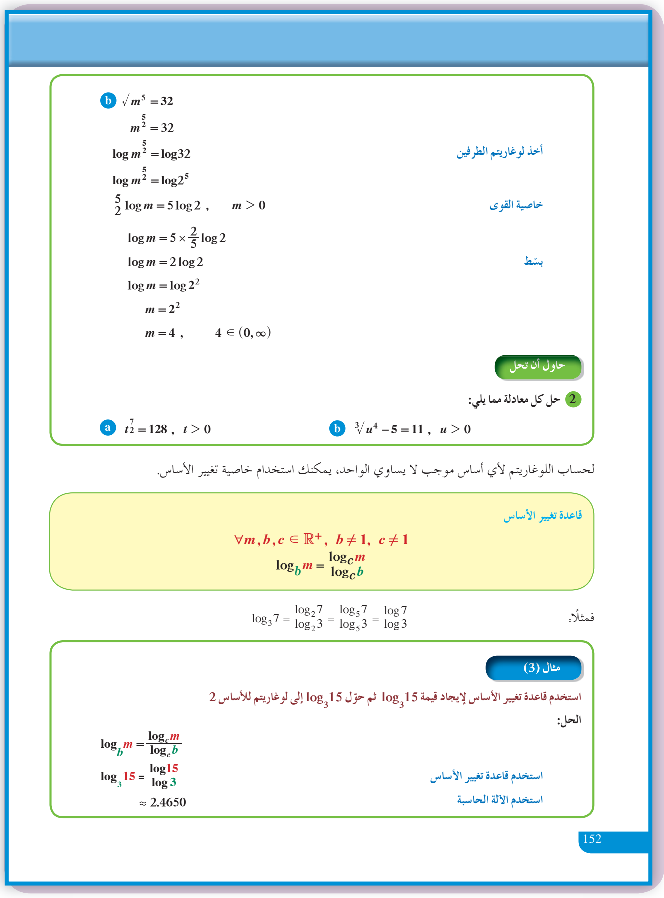
(a) $\log_b(x \pm y) \neq \log_b x \pm \log_b y$

ولكن: $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

(b) $\log_b(xy) \neq (\log_b x)(\log_b y)$

(c) $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$

ولأن: $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$



b $\sqrt{m^5} = 32$

$m^{\frac{5}{2}} = 32$

أخذ لوغاريتم الطرفين $\log m^{\frac{5}{2}} = \log 32$

$\log m^{\frac{5}{2}} = \log 2^5$

خاصية القوى $\frac{5}{2}\log m = 5\log 2\ ,\quad m > 0$

$\log m = 5 \times \frac{2}{5}\log 2$

بسّط $\log m = 2\log 2$

$\log m = \log 2^2$

$m = 2^2$

$m = 4\ ,\quad 4 \in (0, \infty)$

حاول أن تحل

2 حل كل معادلة مما يلي:

a $t^{\frac{7}{2}} = 128\ ,\ t > 0$ **b** $\sqrt[3]{u^4} - 5 = 11\ ,\ u > 0$

لحساب اللوغاريتم لأي أساس موجب لا يساوي الواحد، يمكنك استخدام خاصية تغيير الأساس.

قاعدة تغيير الأساس

$$\forall m, b, c \in \mathbb{R}^+,\ b \neq 1,\ c \neq 1$$

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

فمثلًا: $\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{\log_5 7}{\log_5 3} = \frac{\log 7}{\log 3}$

مثال (3)

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة $\log_3 15$ ثم حوّل $\log_3 15$ إلى لوغاريتم للأساس 2

الحل:

$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$

استخدم قاعدة تغيير الأساس $\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3}$

استخدم الآلة الحاسبة ≈ 2.4650

152

للتحويل إلى لوغاريتم للأساس 2:

اكتب معادلة $\log_3 15 = \log_2 x$

عوّض عن $\log_3 15$ بـ 2.4650 $\quad 2.4650 \approx \log_2 x$

استخدم قاعدة تغيير الأساس $2.4650 = \frac{\log x}{\log 2}$

الضرب التقاطعي $2.4650(\log 2) = \log x$

بسّط $0.7420 \approx \log x$

اكتب في الصيغة الأسية $x = 10^{0.7420}$

استخدم الآلة الحاسبة $x \approx 5.5208$

$\therefore\ \log_3 15 \approx \log_2 5.5208$

حاول أن تحل

3 **a** أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حوّلها إلى لوغاريتم للأساس 8

b التفكير الناقد: في المثال (3)، $\log_2 x \approx 2.4650$

كيف يمكن حل هذه المعادلة دون استخدام قاعدة تغيير الأساس؟

يمكنك استخدام قاعدة تغيير الأساس لحل معادلات أسية وذلك بأخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين مستخدمًا أساس الأس كأساس للوغاريتم، ثم استخدم قاعدة تغيير الأساس.

مثال (4)

حل المعادلة: $2^{3x} = 172$

الحل:

$2^{3x} = 172$

خذ اللوغاريتم للأساس 2 لكلا الطرفين $\log_2(2^{3x}) = \log_2(172)$

بسّط $3x = \log_2 172$

استخدم قاعدة تغيير الأساس $3x = \frac{\log 172}{\log 2}$

استخدم الآلة الحاسبة $x \approx 2.4754$

حاول أن تحل

4 استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة: $7^{5x} = 3\,000$

153

6 الربط

يوفر التطبيق الإثرائي فرصة أمام الطلاب لاستخدام الدالة الأسية في موقف حياتي، حيث تتناقص أعداد النمور العربية في شبه الجزيرة العربية، ويبيّن كيفية التعامل مع الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية لإيجاد الحل.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قاعدة التحويل أو قد يستخدمون الآلة الحاسبة مع اللوغاريتم الاعتيادي من دون الانتباه إلى أساس اللوغاريتم. نبه الطلاب إلى القاعدة: $\log_b m = \dfrac{\log m}{\log b}$، حيث (log) هو اللوغاريتم الاعتيادي وله مفتاح على الآلة الحاسبة.

8 التقييم

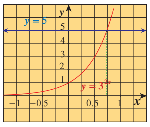
إن متابعة المعلم لعمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، توفر له فرصة للاطلاع على إمكانياتهم في استيعاب حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

اختبار سريع

حل كل معادلة مما يلي:

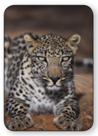
1. $3^x = 81$ $x = 4$
2. $5 + 2^x = 69$ $x = 6$
3. $\log x + \log 4 = 3$ 250
4. $\log_3 22 = x$ 2.814

يمكنك أيضًا حل معادلات أسية بيانيًا.
فمثلًا الشكل المقابل يمثل حل المعادلة $3^{2x} = 5$ حيث
تمّ تمثيل بيان الدالة: $y = 3^{2x}$ والدالة $y = 5$
نقطة التقاطع للمنحنيين $(0.732, 5)$.
$\therefore$ حل المعادلة هو 0.732 تقريبًا.



تطبيق إثرائي

كان النمر العربي من أكثر السنوريات انتشارًا في شبه الجزيرة العربية لكنه الآن موجود على اللائحة الحمراء لأنواع الحيوانات المهددة بالانقراض.



كان عدده 112 سنة 1990 في بعض مناطق شبه الجزيرة العربية وانخفض إلى 65 سنة 2006.

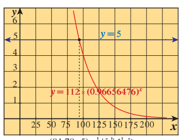
a. اكتب معادلة أسية تنمذج تناقص عدد النمور.
b. إذا بقي هذا التناقص على حاله، في أية سنة يبقى فقط 5 نمور في شبه الجزيرة العربية؟ وضّح بيانيًا.

الحل:

a. المعادلة الأسية على الشكل $y = ab^x$.
لتكن سنة 1990 ممثلة بالصفر وسنة 2006 بـ 16

$112 = ab^0$	عوّض عن x بـ 0، عن y بـ 112
$a = 112$	$b^0 = 1$
$\therefore y = 112b^x$	
$65 = 112 \times b^{16}$	عوّض عن x بـ 16، عن y بـ 65
$b^{16} = \frac{65}{112}$	
$\log b^{16} = \log \frac{65}{112}$	خذ اللوغاريتم لكلا الطرفين
$16 \log b = \log \frac{65}{112}$	
$\log b \approx -0.01476904$	استخدم الآلة الحاسبة
$b \approx 0.96656476$	
$\therefore y = (112)(0.96656476)^x$	

b.
$y = 5$
$y = (112)(0.96656476)^x$
$5 = (112)(0.96656476)^x$
الإجابة $x \approx 92$
$1990 + 92 = 2082$
يبقى في شبه الجزيرة العربية 5 نمور فقط سنة 2082.
الشكل المقابل يوضّح الحل بيانيًا.



نقطة التقاطع $(91.79, 5)$

154

تمرَّنْ 4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتيمية
Exponential and Logarithmic Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–8)، حلّ كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

(1) $9^{2y} = 66$ **(2)** $12^{y-2} = 20$ **(3)** $5 - 3^x = -40$ **(4)** $25^{2x+1} = 144$

(5) $3x^{\frac{3}{2}} = 27, x > 0$ **(6)** $2 + 8r^{\frac{5}{3}} = 26$ **(7)** $\sqrt[7]{n^2} - 12 = 5$ **(8)** $-3 + 2\sqrt[4]{x^3} = 33$

في التمارين (9–13)، استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(9) $\log_2 7$ **(10)** $\log_3 33$ **(11)** $\log_{21} 0.085$

(12) $\log_5 510$ **(13)** $\log_4 1.116$

(14) باعتبار المعادلة: $2^{\frac{x}{3}} = 80$
(a) حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 2 لكل طرف.
(b) حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 10 لكل طرف.
(c) قارن بين إجاباتك في الفقرتين (a), (b). أي طريقة تفضلها؟ ولماذا؟

في التمارين (15–20)، حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

(15) $\log 6x - 3 = -4$ **(16)** $\log x - \log 3 = 8$

(17) $\log_2(3x - 5) = 1$ **(18)** $\log(2x) + \log(x - 3) = \log 8$

(19) $\log(3x) - \log(x + 20) = -\log 2$ **(20)** $\log_{(2x-1)} 49 = 2$

(21) $\log_{(5x-3)} 64 = \log 4$

(22) **الأحياء البرية:** لنفرض أن فصيلة معينة من الحيوانات البرية المعرضة لخطر الانقراض تتناقص أعدادها بمعدل 3.5% سنويًا وقد أحصيت 80 حيوانًا من هذه الفصيلة في موطنها الذي تقوم بدراسته.
(a) توقع عدد حيوانات هذه الفصيلة الذي سيبقى بعد 10 سنوات.
(b) بعد كم سنة سوف يتناقص عدد حيوانات هذه الفصيلة لأول مرة إلى أقل من 15 حيوانًا، بالمعدل نفسه؟

65

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(a) 1 $F = kw^{\frac{2}{3}}$; $145 = 0.421w^{\frac{2}{3}}$

$w^{\frac{2}{3}} = 344.42$

2 $\left(w^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = (344.42)^{\frac{3}{2}}$

$w = 344.42\sqrt{344.42}$

$w \approx 6\,392\ kg$

3 $\frac{F}{k} = w^{\frac{2}{3}}$; $F = w^{\frac{2}{3}}$

$\left(\frac{F}{k}\right)^{\frac{3}{2}} = w$

(b) $15 = k(400)^{\frac{3}{2}}$

$k = \frac{15}{\sqrt[3]{160\,000}} \approx 0.276$

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $3^x = 4$, $x = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$

(b) $6^x = 21$, $x = \frac{\log 21}{\log 6} \approx 1.7$

(c) $3^{x+4} = 101$, $x = \frac{\log 101 - \log 81}{\log 3} \approx 0.2$

2 **(a)**

$t^{\frac{7}{2}} = 128 ; t^{\frac{7}{2}} = 2^7 ; \log t^{\frac{7}{2}} = \log 2^7 ; \frac{7}{2}\log t = 7\log 2 ; t = 4$

(b) $u^{\frac{4}{3}} = 16$; $u^{\frac{4}{3}} = 2^4$; $\frac{4}{3}\log u = 4\log 2$

$u = 8$

3 **(a)** $\log_3 400 = \frac{\log 400}{\log 3} \approx 5.454$

$5.454 = \frac{\log x}{\log 8}$

$\log x = 4.925$; $x \approx 10^{4.925}$

$x \approx 84168.814$

(b) $\log_2 x \approx 2^{2.4650}$

$x \approx 2^{2.4650}$

$x \approx 5.521$

4 $7^{5x} = 3\,000$

$\log_7 7^{5x} = \log_7 3\,000$

$5x = \frac{\log(3 \times 10^3)}{\log 7}$

$x = \frac{3 + \log 3}{5\log 7} \approx 0.823$

حل معادلات لوغاريتمية Solving Logarithmic Equations

كل معادلة تتضمن تعبيرًا لوغاريتميًّا تسمى معادلة لوغاريتمية ويمكن وضعها على الصورة:

$\log_b y = x \quad \forall\ y, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

ويكون حلها بما يحقق هذه الشروط لذا يتوجب إيجاد مجال التعريف (شرط الحل) أو التحقق من القيم الناتجة.

مثال (5)

حل المعادلة: $\log(3x+1) = 5$

الحل:

نوجد المجال: $3x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$

$\therefore$ المجال $= \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\log(3x+1) = 5$

اكتب في الصورة الأسية

$3x + 1 = 10^5$

$3x + 1 = 100\,000$

$x = 33\,333$

$\because 33\,333 \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\therefore$ الحل مقبول.

حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\log(7-2x) = -1$

في بعض الحالات، عليك استخدام خواص اللوغاريتمات لتبسيط التعابير قبل حل المعادلة.

مثال (6)

حل المعادلة: $2\log x - \log 3 = 2$

الحل:

نوجد المجال: $x > 0$

$\therefore$ المجال $= (0, \infty)$

$2\log x - \log 3 = 2$

اكتب لوغاريتم واحد

$\log\left(\frac{x^2}{3}\right) = 2$

اكتب في الصورة الأسية

$\frac{x^2}{3} = 10^2$

$x^2 = 3 \times 100$

$x = \pm 10\sqrt{3}$

155

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $9^x = 3$ هو $x = \frac{1}{2}$ — (a) (b)

(2) حل المعادلة $2\log x = -1$ هو $x = 10^{-0.5}$ — (a) (b)

(3) إذا كان $\log(x+6) = 0$ فإن $x = -5$ — (a) (b)

(4) حل المعادلة $14^{9x} = 146$ هو $x = \frac{\log 146}{\log 14}$ — (a) (b)

(5) حل المعادلة $3\log x - \log 6 + \log 2.4 = 9$ هو 5×10^4 — (a) (b)

في التمارين (6—14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $(1.5)^x = 356$ فإنّ:

(a) $x \approx 15$ (b) $x \approx 14.5$ (c) $x \approx 15.3$ (d) $x \approx 16.3$

(7) حل المعادلة $8 + 10^x = 1008$ هو:

(a) $x = 6$ (b) $x \approx 3.5$ (c) $x = 3$ (d) $x = 2$

(8) إذا كان $2^{x^2} = 512$ فإنّ:

(a) $x = 3$ (b) $x = 9$ (c) $x = 3\ ,\ x = -3$ (d) $x = -9$

(9) إذا كان $2\log x = -2$ فإنّ:

(a) $x = 10^{-1}$ (b) $x = 10^{0.5}$ (c) $x = 10^{-2}$ (d) $x = 10^{-0.5}$

(10) مجموعة حل المعادلة: $\log(x^2+2) = \log(5x-4)$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{3\}$ (c) $\{2, 3\}$ (d) $\{-2, -3\}$

(11) مجموعة حل المعادلة: $\log_2(x^2 - x) = 1$ هي:

(a) $\{-1\}$ (b) $\{1, 2\}$ (c) $\{-1, 2\}$ (d) $\{-1, -2\}$

(12) حل المعادلة $\log(x+21) + \log x = 2$ هو:

(a) 4 (b) $-25\ ,\ 4$ (c) 25 (d) $4\ ,\ 25$

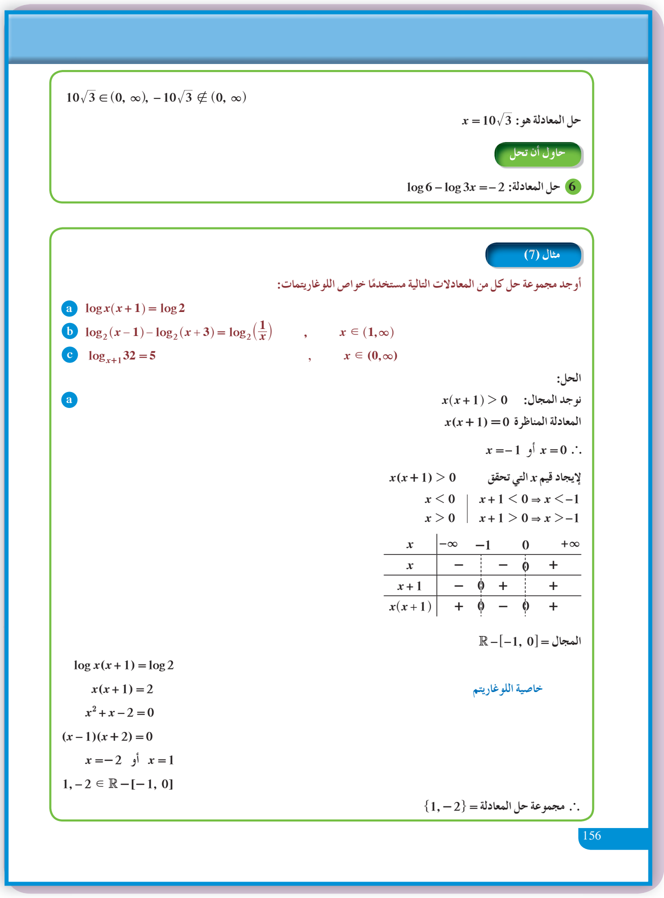
(13) يكون $x = 3$ حلًا للمعادلة:

(a) $\log_3(6 - x^2) = 1$ (b) $\log_x 9 = \frac{2}{3}$ (c) $\log_3(x^2+1) = 2$ (d) $\log_3 x^3 + \log_3 x = 4$

(14) حل المعادلة $\log_x 81 - \log_x 9 = 2$ هو:

(a) -3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3 (d) 9

66



$10\sqrt{3} \in (0, \infty),\ -10\sqrt{3} \notin (0, \infty)$

حل المعادلة هو: $x = 10\sqrt{3}$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة: $\log 6 - \log 3x = -2$

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية مستخدمًا خواص اللوغاريتمات:

a $\log x(x+1) = \log 2$

b $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (1,\infty)$

c $\log_{x+1} 32 = 5$, $x \in (0,\infty)$

الحل:

a

نوجد المجال: $x(x+1) > 0$

المعادلة المناظرة $x(x+1) = 0$

$\therefore x = 0$ أو $x = -1$

لإيجاد قيم x التي تحقق $x(x+1) > 0$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$ | $x < 0$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ | $x > 0$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

المجال $= \mathbb{R} - [-1, 0]$

$\log x(x+1) = \log 2$

$x(x+1) = 2$ خاصية اللوغاريتم

$x^2 + x - 2 = 0$

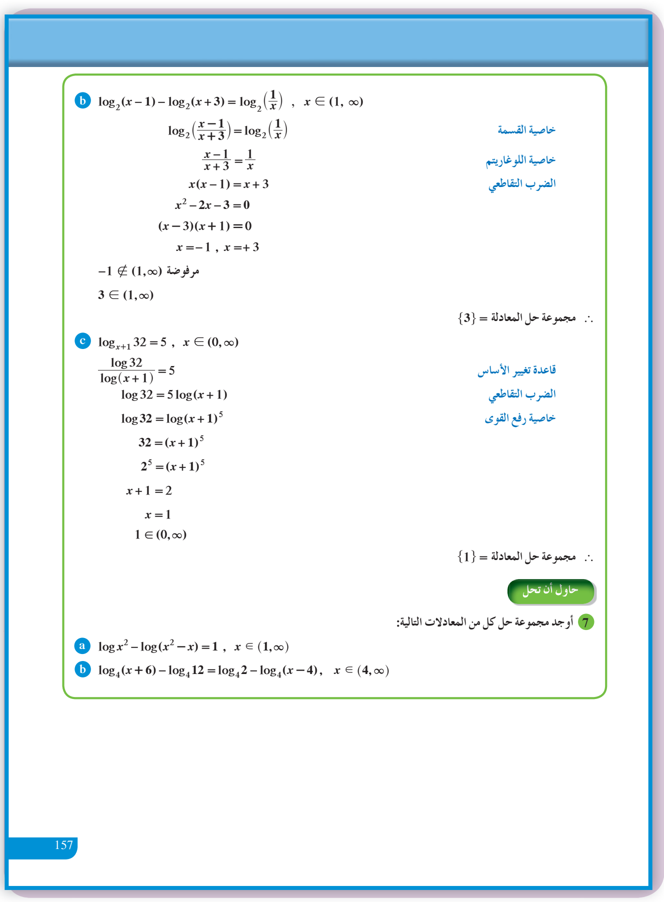
$(x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ أو $x = -2$

$1, -2 \in \mathbb{R} - [-1, 0]$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{1, -2\}$

156



b $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (1, \infty)$

$\log_2\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ خاصية القسمة

$\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{x}$ خاصية اللوغاريتم

$x(x-1) = x + 3$ الضرب التقاطعي

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = -1$, $x = +3$

$-1 \notin (1,\infty)$ مرفوضة

$3 \in (1,\infty)$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{3\}$

c $\log_{x+1} 32 = 5$, $x \in (0,\infty)$

$\frac{\log 32}{\log(x+1)} = 5$ قاعدة تغيير الأساس

$\log 32 = 5\log(x+1)$ الضرب التقاطعي

$\log 32 = \log(x+1)^5$ خاصية رفع القوى

$32 = (x+1)^5$

$2^5 = (x+1)^5$

$x + 1 = 2$

$x = 1$

$1 \in (0,\infty)$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{1\}$

حاول أن تحل

7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a $\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1$, $x \in (1,\infty)$

b $\log_4(x+6) - \log_4 12 = \log_4 2 - \log_4(x-4)$, $x \in (4,\infty)$

157

5 $\log(7 - 2x) = \log 10^{-1}$; $x = 3.45$

6 $\log \frac{6}{3x} = \log 10^{-2}$; $x = 200$

7 **(a)** $\log\left(\frac{x^2}{x^2 - x}\right) = \log 10$

$$\frac{x}{x-1} = 10 \ , \ x = \frac{10}{9}$$

(b) $\log_4\left(\frac{x+6}{12}\right) = \log_4\left(\frac{2}{x-4}\right)$

$$\frac{x+6}{12} = \frac{2}{x-4}$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$x = 6$$

4–6: اللوغاريتم الطبيعي

1 الأهداف

- يوجد العلاقة بين الدالة الأسية $y = e^x$ واللوغاريتم الطبيعي.
- يحل معادلات باستخدام اللوغاريتم الطبيعي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

اللوغاريتم الطبيعي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) حل المعادلة: $4^{x+1} = 8$

(b) حل المعادلة: $\log_4(x+2) = 3$

(c) حل المعادلة: $\log(2x-3) = 1$

(d) أوجد $\log_7 21$ باستخدام قاعدة تغيير الأساس.

5 التدريس

يعتبر العدد $e \approx 2.71828$ إلى جانب العددين $g \approx 9.8$ ، $\pi = 3.1416$ من أهم الأعداد الحقيقية.وبالتالي كان اللوغاريتم الطبيعي، حيث أساسه العدد e ، من أكثر اللوغاريتمات استخدامًا ويرمز إليه على الآلة الحاسبة بـ **ln** .

يساعد اللوغاريتم الطبيعي على إيجاد حلول سريعة كون $ln\, e = 1$، إلى جانب $\log 10 = 1$. وهنا يجب التنبيه دائمًا إلى استخدام المفاتيح على الآلة الحاسبة، حيث إن مفتاح **log** موجود إلى جانب مفتاح **ln** .

يمكن استكشاف الفرق بين نتائج اللوغاريتم للعدد نفسه باستخدام المفتاحين، لذا يجب الانتباه جيدًا إلى اللوغاريتم المستخدم.

4–6

اللوغاريتم الطبيعي

Natural Logarithm

سوف تتعلم

- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة $y = e^x$.
- حل المعادلات باستخدام اللوغاريتم الطبيعي.

المفردات والمصطلحات:

- اللوغاريتم الطبيعي Natural Logarithm

دعنا نفكر ونتناقش

في الدرس (4–2) وجدت أن العدد $e \approx 2.71828$ وقد أمكن استخدامه كأساس.
فالدالة $y = e^x$ لها معكوس هو $y = \log_e x$ ويسمى دالة اللوغاريتم الطبيعي ورمزه:
$y = ln\, x$
وتقرأ y تساوي اللوغاريتم الطبيعي لِـ x
يوضح الرسم البياني المجاور الدالتين:

1. $y = e^x$
2. $y = ln\, x$

الآلة الحاسبة: استخدم المفتاح ln على آلتك الحاسبة لإيجاد قيم:

a. $ln5,\ ln3,\ ln15,\ ln5 + ln3$

b. $ln1,\ ln\, e,\ ln\, e^2$

كيف تربط إجابتك بما سبق دراسته؟

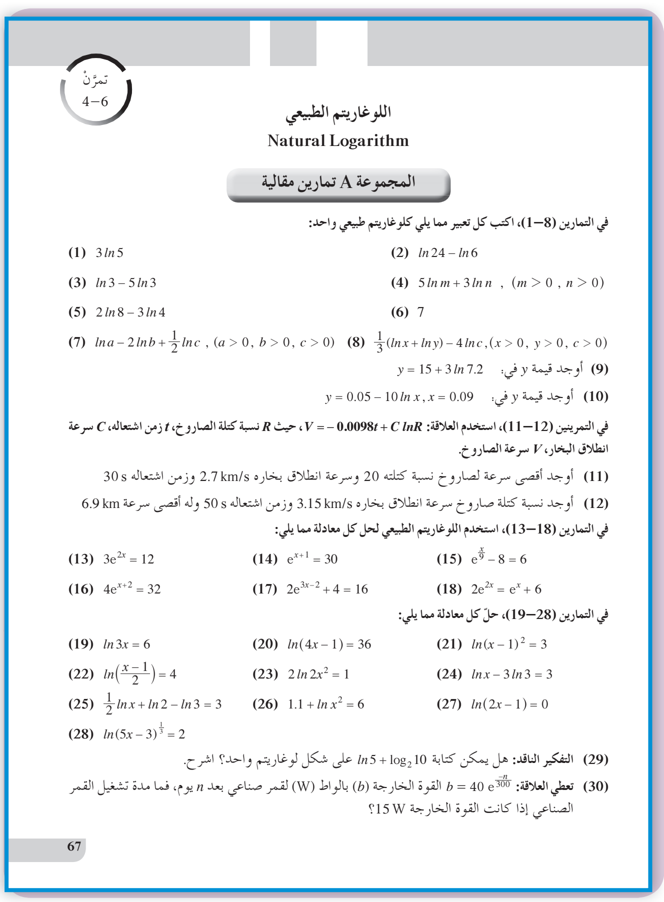
تطبق خواص اللوغارتيمات المعتادة على اللوغاريتم الطبيعي أيضًا.
أعد ذكر خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى بدلالة اللوغاريتم الطبيعي.

تدريب

أكمل ما يلي حيث $k, m, n \in \mathbb{R}^+$.

1. $ln(mn) = ...$ (خاصية ....)
2. $ln\frac{m}{n} = ...$ (خاصية ....)
3. $ln\, m^k = ...$ (خاصية ....)
4. $ln\ e = ...$
5. $ln\ e^k = ...$
6. $e^{ln\ k} = ...$

158



تمرَّنْ 4–6

اللوغاريتم الطبيعي

Natural Logarithm

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

(1) $3\,ln5$ **(2)** $ln24 - ln6$

(3) $ln3 - 5\,ln3$ **(4)** $5\,ln\,m + 3\,ln\,n\ ,\ (m > 0\ ,\ n > 0)$

(5) $2\,ln8 - 3\,ln4$ **(6)** 7

(7) $ln\,a - 2\,ln\,b + \frac{1}{2}ln\,c\ ,\ (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$ **(8)** $\frac{1}{3}(ln\,x + ln\,y) - 4\,ln\,c, (x > 0,\ y > 0,\ c > 0)$

(9) أوجد قيمة y في: $y = 15 + 3\,ln\,7.2$

(10) أوجد قيمة y في: $y = 0.05 - 10\,ln\,x\ , x = 0.09$

في التمرينين (12–11)، استخدم العلاقة: $V = -0.0098t + C\,lnR$ ، حيث R نسبة كتلة الصاروخ، t زمن اشتعاله، C سرعة انطلاق البخار، V سرعة الصاروخ.

(11) أوجد أقصى سرعة لصاروخ نسبة كتلته 20 وسرعة انطلاق بخاره 2.7 km/s وزمن اشتعاله 30 s

(12) أوجد نسبة كتلة صاروخ سرعة انطلاق بخاره 3.15 km/s وزمن اشتعاله 50 s وله أقصى سرعة 6.9 km

في التمارين (18–13)، استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة مما يلي:

(13) $3e^{2x} = 12$ **(14)** $e^{x+1} = 30$ **(15)** $e^{\frac{x}{9}} - 8 = 6$

(16) $4e^{x+2} = 32$ **(17)** $2e^{3x-2} + 4 = 16$ **(18)** $2e^{2x} = e^x + 6$

في التمارين (28–19)، حلّ كل معادلة مما يلي:

(19) $ln\,3x = 6$ **(20)** $ln(4x-1) = 36$ **(21)** $ln(x-1)^2 = 3$

(22) $ln\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$ **(23)** $2\,ln\,2x^2 = 1$ **(24)** $ln\,x - 3\,ln\,3 = 3$

(25) $\frac{1}{2}ln\,x + ln\,2 - ln\,3 = 3$ **(26)** $1.1 + ln\,x^2 = 6$ **(27)** $ln(2x-1) = 0$

(28) $ln(5x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$

(29) التفكير الناقد: هل يمكن كتابة $ln5 + \log_2 10$ على شكل لوغاريتم واحد؟ اشرح.

(30) تعطي العلاقة: $b = 40\,e^{\frac{-n}{300}}$ القوة الخارجة (b) بالواط (W) لقمر صناعي بعد n يوم، فما مدة تشغيل القمر الصناعي إذا كانت القوة الخارجة 15 W؟

67

في المثال (1)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطلاب لحل معادلة أسية حيث أساس الأس هو العدد e، في هذه الحالة يتعلم الطالب عزل الأساس e مع قيمة الأس ليتمكن بعدها من استخدام اللوغاريتم الطبيعي علمًا بأن $ln\,e = 1$.

ساعد الطلاب على استخدام القاعدة: $ln\,e^{u} = u\,ln\,e = u$ حيث u بدلالة المتغير x وهذا يسهل أيضًا عزل المتغير x .

في المثال (2)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطلاب لاستخدام اللوغاريتم الطبيعي وخاصة أن معادلة أقصى سرعة للصاروخ تتضمن اللوغاريتم الطبيعي والممثل بالرمز ln.

كما أن جميع خاصيات اللوغاريتم التي تعرفنا عليها سابقًا هي صالحة مع اللوغاريتم الطبيعي أي خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى، وهذا ما تمّ تطبيقه في المثال (4).

في المثال (3)

يوفر هذا المثال فرصة للطالب كي يدرك أن الدالة اللوغاريتمية تكون معرفة إذا كان المتغير قيمة موجبة وهذا المتغير يمكن أن يكون بدلالة متغير آخر أي أن $3x + 5 > 0$ وليس $x > 0$ فقط.

6 الربط

نجد في المثال (2) كيفية تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على مسائل حياتية بشكل بسيط جدًّا لسهولة الحل باستخدام الآلة الحاسبة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام الآلة الحاسبة بين مفتاحين **ln** و **log** ، ساعدهم على معرفة أن **log** تستخدم في اللوغاريتم الاعتيادي والأساس هو 10. أما **ln** فتستخدم في اللوغاريتم الطبيعي وأساسه العدد e.

مثال (1)

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $8e^{2x} = 20$

الحل:

	$8e^{2x} = 20$
اقسم كل طرف على 8	$e^{2x} = \frac{20}{8}$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف	$ln\,e^{2x} = ln\,2.5$
خاصية القوى حيث $ln\,e = 1$	$2x\,ln\,e = ln\,2.5$
اختصر	$2x = ln\,2.5$
اقسم كل طرف على 2	$x = \frac{ln\,2.5}{2}$
استخدم آلتك الحاسبة	$x \approx 0.458$

حاول أن تحل

1 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{4(x+1)} = 32$.

اللوغاريتم الطبيعي يبسط تعبيرات العديد من العلاقات في المجالات المختلفة ومنها المجال الفيزيائي.

مثال (2) الصلة بالواقع

الفضاء: يمكن أن يبلغ صاروخ مدارًا ثابتًا على بعد 300 km فوق سطح الأرض إذا ما بلغت سرعته 7.7 km/s وتحسب أقصى سرعة (v) له بالعلاقة: $v = -0.0098\,t + c\,ln\,r$

(حيث t هي زمن اشتعال وقود محرك الصاروخ بالثانية (s)، c هي سرعة انطلاق البخار بـ (km/s)، r هي النسبة بين كتلة الصاروخ وهو محمل بالوقود إلى كتلته من دون وقود).

لنفرض أن صاروخًا قد استخدم لدفع سفينة فضاء، وله نسبة كتلة حوالى 25 وسرعة انطلاق البخار 2.8 (km/s)، وزمن الاشتعال 100 s، فهل يبلغ هذا الصاروخ مدارًا ثابتًا؟

الحل:

في هذه الحالة: $t = 100\text{ s}\ ,\ c = 2.8\text{ km/s}\ ,\ r \approx 25$

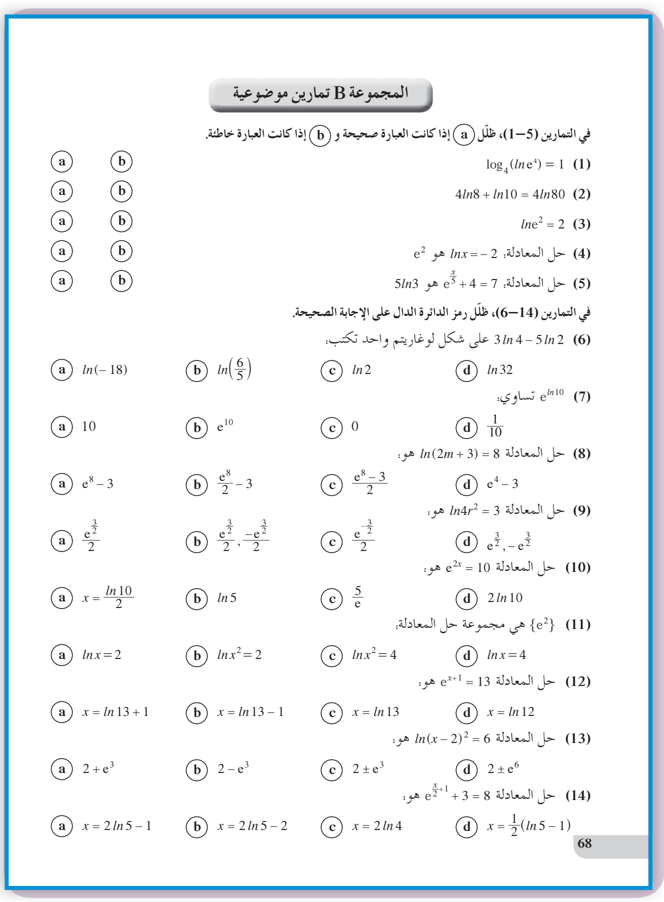
لإيجاد v، استخدم العلاقة: $v = -0.0098\,t + c\,ln\,r$

$$v = -0.0098\,(100) + 2.8\,ln\,25$$
$$\approx -0.98 + 2.8(3.219)$$
$$\therefore v \approx 8\text{ km/s}$$

وهذه السرعة أكبر من السرعة 7.7km/s، والتي تلزم لبلوغ المدار الثابت.

لذلك فإن هذا الصاروخ يمكنه أن يبلغ المدار الثابت.

159



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log_4(ln\,e^4) = 1$ (a) (b)

(2) $4ln8 + ln10 = 4ln80$ (a) (b)

(3) $ln\,e^2 = 2$ (a) (b)

(4) حل المعادلة: $ln\,x = -2$ هو e^2 (a) (b)

(5) حل المعادلة: $e^{\frac{x}{5}} + 4 = 7$ هو $5ln3$ (a) (b)

في التمارين (6—14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $3\,ln\,4 - 5\,ln\,2$ على شكل لوغاريتم واحد تكتب:

(a) $ln(-18)$ (b) $ln\left(\frac{6}{5}\right)$ (c) $ln\,2$ (d) $ln\,32$

(7) e^{ln10} تساوي:

(a) 10 (b) e^{10} (c) 0 (d) $\frac{1}{10}$

(8) حل المعادلة $ln(2m+3) = 8$ هو:

(a) $e^8 - 3$ (b) $\frac{e^8}{2} - 3$ (c) $\frac{e^8 - 3}{2}$ (d) $e^4 - 3$

(9) حل المعادلة $ln4r^2 = 3$ هو:

(a) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (b) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}, \frac{-e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (c) $\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}$ (d) $e^{\frac{3}{2}}, -e^{\frac{3}{2}}$

(10) حل المعادلة $e^{2x} = 10$ هو:

(a) $x = \frac{ln\,10}{2}$ (b) $ln\,5$ (c) $\frac{5}{e}$ (d) $2\,ln\,10$

(11) $\{e^2\}$ هي مجموعة حل المعادلة:

(a) $ln\,x = 2$ (b) $ln\,x^2 = 2$ (c) $ln\,x^2 = 4$ (d) $ln\,x = 4$

(12) حل المعادلة $e^{x+1} = 13$ هو:

(a) $x = ln\,13 + 1$ (b) $x = ln\,13 - 1$ (c) $x = ln\,13$ (d) $x = ln\,12$

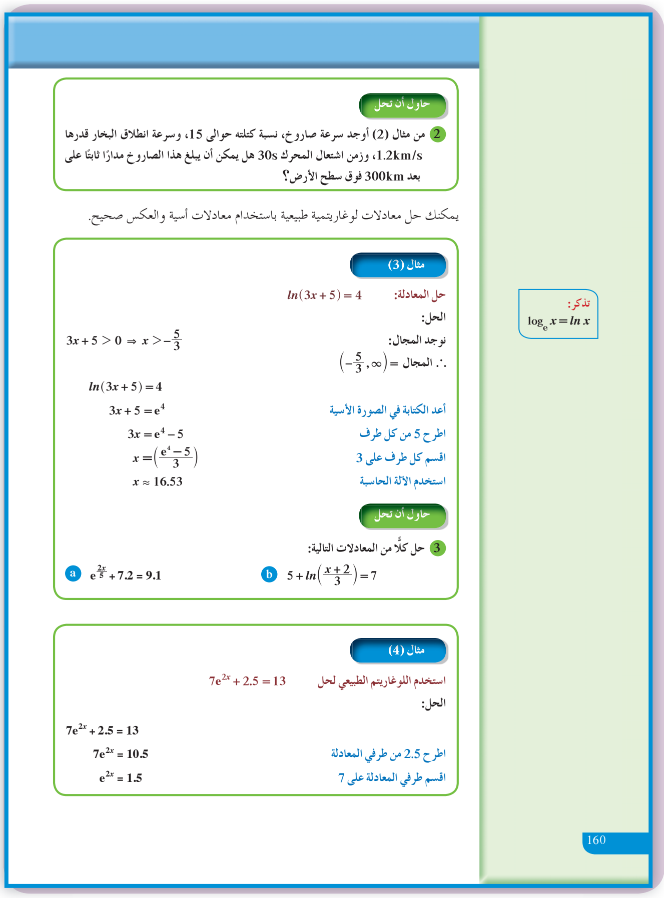
(13) حل المعادلة $ln(x-2)^2 = 6$ هو:

(a) $2 + e^3$ (b) $2 - e^3$ (c) $2 \pm e^3$ (d) $2 \pm e^6$

(14) حل المعادلة $e^{\frac{x}{2}+1} + 3 = 8$ هو:

(a) $x = 2\,ln\,5 - 1$ (b) $x = 2\,ln\,5 - 2$ (c) $x = 2\,ln\,4$ (d) $x = \frac{1}{2}(ln\,5 - 1)$

68



حاول أن تحل

2 من مثال (2) أوجد سرعة صاروخ، نسبة كتلته حوالى 15، وسرعة انطلاق البخار قدرها 1.2km/s، وزمن اشتعال المحرك 30s هل يمكن أن يبلغ هذا الصاروخ مدارًا ثابتًا على بعد 300km فوق سطح الأرض؟

يمكنك حل معادلات لوغاريتمية طبيعية باستخدام معادلات أسية والعكس صحيح.

مثال (3)

حل المعادلة: $ln(3x+5)=4$

الحل:

نوجد المجال: $3x+5>0 \Rightarrow x>-\frac{5}{3}$

∴ المجال $= \left(-\frac{5}{3}, \infty\right)$

$ln(3x+5)=4$

أعد الكتابة في الصورة الأسية $3x+5=e^4$

اطرح 5 من كل طرف $3x=e^4-5$

اقسم كل طرف على 3 $x=\left(\frac{e^4-5}{3}\right)$

استخدم الآلة الحاسبة $x \approx 16.53$

حاول أن تحل

3 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $e^{\frac{2x}{5}}+7.2=9.1$

b $5+ln\left(\frac{x+2}{3}\right)=7$

مثال (4)

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل $7e^{2x}+2.5=13$

الحل:

$7e^{2x}+2.5=13$

اطرح 2.5 من طرفي المعادلة $7e^{2x}=10.5$

اقسم طرفي المعادلة على 7 $e^{2x}=1.5$

تذكر: $\log_e x = ln\,x$

160

8 التقييم

تابع بدقة جهود الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من كونهم قد ميّزوا جيّدًا بين اللوغاريتمات التي تعرفوها في هذه الوحدة.

اختبار سريع

أوجد الحل لما يلي:

1 $e^x+3=25$ 3.091

2 $3\,ln\,e^{2x}=15$ 2.5

3 $ln\,x+ln\,4=6$ 100.857

4 $ln\,8-ln\,x=ln\,2$ 4

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 – 5 تحقق من إجابات الطلاب، وتأكد من أنهم يستخدمون المفتاح الصحيح على الآلة الحاسبة وهو **ln**.

«تدريب»

1 $ln(m\,n)=ln(m)+ln(n)$ خاصية الضرب

2 $ln\left(\frac{m}{n}\right)=ln(m)-ln(n)$ خاصية القسمة

3 $ln(m^k)=k\,ln(m)$ خاصية القوى

4 $ln\,e=1$

5 $ln\,e^k=k$

6 $e^{ln\,k}=k$

«حاول أن تحل»

1 $4x+4=ln\,32\ ,\ x\approx -0.134$

2 والمطلوب إيجاد قيمة v $\quad v=-0.0098t+c\,ln\,r$

$v=-0.0098(30)+1.2\,ln\,15$

$v\approx 2.956$ وهذه القيمة أصغر من 7.7، لذا لن يتمكن هذا الصاروخ من بلوغ المدار الثابت وهو 300 km فوق الأرض.

3 **(a)** $e^{\frac{2x}{5}}=1.9\ ;\ x\approx 1.605$

(b) $ln\left(\frac{x+2}{3}\right)=2$

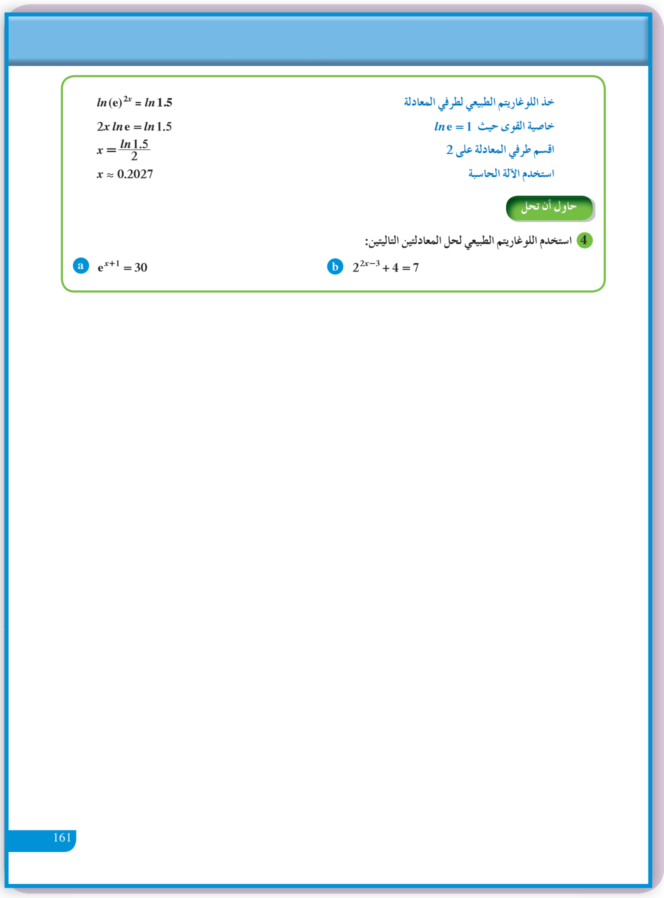
$x\approx 20.167$

4 **(a)** $x\approx 2.4012$

(b) $\log_2 2^{2x-3}=\log_2 3$

$2x-3=\frac{ln\,3}{ln\,2}\approx 1.585$

$x\approx 2.3$



خذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة $\quad ln(e)^{2x}=ln\,1.5$

خاصية القوى حيث $ln\,e=1$ $\quad 2x\,ln\,e=ln\,1.5$

اقسم طرفي المعادلة على 2 $\quad x=\frac{ln\,1.5}{2}$

استخدم الآلة الحاسبة $\quad x\approx 0.2027$

حاول أن تحل

4 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلتين التاليتين:

a $e^{x+1}=30$ $\qquad$ **b** $2^{2x-3}+4=7$

161

المرشد لحل المسائل

إجابات «مسألة إضافية»

(a) $y = 750e^{0.183x}$

(b) 2006

(c) 2014

المرشد لحل المسائل

في نهاية العام 2000 وصل عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم إلى 360 مليونًا وتزايد هذا العدد ليصل في نهاية العام 2011 إلى 2 260 مليون مشترك.

a x تمثّل العدد بالسنين، m معدل الزيادة السنوية، P عدد المشتركين في عام 2000، y عدد المشتركين مع مرور الوقت.

اكتب دالة على الشكل: $y = Pe^{mx}$ تمثل القيمة المتوقعة لزيادة عدد مشتركي شبكة الإنترنت ابتداءً من العام 2000.

y: عدد المشتركين بعد مرور x عام.

m: معدل التزايد السنوي، P: عدد المشتركين عام 2000.

b في أي عام يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار؟

c متى يصبح هذا العدد أكثر من 3 مليارات مشترك؟

d أوجد قيمة x بدلالة y.

e كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من إجابات **b**، **c**؟

الحل:

a الشكل العام للمعادلة هو كالتالي: $y = Pe^{mx}$

إيجاد المعدل العام لتزايد عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم بين عام 2000 و2011.

$2\,260 = 360\,e^{11m}$ تعويض y بـ 2 260 وPبـ 360 وx بـ 11

$\frac{2\,260}{360} = e^{11m}$ قسمة طرفي المعادلة على 360

$ln\frac{2\,260}{360} = ln\,e^{11m}$ تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة

$ln\frac{2\,260}{360} = 11m$ تبسيط

$m = \frac{ln\left(\frac{2\,260}{360}\right)}{11}$ قسمة طرفي المعادلة على 11

$m = 0.167$ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد معدل التزايد السنوي

إذًا معدل التزايد السنوي لمشتركي شبكة الإنترنت هو 16.7%.

وبالتالي الدالة هي: $y = 360\,e^{0.167x}$

b

$y = 360\,e^{0.167x}$

$360\,e^{0.167x} > 1\,000$

$e^{0.167x} > \frac{1\,000}{360}$

$0.167x > ln\frac{1\,000}{360}$

$x > \frac{ln\frac{1\,000}{360}}{0.167} \approx 6.11767$

في العام 2007 يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار، ويصبح العدد حوالى 1.159 مليار مشترك.

---

c

$y = 360\,e^{0.167x}$

$360\,e^{0.167x} > 3\,000$

$x > \frac{ln\frac{3\,000}{360}}{0.167} \approx 12.6961888$

وبالمثل

يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت 3 مليارات في العام 2013، ويصبح العدد حوالى 3.156 مليارات مشترك.

d

$y = 360\,e^{0.167x}$

$\frac{y}{360} = e^{0.167x}$ قسمة طرفي المعادلة على 360

$ln\left(\frac{y}{360}\right) = ln\left(e^{0.167x}\right)$ تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة

$ln\left(\frac{y}{360}\right) = 0.167x$ تبسيط

$x = \frac{ln\left(\frac{y}{360}\right)}{0.167}$ قسمة طرفي المعادلة على 0.167

e نعوض عدد y في **b**، **c** لنتحقق من الإجابات التي توصلنا إليها من حيث عدد السنوات المطلوبة للوصول إلى هذه الأعداد.

b $\frac{ln\left(\frac{1\,000}{360}\right)}{0.167} \Rightarrow x \approx 6.12$، إذًا نحتاج إلى أكثر من 6 سنوات، إذًا في 2007.

c $\frac{ln\left(\frac{3\,000}{360}\right)}{0.167} \Rightarrow x \approx 12.7$، إذًا نحتاج إلى أكثر من 12 سنة، إذًا في 2013.

مسألة إضافية

في نهاية العام 2000، وصل عدد مشتركي الهاتف المحمول حوالى 750 مليونًا في العالم أمّا في نهاية العام 2011 فقد تزايد هذا العدد ليصل إلى حوالى 5.6 مليارات مشترك.

a x تمثّل عدد السنوات منذ العام 2000.

اكتب دالة على الشكل: $y = Pe^{mx}$، تمثل القيمة المتوقعة لزيادة مستخدمي الهاتف المحمول ابتداءً من العام 2000.

y: عدد المستخدمين بعد مرور x سنة.

m: معدل التزايد السنوي.

P: عدد المستخدمين في العام 2000.

b في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 2 مليار؟

c في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 9 مليارات؟

d أوجد x بدلالة y.

e كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من الإجابات في **b**، **c**؟

اختبار الوحدة الرابعة

في التمارين (4—1)، ارسم كلًّا من الدوال التالية:

(1) $y = -3(0.25)^x$ **(2)** $f(x) = \frac{1}{2}(6)^{-x}$ **(3)** $y = 0.1(10)^{x-2}$ **(4)** $f(x) = (2)^{x+1} + 3$

(5) **الكتابة:** وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت الدالة الأسية تمثّل نموًّا أسيًّا أم تضاؤلًا أسيًّا. اعرض مثالًا لكل منها.

في التمارين (8—6)، اكتب معادلة تصف الدالة الأسية التي على الصورة: $y = ab^x$، بمعلومية الأساس المعطى والتي يمر رسمها البياني بالنقطة المعطاة.

(6) الأساس 3، النقطة $(2, 3)$

(7) الأساس 4، النقطة $(-1, 1)$

(8) الأساس 2، النقطة $(0, 3)$

(9) **علم الزلازل:** كم مرة يكون زلزال قوته 5.2 بمقياس ريختر أقوى من زلزال قوته 3 علمًا بأن الطاقة المنطلقة تساوي $E \times 30^x$، x هي درجة قوة الزلزال بمقياس ريختر.

(10) ارسم بيان الدالة $y = \log_8 x$ ثم استخدمها كدالة مرجع لرسم بيان كل من الدوال اللوغاريتمية التالية:

(a) $y = \log_8(x+2)$ **(b)** $y = \log_8 x - 1$ **(c)** $y = \log_8(x+2) - 1$

في التمارين (14—11)، أوجد مفكوك كل من اللوغاريتمات التالية:

(11) $\log_4 r^2 n\ ,\ (r > 0\ ,\ n > 0)$ **(12)** $\log_2(x+1)^2\ ,\ (x > -1)$

(13) $\log_7 \frac{a}{b}\ ,\ (a > 0\ ,\ b > 0)$ **(14)** $\log 3x^3y^2\ ,\ (x > 0\ ,\ y > 0)$

في التمارين (18—15)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد ناتج كل من المقادير التالية:

(15) $\log_3 27 - \log_3 9$ **(16)** $2\log_2 64 - \log_2 2$

(17) $-\log_4 \frac{1}{16} - \log_4 64$ **(18)** $2\log 5 + \log 40$

(19) **سؤال مفتوح:** اكتب مقدارين لوغاريتميين. أي منهما له القيمة الأكبر؟ اشرح.

في التمارين (30—20)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(20) $x^{\frac{3}{4}} = 81$ **(21)** $3k^{\frac{3}{2}} = 24$ **(22)** $\log 4x = 3$

(23) $2\log x = -4$ **(24)** $\log 2x + \log x = 1$ **(25)** $\log x - \log(x-1) = 1$

(d) $x = \dfrac{ln\left(\dfrac{y}{750}\right)}{0.183}$

(e) بالتعويض: $x \approx 5.4$ أي أكثر من 5 سنوات، لذا 2006

$x \approx 13.6$ أي أكثر من 13 سنة، لذا سنة 2014.

ملخص

- صورة الدالة الأسية هي: $y = ab^x$
- $b > 1$ الدالة تمثل نموًّا أسيًّا عامله b
- $0 < b < 1$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا عامله b
- $y = ab^{cx}$، تتغير الرسوم البيانية للدالة الأسيّة بتغير قيم إحدى الثوابت التالية: $a\ ,b\ ,c$
- $y = b^x \Leftrightarrow \log_b y = x$
- اقرأ $\log_b y$ لوغاريتم y للأساس b
- الأساس b في المقدار الأس b^x هو نفسه الأساس في اللوغاريتم وفي كلتا الحالتين $b \neq 1$ و $b > 0$ وكذلك الأس.
- x في b^x هو اللوغاريتم في المعادلة $\log_b y = x$
- اللوغاريتمات المعتادة هي اللوغاريتمات للأساس 10 يمكن أن نكتب $\log_{10} y$ أو $\log y$
- الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.
- خواص اللوغاريتمات
- لأي أعداد حقيقية موجبة b, n, m، $b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b m\,n = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k \log_b m\ ,\ k \in \mathbb{R}$

- المعادلة الأسية هي على الشكل $a = b^{cx}$، حيث الأس يتغير.
- $\forall a\ ,\ b \in \mathbb{R}^+\ ,m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\ ,\ a = b \Longleftrightarrow \log_m a = \log_m b$
- بحساب اللوغاريتمات بأي أساس يمكنك استخدام خاصيّة تغيير الأساس لأي أعداد حقيقية موجبة $c\ ,b\ ,m$ حيث $b \neq 1\ ,c \neq 1$

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

$e \approx 2.71828$

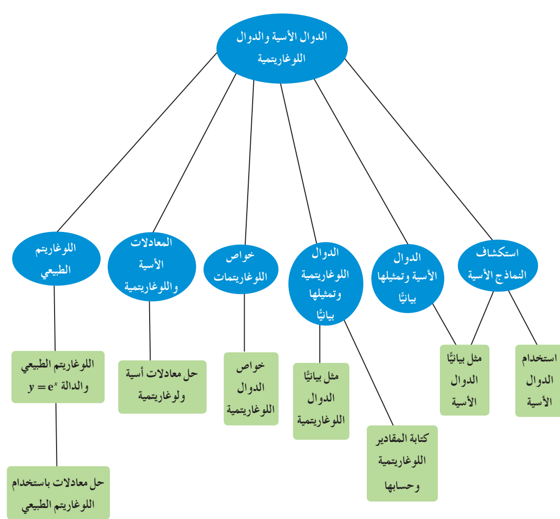
$e^{ln\,x} = x$

$ln\,e^x = x$

$ln\,e = 1$

165

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



164

(26) $\log_x(3x+4) = 2$ **(27)** $ln(x-2) + ln\ x = 1$ **(28)** $ln(x+1) + ln(x-1) = 4$

(29) $ln\,x + ln(2x-1) = 7$ **(30)** $3\,ln\,x - ln\,2 = 4$

(31) لنفترض أن ثمن آلة تستخدم في صناعة سلعة ما لها عامل تضاؤل سنوي قيمته 0.75. إذا بلغ ثمن الآلة 10 000 دينار بعد 5 سنوات من الاستخدام، فما قيمتها الأساسية؟

(32) **الدراسات الاجتماعية:** عام 1991 كان عدد سكان كاراتشي في باكستان حوالى 8 ملايين نسمة، وكان عامل النمو السنوي في هذا الوقت 1.039.

(a) ما عدد السكان المتوقع في عام 2010؟

(b) ما معدل الزيادة السنوية المتوقع؟

(c) متى يصل عدد السكان إلى 10 ملايين نسمة؟

(33) **سكان العالم:** بلغ عدد سكان العالم في عام 1994 حوالى 5.63 بلايين نسمة، ويقال إنه ينمو بمعدل 2% سنويًّا.

(a) اكتب معادلة أسية لوصف هذا النمو.

(b) صف نمو عدد السكان كل 35 سنة.

(c) صف نمو عدد السكان في نصف المدة الزمنية المحددة في الجزء (b).

70

الوحدة الخامسة: المتجهات Vectors

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

5: 1 – المتجه في المستوى

جزء 1: الكميات القياسية والكميات المتجهة.

جزء 2: متجه الموضع.

جزء 3: تكافؤ قطعتين موجهتين.

جزء 4: طول (معيار) متجه واتجاهه.

جزء 5: متجه الوحدة.

جزء 6: تساوي متجهين.

جزء 7: المتجه المعاكس.

جزء 8: ضرب متجه في عدد حقيقي.

5: 2 – جمع المتجهات وطرحها

جزء 1: جمع المتجهات هندسيًّا.

جزء 2: خواص عملية جمع المتجهات في المستوي.

جزء 3: مجموع متجهين جبريًّا.

جزء 4: طرح المتجهات.

جزء 5: الفرق بين متجهين جبريًّا.

جزء 6: التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

5: 3 – الضرب الداخلي

جزء 1: الضرب الداخلي لمتجهين.

جزء 2: خواص الضرب الداخلي.

جزء 3: قياس الزاوية بين متجهين.

مقدمة الوحدة


الوحدة الخامسة

المتجهات

Vectors

مشروع الوحدة:

1 مقدمة المشروع: استخدم الفيزيائيون والمهندسون المتجهات خاصة في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وفي بداية القرن العشرين. بالنسبة إليهم، المتجهات هي قوى وانتقالات وسرعات وحقول كهربائية وحقول مغناطيسية.

2 الأهداف: عند إقلاع الطائرات تتعرض لتيارات هوائية قد تغير في اتجاهها. سوف ندرس في هذا المشروع تأثير هذه التيارات على مسار الطائرة.

3 اللوازم: أوراق رسم، آلة حاسبة، جهاز إسقاط (Data Show)، حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

تبلغ سرعة طيران إحدى الطائرات في الهواء الساكن 850 km/h. عند انطلاقها باتجاه الشرق واجهت هواء بسرعة 50 km/h اتجاهه $40°$ من الجنوب إلى الغرب.

a عبّر عن كلّ من المتجهين بزوج مرتّب لكي تنطلق الطائرة باتجاه الشرق.

b أوجد مجموع المتجهين وطول المتجه الناتج.

c قم بزيارة لإحدى شركات الطيران واسأل أحد الطيارين عن كيفية حساب الاتجاه المناسب للطائرة أثناء الإقلاع وتأثير الهواء على ذلك ثم اسأله عن السرعة الأرضية للطائرة.

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن كيف استفدت من دروس هذه الوحدة ومن لقاءك مع قائد الطائرة لتنفيذ المشروع. ادعم تقريرك بعرض على الحاسوب أو بواسطة جهاز الإسقاط (Data show) لتبيّن عملك بشكل أوضح.

دروس الوحدة

الضرب الداخلي	جمع المتجهات وطرحها	المتجه في المستوى
5−3	5−2	5−1

166

يعتبر السير "وليام هاملتون"، الرياضي الإيرلندي (1805−1865) أول من استخدم تعبير «المتجه» لحل مسائل هندسية. استخدم "ديكارت" الإحداثيات وترجم منحنيات هندسية إلى معادلات.

وفي ألمانيا حوالى العام 1840، عمل "غراسمان" على الهندسة التحليلية من دون الأخذ في الاعتبار إحداثيات النقاط. كانت نقطة الانطلاق جمع قوى وسرعات، أي جمع متجهات على أنها قطع موجهة. وقد أودت به أعماله إلى ضرب المتجهات فسميت «الضرب الخطي»، وتعود تسمية «الضرب الداخلي» إلى "هاملتون" سنة 1853.

تطبق حاليًّا المتجهات في مجالات متعددة، مثل الاقتصاد ومعالجة الصور. تطوّر علم المتجهات على خطين متقاربين: الجبر والهندسة.

فاستخدمت الإحداثيات في المستوى وفي الفضاء للتعامل مع المتجهات، ثم أضيف إليها البعد الرابع وهو الزمن في الفيزياء الحديثة. هندسيًّا يعبر عن المتجه بانسحاب. قام شال بتطوير نظريته التي تقول إن الشغل المبذول لا يعتمد على المسار بين نقطتين: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

في الفيزياء، يسمح الضرب الداخلي باحتساب الشغل عندما نعرف متجه إزاحة الشيء ومتجه القوة:

$W = F \times d \times \cos\theta$

مشروع الوحدة

يوفر هذا المشروع فرصة أمام الطلاب للتفاعل مع مواقف حياتية يتعاملون من خلالها مع عنصر مهم في الرياضيات وهو القطعة الموجهة، حيث أحدث ثورة علمية في مجال الفيزياء فكانت القوى، والانتقال، والسرعة المتجهة، والحقول الكهربائية، والحقول المغناطيسية متجهات ساعدت كثيرًا على إجراء العمليات وإيجاد النتائج بطرائق سهلة ومبسطة. وفي هذا المشروع سنستخدم المتجه لتمثيل السرعة المتجهة للطائرة وأيضًا لتمثيل السرعة المتجهة للهواء.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

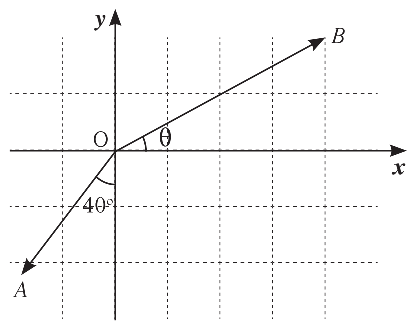
4 (a) $<\overrightarrow{OA}>$ السرعة المتجهة للهواء

$<\overrightarrow{OB}>$ يمثل السرعةالمتجهة للطائرة

$$<\overrightarrow{OA}> = <-50\cos 50° \ , \ -50\sin 50°>$$

$$<\overrightarrow{OA}> = <-32.14 \ , \ -38.30>$$

$$<\overrightarrow{OB}> = <850\cos\theta \ , \ 850\sin\theta>$$



(b) لكي يكون اتجاه الطائرة ناحية الشرق، يجب أن يكون المركّب الثاني لمتجه المجموع يساوي الصفر حيث إن:

$$<\overrightarrow{OA}> + <\overrightarrow{OB}> = <-50\cos 50° + 850\cos\theta, \ -50\sin 50° + 850\sin\theta>$$

أي: $-50\sin 50° + 850\sin\theta = 0$

$$\sin\theta = \frac{50\sin 50°}{850}$$

ومنه نحصل على: $\theta \approx 2.5827°$

$$<\overrightarrow{OA}> = <-32.14, -38.30>, <\overrightarrow{OB}> = <849.14, 38.30>$$

$$<\overrightarrow{OD}> = <\overrightarrow{OA}> + <\overrightarrow{OB}> = <817, 0>$$

(c) تتنوع الإجابات.

الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت الهندسة الإحداثية وقوانينها.
- تعلمت إحداثيات النقطة في المستوي.
- تعلمت الجذور التربيعية.
- تعلمت النسب المثلثية ومقلوباتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- المتجهات.
- ضرب المتجه في عدد حقيقي.
- جمع المتجهات وطرحها.
- إيجاد مركبات (إحداثيات) المتجهات.
- الضرب الداخلي.
- استخدام الضرب الداخلي ومركبات (إحداثيات) المتجهات لحل مسائل هندسية.

أضف إلى معلوماتك

ساهم الفلكي وليم هاملتون William Hamilton في تطوير حساب المتجهات. وهو أول من استخدم سنة 1843 تعبير متجه «Vector» وهو كلمة مشتقة من اللاتينية وتعني «الذي ينقل».

كذلك استخدم الرسام شفروي (1786 – 1899) «Chevreuil» معادلة تسمح بتركيب أكثر من ألف لون انطلاقًا من الألوان: الأزرق b، الأحمر r، الأخضر g:

$$b<\overrightarrow{mb}>+r<\overrightarrow{mr}>+g<\overrightarrow{mg}>=\vec{0}$$

حيث b, r, g نسب الألوان الثلاث للحصول على اللون الجديد m.

عندما تؤثر على السفينة قوّتان $\overrightarrow{or}$, $\overrightarrow{ob}$ فإن انتقال السفينة يكون باتجاه $\overrightarrow{og}$.

المصطلحات الأساسية

المتجه – تساوي متجهين – متجه الوحدة – المتجه المعاكس – الزاوية المحددة بمتجهين – المتجه الصفري – مركِبات المتجه – جمع متجهين – متجها الوحدة الأساسيان – المتجهان المتوازيان – الضرب الداخلي – الزاوية الموجهة – القطعة الموجهة – نقطة بداية – نقطة نهاية – متجه الموضع – تكافؤ قطعتين موجهتين.

167

التقرير

قدم تقريرًا عن أعمالك إلى زملائك في غرفة الصف. ناقش معهم النتائج والحسابات التي توصلت إليها، وأعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا، ثمّ اعرض ما حصلت عليه من مقابلاتك.

سلّم التقييم	
4	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل – يقوم بالحسابات ويعطي الإجابات والأشكال والتفسيرات كلها بأسلوب منظم ودقيق.
3	يعرض الطالب المشروع بشكل عام – يقوم بالحسابات ويعطي الإجابات كلها مرتكبًا أخطاء قليلة، ويعطي التفسيرات بأسلوب منظم.
2	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل – يرتكب الكثير من الأخطاء في الحسابات ويعطي إجابات غير دقيقة، كما أن التفسيرات غير واضحة وغير منظمة.
1	معظم العناصر في المشروع غير كاملة أو ناقصة.

1–5: المتجه في المستوى

1 الأهداف

- يتعرف القطعة الموجهة.
- يتعرف المتجه.
- يتعرف تكافؤ القطع الموجهة.
- يتعرف المتجهين المتعاكسين.
- يتعرف متجه الموضع.
- يوجد قياس الزاوية المحددة بمتجهين.
- يتعرف تساوي متجهين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

محور سيني – محور صادي – عدد قياسي – القطعة الموجهة – متجه الموضع – المتجه – قطعتان موجهتان متكافئتان– طول المتجه – متجه معاكس.

3 الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

(a) أعطِ الطلاب 3 نقاط ليست على استقامة واحدة، واطلب إليهم إكمال متوازي الأضلاع، ثم اسألهم: هل يوجد أكثر من متوازي أضلاع يمكن تكوينه من هذه النقاط؟

(b) ذكّر الطلاب بالمتباينة المثلثية: في المثلث طول كل ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

(c) اسأل الطلاب عن مفهوم الانسحاب، وضع نقطتين على السبورة، ثم اطلب إلى أحدهم شرح الانسحاب الممكن. استخدم البلاط في أرضية غرفة الصف (أو ارسم مربعات على السبورة)، واطلب إلى أحد الطلاب تنفيذ انسحاب مستخدمًا هذه المربعات.

(d) ما النسبة التي تعطي ظل زاوية حادة في المثلث القائم؟

5–1

المتجه في المستوى

The Vector in the Plane

سوف تتعلم

- القطعة الموجهة.
- متجه الموضع.
- تكافؤ القطع الموجهة.
- المتجه.
- تساوي متجهين.
- متجهين متعاكسين.
- الزاوية المحددة بمتجهين وقياسها.

المفردات والمصطلحات:

- محور سيني x–axis
- محور صادي y–axis
- عدد قياسي Scalar Number
- القطعة الموجهة Oriented Segment
- متجه الموضع Position Vector
- قطعتان موجهتان متكافئتان Two Equivalent Oriented Segments
- متجه Vector
- طول المتجه Length of the Vector
- متجه معاكس Opposite Vector

فلنعمل معًا

في الشكل المقابل، القطع المستقيمة المتساوية الطول مبيّنة.

1 حدّد ثلاثة متوازيي أضلاع في الشكل.

2 أكمل:

a في الانسحاب الذي يحوّل A إلى B، يحوّل... إلى...، ويحوّل... إلى... .

b في الانسحاب الذي يحوّل... إلى...، يحوّل... إلى..، ويحوّل F إلى B

c في الانسحاب الذي يحوّل... إلى...، يحوّل F إلى E ويحوّل... إلى... .

3 في السؤال 2 a أكمل النص بعد تبديل A , B

4 ما العلاقة بين الانسحاب الذي يحوّل E إلى B ثم B إلى F والانسحاب الذي يحول E إلى F؟

الكميات القياسية والكميات المتجهة

Scalar Quantities and Oriented Quantities

تقسم الكميات إلى نوعين:

كميات قياسية (عددية): هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي ووحدة قياس.**

مثل: الحرارة – المسافة – العمر – الحجم – الزمن – الكتلة.

فمثلًا: طول مسطرة يساوي 30 cm

كميات متجهة: هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي واتجاه.**

مثل: السرعة – العجلة – الإزاحة – القوة – الوزن.

فمثلًا: إذا قلنا أن سيارة تحركت بسرعة 60 km/h فقط فهذا لا يتمم المعنى لأن تحركها قد يكون شمالًا أو في أي اتجاه آخر وتمثّل مثل هذه الكميات **بقطعة موجهة.**

القطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ لها **نقطة بداية** P و**نقطة نهاية** Q.

يمثّل الرمز $\|\overrightarrow{PQ}\|$ **طول القطعة الموجهة** $\overrightarrow{PQ}$

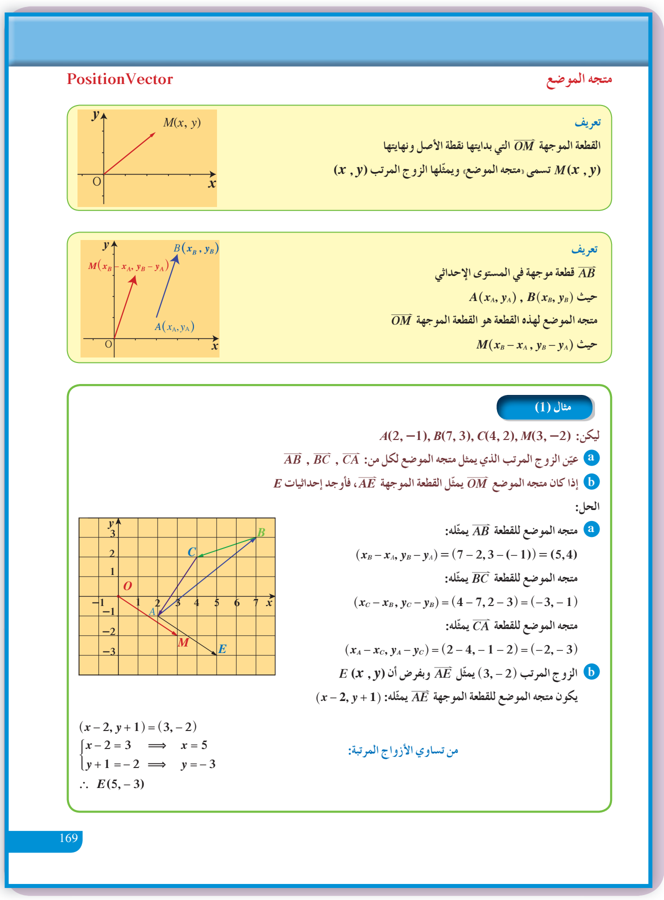
أي المسافة بين نقطة البداية P ونقطة النهاية Q.

اتجاه $\overrightarrow{PQ}$ هو من P إلى Q.

القطعة الموجهة $\overrightarrow{QP}$ لها طول $\overrightarrow{PQ}$ نفسه

ولكن في **الاتجاه المعاكس** أي من Q إلى P.

168



متجه الموضع PositionVector

تعريف

القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x , y)$ تسمى «متجه الموضع» ويمثّلها الزوج المرتب (x , y)

تعريف

$\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي

حيث $A(x_A, y_A) , B(x_B, y_B)$

متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$

حيث $M(x_B - x_A , y_B - y_A)$

مثال (1)

ليكن: $A(2, -1), B(7, 3), C(4, 2), M(3, -2)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

b إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{AE}$، فأوجد إحداثيات E

الحل:

a متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{AB}$ يمثّله:

$(x_B - x_A, y_B - y_A) = (7-2, 3-(-1)) = (5,4)$

متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{BC}$ يمثّله:

$(x_C - x_B, y_C - y_B) = (4-7, 2-3) = (-3, -1)$

متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{CA}$ يمثّله:

$(x_A - x_C, y_A - y_C) = (2-4, -1-2) = (-2, -3)$

b الزوج المرتب $(3, -2)$ يمثّل $\overrightarrow{AE}$ وبفرض أن $E(x , y)$

يكون متجه الموضع للقطعة الموجهة $\overrightarrow{AE}$ يمثّله: $(x-2, y+1)$

من تساوي الأزواج المرتبة:

$(x-2, y+1) = (3, -2)$

$\begin{cases} x-2 = 3 \implies x = 5 \\ y+1 = -2 \implies y = -3 \end{cases}$

$\therefore E(5, -3)$

169

5 التدريس

ارسم على السبورة عدة تمثيلات لمتجه، ثم اشرح للطلاب فكرة أن كل هذه التمثيلات هي لمتجه واحد ولا تمثل عدة متجهات. شدّد على أنه يمكن رسم «تمثيل المتجه أينما نريد أو وفق الحاجة في المسألة شرط المحافظة على الاتجاه والطول.

المتجه الصفري: الطول $= 0$، من دون طرح موضوع الاتجاه للمتجه الصفري.

أعدهم إلى الشكل في فقرة «فلنعمل معًا». ألفت انتباههم إلى العلاقة بين متوازي الأضلاع والمتجهات المتساوية. يمكنك الاستفادة من هذا الشكل للتركيز على المتجه المعاكس.

ثمّ شدّد على أن عليهم الانتباه إلى متجه الموضع الذي يمثل حالة خاصة لكل قطعة موجهة.

راجع مع الطلاب العلاقة بين إشارة k وتحول اتجاه المتجه نتيجة ضربه في عدد غير صفري.

أكد على أن $\llbracket \vec{A} \rrbracket \times |k|$، كمية موجبة دومًا.

أشر إلى العلاقة بين ضرب متجه في عدد حقيقي والمتجهات المتوازية. يكون المتجهان $\vec{A}, \vec{B}$ متوازيين إذا وفقط إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي $k \neq 0$ بحيث يكون $\vec{A} = k\vec{B}$.

اطرح على الطلاب فكرة النقاط على استقامة واحدة، واسألهم عن كيفية إثبات ذلك.

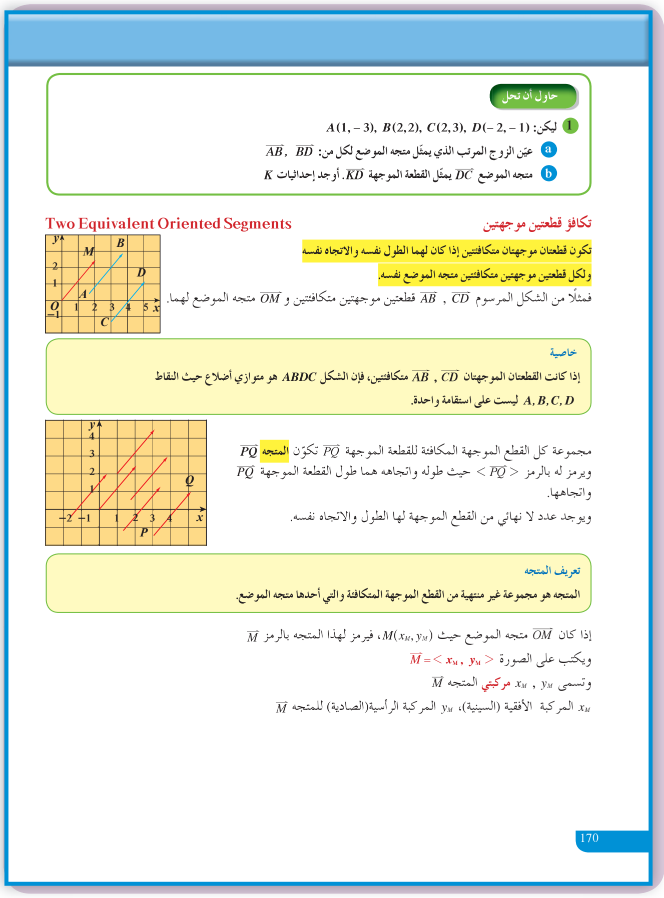
– يجب أن يكون المتجهان متوازيين وأن تكون نقطة مشتركة بين المتجهين، مثال: $<\overrightarrow{AB}> = 3<\overrightarrow{AC}>$.

– المتجهان $<\overrightarrow{AB}>, <\overrightarrow{AC}>$ متوازيان والنقطة A مشتركة.

$\therefore$ النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

في المثال (1)

اشرح بإسهاب الربط بين القطعة الموجهة ومتجه الموضع.



حاول أن تحل

1 ليكن: $A(1,-3),\ B(2,2),\ C(2,3),\ D(-2,-1)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثّل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BD}$

b متجه الموضع $\overrightarrow{DC}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{KD}$. أوجد إحداثيات K

تكافؤ قطعتين موجهتين Two Equivalent Oriented Segments

تكون قطعتان موجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه ولكل قطعتين موجهتين متكافئتين متجه الموضع نفسه.

فمثلًا من الشكل المرسوم $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ قطعتين موجهتين متكافئتين و $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع لهما.

خاصية

إذا كانت القطعتان الموجهتان $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ متكافئتين، فإن الشكل $ABDC$ هو متوازي أضلاع حيث النقاط A, B, C, D ليست على استقامة واحدة.

مجموعة كل القطع الموجهة المكافئة للقطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ تكوّن المتجه $\overrightarrow{PQ}$ ويرمز له بالرمز $<\overrightarrow{PQ}>$ حيث طوله واتجاهه هما طول القطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ واتجاهها.

ويوجد عدد لا نهائي من القطع الموجهة لها الطول والاتجاه نفسه.

تعريف المتجه

المتجه هو مجموعة غير منتهية من القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع.

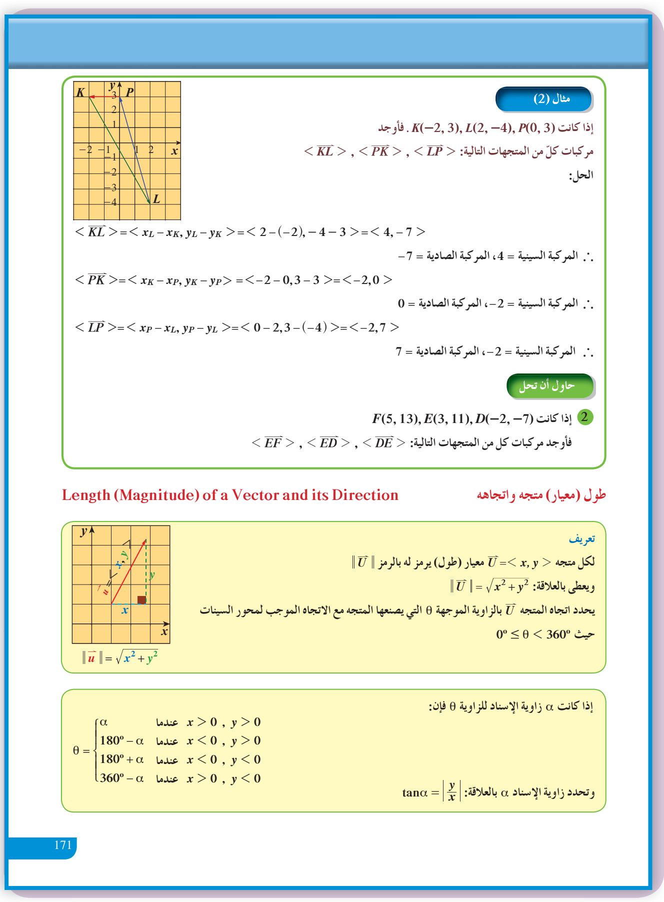
إذا كان $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع حيث $M(x_M, y_M)$، فيرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{M}$

ويكتب على الصورة $\overrightarrow{M} = < x_M , y_M >$

وتسمى y_M , x_M مركبتي المتجه $\overrightarrow{M}$

x_M المركبة الأفقية (السينية)، y_M المركبة الرأسية(الصادية) للمتجه $\overrightarrow{M}$

170



مثال (2)

إذا كانت $K(-2, 3), L(2, -4), P(0, 3)$. فأوجد

مركبات كلّ من المتجهات التالية: $<\overrightarrow{KL}> , <\overrightarrow{PK}> , <\overrightarrow{LP}>$

الحل:

$$<\overrightarrow{KL}> = < x_L - x_K, y_L - y_K > = < 2-(-2), -4-3 > = < 4, -7 >$$

$\therefore$ المركبة السينية $= 4$، المركبة الصادية $= -7$

$$<\overrightarrow{PK}> = < x_K - x_P, y_K - y_P > = < -2-0, 3-3 > = < -2, 0 >$$

$\therefore$ المركبة السينية $= -2$، المركبة الصادية $= 0$

$$<\overrightarrow{LP}> = < x_P - x_L, y_P - y_L > = < 0-2, 3-(-4) > = < -2, 7 >$$

$\therefore$ المركبة السينية $= -2$، المركبة الصادية $= 7$

حاول أن تحل

2 إذا كانت $F(5, 13), E(3, 11), D(-2, -7)$

فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $<\overrightarrow{DE}> , <\overrightarrow{ED}> , <\overrightarrow{EF}>$

طول (معيار) متجه واتجاهه Length (Magnitude) of a Vector and its Direction

تعريف

لكل متجه $\overrightarrow{U} = < x, y >$ معيار (طول) يرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{U}\|$

ويعطى بالعلاقة: $\|\overrightarrow{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

يحدد اتجاه المتجه $\overrightarrow{U}$ بالزاوية الموجهة θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{عندما } x > 0 , y > 0 \\ 180^\circ - \alpha & \text{عندما } x < 0 , y > 0 \\ 180^\circ + \alpha & \text{عندما } x < 0 , y < 0 \\ 360^\circ - \alpha & \text{عندما } x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

وتحدد زاوية الإسناد α بالعلاقة: $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

171

في المثال (2)

تأكد من أن الطلاب قد فهموا جيّدًا كيفية إيجاد مركّبات المتجه، ثمّ اطلب إلى عدد من الطلاب كتابة القاعدة على السبورة وذلك لإيجاد مركبات $\overline{AB}$ إذا كانت:

$A(x_1 , y_1), B(x_2 , y_2)$ فيكون $< \overline{AB} >= (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$

في المثال (3)

توسع في المناقشة حول إيجاد الزاوية بين متجه والاتجاه الموجب لمحور السينات، ثمّ حدّد في كل حالة من الحالات الأربع كيفية إيجاد قياس الزاوية باستخدام الظل وزاوية الإسناد.

في المثال (4)

يساعد هذا المثال الطالب على تطبيق التعريف لمتجه الوحدة حيث يستخدم $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$، أي أن المعيار لهذا المتجه هو 1، ومنه يحل المعادلة لإيجاد مجهول.

أخبر الطلاب أن x^2 أو y^2 في المعادلة تعطينا قيمتين مقبولتين للمتغير x أو قيمتين مقبولتين للمتغير y.

في المثال (5)

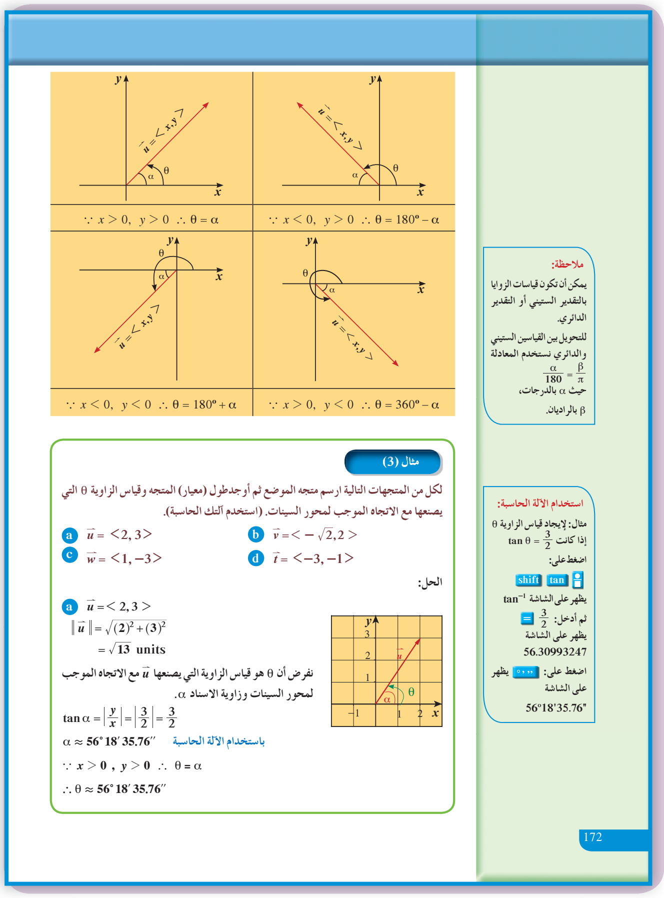
يقدم هذا المثال فرصة للطالب كي يطبق قواعد إيجاد المركبات السينية والصادية للمتجهات، كي يثبت تكافؤ متجهين أو أكثر وذلك بالمساواة بين المركبات السينية والمساواة بين المركبات الصادية.

في المثال (6)

يساعد هذا المثال الطالب على استخدام المساواة بين متجهين بحيث يكتب المساواة بين المركبات السينية والمركبات الصادية ثم يحل ليجد المتغير.

في المثال (7)

بعد حل المثال، أكِّد على العلاقة بين قطع مستقيمة في أشكال هندسية والمتجهات، ثمّ اطلب إليهم كتابة أمثلة بديلة على السبورة تؤكد العلاقة بين قطع مستقيمة في الأشكال الرباعية والمتجهات مثل المستطيل والمربع ومتوازي الأضلاع.



$\because x > 0,\ y > 0 \ \therefore \theta = \alpha$ | $\because x < 0,\ y > 0 \ \therefore \theta = 180^\circ - \alpha$

$\because x < 0,\ y < 0 \ \therefore \theta = 180^\circ + \alpha$ | $\because x > 0,\ y < 0 \ \therefore \theta = 360^\circ - \alpha$

ملاحظة:
يمكن أن تكون قياسات الزوايا بالتقدير الستيني أو التقدير الدائري.
للتحويل بين القياسين الستيني والدائري نستخدم المعادلة $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$ حيث α بالدرجات، β بالراديان.

مثال (3)

لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجدطول (معيار) المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (استخدم آلتك الحاسبة).

a) $\vec{u} = <2, 3>$ b) $\vec{v} = < -\sqrt{2}, 2 >$
c) $\vec{w} = <1, -3>$ d) $\vec{t} = <-3, -1>$

الحل:

a) $\vec{u} = < 2, 3 >$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$ units

نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وزاوية الاسناد α.

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

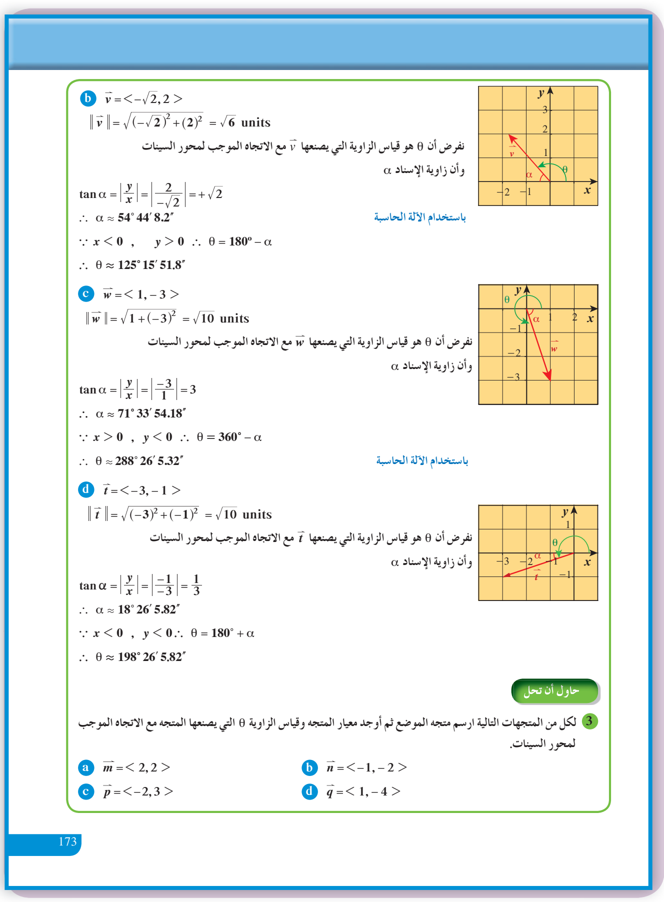
$\alpha \approx 56^\circ 18' 35.76''$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\because x > 0 ,\ y > 0 \ \therefore \ \theta = \alpha$

$\therefore \theta \approx 56^\circ 18' 35.76''$

استخدام الآلة الحاسبة:
مثال: لإيجاد قياس الزاوية θ إذا كانت $\tan\theta = \frac{3}{2}$
اضغط على: shift tan
يظهر على الشاشة $\tan^{-1}$
ثم أدخل: $\frac{3}{2}$ =
يظهر على الشاشة
56.30993247
اضغط على: ° ' '' يظهر على الشاشة
56°18'35.76"

172



b) $\vec{v} = < -\sqrt{2}, 2 >$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$ units

نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{2}{-\sqrt{2}}\right| = +\sqrt{2}$

$\therefore \alpha \approx 54^\circ 44' 8.2''$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\because x < 0 ,\ y > 0 \ \therefore \ \theta = 180^\circ - \alpha$

$\therefore \theta \approx 125^\circ 15' 51.8''$

c) $\vec{w} = < 1, -3 >$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{1 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ units

نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{w}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-3}{1}\right| = 3$

$\therefore \alpha \approx 71^\circ 33' 54.18''$

$\because x > 0 ,\ y < 0 \ \therefore \ \theta = 360^\circ - \alpha$

$\therefore \theta \approx 288^\circ 26' 5.32''$ باستخدام الآلة الحاسبة

d) $\vec{t} = < -3, -1 >$

$\|\vec{t}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ units

نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{t}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-1}{-3}\right| = \frac{1}{3}$

$\therefore \alpha \approx 18^\circ 26' 5.82''$

$\because x < 0 ,\ y < 0 \therefore \ \theta = 180^\circ + \alpha$

$\therefore \theta \approx 198^\circ 26' 5.82''$

حاول أن تحل

3) لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجد معيار المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

a) $\vec{m} = < 2, 2 >$ b) $\vec{n} = < -1, -2 >$
c) $\vec{p} = < -2, 3 >$ d) $\vec{q} = < 1, -4 >$

173

في المثال (8)

يبيّن هذا المثال كيفية ضرب متجه بعدد حقيقي غير الصفر، وكيف أن مركبات المتجه هي التي يتم ضربها بالعدد الحقيقي، علمًا أنه إذا كان العدد الحقيقي موجبًا نحصل على متجه له الاتجاه نفسه للمتجه الأساسي، ولكن إذا كان العدد الحقيقي سالبًا نحصل على متجه له اتجاه معاكس للمتجه الأساسي.

في المثال (9)

أكّد للطلاب أن النقاط تكون على استقامة واحدة إذا أمكن إيجاد متجهين أحدهما يساوي المتجه الآخر مضروبًا بعدد حقيقي غير صفري، وبشرط وجود نقطة مشتركة.

في المثال (10)

يساعد هذا المثال الطلاب على فهم كيفية استخدام ناتج ضرب العدد القياسي (موجب أو سالب) بالقطعة الموجهة، وذلك لرسم نقاط تقع على القطعة الموجهة نفسها.

6 الربط

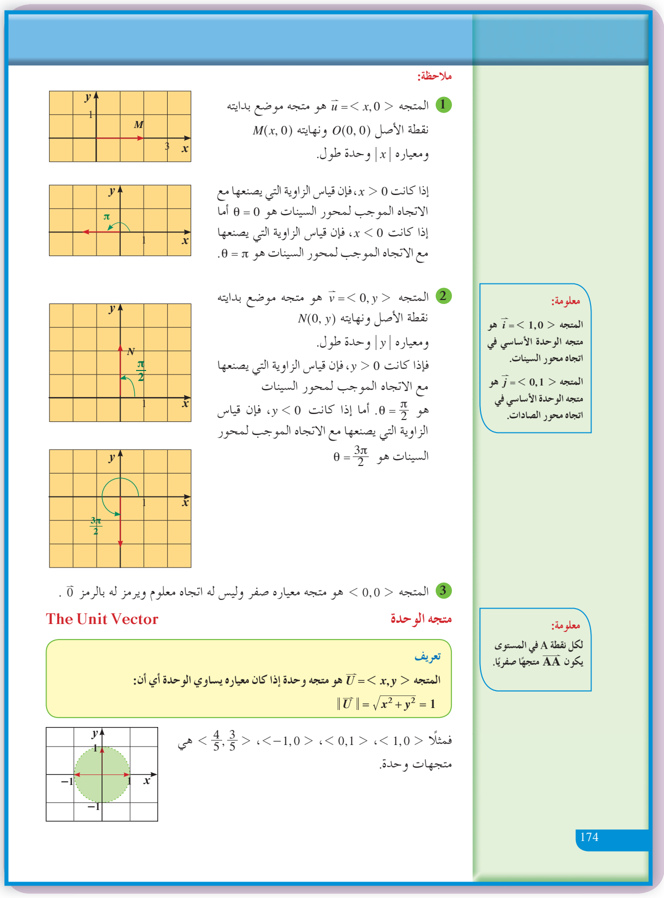
لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

معظم الأخطاء التي يقع فيها الطلاب هي عدم مراعاة الاتجاه عند التعامل مع المتجهات. اطلب إليهم أن يسألوا أنفسهم دائمًا عن الاتجاه في كل تمرين أو نشاط في هذا الدرس.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، ثمّ تأكد من صحة عملهم ودقته.



ملاحظة:

1 المتجه $\vec{u} = < x, 0 >$ هو متجه موضع بدايته نقطة الأصل $O(0, 0)$ ونهايته $M(x, 0)$ ومعياره $|x|$ وحدة طول.

إذا كانت $x > 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = 0$ أما إذا كانت $x < 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \pi$.

2 المتجه $\vec{v} = < 0, y >$ هو متجه موضع بدايته نقطة الأصل ونهايته $N(0, y)$ ومعياره $|y|$ وحدة طول.
فإذا كانت $y > 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \frac{\pi}{2}$. أما إذا كانت $y < 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \frac{3\pi}{2}$

3 المتجه $< 0,0 >$ هو متجه معياره صفر وليس له اتجاه معلوم ويرمز له بالرمز $\vec{0}$.

متجه الوحدة The Unit Vector

تعريف

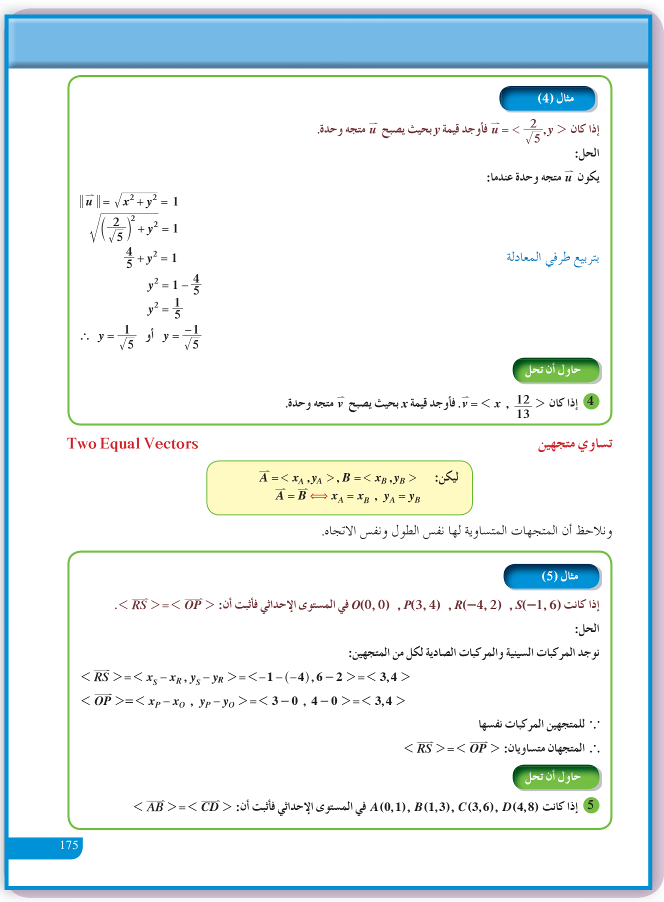
المتجه $\vec{U} = < x,y >$ هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة أي أن:
$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

فمثلًا $< 1,0 >$، $< 0,1 >$، $<-1,0 >$، $< \frac{4}{5}, \frac{3}{5} >$ هي متجهات وحدة.

معلومة:
المتجه $\vec{i} = < 1,0 >$ هو متجه الوحدة الأساسي في اتجاه محور السينات.
المتجه $\vec{j} = < 0,1 >$ هو متجه الوحدة الأساسي في اتجاه محور الصادات.

معلومة:
لكل نقطة A في المستوى يكون $\overrightarrow{AA}$ متجهًا صفريًا.

174



مثال (4)

إذا كان $\vec{u} = < \frac{2}{\sqrt{5}}, y >$ فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

الحل:

يكون $\vec{u}$ متجه وحدة عندما:

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + y^2} = 1$

بتربيع طرفي المعادلة $\frac{4}{5} + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - \frac{4}{5}$

$y^2 = \frac{1}{5}$

$\therefore\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ أو $y = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{v} = < x , \frac{12}{13} >$. فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{v}$ متجه وحدة.

تساوي متجهين Two Equal Vectors

ليكن: $\vec{A} = < x_A, y_A >, B = < x_B, y_B >$
$\vec{A} = \vec{B} \Longleftrightarrow x_A = x_B\ ,\ y_A = y_B$

ونلاحظ أن المتجهات المتساوية لها نفس الطول ونفس الاتجاه.

مثال (5)

إذا كانت $S(-1, 6)$, $R(-4, 2)$, $P(3, 4)$, $O(0, 0)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{RS} > = < \overrightarrow{OP} >$.

الحل:

نوجد المركبات السينية والمركبات الصادية لكل من المتجهين:

$< \overrightarrow{RS} > = < x_S - x_R , y_S - y_R > = < -1-(-4), 6-2 > = < 3,4 >$

$< \overrightarrow{OP} > = < x_P - x_O\ ,\ y_P - y_O > = < 3-0\ ,\ 4-0 > = < 3,4 >$

$\because$ للمتجهين المركبات نفسها

$\therefore$ المتجهان متساويان: $< \overrightarrow{RS} > = < \overrightarrow{OP} >$

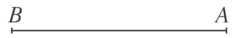
حاول أن تحل

5 إذا كانت $A(0,1), B(1,3), C(3,6), D(4,8)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$

175

اختبار سريع

❶ $A\,,B$ نقطتان في المستوى.



ضع النقاط $M\,,N$ حيث

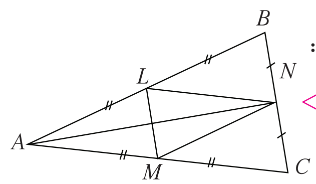
$$<\overrightarrow{AM}>=2<\overrightarrow{AB}>,<\overrightarrow{AN}>=-0.5<\overrightarrow{AB}>$$

❷ انظر إلى الشكل أدناه، ثم أكمل:

$<\overrightarrow{AL}>=<\overrightarrow{MN}>=<\overrightarrow{LB}>$

معاكس $<\overrightarrow{LM}>$ هو:

$<\overrightarrow{CN}>$ أو $<\overrightarrow{NB}>$



9 إجابات وحلول

«فلنعمل معًا»

1 $BFDC\,,BFED\,,ABDF$

2 (a) B إلى C، F إلى D

(b) E إلى D، D إلى C

(c) A إلى F، B إلى D

3 C إلى B، D إلى F

4 كلاهما يحوّل E إلى F

«حاول أن تحل»

1 (a) $<\overrightarrow{AB}>=<2-1,2-(-3)>$

$<\overrightarrow{AB}>=<1,5>$

$<\overrightarrow{BD}>=<-2-2,-1-2>$

$<\overrightarrow{BD}>=<-4,-3>$

(b) $<\overrightarrow{OC}>=<\overrightarrow{KD}>$

$<2,3>=<-2-x,-1-y>$

$-2-x=2\,;x=-4$

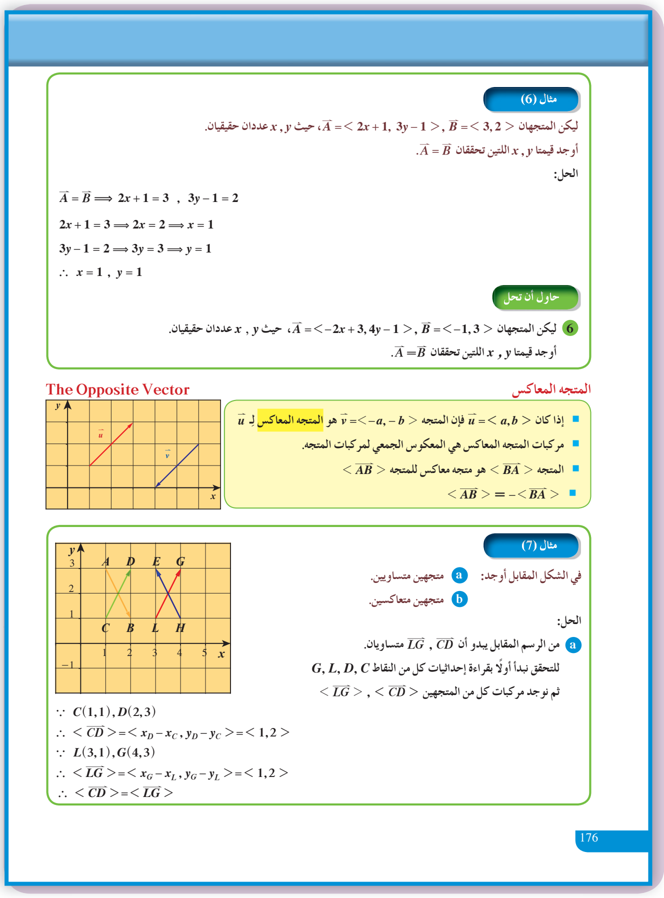
$-1-y=3\,;y=-4$

ومنه $K(-4,-4)$

2 $<\overrightarrow{EF}>=\langle 5-3,13-11\rangle=\langle 2,2\rangle$

$<\overrightarrow{ED}>=\langle -2-3,-7-11\rangle=\langle -5,-18\rangle$

$<\overrightarrow{DE}>=\langle 3-(-2),11-(-7)\rangle=\langle 5,18\rangle$



مثال (6)

ليكن المتجهان $\overrightarrow{A}=<2x+1,\ 3y-1>,\ \overrightarrow{B}=<3,2>$، حيث $x\,,y$ عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا $x\,,y$ اللتين تحققان $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B}$.

الحل:

$\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B}\Longrightarrow 2x+1=3\ ,\ 3y-1=2$

$2x+1=3\Longrightarrow 2x=2\Longrightarrow x=1$

$3y-1=2\Longrightarrow 3y=3\Longrightarrow y=1$

$\therefore\ x=1\ ,\ y=1$

حاول أن تحل

6 ليكن المتجهان $\overrightarrow{A}=<-2x+3,4y-1>,\ \overrightarrow{B}=<-1,3>$، حيث $x\ ,\ y$ عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا $x\ ,\ y$ اللتين تحققان $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B}$.

المتجه المعاكس The Opposite Vector

- إذا كان $\overrightarrow{u}=<a,b>$ فإن المتجه $\overrightarrow{v}=<-a,-b>$ هو المتجه المعاكس لِـ $\overrightarrow{u}$
- مركبات المتجه المعاكس هي المعكوس الجمعي لمركبات المتجه.
- المتجه $<\overrightarrow{BA}>$ هو متجه معاكس للمتجه $<\overrightarrow{AB}>$
- $<\overrightarrow{AB}>=-<\overrightarrow{BA}>$

مثال (7)

في الشكل المقابل أوجد: (a) متجهين متساويين. (b) متجهين متعاكسين.

الحل:

(a) من الرسم المقابل يبدو أن $\overrightarrow{LG}\ ,\ \overrightarrow{CD}$ متساويان.

للتحقق نبدأ أولًا بقراءة إحداثيات كل من النقاط G,L,D,C

ثم نوجد مركبات كل من المتجهين $<\overrightarrow{LG}>\ ,\ <\overrightarrow{CD}>$

$\because\ C(1,1),D(2,3)$

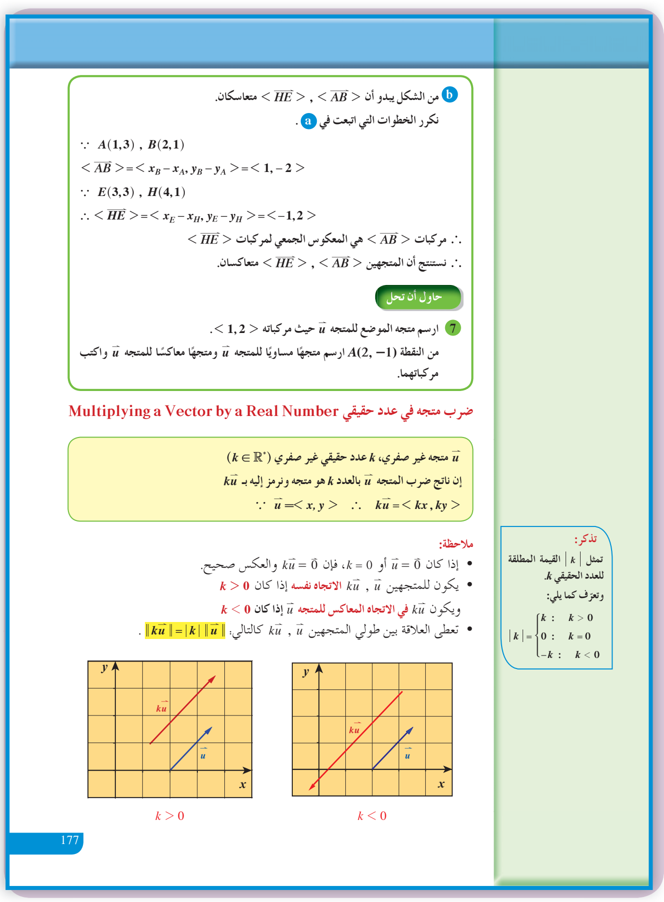
$\therefore\ <\overrightarrow{CD}>=<x_D-x_C\,,y_D-y_C>=<1,2>$

$\because\ L(3,1),G(4,3)$

$\therefore\ <\overrightarrow{LG}>=<x_G-x_L\,,y_G-y_L>=<1,2>$

$\therefore\ <\overrightarrow{CD}>=<\overrightarrow{LG}>$

176



(b) من الشكل يبدو أن $<\overrightarrow{AB}>\ ,\ <\overrightarrow{HE}>$ متعاسكان.

نكرر الخطوات التي اتبعت في (a).

$\because\ A(1,3)\ ,\ B(2,1)$

$<\overrightarrow{AB}>=<x_B-x_A,y_B-y_A>=<1,-2>$

$\because\ E(3,3)\ ,\ H(4,1)$

$\therefore <\overrightarrow{HE}>=<x_E-x_H,y_E-y_H>=<-1,2>$

∴ مركبات $<\overrightarrow{AB}>$ هي المعكوس الجمعي لمركبات $<\overrightarrow{HE}>$

∴ نستنتج أن المتجهين $<\overrightarrow{AB}>\ ,\ <\overrightarrow{HE}>$ متعاكسان.

حاول أن تحل

7 ارسم متجه الموضع للمتجه $\overrightarrow{u}$ حيث مركباته $<1,2>$.

من النقطة $A(2,-1)$ ارسم متجهًا مساويًا للمتجه $\overrightarrow{u}$ ومتجهًا معاكسًا للمتجه $\overrightarrow{u}$ واكتب مركباتهما.

ضرب متجه في عدد حقيقي Multiplying a Vector by a Real Number

$\overrightarrow{u}$ متجه غير صفري، k عدد حقيقي غير صفري $(k\in\mathbb{R}^*)$

إن ناتج ضرب المتجه $\overrightarrow{u}$ بالعدد k هو متجه ونرمز إليه بـ $k\overrightarrow{u}$

$\because\ \overrightarrow{u}=<x,y>\quad\therefore\quad k\overrightarrow{u}=<kx\,,ky>$

ملاحظة:

- إذا كان $\overrightarrow{u}=\vec{0}$ أو $k=0$، فإن $k\overrightarrow{u}=\vec{0}$ والعكس صحيح.
- يكون للمتجهين $\overrightarrow{u}\ ,\ k\overrightarrow{u}$ الاتجاه نفسه إذا كان $k>0$
  ويكون $k\overrightarrow{u}$ في الاتجاه المعاكس للمتجه $\overrightarrow{u}$ إذا كان $k<0$
- تعطى العلاقة بين طولي المتجهين $\overrightarrow{u}\ ,\ k\overrightarrow{u}$ كالتالي: $\|k\overrightarrow{u}\|=|k|\,\|\overrightarrow{u}\|$.

$k>0$ $k<0$

تذكر:
تمثل $|k|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.
وتعرّف كما يلي:

$$|k|=\begin{cases}k: & k>0\\ 0: & k=0\\ -k: & k<0\end{cases}$$

177

خواص

1. يكون للمتجهين غير الصفريين $<\overrightarrow{CD}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ الاتجاه نفسه إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{CD}>$
2. يكون للمتجهين غير الصفريين $<\overrightarrow{CD}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ اتجاهين متعاكسين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي سالب k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{CD}>$
3. تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{AC}>$

مثال (8)

إذا كان $\overrightarrow{A}=<-1,2>$ فأوجد:

ⓐ $2\overrightarrow{A}$ ⓑ $-\overrightarrow{A}$ ⓒ $0.5\overrightarrow{A}$

الحل:

ⓐ $2\overrightarrow{A}=<2(-1),2(2)>=<-2,4>$

ⓑ $-\overrightarrow{A}=<-(-1),-(2)>=<1,-2>$

ⓒ $0.5\overrightarrow{A}=<0.5(-1),0.5(2)>=<-0.5,1>$

حاول أن تحل

8. إذا كان $\overrightarrow{B}=<3,-2>$ فأوجد:

ⓐ $3\overrightarrow{B}$ ⓑ $-5\overrightarrow{B}$ ⓒ $\frac{3}{2}\overrightarrow{B}$

مثال (9)

باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $A(2,3)$, $B(-2,5)$, $C(10,-1)$ على استقامة واحدة.

الحل:

لكي نثبت أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة نحدد أحد المتجهات وليكن $\overrightarrow{AB}$ ثم نبحث عن متجه آخر يساوي $k<\overrightarrow{AB}>$ حيث k عدد حقيقي غير صفري.

$<\overrightarrow{AB}>=<x_B-x_A , y_B-y_A>=<-2-2 , 5-3>$

$=<-4,2>$

نختبر المتجه $<\overrightarrow{AC}>$

$<\overrightarrow{AC}>=<x_C-x_A , y_C-y_A>=<10-2 , -1-3>$

$=<8,-4>$

$\because <\overrightarrow{AC}>=-2<\overrightarrow{AB}>$

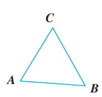
أي أن $<\overrightarrow{AC}>=k<\overrightarrow{AB}>$

$\therefore$ النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

حاول أن تحل

9. باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $K(0,-1)$, $L(2,3)$, $M(-2,-5)$ على استقامة واحدة.

مثال (10)

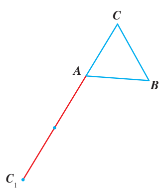


ABC مثلث

ⓐ ارسم $<\overrightarrow{CC_1}>$ بحيث $<\overrightarrow{CC_1}>=3<\overrightarrow{CA}>$

ⓑ ارسم $<\overrightarrow{AB_1}>$ بحيث $<\overrightarrow{AB_1}>=-2<\overrightarrow{AB}>$

الحل:



ⓐ $<\overrightarrow{CC_1}>=3<\overrightarrow{CA}>$

$\because k=3$ عدد موجب

$\therefore <\overrightarrow{CC_1}>$ ، $<\overrightarrow{CA}>$ لهما الاتجاه نفسه.

C نقطة مشتركة $\therefore C_1\in\overrightarrow{CA} \Longleftarrow C_1, A, C$ على استقامة واحدة

نرسم على $\overrightarrow{CA}$ النقطة C_1 بحيث إن $\|\overrightarrow{CC_1}\|=3\|\overrightarrow{CA}\|$

فيكون $<\overrightarrow{CC_1}>$ في نفس اتجاه $<\overrightarrow{CA}>$

ⓑ $<\overrightarrow{AB_1}>=-2<\overrightarrow{AB}>$

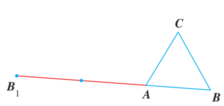
$\because k=-2$ عدد سالب

$\therefore <\overrightarrow{AB_1}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ لهما اتجاهان متعاكسان

$\because A$ نقطة مشتركة

$\therefore B_1\in\overrightarrow{BA}$

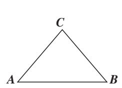
$|k|=2$



نرسم على $\overrightarrow{BA}$ النقطة B_1 بحيث إن $\|\overrightarrow{AB_1}\|=2\|\overrightarrow{AB}\|$

فيكون $<\overrightarrow{AB_1}>$ في اتجاه معاكس للمتجه $<\overrightarrow{AB}>$

حاول أن تحل

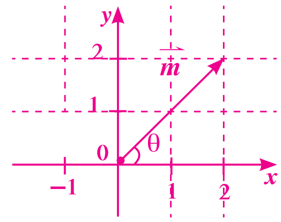


10. ABC مثلث، ارسم $<\overrightarrow{AD}>$ بحيث $<\overrightarrow{AD}>=3<\overrightarrow{AB}>$،
ثم ارسم $<\overrightarrow{BH}>$ بحيث $<\overrightarrow{BH}>=-\frac{3}{2}<\overrightarrow{BC}>$

3 **(a)** $\theta_1=(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{m})$

$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{2}{2}\right|=1 \quad , \quad \because\ x>0, y>0$

$\therefore\ \theta_1=\alpha=45^\circ$



(b) $\theta_2=(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{n})$

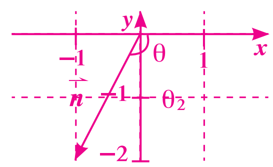
$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{-2}{-1}\right|=2, \Rightarrow \alpha=63.4349$

$\because\ x<0, y<0$

$\therefore\ \theta_2=180+\alpha$

$=243.4349$

$\theta_2=243^\circ 26' 5.82''$



(c) $\theta_3=(\overrightarrow{0x},\overrightarrow{p})$

$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{3}{-2}\right|=1.5$

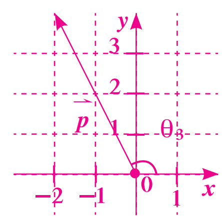
$\therefore\ \alpha=56.3099$

$\because\ x<0\ ,\ y>0$

$\therefore \theta_3=180-\alpha$

$=123.6912$

$\therefore\ \theta_3=123^\circ 41' 24''$



(d) $\theta_4=(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{q})$

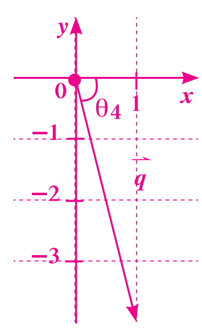
$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{-4}{1}\right|=4$

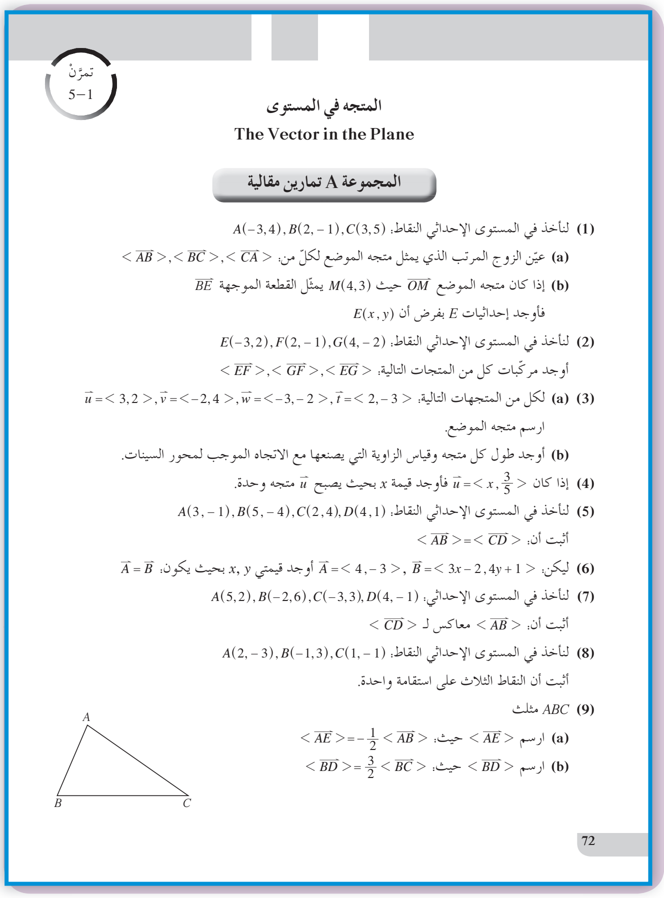
$\alpha=75.9637$

$\because\ x>0\ ,\ y<0$

$\therefore\ \theta_4=360-\alpha$

$=284^\circ 2' 10''$





تمرّنْ 5−1

المتجه في المستوى
The Vector in the Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(-3,4), B(2,-1), C(3,5)$

(a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكلّ من: $<\overrightarrow{AB}>, <\overrightarrow{BC}>, <\overrightarrow{CA}>$

(b) إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ حيث $M(4,3)$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{BE}$

فأوجد إحداثيات E بفرض أن $E(x,y)$

(2) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(-3,2), F(2,-1), G(4,-2)$

أوجد مركّبات كل من المتجات التالية: $<\overrightarrow{EF}>, <\overrightarrow{GF}>, <\overrightarrow{EG}>$

(3) **(a)** لكل من المتجهات التالية: $\vec{u}=<3,2>, \vec{v}=<-2,4>, \vec{w}=<-3,-2>, \vec{t}=<2,-3>$

ارسم متجه الموضع.

(b) أوجد طول كل متجه وقياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(4) إذا كان $\vec{u}=<x,\frac{3}{5}>$ فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

(5) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,-1), B(5,-4), C(2,4), D(4,1)$

أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}>=<\overrightarrow{CD}>$

(6) ليكن: $\vec{A}=<4,-3>, \vec{B}=<3x-2, 4y+1>$ أوجد قيمتي x, y بحيث يكون: $\vec{A}=\vec{B}$

(7) لنأخذ في المستوى الإحداثي: $A(5,2), B(-2,6), C(-3,3), D(4,-1)$

أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}>$ معاكس لـ $<\overrightarrow{CD}>$

(8) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(2,-3), B(-1,3), C(1,-1)$

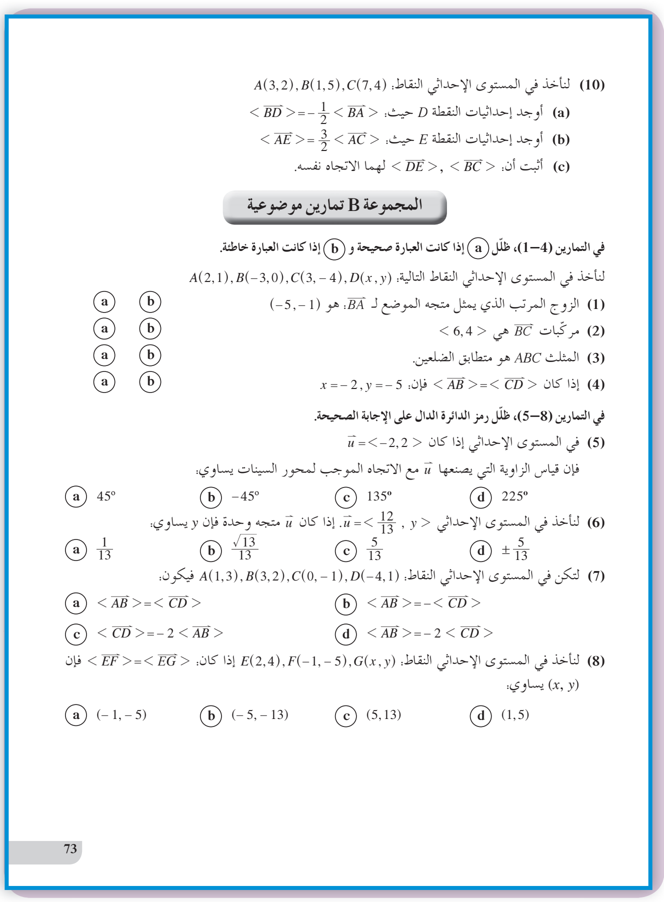
أثبت أن النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

(9) ABC مثلث

(a) ارسم $<\overrightarrow{AE}>$ حيث: $<\overrightarrow{AE}>=-\frac{1}{2}<\overrightarrow{AB}>$

(b) ارسم $<\overrightarrow{BD}>$ حيث: $<\overrightarrow{BD}>=\frac{3}{2}<\overrightarrow{BC}>$

72



(10) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,2), B(1,5), C(7,4)$

(a) أوجد إحداثيات النقطة D حيث: $<\overrightarrow{BD}>=-\frac{1}{2}<\overrightarrow{BA}>$

(b) أوجد إحداثيات النقطة E حيث: $<\overrightarrow{AE}>=\frac{3}{2}<\overrightarrow{AC}>$

(c) أثبت أن: $<\overrightarrow{DE}>, <\overrightarrow{BC}>$ لهما الاتجاه نفسه.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط التالية: $A(2,1), B(-3,0), C(3,-4), D(x,y)$

(1) الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ $\overrightarrow{BA}$: هو $(-5,-1)$ — (a) (b)

(2) مركّبات $\overrightarrow{BC}$ هي $<6,4>$ — (a) (b)

(3) المثلث ABC هو متطابق الضلعين. — (a) (b)

(4) إذا كان $<\overrightarrow{AB}>=<\overrightarrow{CD}>$ فإن: $x=-2, y=-5$ — (a) (b)

في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المستوى الإحداثي إذا كان $\vec{u}=<-2,2>$

فإن قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي:

(a) 45° (b) -45° (c) 135° (d) 225°

(6) لنأخذ في المستوى الإحداثي $\vec{u}=<\frac{12}{13}, y>$. إذا كان $\vec{u}$ متجه وحدة فإن y يساوي:

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ (c) $\frac{5}{13}$ (d) $\pm\frac{5}{13}$

(7) لتكن في المستوى الإحداثي النقاط: $A(1,3), B(3,2), C(0,-1), D(-4,1)$ فيكون:

(a) $<\overrightarrow{AB}>=<\overrightarrow{CD}>$ (b) $<\overrightarrow{AB}>=-<\overrightarrow{CD}>$

(c) $<\overrightarrow{CD}>=-2<\overrightarrow{AB}>$ (d) $<\overrightarrow{AB}>=-2<\overrightarrow{CD}>$

(8) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(2,4), F(-1,-5), G(x,y)$ إذا كان: $<\overrightarrow{EF}>=<\overrightarrow{EG}>$ فإن (x, y) يساوي:

(a) $(-1,-5)$ (b) $(-5,-13)$ (c) $(5,13)$ (d) $(1,5)$

73

4 $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1^2$

$x^2 = 1 - \frac{144}{169}$

$x^2 = \frac{25}{169}$; $x = \pm\frac{5}{13}$

5 $\vec{U} = <\overrightarrow{AB}> = \langle 1-0, 3-1\rangle = \langle 1,2\rangle$

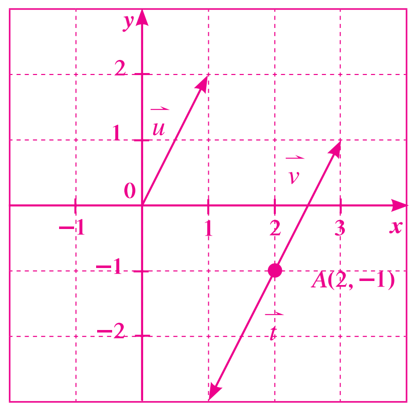
$\vec{V} = <\overrightarrow{CD}> = \langle 4-3, 8-6\rangle = \langle 1,2\rangle$

$\vec{U} = \vec{V} = \langle 1,2\rangle$

6 $\vec{A} = \vec{B}$; $-2x+3 = -1 \Rightarrow x = 2$

$4y - 1 = 3 \Rightarrow y = 1$

7



$\vec{v} = \langle 1,2\rangle$

$\vec{t} = \langle -1,-2\rangle$

8 **(a)** $3\vec{B} = <9,-6>$

(b) $-5\vec{B} = <-15,10>$

(c) $\frac{3}{2}\vec{B} = <\frac{9}{2}, -3>$

9 $<\overrightarrow{KL}> = <2,4>$

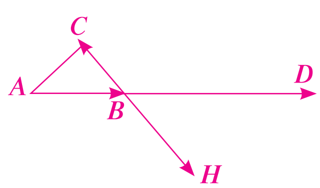
$<\overrightarrow{KM}> = <-2,-4>$

$\therefore\ <\overrightarrow{KL}> = -<\overrightarrow{KM}>$

K نقطة مشتركة

K, L, M على استقامة واحد

10 $<\overrightarrow{AD}> = 3<\overrightarrow{AB}>$ فيكون D, B, A على استقامة واحدة والاتجاه نفسه، ثم $<\overrightarrow{BH}> = -\frac{3}{2}<\overrightarrow{BC}>$ فيكون H, C, B على استقامة واحدة. $<\overrightarrow{BH}>$ باتجاه معاكس مع $<\overrightarrow{BC}>$.



2–5: جمع المتجهات وطرحها


5–2

جمع المتجهات وطرحها

Addition and Subtraction of Vectors

سوف تتعلم
- جمع المتجهات.
- طرح المتجهات.
- خصائص جمع المتجهات.
- كتابة متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
- مركبات المتجهات.
- إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة.

المفردات والمصطلحات:
- جمع المتجهات Adding Vectors
- علاقة شال Chasle's Relation
- قانون متوازي الأضلاع Parallelogram Law
- مركبات المتجه Vector Components

دعنا نفكر ونتناقش

M جسيم نقطي يتعرّض إلى قوتين $\overrightarrow{MA}$، $\overrightarrow{MB}$ كما في الشكل.

ما هو مسار الجسيم M المتأثر بهاتين القوتين؟

1 أكمل رسم متوازي الأضلاع $AMBC$، ثم ارسم $\overrightarrow{MC}$.

2 هل يتغير مسار الجسيم M إذا تغير قياس الزاوية AMB؟ أعد رسم الشكل أعلاه مع قياس AMB أصغر من القياس أعلاه. ارسم متوازي الأضلاع $AMBC$ ثم $\overrightarrow{MC}$. ماذا تستنتج؟

3 هل يتغير مسار الجسيم M إذا تغير $\|\overrightarrow{MB}\|$؟ أعد رسم الشكل أعلاه مع $\|\overrightarrow{MB}\|$ أصغر مما هو معطى. ارسم متوازي الأضلاع $AMBC$ ثم $\overrightarrow{MC}$. ماذا تستنتج؟

جمع المتجهات هندسيًا Adding of Vectors Geometrically

$\vec{A}$، $\vec{B}$ متجهان. أوجد $\vec{A}+\vec{B}$.

- علاقة شال

إذا كانت L نقطة من المستوي، فإننا نرسم $<\overrightarrow{LM}>$ بحيث يكون $<\overrightarrow{LM}>=\vec{A}$، ثم نرسم $<\overrightarrow{MN}>$ بحيث يكون $<\overrightarrow{MN}>=\vec{B}$ فيكون $\vec{A}+\vec{B}=<\overrightarrow{LM}>+<\overrightarrow{MN}>=<\overrightarrow{LN}>$

لأي ثلاث نقاط في المستوى تسمى العلاقة: $<\overrightarrow{LM}>+<\overrightarrow{MN}>=<\overrightarrow{LN}>$ علاقة شال.

- إكمال متوازي الأضلاع

إذا كانت L نقطة من المستوي، فإننا نرسم $<\overrightarrow{LM}>$ بحيث يكون $<\overrightarrow{LM}>=\vec{A}$، ونرسم $<\overrightarrow{LC}>$ بحيث يكون $<\overrightarrow{LC}>=\vec{B}$

N هي النقطة من المستوى التي تكمل متوازي الأضلاع $MLCN$.

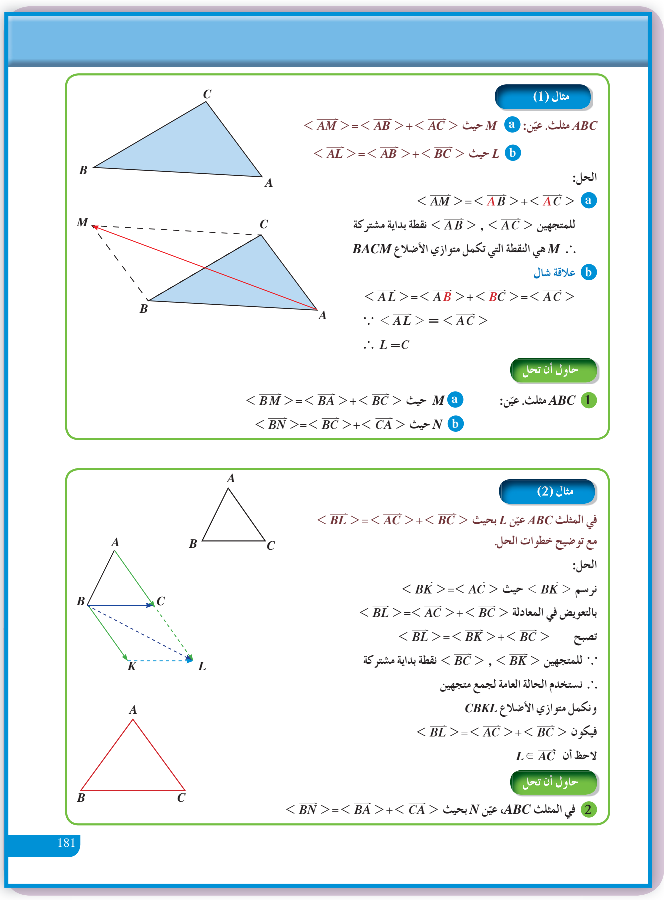
$\vec{A}+\vec{B}=<\overrightarrow{LM}>+<\overrightarrow{LC}>$

$=<\overrightarrow{LM}>+<\overrightarrow{MN}>$ $\quad <\overrightarrow{LC}>=<\overrightarrow{MN}>$

$=<\overrightarrow{LN}>$ علاقة شال

معلومة: ميشال شال Michel Chasles عالم رياضيات فرنسي اشتهر بالمعادلة التي تحمل اسمه: $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>=<\overrightarrow{AC}>$

180


مثال (1)

ABC مثلث. عيّن: (a) M حيث $<\overrightarrow{AM}>=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{AC}>$ (b) L حيث $<\overrightarrow{AL}>=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>$

الحل:

(a) $<\overrightarrow{AM}>=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{AC}>$ للمتجهين $<\overrightarrow{AB}>$، $<\overrightarrow{AC}>$ نقطة بداية مشتركة
$\therefore$ M هي النقطة التي تكمل متوازي الأضلاع $BACM$

(b) علاقة شال
$<\overrightarrow{AL}>=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>=<\overrightarrow{AC}>$
$\because <\overrightarrow{AL}>=<\overrightarrow{AC}>$
$\therefore L=C$

حاول أن تحل

1 ABC مثلث. عيّن: (a) M حيث $<\overrightarrow{BM}>=<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{BC}>$ (b) N حيث $<\overrightarrow{BN}>=<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{CA}>$

مثال (2)

في المثلث ABC عيّن L بحيث $<\overrightarrow{BL}>=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BC}>$ مع توضيح خطوات الحل.

الحل:

نرسم $<\overrightarrow{BK}>$ حيث $<\overrightarrow{BK}>=<\overrightarrow{AC}>$

بالتعويض في المعادلة $<\overrightarrow{BL}>=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BC}>$

تصبح $<\overrightarrow{BL}>=<\overrightarrow{BK}>+<\overrightarrow{BC}>$

$\because$ للمتجهين $<\overrightarrow{BK}>$، $<\overrightarrow{BC}>$ نقطة بداية مشتركة

$\therefore$ نستخدم الحالة العامة لجمع متجهين

ونكمل متوازي الأضلاع $CBKL$

فيكون $<\overrightarrow{BL}>=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BC}>$

لاحظ أن $L\in\overrightarrow{AC}$

حاول أن تحل

2 في المثلث ABC عيّن N بحيث $<\overrightarrow{BN}>=<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CA}>$

181

1 الأهداف

- يجمع المتجهات.
- يطرح المتجهات.
- يتعرف خصائص جمع المتجهات.
- يكتب متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
- يوجد مركِّبات المتجهات.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جمع المتجهات – علاقة "شال" – قانون متوازي الأضلاع – مركِّبات المتجه .

3 الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – آلة حاسبة بيانية – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ما هو متجه الموضع؟

(b) $A(2,-3), B(5,1), C(-1,-2), D(2,2)$

هل $\overline{AB}$ متكافئ مع $\overline{CD}$؟

(c) هل $\overline{AB}=\langle 2,-3\rangle$ متعاكس مع $<\overline{CD}>=<-6,9>$؟

5 التدريس

اطرح على الطلاب فكرة "شال": الجهد المبذول لا يعتمد على المسار بين نقطتين واكتب على السبورة: $<\overline{AB}>+<\overline{BC}>=<\overline{AC}>$. يمكن تفسير علاقة شال بواسطة الإزاحة: الإزاحة من A إلى B ثم من B إلى C تكافئ الإزاحة من A إلى C.

أشر إلى أنه يمكن تعميم علاقة "شال" لأكثر من 3 نقاط.

فمثلًا: $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{CD}>=<\overrightarrow{AD}>$

لأن: $<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BC}> + <\overrightarrow{CD}>$

$$=(<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>)+<\overrightarrow{CD}>$$

$$=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{CD}>$$

$$=<\overrightarrow{AD}>$$

كذلك $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{CD}>+<\overrightarrow{DA}>=\vec{0}$

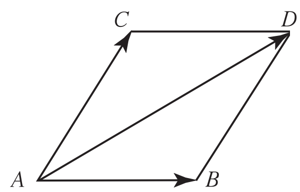
وهذه العلاقة تفسر كالآتي: الإزاحة من A حتى الوصول إلى A تعني كأن الشيء بقي مكانه ولم يتحرك.

يمكن تفسير الطريقة الثانية في جمع المتجهات:

طريقة متوازي الأضلاع باستخدام علاقة "شال":

$$<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{AC}>=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BD}>$$

$$=<\overrightarrow{AD}> \quad (<\overrightarrow{AC}>=<\overrightarrow{BD}>)$$



في الحالة العامة لجمع متجهين، أعد التركيز على أن موضع متجه الجمع يتغير مع اختيار نقطة الأساس، لكن كل المتجهات التي نحصل عليها تكون متساوية (الاتجاه نفسه، الطول نفسه). لطرح متجه نجمع المتجه المعاكس:

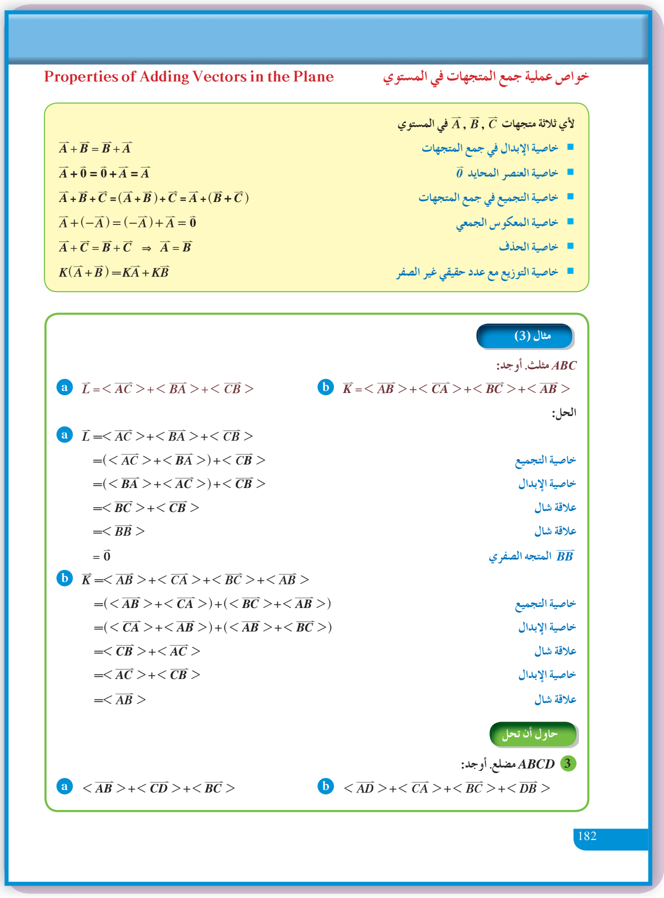
$$<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{CD}>=<\overrightarrow{AB}>+(-<\overrightarrow{CD}>)$$

$$=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{DC}>$$

أشر إلى أنه أحيانًا في حل التمارين، يستحسن استبدال $-<\overrightarrow{AB}>$ بـ $<\overrightarrow{BA}>$

إذا كانت O نقطة الأصل، فبيّن للطلاب العلاقة بين إحداثيات النقطة M ومركبات $<\overrightarrow{OM}>$

اطلب إلى أحد الطلاب أن يرسم على السبورة جدولًا يضمنه قواعد الحساب بالإحداثيات مع أمثلة تطبيقية.



خواص عملية جمع المتجهات في المستوي Properties of Adding Vectors in the Plane

لأي ثلاثة متجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ في المستوي

- خاصية الإبدال في جمع المتجهات $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- خاصية العنصر المحايد $\vec{0}$ $\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$
- خاصية التجميع في جمع المتجهات $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
- خاصية المعكوس الجمعي $\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$
- خاصية الحذف $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{C} \Rightarrow \vec{A}=\vec{B}$
- خاصية التوزيع مع عدد حقيقي غير الصفر $K(\vec{A}+\vec{B})=K\vec{A}+K\vec{B}$

مثال (3)

ABC مثلث. أوجد:

a $\vec{L}=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CB}>$

b $\vec{K}=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>$

الحل:

a $\vec{L}=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CB}>$

$=(<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>)+<\overrightarrow{CB}>$ خاصية التجميع

$=(<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{AC}>)+<\overrightarrow{CB}>$ خاصية الإبدال

$=<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{CB}>$ علاقة شال

$=<\overrightarrow{BB}>$ علاقة شال

$=\vec{0}$ $\overrightarrow{BB}$ المتجه الصفري

b $\vec{K}=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>$

$=(<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>)+(<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>)$ خاصية التجميع

$=(<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{AB}>)+(<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>)$ خاصية الإبدال

$=<\overrightarrow{CB}>+<\overrightarrow{AC}>$ علاقة شال

$=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{CB}>$ خاصية الإبدال

$=<\overrightarrow{AB}>$ علاقة شال

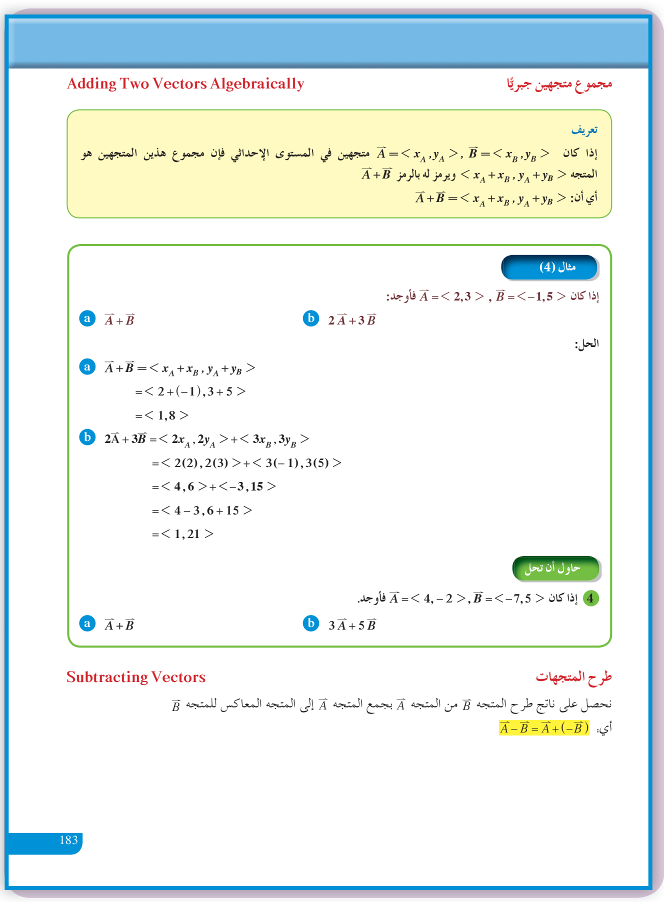
حاول أن تحل

3 $ABCD$ مضلع. أوجد:

a $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CD}>+<\overrightarrow{BC}>$

b $<\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{DB}>$

182



مجموع متجهين جبريًا Adding Two Vectors Algebraically

تعريف

إذا كان $\vec{A}=<x_A, y_A>, \vec{B}=<x_B, y_B>$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن مجموع هذين المتجهين هو المتجه $<x_A+x_B, y_A+y_B>$ ويرمز له بالرمز $\vec{A}+\vec{B}$

أي أن: $\vec{A}+\vec{B}=<x_A+x_B, y_A+y_B>$

مثال (4)

إذا كان $\vec{A}=<2,3>, \vec{B}=<-1,5>$ فأوجد:

a $\vec{A}+\vec{B}$

b $2\vec{A}+3\vec{B}$

الحل:

a $\vec{A}+\vec{B}=<x_A+x_B, y_A+y_B>$

$=<2+(-1), 3+5>$

$=<1,8>$

b $2\vec{A}+3\vec{B}=<2x_A, 2y_A>+<3x_B, 3y_B>$

$=<2(2), 2(3)>+<3(-1), 3(5)>$

$=<4,6>+<-3,15>$

$=<4-3, 6+15>$

$=<1,21>$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{A}=<4,-2>, \vec{B}=<-7,5>$ فأوجد.

a $\vec{A}+\vec{B}$

b $3\vec{A}+5\vec{B}$

طرح المتجهات Subtracting Vectors

نحصل على ناتج طرح المتجه $\vec{B}$ من المتجه $\vec{A}$ بجمع المتجه $\vec{A}$ إلى المتجه المعاكس للمتجه $\vec{B}$

أي: $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

183

في المثال (1)

اشرح للطلاب أن هذا المثال هو تطبيق مباشر لجمع متجهين باستخدام التعريف وهو مقدمة للمثال (2).

في المثال (2)

ركّز مع الطلاب على فكرة إنشاء نقطة باستخدام ناتج جمع متجهين، وذلك وفق شروط معينة على شكل هندسي، وكيفية استخدام المتجه المعاكس والمتجه المكافئ.

في المثالين (3), (5)

أعط أمثلة بديلة للطلاب، ثمّ اطلب إليهم استخدام خاصية الإبدال وخاصية التجميع بهدف استخدام علاقة "شال" وجمع المتجهات.

في المثالين (4), (6)

شدّد للطلاب على المعلومات التالية:

في المستوى الإحداثي عند جمع المتجهات نوجد ناتج جمع المركبات المناظرة على المحور السيني وعلى المحور الصادي، وعند طرح المتجهات نوجد ناتج طرح المركبات المناظرة على المحور السيني وعلى المحور الصادي.

في المثال (8)

من المهم جدًّا تركيز فكرة الربط بين أي متجه مع متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}\,,\vec{j}$ لأن ذلك سوف يسهّل أمام الطلاب كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة.

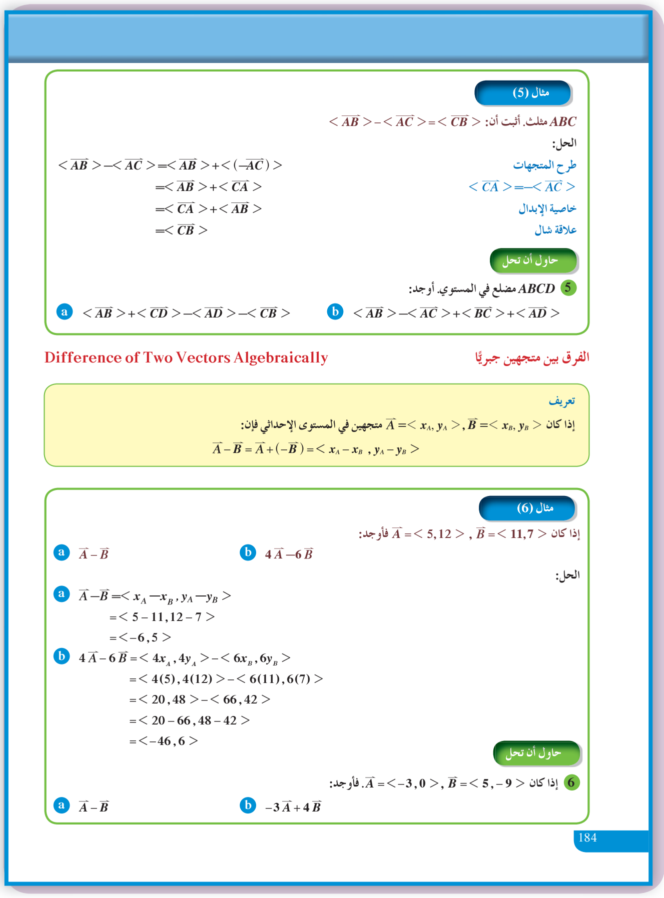
6 الربط

يقدم المثال (7) نموذجًا عن كيفية استخدام المتجهات في مواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب عند جمع المتجهات باستخدام طريقة بدل الأخرى (علاقة "شال"، طريقة متوازي الأضلاع).

بيّن لهم أن علاقة "شال" تُعتمد عندما يكون المتجهان متتابعين (أي يبدأ المتجه الثاني حيث ينتهي الأول) وتُعتمد طريقة متوازي الأضلاع عندما يكون للمتجهين نقطة



مثال (5)

ABC مثلث. أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AC}>=<\overrightarrow{CB}>$

الحل:

طرح المتجهات: $<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AC}>=<\overrightarrow{AB}>+<(-\overrightarrow{AC})>$

$<\overrightarrow{CA}>=-<\overrightarrow{AC}>$: $=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>$

خاصية الإبدال: $=<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{AB}>$

علاقة شال: $=<\overrightarrow{CB}>$

حاول أن تحل

5 $ABCD$ مضلع في المستوي. أوجد:

a $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CD}>-<\overrightarrow{AD}>-<\overrightarrow{CB}>$

b $<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AD}>$

الفرق بين متجهين جبريًا

Difference of Two Vectors Algebraically

تعريف

إذا كان $\vec{A}=<x_A, y_A>, \vec{B}=<x_B, y_B>$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=<x_A-x_B\ , y_A-y_B>$$

مثال (6)

إذا كان $\vec{A}=<5,12>\ ,\ \vec{B}=<11,7>$ فأوجد:

a $\vec{A}-\vec{B}$

b $4\vec{A}-6\vec{B}$

الحل:

a $\vec{A}-\vec{B}=<x_A-x_B\ , y_A-y_B>$
$=<5-11, 12-7>$
$=<-6, 5>$

b $4\vec{A}-6\vec{B}=<4x_A, 4y_A>-<6x_B, 6y_B>$
$=<4(5), 4(12)>-<6(11), 6(7)>$
$=<20, 48>-<66, 42>$
$=<20-66, 48-42>$
$=<-46, 6>$

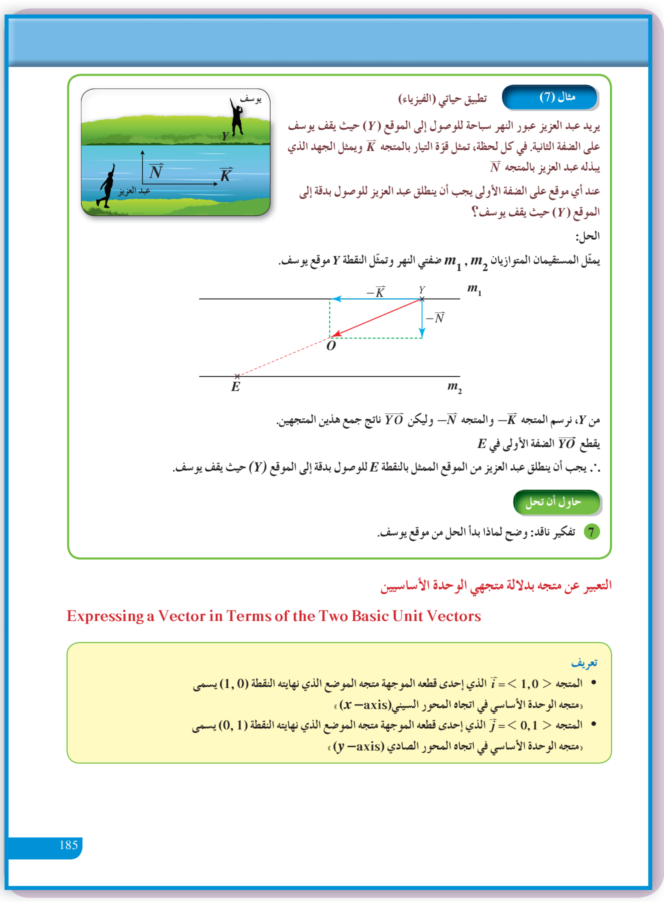
حاول أن تحل

6 إذا كان $\vec{A}=<-3,0>, \vec{B}=<5,-9>$. فأوجد:

a $\vec{A}-\vec{B}$

b $-3\vec{A}+4\vec{B}$

184



مثال (7) تطبيق حياتي (الفيزياء)

يريد عبد العزيز عبور النهر سباحة للوصول إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف على الضفة الثانية. في كل لحظة، تمثل قوّة التيار بالمتجه $\vec{K}$ ويمثل الجهد الذي يبذله عبد العزيز بالمتجه $\vec{N}$

عند أي موقع على الضفة الأولى يجب أن ينطلق عبد العزيز للوصول بدقة إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف؟

الحل:

يمثّل المستقيمان المتوازيان $m_1\ , m_2$ ضفتي النهر وتمثّل النقطة Y موقع يوسف.

من Y، نرسم المتجه $-\vec{K}$ والمتجه $-\vec{N}$ وليكن $\overrightarrow{YO}$ ناتج جمع هذين المتجهين.

يقطع $\overrightarrow{YO}$ الضفة الأولى في E

∴ يجب أن ينطلق عبد العزيز من الموقع الممثل بالنقطة E للوصول بدقة إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف.

حاول أن تحل

7 تفكير ناقد: وضح لماذا بدأ الحل من موقع يوسف.

التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

Expressing a Vector in Terms of the Two Basic Unit Vectors

تعريف

- المتجه $\vec{i}=<1,0>$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(1, 0)$ يسمى «متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور السيني$(x-\text{axis})$»
- المتجه $\vec{j}=<0,1>$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(0, 1)$ يسمى «متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور الصادي $(y-\text{axis})$»

185

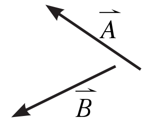
مشتركة.

8 التقييم

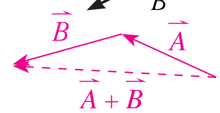
راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، وتحقق من صحة عملهم.

اختبار سريع

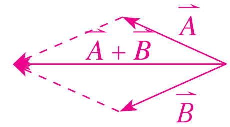
1 أوجد بطريقتين مختلفتين ناتج جمع المتجهين التاليين:



طريقة أولى:



طريقة ثانية:



2 إذا كانت:

$A(2,2), B(6,4), C(-2,-4), D(-3,3)$

نقاط في المستوى الإحداثي.

أوجد:

(a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=<4,2>+<-8,-8>$

$=<-4,-6>$

(b) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}$

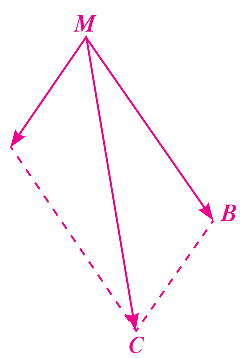
$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CD}=<-4,-6>-<-1,7>$

$=<-3,-13>$

9 إجابات وحلول

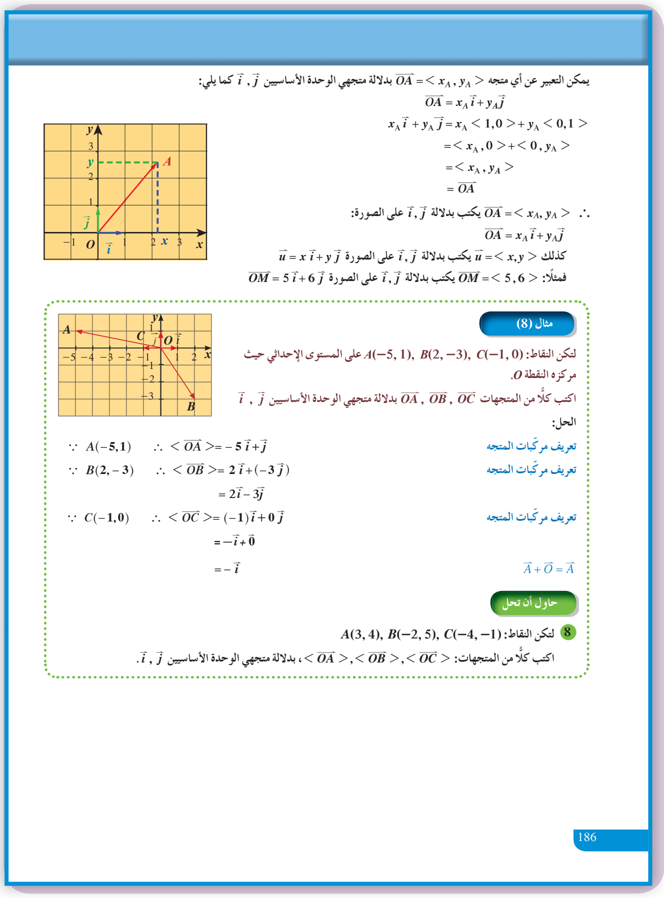
«دعنا نفكر ونتناقش»

1



تحقق من عمل الطلاب.

2 نعم، يتغير المسار فكلما صغر قياس الزاوية أصبح $\|\overrightarrow{MC}\|$ أطول وبالعكس.



يمكن التعبير عن أي متجه $\overrightarrow{OA}=<x_A,y_A>$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i},\vec{j}$ كما يلي:

$\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$

$x_A\vec{i}+y_A\vec{j}=x_A<1,0>+y_A<0,1>$

$=<x_A,0>+<0,y_A>$

$=<x_A,y_A>$

$=\overrightarrow{OA}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OA}=<x_A,y_A>$ يكتب بدلالة $\vec{i},\vec{j}$ على الصورة:

$\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}$

كذلك $\vec{u}=<x,y>$ يكتب بدلالة $\vec{i},\vec{j}$ على الصورة $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$

فمثلًا: $\overrightarrow{OM}=<5,6>$ يكتب بدلالة $\vec{i},\vec{j}$ على الصورة $\overrightarrow{OM}=5\vec{i}+6\vec{j}$

مثال (8)

لتكن النقاط: $A(-5,1), B(2,-3), C(-1,0)$ على المستوى الإحداثي حيث مركزه النقطة O.

اكتب كلًّا من المتجهات $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}, \vec{j}$

الحل:

$\because A(-5,1) \quad \therefore <\overrightarrow{OA}>=-5\vec{i}+\vec{j}$ تعريف مركّبات المتجه

$\because B(2,-3) \quad \therefore <\overrightarrow{OB}>=2\vec{i}+(-3\vec{j})$ تعريف مركّبات المتجه

$=2\vec{i}-3\vec{j}$

$\because C(-1,0) \quad \therefore <\overrightarrow{OC}>=(-1)\vec{i}+0\vec{j}$ تعريف مركّبات المتجه

$=-\vec{i}+\vec{0}$

$=-\vec{i}$ $\quad \vec{A}+\vec{O}=\vec{A}$

حاول أن تحل

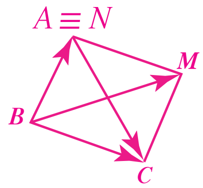
8 لتكن النقاط: $A(3,4), B(-2,5), C(-4,-1)$

اكتب كلًّا من المتجهات: $<\overrightarrow{OC}>, <\overrightarrow{OB}>, <\overrightarrow{OA}>$، بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}, \vec{j}$.

186

3 نعم، تتغير عناصر $\|\overrightarrow{MC}\|$ الثلاثة مع تغير $\|\overrightarrow{MB}\|$.

«حاول أن تحل»



1 **(a)** $CBAM$ متوازي الأضلاع.

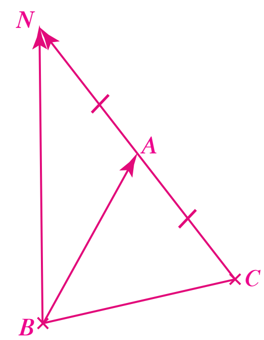
(b) تحقق من عمل الطلاب:

$$<\overrightarrow{BN}> = <\overrightarrow{BA}>$$

$$N \equiv A$$

2 $<\overrightarrow{BN}> - <\overrightarrow{BA}> = <\overrightarrow{CA}>$

$\therefore \ <\overrightarrow{AN}> = <\overrightarrow{CA}>$



3 **(a)** $(<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BC}>) + <\overrightarrow{CD}>$

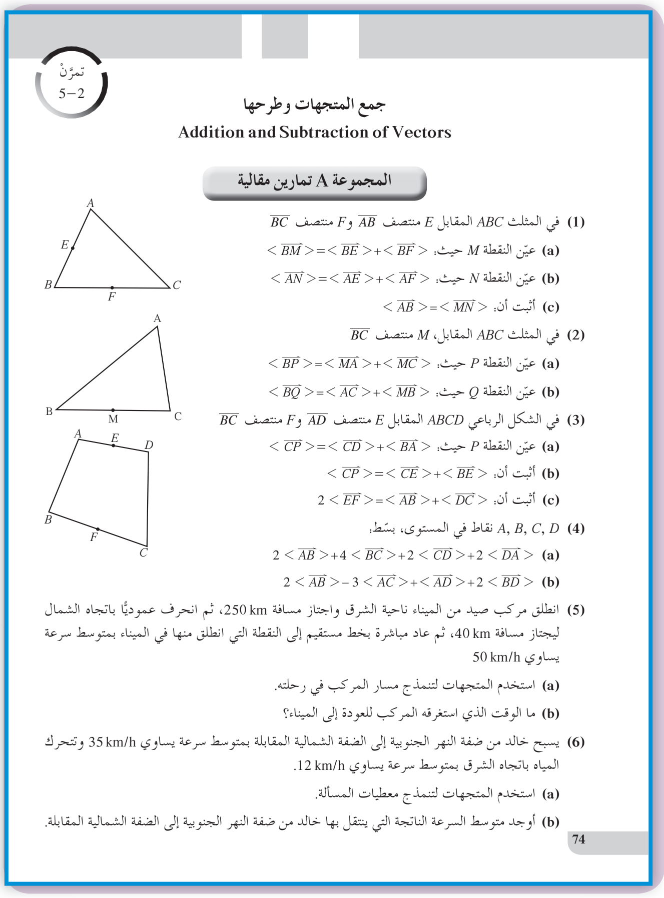
$<\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{CD}> = <\overrightarrow{AD}>$

(b) $(<\overrightarrow{AD}> + <\overrightarrow{DB}>) + (<\overrightarrow{BC}> + <\overrightarrow{CA}>)$

$<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BA}> = <\overrightarrow{AA}> = <\vec{0}>$

4 **(a)** $\vec{A} + \vec{B} = <-3, 3>$

(b) $3\vec{A} + 5\vec{B} = <-23, 19>$



تمرَّنْ 5−2

جمع المتجهات وطرحها

Addition and Subtraction of Vectors

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في المثلث ABC المقابل E منتصف $\overline{AB}$ وF منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة M حيث: $<\overrightarrow{BM}> = <\overrightarrow{BE}> + <\overrightarrow{BF}>$

(b) عيّن النقطة N حيث: $<\overrightarrow{AN}> = <\overrightarrow{AE}> + <\overrightarrow{AF}>$

(c) أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}> = <\overrightarrow{MN}>$

(2) في المثلث ABC المقابل، M منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة P حيث: $<\overrightarrow{BP}> = <\overrightarrow{MA}> + <\overrightarrow{MC}>$

(b) عيّن النقطة Q حيث: $<\overrightarrow{BQ}> = <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{MB}>$

(3) في الشكل الرباعي $ABCD$ المقابل E منتصف $\overline{AD}$ وF منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة P حيث: $<\overrightarrow{CP}> = <\overrightarrow{CD}> + <\overrightarrow{BA}>$

(b) أثبت أن: $<\overrightarrow{CP}> = <\overrightarrow{CE}> + <\overrightarrow{BE}>$

(c) أثبت أن: $2<\overrightarrow{EF}> = <\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{DC}>$

(4) A, B, C, D نقاط في المستوى، بسّط:

(a) $2<\overrightarrow{AB}> + 4<\overrightarrow{BC}> + 2<\overrightarrow{CD}> + 2<\overrightarrow{DA}>$

(b) $2<\overrightarrow{AB}> - 3<\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{AD}> + 2<\overrightarrow{BD}>$

(5) انطلق مركب صيد من الميناء ناحية الشرق واجتاز مسافة 250 km، ثم انحرف عموديًّا باتجاه الشمال ليجتاز مسافة 40 km، ثم عاد مباشرة بخط مستقيم إلى النقطة التي انطلق منها في الميناء بمتوسط سرعة يساوي 50 km/h

(a) استخدم المتجهات لتنمذج مسار المركب في رحلته.

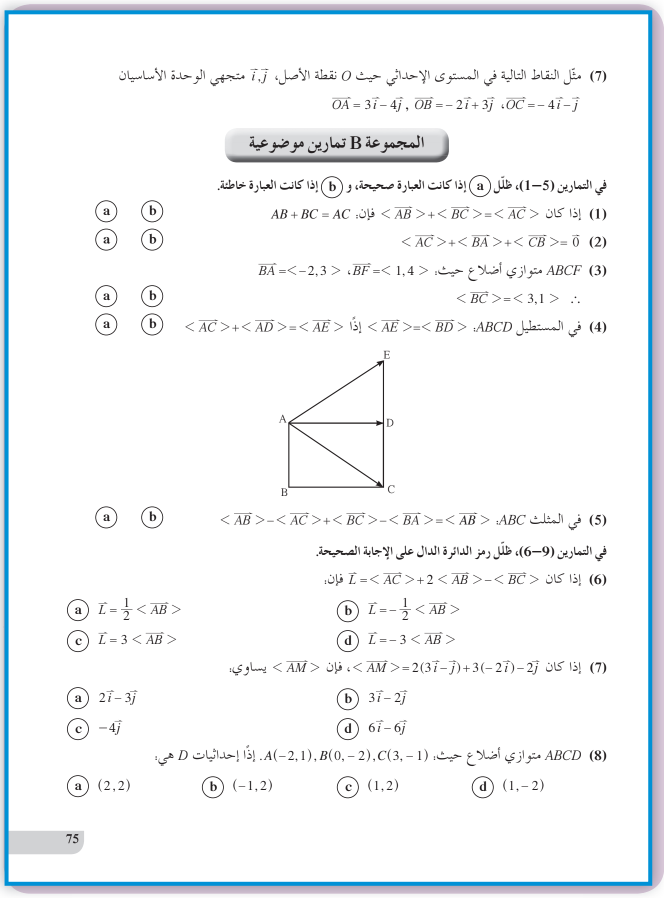
(b) ما الوقت الذي استغرقه المركب للعودة إلى الميناء؟

(6) يسبح خالد من ضفة النهر الجنوبية إلى الضفة الشمالية المقابلة بمتوسط سرعة يساوي 35 km/h وتتحرك المياه باتجاه الشرق بمتوسط سرعة يساوي 12 km/h.

(a) استخدم المتجهات لتنمذج معطيات المسألة.

(b) أوجد متوسط السرعة الناتجة التي ينتقل بها خالد من ضفة النهر الجنوبية إلى الضفة الشمالية المقابلة.

74



(7) مثّل النقاط التالية في المستوى الإحداثي حيث O نقطة الأصل، $\vec{i},\vec{j}$ متجهي الوحدة الأساسيان

$\overrightarrow{OA}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OC}=-4\vec{i}-\vec{j}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>=<\overrightarrow{AC}>$ فإن: $AB+BC=AC$ (a) (b)

(2) $<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CB}>=\vec{0}$ (a) (b)

(3) $ABCF$ متوازي أضلاع حيث: $\overrightarrow{BF}=<1,4>$ ، $\overrightarrow{BA}=<-2,3>$

$\therefore\ <\overrightarrow{BC}>=<3,1>$ (a) (b)

(4) في المستطيل $ABCD$: $<\overrightarrow{AE}>=<\overrightarrow{BD}>$ إذاً $<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{AD}>=<\overrightarrow{AE}>$ (a) (b)

(5) في المثلث ABC: $<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BC}>-<\overrightarrow{BA}>=<\overrightarrow{AB}>$ (a) (b)

في التمارين (9—6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\vec{L}=<\overrightarrow{AC}>+2<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{BC}>$ فإن:

(a) $\vec{L}=\frac{1}{2}<\overrightarrow{AB}>$ (b) $\vec{L}=-\frac{1}{2}<\overrightarrow{AB}>$

(c) $\vec{L}=3<\overrightarrow{AB}>$ (d) $\vec{L}=-3<\overrightarrow{AB}>$

(7) إذا كان $<\overrightarrow{AM}>=2(3\vec{i}-\vec{j})+3(-2\vec{i})-2\vec{j}$ ، فإن $<\overrightarrow{AM}>$ يساوي:

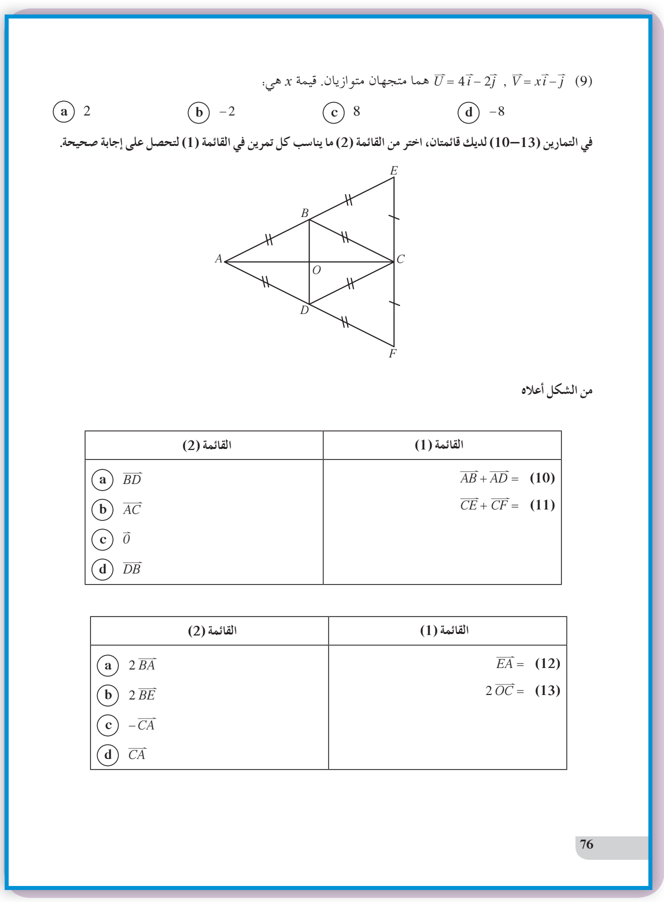
(a) $2\vec{i}-3\vec{j}$ (b) $3\vec{i}-2\vec{j}$

(c) $-4\vec{j}$ (d) $6\vec{i}-6\vec{j}$

(8) $ABCD$ متوازي أضلاع حيث: $A(-2,1),B(0,-2),C(3,-1)$. إذاً إحداثيات D هي:

(a) $(2,2)$ (b) $(-1,2)$ (c) $(1,2)$ (d) $(1,-2)$

75



(9) $\vec{U}=4\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{V}=x\vec{i}-\vec{j}$ هما متجهان متوازيان. قيمة x هي:

(a) 2 (b) −2 (c) 8 (d) −8

في التمارين (13—10) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

من الشكل أعلاه

القائمة (1)	القائمة (2)
(10) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$ (11) $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=$	(a) $\overrightarrow{BD}$ (b) $\overrightarrow{AC}$ (c) $\vec{0}$ (d) $\overrightarrow{DB}$

القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $\overrightarrow{EA}=$ (13) $2\overrightarrow{OC}=$	(a) $2\overrightarrow{BA}$ (b) $2\overrightarrow{BE}$ (c) $-\overrightarrow{CA}$ (d) $\overrightarrow{CA}$

76

5 **(a)** $(<AB>-<AD>)+(<\overrightarrow{CD}>-<\overrightarrow{CB}>)$

$=<\overrightarrow{DB}>+<\overrightarrow{BD}>$

$=<\overrightarrow{DD}>=<\vec{0}>$

(b) $<\overrightarrow{CB}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AD}>$

$=<\vec{0}>+<\overrightarrow{AD}>$

$=<\overrightarrow{AD}>$

6 **(a)** $\vec{A}-\vec{B}=<-8,9>$

(b) $-3\vec{A}+4\vec{B}=<29,-36>$

7 لأننا نعرف إلى أين سوف يصل عبد العزيز وهو الموقع الثابت الذي يقف عنده يوسف، لذلك اعتمدنا الحل انطلاقاً من نقطة الوصول حيث استخدمنا مفهوم جمع المتجهين ومفهوم المتجه المعاكس.

8 $<\overrightarrow{OA}>=3\vec{i}+4\vec{j}$

$<\overrightarrow{OB}>=-2\vec{i}+5\vec{j}$

$<\overrightarrow{OC}>=-4\vec{i}-\vec{j}$

5–3: الضرب الداخلي

1 الأهداف

- يتعرف الضرب الداخلي.
- يوجد قياس الزاوية بين متجهين.
- يوجد متجه الوحدة في اتجاه متجه.
- يدرس توازي متجهين.
- يدرس تعامد متجهين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الضرب الداخلي – قياس الزاوية بين متجهين – متجه الوحدة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب إيجاد:

(a) $\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos(30^\circ), \cos(120^\circ)$

(b) راجع مع الطلاب خصائص المثلث متطابق الأضلاع، والمثلث ثلاثيني – ستيني، والمثلث القائم، والمتطابق الضلعين، وذكرهم بالعلاقة بين أطوال أضلاع المثلث في كل حالة.

(c) اطلب إليهم استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد: $0^\circ < \theta < 180^\circ$ في الحالات التالية:

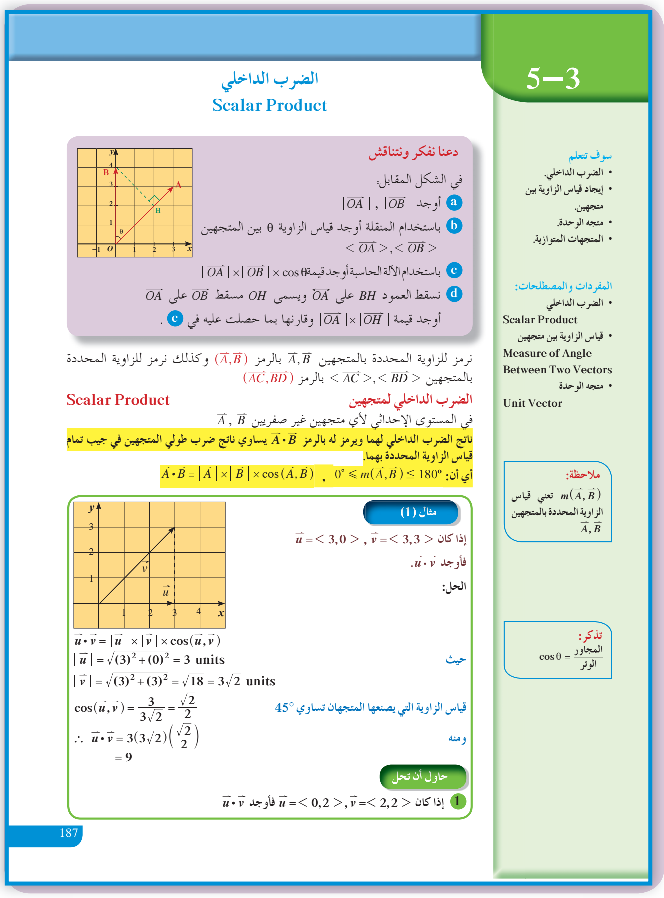
(a) $\cos\theta = 0.7843$

(b) $\cos\theta = -0.4567$

(d) راجع مع الطلاب إذا كان:

$A = <1, -2>, B = <3, 4>$

أوجد: $\| \vec{A} \|, \| \vec{B} \|$



5–3

الضرب الداخلي

Scalar Product

سوف تتعلم

- الضرب الداخلي.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- متجه الوحدة.
- المتجهات المتوازية.

المفردات والمصطلحات:

- الضرب الداخلي Scalar Product
- قياس الزاوية بين متجهين Measure of Angle Between Two Vectors
- متجه الوحدة Unit Vector

دعنا نفكر ونتناقش

في الشكل المقابل:

(a) أوجد $\|\overrightarrow{OA}\|, \|\overrightarrow{OB}\|$

(b) باستخدام المنقلة أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $<\overrightarrow{OA}>, <\overrightarrow{OB}>$

(c) باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة $\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos\theta$

(d) نسقط العمود $\overline{BH}$ على $\overleftrightarrow{OA}$ ويسمى $\overline{OH}$ مسقط $\overline{OB}$ على $\overline{OA}$

أوجد قيمة $\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OH}\|$ وقارنها بما حصلت عليه في (c).

نرمز للزاوية المحددة بالمتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ بالرمز $(\vec{A}, \vec{B})$ وكذلك نرمز للزاوية المحددة بالمتجهين $<\overrightarrow{AC}>, <\overrightarrow{BD}>$ بالرمز $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$

ملاحظة: $m(\vec{A}, \vec{B})$ تعني قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\vec{A}, \vec{B}$

الضرب الداخلي لمتجهين Scalar Product

في المستوى الإحداثي لأي متجهين غير صفريين $\vec{A}, \vec{B}$

ناتج الضرب الداخلي لهما ويرمز له بالرمز $\vec{A} \cdot \vec{B}$ يساوي ناتج ضرب طولي المتجهين في جيب تمام قياس الزاوية المحددة بهما.

أي أن: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \cos(\vec{A}, \vec{B}) \quad , \quad 0^\circ \leq m(\vec{A}, \vec{B}) \leq 180^\circ$

مثال (1)

إذا كان $\vec{u} = <3, 0>, \vec{v} = <3, 3>$ فأوجد $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

الحل:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

حيث $\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = 3$ units

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ units

قياس الزاوية التي يصنعها المتجهان تساوي 45° $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

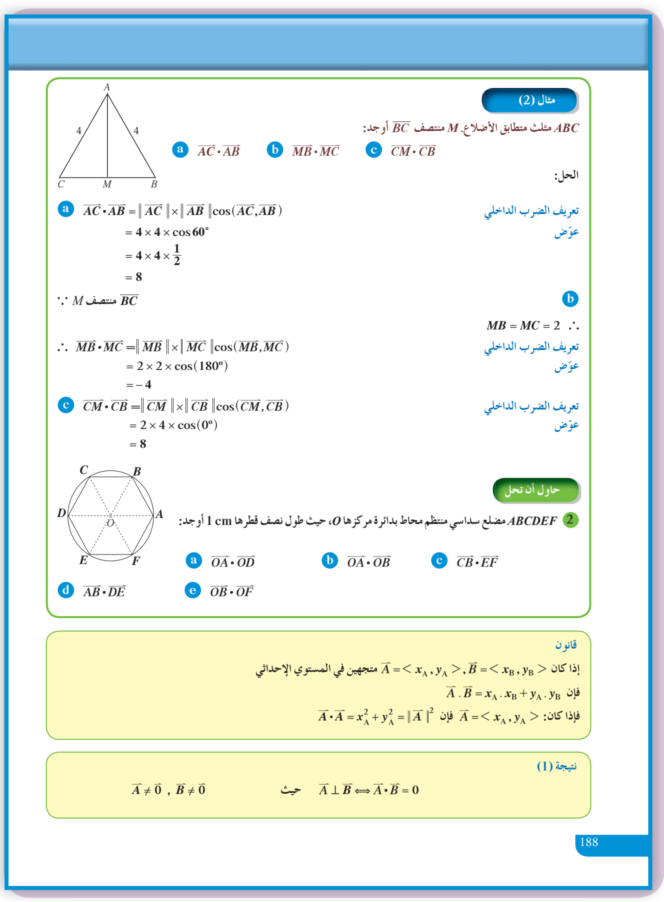
ومنه $\therefore \vec{u} \cdot \vec{v} = 3(3\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 9$

تذكر: $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

حاول أن تحل

1 إذا كان $\vec{u} = <0, 2>, \vec{v} = <2, 2>$ فأوجد $\vec{u} \cdot \vec{v}$

187



مثال (2)

ABC مثلث متطابق الأضلاع. M منتصف $\overline{BC}$ أوجد:

(a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ (c) $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB}$

الحل:

(a) تعريف الضرب الداخلي $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

عوّض $= 4 \times 4 \times \cos 60^\circ = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$

(b) $\because M$ منتصف $\overline{BC}$

$\therefore MB = MC = 2$

تعريف الضرب الداخلي $\therefore \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \|\overrightarrow{MB}\| \times \|\overrightarrow{MC}\| \cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$

عوّض $= 2 \times 2 \times \cos(180^\circ) = -4$

(c) تعريف الضرب الداخلي $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CM}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \cos(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})$

عوّض $= 2 \times 4 \times \cos(0^\circ) = 8$

حاول أن تحل

2 $ABCDEF$ مضلع سداسي منتظم محاط بدائرة مركزها O، حيث طول نصف قطرها 1 cm أوجد:

(a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ (b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (c) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{EF}$ (d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ (e) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OF}$

قانون

إذا كان $\vec{A} = <x_A, y_A>, \vec{B} = <x_B, y_B>$ متجهين في المستوي الإحداثي

فإن $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B$

فإذا كان: $\vec{A} = <x_A, y_A>$ فإن $\vec{A} \cdot \vec{A} = x_A^2 + y_A^2 = \|\vec{A}\|^2$

نتيجة (1)

$\vec{A} \perp \vec{B} \Longleftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ حيث $\vec{A} \neq \vec{0}, \vec{B} \neq \vec{0}$

188

5 التدريس

بعد مناقشة الضرب الداخلي للمتجهات، اسألهم:

هل $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$؟ ولماذا؟ أشر إلى أن الفرق يكمن في قياس الزاوية بين المتجهين، ولكن بما أن $\cos(-\theta)=\cos\theta$ فإن $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

اسألهم: ماذا نستنتج إذا كان $\vec{A},\vec{B}=0$ أو A, B متعامدين؟

أشر إلى أنه إذا استبدلنا $\vec{A}$ بمعكوسه $(-\vec{A})$ نعكس قيمة الضرب الداخلي $(-\vec{A})\cdot\vec{B}=-(\vec{A}\cdot\vec{B})$

- يكتب أحد الطلاب خواص الضرب الداخلي على السبورة ويعطي الطلاب أمثلة عن كل خاصية.
- أشر إلى أنه لا يمكن ضرب 3 متجهات داخليًّا. لا معنى رياضيًّا لِـ $\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}$، بينما يمكن احتساب $(\vec{A}\cdot\vec{B})\times\vec{C}$ ونحصل على متجه موازٍ لِـ $\vec{C}$، وبالتالي الضرب الداخلي ليس تجميعيًّا.

اطلب إليهم إيجاد $\vec{A}\cdot\vec{A}$ إذا كان $\vec{A}$ متجه الوحدة.

$\|\vec{A}\|^2=1$

اطلب إليهم مقارنة $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ بطول $(\overrightarrow{AB})^2$

$\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

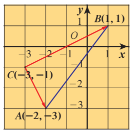
أشر إلى أنه لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين، نستخدم الصيغتين المختلفتين للضرب الداخلي معًا.

في المثال (1)

ناقش مع الطلاب النتائج في هذا المثال لتحقيق فكرة الضرب الداخلي بين متجهين بخاصة أن هذه العملية على المتجهين لا تعطي متجهًا بل تعطي عددًا حقيقيًّا.

مثال (3)

إذا كانت $A(-2,-3), B(1,1), C(-3,-1)$ هي رؤوس المثلث ABC.



a اكتب كلًّا من المتجهين $<\overrightarrow{CB}>, <\overrightarrow{CA}>$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{i}, \vec{j}$.

b أوجد قيمة $<\overrightarrow{CA}>\cdot<\overrightarrow{CB}>$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$

الحل:

a $<\overrightarrow{CA}>=<-2-(-3),-3-(-1)>=<1,-2>$

$<\overrightarrow{CA}>=\vec{i}-2\vec{j}$ إحداثيات المتجه

$<\overrightarrow{CB}>=<1-(-3),1-(-1)>=<4,2>$

$<\overrightarrow{CB}>=4\vec{i}+2\vec{j}$ إحداثيات المتجه

b $<\overrightarrow{CA}>\cdot<\overrightarrow{CB}>=1\times4+(-2)\times2=0$ قانون الضرب الداخلي

c $\because\ <\overrightarrow{CA}>\cdot<\overrightarrow{CB}>=0$

$\therefore\ <\overrightarrow{CA}>\perp<\overrightarrow{CB}>$

ومنه قياس الزاوية $(\overrightarrow{CB}، \overrightarrow{CA})$ يساوي $90°$ وبالتالي المثلث ABC قائم في $\widehat{C}$

حاول أن تحل

3 إذا كانت النقاط $A(6,-1), B(3,2), C(2,1)$

a اكتب كلًّا من المتجهين $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{i}, \vec{j}$

b أوجد قيمة $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

مثال (4)

إذا كان $\vec{A}=<-2,3>, \vec{B}=<1,y>$ وكان $\vec{A}\perp\vec{B}$ فأوجد قيمة y

الحل:

$\because\ \vec{A}\perp\vec{B}$

$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{B}=0$

$x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B=0$

$(-2)(1)+(3)(y)=0$

$-2+3y=0$

$y=\frac{2}{3}$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{A}=<3,-1>, \vec{B}=<x,-2>$ وكان $\vec{A}\perp\vec{B}$ فأوجد قيمة x

189

نتيجة (2)

$\vec{A}\parallel\vec{B}\Longleftrightarrow\vec{A}=k\vec{B}$ حيث $\vec{A}\neq\vec{0}\ ,\ \vec{B}\neq\vec{0}$

ملاحظة: $\vec{A}\parallel\vec{B}\Longleftrightarrow x_A\cdot y_B-x_B\,y_A$

حيث: $\vec{A}=<x_A,y_A>, \vec{B}=<x_B,y_B>\ ,\ \vec{A}\neq\vec{0}\ ,\ \vec{B}\neq\vec{0}$

مثال (5)

a أثبت أن: $\vec{A}\parallel\vec{B}$ حيث $\vec{A}=<-7,5>\ ,\ \vec{B}=<14,-10>$

b إذا كان $\vec{A}\parallel\vec{B}$ حيث $\vec{A}=<6,-8>\ ,\ \vec{B}=<2,y>$ فأوجد قيمة y

الحل:

a طريقة أولى:

$\frac{x_A}{x_B}=\frac{-7}{14}=\frac{-1}{2}\ ,\ \frac{y_A}{y_B}=\frac{5}{-10}=\frac{-1}{2}$

$\therefore\ \vec{A}=-\frac{1}{2}\vec{B}\Longrightarrow\vec{A}=k\vec{B}$

$\therefore\ \vec{A}\parallel\vec{B}$

طريقة ثانية:

$x_A\cdot y_B-x_B\cdot y_A=(-7)(-10)-14\times5=70-70=0$

$\therefore\ \vec{A}\parallel\vec{B}$

b طريقة أولى:

$\because\ \vec{A}\parallel\vec{B}$

$\therefore\ \vec{A}=k\vec{B}$

$<6,-8>=k<2,y>$

$=<2k,ky>$

$\therefore\ 6=2k\Longrightarrow k=3$

$-8=ky\Longrightarrow-8=3y\Longrightarrow y=-\frac{8}{3}$

طريقة ثانية:

$x_A\cdot y_B-x_B\cdot y_A=0$

$6y-2(-8)=0$

$6y-16=0$

$y=\frac{-16}{6}=\frac{-8}{3}$

حاول أن تحل

5 a أثبت أن: $\vec{A}\parallel\vec{B}$ حيث $\vec{A}=<3,-2>\ ,\ \vec{B}=<6,-4>$

b إذا كان $\vec{A}\parallel\vec{B}$ ، $\vec{B}=<x,\frac{4}{5}>\ ,\ \vec{A}=<\frac{7}{3},\frac{2}{3}>$ فأوجد x

190

في المثال (2)

أعطِ الطلاب أمثلة بديلة عن أشكال هندسيّة منتظمة، واطلب إليهم إيجاد الضرب الداخلي للمتجهات، ثمّ ناقش معهم النتائج.

في المثال (3)

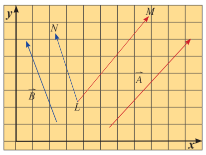
أكد للطلاب أن القاعدة: $\vec{A}\cdot\vec{B} = x_A \times x_B + y_A \times y_B$ لا يمكن استخدامها إلا إذا كان المتجهان في مستوى إحداثي حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ (وحدة قياس).

شجعهم على استخدام الضرب الداخلي في إثبات مثلث قائم. إذا كان $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ تكون A زاوية قائمة.

في المثال (4)

يساعد هذا المثال الطلاب على استخدام شرط التعامد بين متجهين لإيجاد قيم متغيرة في مركبات أحد المتجهين.

قياس الزاوية بين متجهين Measure of Angle between Two Vectors



لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين $\vec{A}\,,\,\vec{B}$

حيث $\vec{A} = < x_A, y_A >\,,\,\vec{B} = < x_B, y_B >$

اكتب صيغتي الضرب الداخلي $\vec{A}\cdot\vec{B}$:

(1) $\vec{A}\cdot\vec{B} = x_A x_B + y_A y_B$

(2) $\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cos(\vec{A},\vec{B})$

$\therefore\ \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\cos(\vec{A},\vec{B}) = x_A x_B + y_A y_B$

$\therefore\ \cos(\vec{A},\vec{B}) = \dfrac{x_A x_B + y_A y_B}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|}$

قانون

إذا كان $\vec{A},\vec{B}$ متجهين وكان $\vec{A} \neq \vec{0}\,,\,\vec{B} \neq \vec{0}$ فإن:

$$\cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|}\quad,\ 0^\circ \le m(\vec{A},\vec{B}) \le 180^\circ$$

مثال (7)

إذا كان $\|\vec{A}\| = 5,\ \|\vec{B}\| = 6,\ \vec{A}\cdot\vec{B} = 15$

فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A},\vec{B})$

الحل:

قانون: $\cos(\vec{A},\vec{B}) = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|}\quad,\quad 0^\circ \le m(\vec{A},\vec{B}) \le 180^\circ$

عوّض: $= \dfrac{15}{5\times 6} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ m(\vec{A},\vec{B}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60^\circ$

حاول أن تحل

7 إذا كان $\|\vec{A}\| = 3,\ \|\vec{B}\| = 2,\ \vec{A}\cdot\vec{B} = -3\sqrt{3}$

فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A},\vec{B})$

192

خواص الضرب الداخلي Properties of Scalar Product

$\vec{A}\,,\,\vec{B}\,,\,\vec{C}$ ثلاثة متجهات غير صفرية في المستوى، k عدد حقيقي.

- خاصية الإبدال $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- خاصية التجميع مع عدد حقيقي غير صفري $\vec{A}\cdot(k\vec{B}) = (k\vec{A})\cdot\vec{B} = k(\vec{A}\cdot\vec{B})$
- خاصية توزيع الضرب الداخلي على جمع المتجهات أو طرحها $\vec{A}\cdot(\vec{B}\pm\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} \pm \vec{A}\cdot\vec{C}$

مثال (6)

$\vec{A}\,,\,\vec{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\vec{A}\| = 3,\ \|\vec{B}\| = 2,\ \vec{A}\cdot\vec{B} = -3$

أوجد قيمة $(4\vec{A} - 3\vec{B})\cdot(\vec{A} + 2\vec{B})$

الحل:

$(4\vec{A} - 3\vec{B})\cdot(\vec{A} + 2\vec{B})$

خاصية التوزيع: $= 4\vec{A}\cdot\vec{A} + 4\vec{A}\cdot 2\vec{B} - 3\vec{B}\cdot\vec{A} - 3\vec{B}\cdot 2\vec{B}$

خاصية التجميع: $= 4\vec{A}\cdot\vec{A} + 8\vec{A}\cdot\vec{B} - 3\vec{B}\cdot\vec{A} - 6\vec{B}\cdot\vec{B}$

خاصية الإبدال: $= 4\vec{A}\cdot\vec{A} + 8\vec{A}\cdot\vec{B} - 3\vec{A}\cdot\vec{B} - 6\vec{B}\cdot\vec{B}$

$\vec{A}\cdot\vec{A} = \|\vec{A}\|^2$: $= 4\|\vec{A}\|^2 + 5\vec{A}\cdot\vec{B} - 6\|\vec{B}\|^2$

عوّض: $= 4\times 3^2 + 5\times(-3) - 6\times 2^2$

$= 36 - 15 - 24$

$= -3$

حاول أن تحل

6 $\vec{A}\,,\,\vec{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\vec{A}\| = 3,\ \|\vec{B}\| = 4,\ \vec{A}\cdot\vec{B} = 5$

أوجد قيمة $(3\vec{A} - 2\vec{B})\cdot(-\vec{A} + 3\vec{B})$

191

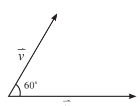
تمرَّنْ 5−3

الضرب الداخلي Scalar Product

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في كل شكل مما يلي أوجد: $\vec{u}\cdot\vec{v}$

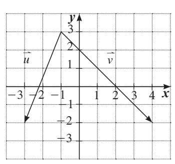
(a)



$\|\vec{u}\| = 4\ units$

$\|\vec{v}\| = 3\ units$

(b)



(2) لنأخذ: $\vec{u} = < 2, -1 >, \vec{v} = < -3, 2 >, \vec{w} = < 1, 2 >$ أوجد:

(a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (b) $\vec{u}\cdot\vec{w}$ (c) $\vec{v}\cdot\vec{w}$

(d) $(3\vec{u})\cdot(-2\vec{v})$ (e) $(-4\vec{u})\cdot(3\vec{v})$

(3) $\vec{u}\,,\vec{v}$ متجهان في المستوى الإحداثي حيث: $\|\vec{u}\| = 4\ ,\ \|\vec{v}\| = 5,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = -6$. أوجد:

(a) $(2\vec{u} + 3\vec{v})^2$ (b) $(3\vec{u} - 2\vec{v})\cdot(-2\vec{u} + \vec{v})$

(4) لنأخذ $\vec{u} = < x, 4 >,\ \vec{v} = < 2, -3 >$

(a) أوجد قيمة x بحيث يكون $\vec{u}$ متعامد مع $\vec{v}$.

(b) أوجد قيمة x بحيث يكون $\|\vec{u}\| = 5\,\text{units}$.

(5) لنأخذ في المستوى الإحداثي $\vec{u} = < 2, -2 >, \vec{v} = < -\sqrt{2}, 0 >$

أوجد $m(\vec{u}\,,\vec{v})$

(6) $A(-1,3), B(-3,1), C(3,-1)$ ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي.

(a) أوجد: $\|\overrightarrow{AB}\|\ ,\ \|\overrightarrow{AC}\|\ ,\ \|\overrightarrow{BC}\|$

(b) أوجد: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC.

77

في المثال (5)

يوفر هذا المثال للطلاب طرائق يستخدمونها لإثبات توازي متجهين أو لإيجاد متغير في أحد المتجهين إذا كان هذان المتجهان متوازيين.

في المثال (6)

يساعد هذا المثال الطلاب على التعامل مع الضرب الداخلي للمتجهات، وذلك باستخدام الطرح والجمع لمتجهات مع مُعامل كأعداد حقيقية.

في المثالين (7), (8)

من أهم ميزات الضرب الداخلي أنه يوفر للطلاب فرصة مهمة لإيجاد قياس زاوية بين متجهين، ويكون مقدمة لإيجاد قياس زاوية بين مستقيمين في ما بعد.

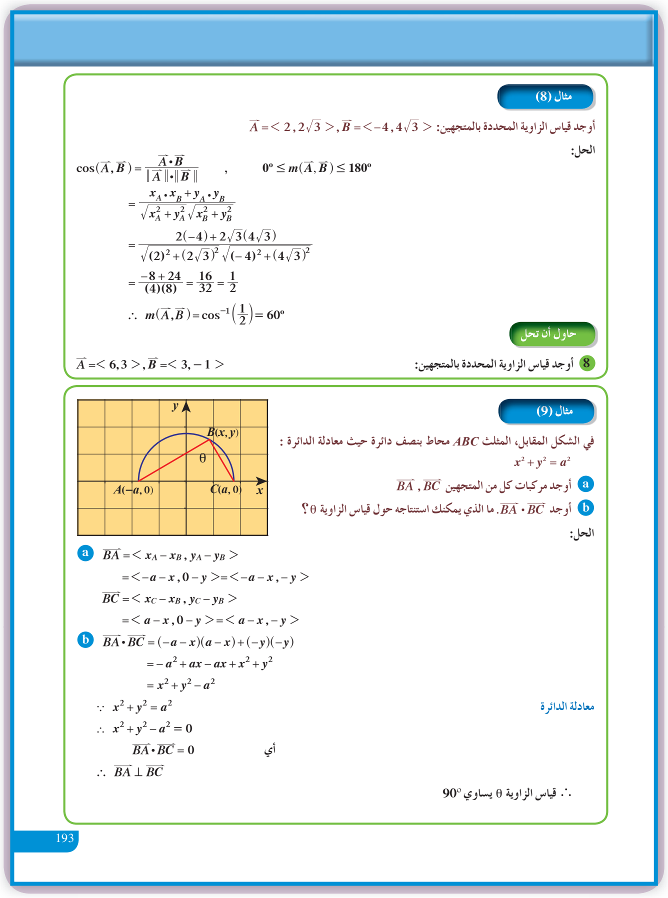
ساعدهم على استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية إذا كان جيب التمام لهذه الزاوية عددًا معلومًا.

6 الربط

انظر المثال (9).

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة: $\vec{A}\cdot\vec{B} = x_A \times x_B + y_A \times y_B$ ويستبدلون إشارة الجمع بإشارة الطرح لتصبح $x_A \times x_B - y_A \times y_B$، شدد على الفرق بين الصيغة التي تعطي مركبات المتجه وتستخدم فيها إشارة الطرح وصيغة الضرب الداخلي وتستخدم فيها إشارة الجمع.



مثال (8)

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\vec{A} = \langle 2, 2\sqrt{3} \rangle, \vec{B} = \langle -4, 4\sqrt{3} \rangle$

الحل:

$$\cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|} \quad , \quad 0^\circ \le m(\vec{A},\vec{B}) \le 180^\circ$$
$$= \frac{x_A\cdot x_B + y_A\cdot y_B}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}\sqrt{x_B^2+y_B^2}}$$
$$= \frac{2(-4)+2\sqrt{3}(4\sqrt{3})}{\sqrt{(2)^2+(2\sqrt{3})^2}\sqrt{(-4)^2+(4\sqrt{3})^2}}$$
$$= \frac{-8+24}{(4)(8)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ m(\vec{A},\vec{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

حاول أن تحل

8 أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\vec{A} = \langle 6, 3 \rangle, \vec{B} = \langle 3, -1 \rangle$

مثال (9)

في الشكل المقابل، المثلث ABC محاط بنصف دائرة حيث معادلة الدائرة : $x^2+y^2=a^2$

a أوجد مركبات كل من المتجهين $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$

b أوجد $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. ما الذي يمكنك استنتاجه حول قياس الزاوية θ؟

الحل:

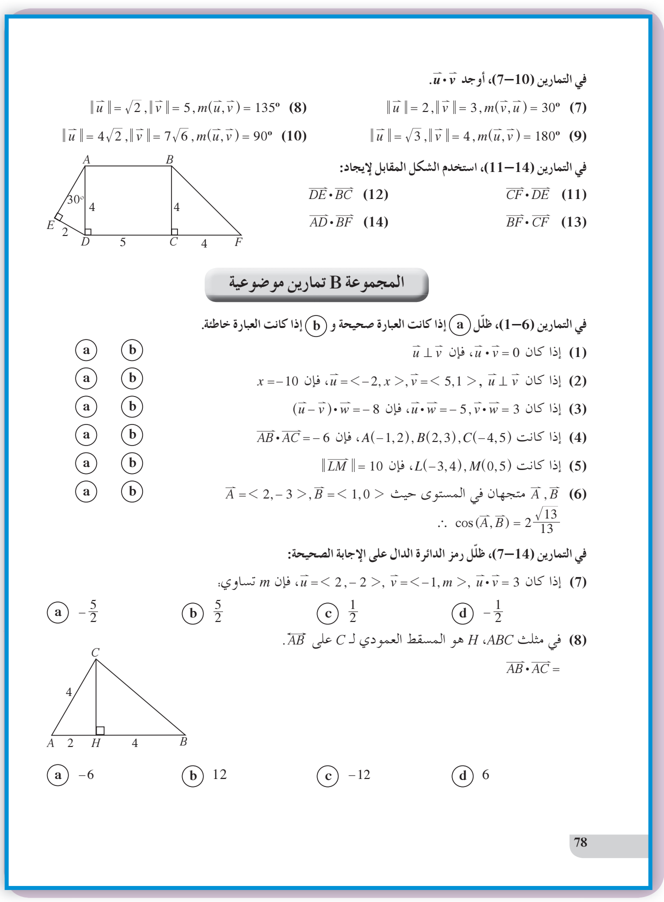
a $\overrightarrow{BA} = \langle x_A - x_B, y_A - y_B \rangle$
$= \langle -a-x, 0-y \rangle = \langle -a-x, -y \rangle$
$\overrightarrow{BC} = \langle x_C - x_B, y_C - y_B \rangle$
$= \langle a-x, 0-y \rangle = \langle a-x, -y \rangle$

b $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-a-x)(a-x)+(-y)(-y)$
$= -a^2+ax-ax+x^2+y^2$
$= x^2+y^2-a^2$

معادلة الدائرة $\because\ x^2+y^2=a^2$
$\therefore\ x^2+y^2-a^2=0$
أي $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$
$\therefore\ \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$

∴ قياس الزاوية θ يساوي 90°

193



في التمارين (7–10)، أوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(7) $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3, m(\vec{v},\vec{u}) = 30^\circ$
(8) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 5, m(\vec{u},\vec{v}) = 135^\circ$
(9) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}, \|\vec{v}\| = 4, m(\vec{u},\vec{v}) = 180^\circ$
(10) $\|\vec{u}\| = 4\sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 7\sqrt{6}, m(\vec{u},\vec{v}) = 90^\circ$

في التمارين (11–14)، استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

(11) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}$
(12) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}$
(13) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}$
(14) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$، فإن $\vec{u}\perp\vec{v}$ — (a) (b)
(2) إذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$, $\vec{u} = \langle -2, x \rangle, \vec{v} = \langle 5, 1 \rangle$، فإن $x = -10$ — (a) (b)
(3) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{w} = -5, \vec{v}\cdot\vec{w} = 3$، فإن $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w} = -8$ — (a) (b)
(4) إذا كانت $A(-1,2), B(2,3), C(-4,5)$، فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -6$ — (a) (b)
(5) إذا كانت $L(-3,4), M(0,5)$، فإن $\|\overrightarrow{LM}\| = 10$ — (a) (b)
(6) $\vec{A}, \vec{B}$ متجهان في المستوى حيث $\vec{A} = \langle 2, -3 \rangle, \vec{B} = \langle 1, 0 \rangle$
$\therefore\ \cos(\vec{A},\vec{B}) = 2\frac{\sqrt{13}}{13}$ — (a) (b)

في التمارين (7–14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(7) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $\vec{u} = \langle 2, -2 \rangle, \vec{v} = \langle -1, m \rangle$، فإن m تساوي:

(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(8) في مثلث ABC، H هو المسقط العمودي لـ C على $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

(a) -6 (b) 12 (c) -12 (d) 6

78

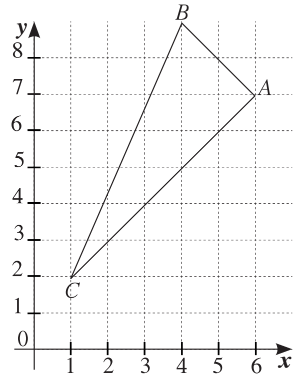
8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، ثم تحقق من صحة عملهم.

اختبار سريع

1 أوجد $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ في كل من الحالات التالية:

(a)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

(b) $A(1,-3), B(0,4), C(2,-5)$ -15

(c) $\|\overrightarrow{AB}\| = 3, \|\overrightarrow{AC}\| = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$ $3\sqrt{2}$

2 إذا كان $\|\vec{A}\| = 5, \|\vec{B}\| = 2, \vec{A} \cdot \vec{B} = -1$،

فأوجد قياس الزاوية بين $\vec{A}, \vec{B}$.

95.739°

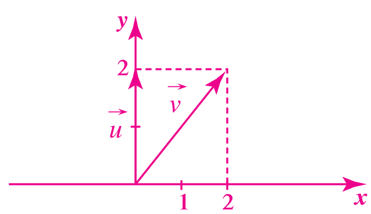
9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1



$\|\vec{u}\| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$ units

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$ units

$m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -45^{\circ}$

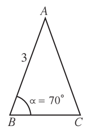
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos(-45^{\circ})$

$= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 4$

(9) في الشكل المقابل $AB = AC = 3\,cm, m(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 70^{\circ}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ يساوي تقريبًا:

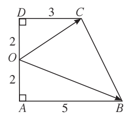


(a) 2.3 (b) 6.89 (c) 3 (d) -2.3

(10) $ABCD$ شبه منحرف قائم (انظر الشكل المقابل) حيث:

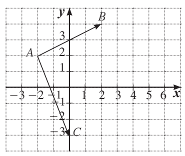
$AB = 5\,cm, AO = 2\,cm, OD = 2\,cm, CD = 3\,cm$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ يساوي:



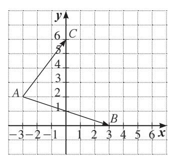
(a) 11 (b) -11 (c) 12 (d) -12

(11) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$



(a) 2 (b) -2 (c) 18 (d) 0

(12) في الشكل المقابل، $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$



(a) 0 (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

79

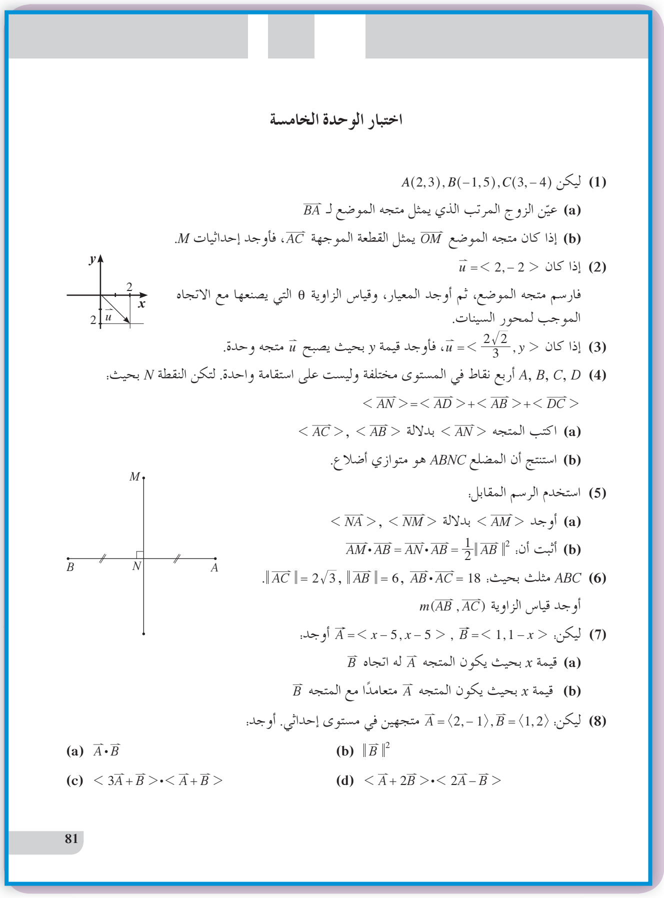
(13) إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$، $\vec{u} = < -5, m >, \vec{v} = < 2, 3 >$ فإن m تساوي:

(a) $\frac{10}{3}$ (b) $-\frac{3}{10}$ (c) $\frac{-10}{3}$ (d) $\frac{15}{2}$

(14) إذا كان $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$ فإن $m(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ **لا يمكن** أن يساوي:

(a) 60° (b) 28° (c) 122° (d) 50°

80



اختبار الوحدة الخامسة

(1) ليكن $A(2,3), B(-1,5), C(3,-4)$

(a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ $\overrightarrow{BA}$

(b) إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يمثل القطعة الموجهة $\overrightarrow{AC}$، فأوجد إحداثيات M.

(2) إذا كان $\vec{u} = < 2, -2 >$

فارسم متجه الموضع، ثم أوجد المعيار، وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(3) إذا كان $\vec{u} = < \frac{2\sqrt{2}}{3}, y >$، فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

(4) A, B, C, D أربع نقاط في المستوى مختلفة وليست على استقامة واحدة. لتكن النقطة N بحيث:

$< \overrightarrow{AN} > = < \overrightarrow{AD} > + < \overrightarrow{AB} > + < \overrightarrow{DC} >$

(a) اكتب المتجه $< \overrightarrow{AN} >$ بدلالة $< \overrightarrow{AC} >, < \overrightarrow{AB} >$

(b) استنتج أن المضلع $ABNC$ هو متوازي أضلاع.

(5) استخدم الرسم المقابل:

(a) أوجد $< \overrightarrow{AM} >$ بدلالة $< \overrightarrow{NA} >, < \overrightarrow{NM} >$

(b) أثبت أن: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \|^2$

(6) ABC مثلث بحيث: $\| \overrightarrow{AC} \| = 2\sqrt{3}, \| \overrightarrow{AB} \| = 6, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18$.

أوجد قياس الزاوية $m(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

(7) ليكن: $\vec{A} = < x-5, x-5 >, \vec{B} = < 1, 1-x >$ أوجد:

(a) قيمة x بحيث يكون المتجه $\vec{A}$ له اتجاه $\vec{B}$

(b) قيمة x بحيث يكون المتجه $\vec{A}$ متعامدًا مع المتجه $\vec{B}$

(8) ليكن: $\vec{A} = \langle 2, -1 \rangle, \vec{B} = \langle 1, 2 \rangle$ متجهين في مستوى إحداثي. أوجد:

(a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ **(b)** $\| \vec{B} \|^2$

(c) $< 3\vec{A} + \vec{B} > \cdot < \vec{A} + \vec{B} >$ **(d)** $< \vec{A} + 2\vec{B} > \cdot < 2\vec{A} - \vec{B} >$

81

---

2 **(a)** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = -1$

(b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (1)(1)\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

(c) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{EF} = 1$

(d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = -1$

(e) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OF} = (1)(1)\cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2}$

3 **(a)** $\overrightarrow{BA} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

$\overrightarrow{BC} = -\vec{i} - \vec{j}$

(b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

(c) $\because \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\therefore$ المثلث ABC قائم الزاوية B

4 $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$

$3x + 2 = 0 \Rightarrow$

$x = -\frac{2}{3}$

5 **(a)** $\because \frac{x_A}{x_B} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{y_A}{y_B} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\therefore \vec{A} \,//\, \vec{B}$

(b) نأخذ القاعدة: $x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$

$\therefore \frac{7}{3} \times \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \times x = 0 \; ; \; x = \frac{14}{5}$

6 $-3\| \vec{A} \|^2 + 11\vec{A} \cdot \vec{B} - 6\| \vec{B} \|^2$

$= -3(9) + 11(5) - 6(16)$

$= -68$

7 $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}, m(\vec{A}, \vec{B}) = 150^\circ$

8 $\vec{A} \cdot \underrightarrow{B} = 18 - 3 = 15$

$\| \vec{A} \| = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$

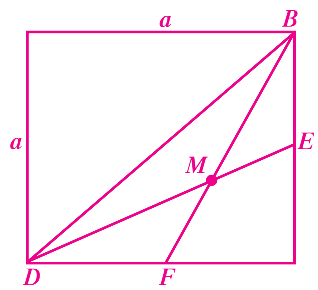
$\| \vec{B} \| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{15}{3\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$m(\vec{A}, \vec{B}) = 45^\circ$

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»



طريقة أولى:

في المثلث BDC

$\overline{BF}$ قطعة متوسطة

$\overline{DE}$ قطعة متوسطة

$\overline{DE} \cap \overline{BF} = \{M\}$

$$DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$MD = \frac{2}{3}DE = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$MF = \frac{1}{3}BF = \frac{a\sqrt{5}}{6}$$

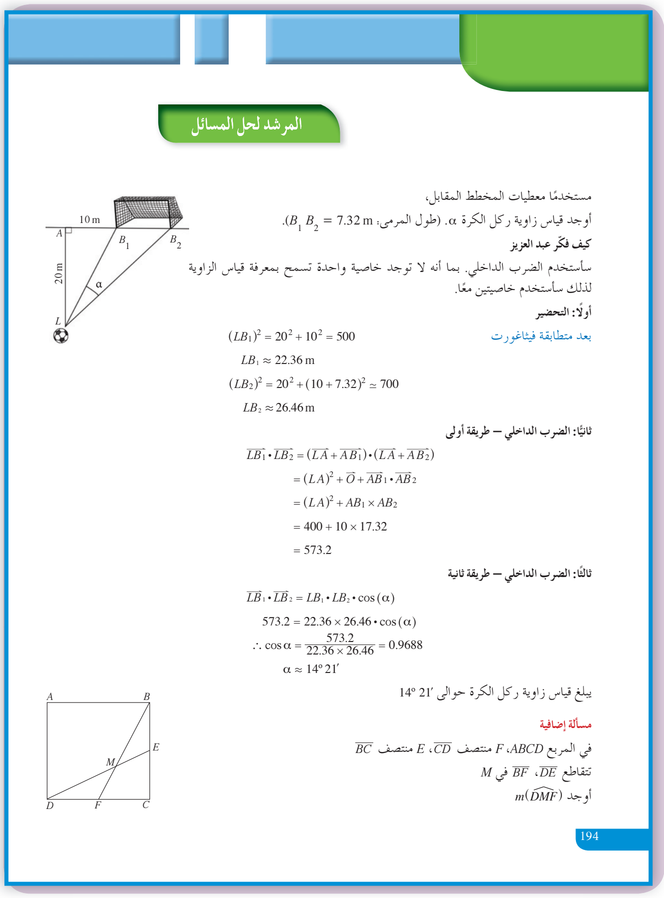
$$DF = \frac{a}{2}$$

في المثلث DMF نستخدم قانون جيب التمام:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{6}\right)^2 - 2 \times \frac{a\sqrt{5}}{3} \times \frac{a\sqrt{5}}{6} \times \cos(D\widehat{M}F)$$

$$\cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MF}) = \frac{4}{5}$$

$$m(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MF}) \approx 36^\circ\, 52'\, 11''$$



المرشد لحل المسائل

مستخدمًا معطيات المخطط المقابل،
أوجد قياس زاوية ركل الكرة α. (طول المرمى: $B_1B_2 = 7.32\text{ m}$).

كيف فكّر عبد العزيز

سأستخدم الضرب الداخلي. بما أنه لا توجد خاصية واحدة تسمح بمعرفة قياس الزاوية لذلك سأستخدم خاصيتين معًا.

أولًا: التحضير

بعد متطابقة فيثاغورث

$(LB_1)^2 = 20^2 + 10^2 = 500$

$LB_1 \approx 22.36\text{ m}$

$(LB_2)^2 = 20^2 + (10 + 7.32)^2 \simeq 700$

$LB_2 \approx 26.46\text{ m}$

ثانيًا: الضرب الداخلي – طريقة أولى

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LB_1} \cdot \overrightarrow{LB_2} &= (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB_1}) \cdot (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB_2}) \\ &= (LA)^2 + \vec{O} + \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AB_2} \\ &= (LA)^2 + AB_1 \times AB_2 \\ &= 400 + 10 \times 17.32 \\ &= 573.2\end{aligned}$$

ثالثًا: الضرب الداخلي – طريقة ثانية

$$\overrightarrow{LB_1} \cdot \overrightarrow{LB_2} = LB_1 \cdot LB_2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$573.2 = 22.36 \times 26.46 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{573.2}{22.36 \times 26.46} = 0.9688$$

$$\alpha \approx 14^\circ\, 21'$$

يبلغ قياس زاوية ركل الكرة حوالى $14^\circ\, 21'$

مسألة إضافية

في المربع $ABCD$، F منتصف $\overline{CD}$، E منتصف $\overline{BC}$
تتقاطع $\overline{DE}$، $\overline{BF}$ في M
أوجد $m(\widehat{DMF})$

194

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة

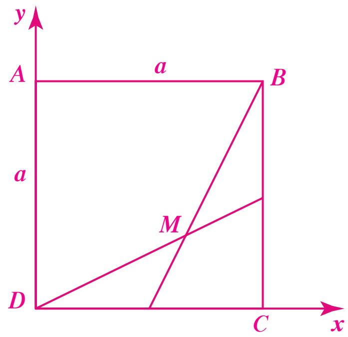
ملخص

- للقطعة الموجهة اتجاه وقياس.
- القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x, y)$ تسمى متجه الموضع ويمثلها الزوج المرتب (x, y)
- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة و $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع لهذه القطعة فإن $M(x_B - x_A, y_B - y_A)$
- المتجه هو مجموعة كل القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع.
- يكون متجهان متساويين إذا كانت القطعتان الموجهتان المناظرتان لهما متكافئتين.
- المتجهان $\langle c,d\rangle$, $\langle a,b\rangle$ متساويان إذا وفقط إذا $b = d$، $a = c$
- $\vec{A}$, $\vec{B}$ متجهان متوازيان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ يحقق $\vec{A} = k\vec{B}$
- تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ يحقق $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
- جمع متجهين:
  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$، حيث $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.
  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ $\quad (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ $\quad \vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}, \vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$
- $\vec{B} = \langle x_B, y_B\rangle$, $\vec{A} = \langle x_A, y_A\rangle$، k عدد حقيقي.
  $k\vec{A} = \langle kx_A, ky_B\rangle$، $\quad \vec{A} + \vec{B} = \langle x_A + x_B, y_A + y_B\rangle$
  $\vec{A} = \vec{B}$ إذا وفقط إذا $y_A = y_B$, $x_A = x_B$
- $\vec{A}$, $\vec{B}$ متوازيان إذا وفقط إذا $x_A \cdot y_B - x_A \cdot y_B = 0$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = x_A x_B + y_A y_B$
- إذا $\vec{A}(x,y)$، فإن $\|\vec{A}\|^2 = x^2 + y^2$، $\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}$
- إذا كان $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$، فإن $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

195

طريقة ثانية:

نأخذ نظامًا إحداثيًّا عموديًّا منتظمًا مركزه D



$D(0,0) \qquad C(a,0)$

$A(0,a) \qquad B(a,a)$

$E\left(a,\frac{a}{2}\right) \qquad F\left(\frac{a}{2},0\right)$

$M\left(\frac{2a}{3},\frac{a}{3}\right)$

$\overrightarrow{MD}=\left(\frac{-2a}{3},\frac{-a}{3}\right)$

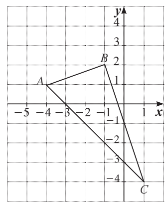
$\overrightarrow{MF}=\left(-\frac{a}{6},-\frac{a}{3}\right)$

$$\cos(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MF})=\frac{x_1\times x_2+y_1\times y_2}{\|\overrightarrow{MD}\|\times\|\overrightarrow{MF}\|}=\frac{\frac{2a^2}{9}}{\frac{a\sqrt{5}}{3}\times\frac{a\sqrt{5}}{6}}$$

$$\cos(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MF})=0.8\,,\,m(D\widehat{M}F)=36°52'11''$$

(13) إذا كانت $A(-4,1),B(-1,2),C(1,-4)$ رؤوس المثلث ABC

فأثبت أن المثلث قائم في B.



(14) إذا كانت المتجهات، $\overrightarrow{A}=-4\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}\ ,\ \overrightarrow{B}=-\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}\ ,\ \overrightarrow{C}=<-5,5>$

(a) أثبت أن: $\overrightarrow{B}\neq\overrightarrow{C}$

(b) أوجد: $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\ ,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$

(c) ماذا نستنتج؟

في التمرين (15)، اختر الإجابة الصحيحة.

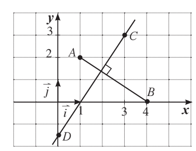
(15) ليكن: $\overrightarrow{A}=<-4,3>$، فإن المتّجه المتعامد مع $\overrightarrow{A}$ مما يلي هو:

(a) $<2,-\frac{3}{2}>$ **(b)** $<3,-4>$ **(c)** $<\frac{3}{2},2>$ **(d)** $<4,3>$

(9) لتكن النقاط: $A(1,2),B(4,0),C(3,3)$ في مستوى إحداثي.

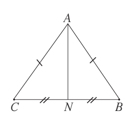
المستقيم المتعامد مع $\overleftrightarrow{AB}$ المار بالنقطة C يقطع محور الصادات بالنقطة D.

أوجد إحداثيات النقطة D.



(10) ABC مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 4 cm

ليكن: $\overrightarrow{a}=<\overline{AB}>,\overrightarrow{b}=<\overline{AC}>$



(a) أوجد $<\overline{CB}>$ بدلالة $\overrightarrow{a}\ ,\ \overrightarrow{b}$ واستنتج $\|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\|$

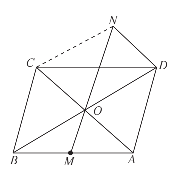
(b) أنشئ النقطة D بحيث $<\overline{AD}>=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$

(c) ما نوع الرباعي $ABDC$؟

(d) أوجد $\|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\|$

(11) $ABCD$ متوازي أضلاع، مركزه O.

M منتصف $<\overline{AB}>$، النقطة N حيث: $<\overline{DN}>=<\overline{OC}>$

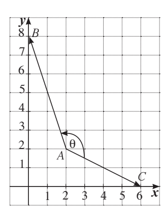


(a) أوجد $<\overline{BC}>$ بدلالة $<\overline{ON}>$

(b) أثبت أن: $<\overline{BC}>=<\overline{OD}>+<\overline{OC}>$

(c) أثبت أن النقاط M, N, O تقع على استقامة واحدة.

(12) أوجد قياس الزاوية θ المحددة بالمتجهين $<\overline{AB}>,<\overline{AC}>$



تمارين إثرائية

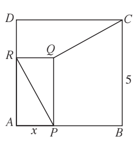
(1) لنأخذ في المستوى الإحداثي المنتظم المتعامد النقاط:

$A(2,2),B(4,5),C(4-m,0)$ حيث m عدد حقيقي.

(a) أوجد قيمة m بحيث يكون المثلث ABC قائم A.

(b) لقيمة m التي وجدتها، أثبت أن ABC مثلث متطابق الضلعين.

(2) الشكل المقابل يمثل مربعًا رسم في داخله مستطيل.



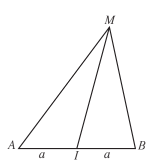
أثبت أن المستقيمين:

$\overleftrightarrow{CQ}\ ,\overleftrightarrow{PR}$ متعامدين.

(**مساعدة:** استخدم علاقة شال)

(3) في المثلث MAB الأدناه أثبت أن:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-a^2$

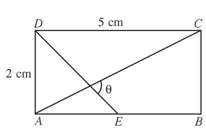


(4) إذا كان: $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=\overrightarrow{w}\ ,\overrightarrow{A}-2\overrightarrow{B}=-\overrightarrow{w}$، فأثبت أن:

$\overrightarrow{A}\ ,\overrightarrow{B}$ لهما الاتجاه نفسه.

(5) في المستطيل المقابل E منتصف $\overline{AB}$.

أوجد θ (استخدم الآلة الحاسبة).



الوحدة السادسة: الجبر المتقطع (الإحصاء)

Discrete Algebra (Statistics)

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 6: المجتمع الإحصائي والمعاينة

جزء 1: المجتمع الإحصائي.

جزء 2: أساليب جمع البيانات.

جزء 3: أنواع البيانات.

2 – 6: العينات

جزء 1: العينة العشوائية.

3 – 6: أساليب عرض البيانات

جزء 1: القطاعات الدائرية.

جزء 2: المنحنى التكراري والمدرج التكراري.

4 – 6: الانحراف المعياري

5 – 6: القاعدة التجريبية

جزء 1: التوزيع الطبيعي.

جزء 2: القاعدة التجريبية.

6 – 6: القيمة المعيارية

جزء 1: القيمة المعيارية.

مقدمة الوحدة


الوحدة السادسة

الجبر المتقطع (الإحصاء)

Discrete Algebra (Statistics)

مشروع الوحدة: زحمة السير

1 مقدمة المشروع: أظهرت الإحصاءات أن أكثر المشاكل التي تواجه الأشخاص في تنقلاتهم يوميًا هي زحمة السير الخانقة على الطرقات. لذلك كانت الدراسات ولا زالت حتى اليوم تتركز على كيفية إيجاد وسائل نقل أسرع وأكثر أمانًا وأقل تكلفة ومناسبة لبيئة سليمة وصحية.

2 الهدف: في هذا المشروع سوف تحدد مشاكل النقل والسفر، ثم تقدم تصميمًا لوسيلة نقل جديدة أو عرضًا لخدمة تستطيع من خلالها حل المشكلة، وتقوم باستطلاع لتقرر ما إذا كان تصميمك أو خدمتك قابلين للتسويق.

3 اللوازم: ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية.

4 أسئلة حول التطبيق:

a ما أسباب زحمة السير؟

b كيف ستختار عينة الاستطلاع؟

c ما نوع الأسئلة التي ستطرحها على الأشخاص؟

d ما هي وسائل النقل المستخدمة؟

e ما نوع الخدمة التي يفضلونها؟

f نظم المعلومات التي حصلت عليها ومثلها بيانيًا، ثم قم بتحليلها. ما أكبر مشكلة ظهرت في الإجابات؟ اقترح منتجًا أو خدمة تعتقد أنهما يساهمان في حل المشكلة. تأكد من أن الأفكار التي عرضتها قابلة للتطبيق. نفذ نموذجًا أو اكتب وصفًا لوسيلة النقل أو الخدمة المقترحة متضمنين التكلفة التي تراها مناسبة.

استطلع آراء عدد من الأشخاص في سوق العمل حول منتجك أو خدمتك الجديدة. مثل البيانات التي حصلت عليها وقم بتحليلها. هل منتجك أو خدمتك المقترحة قابلان للتسويق؟

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا عن منتجك أو خدمتك المقترحة. اعرض ما توصلت إليه على زملائك في غرفة الصف. أعد النظر ببعض الاقتراحات إذا كان ذلك ضروريًّا. ناقش معهم قرارك في إمكانية التسويق للمنتج أو للخدمة مستندًا إلى نتائج استطلاعك.

دروس الوحدة

المجتمع الإحصائي والمعاينة	العينات	أساليب عرض البيانات	الانحراف المعياري	القاعدة التجريبية	القيمة المعيارية
6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	6–6

196

أصبح علم الإحصاء في عصرنا الحاضر من أهم العلوم التطبيقية التي تعتمد عليها الدول لدراسة كل ما له علاقة بالفرد في المجتمعات، لذا كان في كل دولة إدارة مركزية للإحصاء.

وهذه الإدارة المركزية لها مهمات متعددة الجوانب تطال كل النواحي الحياتية للمواطن من إنتاج، واستهلاك، وحوادث طرقات، ووفيات، وولادات...

من إحدى المهمات التي تقوم بها «الإدارة المركزية للإحصاء» في دولة الكويت دراسة الأرقام القياسية لأسعار المستهلك وتغيرها شهريًّا، ثم إصدار نشرة دورية عن نسبة هذا التغير وأسبابه.

وللدلالة على ذلك، نورد فقرة أخذت من تقرير عن شهر يونيو سنة 2012:

«إن عملية جمع بيانات الأسعار شهريًّا لأصناف متنوعة من السلع من أكثر من 400 مصدر من أنحاء البلاد كافة تحتاج إلى تعاون مخلص من مدراء الجمعيات التعاونية والأسواق المركزية ومحلات التجزئة الأخرى بجميع أنشطتها الاقتصادية والتجارية».

بالنظر إلى هذا النص، يتبيّن لنا مدى الأهمية التي تعتمدها الإدارة المركزية للإحصاء في التعاون المخلص مع العينات الإحصائية لتكون الجداول التي تنشرها، معبرة بنسبة كبيرة عن التغيرات الحاصلة في الأسعار صعودًا أو هبوطًا.

مشروع الوحدة

زحمة المرور، حوادث المرور القاتلة على الطرقات، مشاكل قيادة السيارات، إنها معاناة تعيشها أثناء تنقلاتك من مكان إلى آخر، وتسمع دائمًا في وسائل الإعلام عن مشاريع وأفكار وتصاميم يطلقها أصحاب الاختصاص والمسؤولون لمحاولة التخفيف من هذه الأزمات.

تبنى الجسور، تفتح طرقات جديدة، تشق الأنفاق، تسن القوانين الصارمة، تحدد السرعة. ولكن، ما النتيجة؟ والأهم من كل ذلك، أين البيئة من مشاكل انبعاث ثاني أوكسيد الكربون نتيجة احتراق الوقود؟

في الأسئلة عن تطبيق المشروع، شجّع الطلاب على دراسة أسباب زحمة المرور. اطلب إليهم دراسة حركة المرور على عدد من الدوارات وعلى عدد من التقاطعات الرئيسة في المدينة، ثمّ تسجيل ملاحظاتهم. اطلب إليهم أيضًا دراسة قوانين المرور وما إذا كان لديهم آراء معينة لتحديثها. شجعهم على زيارة إدارة المرور للاطلاع على كيفية العمل فيها.

الوحدة السادسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- التمثيلات البيانية.
- قيم النزعة المركزية (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال).
- مقاييس تشتت البيانات (المدى – الأرباعيات).
- التباين – الانحراف المعياري.
- استخدام مخطط الصندوق ذي العارضتين في عرض البيانات وتحليلها.

ماذا سوف تتعلم؟

- دراسة المجتمع الإحصائي والمعاينة.
- استخدام العينة البسيطة والطبقية والمنتظمة.
- عرض البيانات في جداول تكرارية وكتابة التكرار النسبي والمئوي.
- تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- تمثيل البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري.
- إيجاد التباين والانحراف المعياري واستخدامها لاتخاذ قرارات.
- تطبيقات على مقاييس التشتت (الانحراف المعياري – القاعدة التجريبية – القيمة المعيارية).

المصطلحات الأساسية

مجتمع إحصائي – الحصر الشامل – المعاينة – المتغير – عيّنة بسيطة – عينة طبقية – عينة منتظمة – جدول تكراري – تكرار نسبي – تكرار مئوي – قطاعات دائرية – مدرج تكراري – منحنى تكراري – التباين – الانحراف المعياري – مقاييس التشتت – القاعدة التجريبية – القيمة المعيارية.

أضف إلى معلوماتك

تفيد المعطيات التاريخية أن المصريين القدامى قاموا بتعداد اليد العاملة والثروات الموجودة لمعرفة إمكانية بناء الأهرامات. كما أن أفلاطون عالج قضايا السكان في كتابه «الجمهورية» وأرسطو في كتابه «السياسة» وابن خلدون في كتابه «مقدمة ابن خلدون». وفي عهد الخليفة العباسي «المأمون» جرى تعداد للسكان والثروات لتحديد الإمكانيات المادية والفكرية. أما في العصور المتقدمة فقد جمع العالم «كاسبرنيومان» (1601 م) بيانات عن بعض الوفيات وأعمارهم، وأعد «إدموند هيلس» أول جدول حياة.

ولكن لم يأخذ الإحصاء منحاه العلمي إلّا في القرن الثامن عشر، وذلك على يد العالم الألماني «فريدريك جاوس» والفرنسي «لابلاس» والإنجليزيان «كارل بيرسون»، و «رونالد فيشر».

197

التقرير

يجب أن يكون التقرير كافيًا ومفصلًا يعكس جهد المجموعات التي قامت بالعمل، ويحدّد بشكل جلي وواضح الاقتراحات والحلول التي توصلوا إليها أو الخدمة التي يرونها مناسبة. ناقش مع زملاءك في غرفة الصف النتائج التي توصلت إليها والاقتراحات التي وضعتها. أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا.

سلّم التقييم

4	نظمت البيانات بالكامل – التمثيل البياني واضح ومعبّر – التحليل والنتائج دقيقة – التقرير مفصل ويعكس جهد العمل.
3	معظم البيانات منظمة – التمثيل البياني واضح – التحليل والنتائج يشوبها بعض الارتباك – معظم عناصر التقرير مفصلة.
2	بعض البيانات منظمة – أخطاء في التمثيل البياني – التحليل والنتائج غير سليمة – التقرير بحاجة إلى صياغة أفضل.
1	معظم عناصر المشروع غير مكتملة وبحاجة إلى إعادة.

1-6: المجتمع الإحصائي والمعاينة


6-1

المجتمع الإحصائي والمعاينة

Statistical Population and Sampling

سوف تتعلم
- المجتمع الإحصائي.
- المجتمعات المنتهية وغير المنتهية.
- المتغير.
- الحصر الشامل.
- المعاينة.
- أنواع البيانات.

المفردات والمصطلحات:
- إحصاء Statistic
- مجتمع إحصائي Statistical Population
- متغير Variable
- الحصر الشامل Comprehensive Inventory
- المعاينة Sampling
- متغير Variable
- بيانات كيفية Qualitative Data
- بيانات كمية Quantitative Data

عمل تعاوني

تجرى في كلّ سنة عملية استطلاع لتحديد أفضل لاعب كرة قدم في دولة الكويت. تريد أنت وزملاؤك القيام بهذه المهمة.

1. حدّد مع زملائك عدد الأشخاص الذين سوف تستطلعون آراءهم.
2. ما هي المعايير التي يجب اتباعها في هذا الاستطلاع لتحديد أفضل لاعب كرة قدم؟
3. ما الطرائق التي يجب اتباعها في إجراء هذا الاستطلاع؟

علم الإحصاء Statistical Science

الإحصاء هو علم أساسي في مجال الرياضيات التطبيقية حيث إنه يهتم بجمع البيانات وفرزها وتنظيمها وتصنيفها وعرضها جدوليًا أو بيانيًا وتحليلها واستقراء النتائج بهدف اتخاذ قرارات مناسبة مبنية على استنتاجات.

مراحل البحث الإحصائي هي:
1. جمع البيانات.
2. عرض البيانات (جدوليًا وبيانيًا).
3. وصف البيانات وتحليلها.
4. تفسير النتائج واتخاذ قرارات.

المجتمع الإحصائي Statistic Population

هو مجموعة كل المفردات (الوحدات) قيد الدراسة ولها خصائص مشتركة، ويمكن أن تكون مفردات المجتمع الإحصائي بشرية أو غير بشرية.

كما أن المجتمع الإحصائي يمكن أن يكون منتهيًا (عدد وحداته محدود) أو غير منته (عدد وحداته غير محدود). ويشترط أن يعرّف مجتمع الدراسة تعريفًا محددًا وواضحًا ولا يحمل أي تأويل.

مثال (1)

في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

a. طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت.
b. الطيور على سطح الأرض.

198

1 الأهداف

- يتعرف المجتمع الإحصائي.
- يتعرف المجتمعات المنتهية وغير المنتهية.
- يتعرف المتغير.
- يتعرف الحصر الشامل.
- يتعرف أنواع البيانات.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

إحصاء - مجتمع إحصائي - الحصر الشامل - المعاينة - بيانات كيفية - متغير - بيانات كمية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data Show).


الحل:

a. مجتمع طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت:
نوعه: مجتمع منته.
وحدة الدراسة: طالب.

b. مجتمع الطيور على سطح الأرض:
نوعه: غير منته.
وحدة الدراسة: طير.

حاول أن تحل

1. في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.
a. لاعبو فرق كرة السلة في دولة الكويت.
b. مجتمع الأسماك في مياه الخليج العربي.

المتغير Variable

هو الصفة (أو الصفات) محور الدراسة في مجتمع إحصائي معيّن. فمثلًا في دراسة عن طلاب الصف الحادي عشر في دولة الكويت، قد يختلف الطلاب من حيث الفرع: أدبي أو علمي، الجنس: أنثى أو ذكر، الجنسية: كويتي أو غير كويتي، الطول، الوزن، لون العيون، ... وهذه الصفة تتغير من وحدة إلى أخرى في مجتمع الدراسة.

أساليب جمع البيانات Ways to Collect Data

عند القيام بدراسة إحصائية يقوم الباحث بتحديد المجتمع محل الدراسة ثم يبدأ بجمع البيانات. هناك أساليب مختلفة لجمع البيانات تعتمد على نوع الدراسة وخصائص المجتمع ومن هذه الأساليب:

1 - الحصر الشامل Comprehensive Inventory

هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة. يتميز الحصر الشامل بدقة نتائجه وخلوه من الأخطاء. (مثل نتائج الطلاب في الصف الحادي عشر علمي نهاية العام الدراسي). ومن عيوب الحصر الشامل أنه يتطلب وقت وجهد كبيرين وفرق عمل ونفقات وتكاليف مرتفعة. كما أن الحصر الشامل لا يمكن إجراؤه في المجتمعات غير المنتهية (مثل مجتمع الطيور) وأكثر من ذلك لا يمكن استخدامه في حالة تدمير جميع وحدات الدراسة (مثل عملية سحب الدم لمعرفة كمية السكر الموجودة فيه).

مثال (2)

هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اذكر السبب.

a. دراسة كمية الدهون الموجودة في الدم.
b. دراسة نسبة عدد الطلاب الذين لون عيونهم أزرق إلى عدد طلاب صفك.

199

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) تريد استطلاع الرأي حول الانتخابات النيابية في دولتك، هل ستقوم بطرح الأسئلة على السكان كافة؟

(b) كيف يمكنك جمع معلومات حول مسحوق معيّن للغسيل؟

(c) ما هو المسلسل التلفزيوني الأكثر مشاهدة؟

(d) هل استخدمت كلمة «متغير» قبل الآن؟ وأين كان ذلك؟

5 التدريس

عند القيام بأي عملية استطلاع، يجب تحديد المجتمع الإحصائي، والهدف من الدراسة، والمواضيع التي يراد التطرق إليها، وتسجيل الأسئلة الواجب طرحها، وذلك لاستخلاص صورة واضحة تساعد على اتخاذ قرارات صائبة.

في المثال (1)

ناقش مع الطلاب المفردات الجديدة: مجتمع منته، مجتمع غير منته، وحدة الدراسة في المجتمع. اطلب إليهم عرض أمثلة بديلة عن المجتمعات الإحصائية، واسألهم ما إذا كانت منتهية أو غير منتهية، وما هي وحدة الدراسة في كل مجتمع.

في المثال (2)

ركّز على فكرة الحصر الشامل والحالات التي يمكن والتي لا يمكن استخدامه فيها بإيجابياته وسلبياته في عملية الإحصاء.

في المثال (3)

أعطِ أمثلة بديلة عن البيانات الكمية. اطلب إلى الطلاب تقديم بيانات معيّنة تمّ تعريف ما إذا كانت كيفية أو كمية.

6 الربط

الدراسات الإحصائية واستطلاع الرأي ترتبط مباشرة بنواحٍ حياتية حيث تحول الواقع إلى أرقام تساعد على اتخاذ قرارات في المجالات كلها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يواجه الطلاب عدة مشاكل ويقعون في العديد من الأخطاء، مثلًا في تحديد مجتمع ما إذا كان منتهيًا أو غير منته أو في تعريف المتغير في مجال الدراسة. اعرض عليهم أمثلة توضح تعريف المجتمع المنتهي وكيفية تحديد المتغير المشترك في الصفات ضمن أفراد المجتمع.

8 التقييم

تابع الطلاب في عملهم ضمن فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من مدى استيعابهم لما ورد في هذا الدرس.

الحل:

a لا يمكن استخدام الحصر الشامل، لأنه لا يمكن استخدام كافة كمية الدم الموجودة في جسم الشخص فذلك سوف يؤدي إلى نهاية حياته.

b يمكن استخدام الحصر الشامل لأن عدد الطلاب في الصف محدد ويمكن إيجاد النسبة المطلوبة.

حاول أن تحل

2 اكتب مثالًا يبين:

a دراسة في مجتمع إحصائي يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.

b دراسة في مجتمع إحصائي لا يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.

2 – المعاينة Sampling

هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.

أنواع البيانات Types of Data

يمكن تصنيف البيانات إلى نوعين: كمية وكيفية كما يبيّن الجدول التالي:

أنواع البيانات	الصفات	أمثلة
بيانات كيفية	اسمية	لون العيون – لون الشعر
	مرتبة	المستوى العلمي – الدرجات التقديرية
بيانات كمية	متقطعة	عدد طلاب الفصل – نقاط مباراة كرة السلة
	مستمرة	أطوال القامات – الأوزان – درجات الحرارة

مثال (3)

حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:

a عدد أهداف الدوري العام لكرة القدم في أحد المواسم.

b ترتيب الدول بحسب الميداليات التي حصلت عليها في دورة من دورات الألعاب الأولمبية.

c درجات الحرارة في شهر سبتمبر في مطار الكويت.

d لون سيارات معلمي مدرسة ما.

200

تمرَّنْ 6–1

المجتمع الإحصائي والمعاينة

Statistical Population and Sampling

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أذكر مراحل البحث الإحصائي الأربعة مرتبة.

(2) ما هي أساليب جمع البيانات.

في التمرينين (4–3)، اذكر ما نوع البيانات التي تصف كلًّا من الحالات التالية:

(3) عدد التذاكر المباعة لإحدى المسرحيات.

(4) أنواع منتجات معجون الأسنان المباعة للمستهلك.

(5) حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:

(a) أوزان طلّاب الصف الحادي عشر في مدرستك. (b) أنواع الكتب في مكتبة المدرسة.

(c) الدخل الشهري للأسرة في دولة ما. (d) ألوان أحذية الطلّاب في صفك.

(6) عرف المجتمع المنتهي والمجتمع غير المنتهي.

(7) عرّف كلًّا من:

(a) علم الإحصاء. (b) المجتمع الإحصائي. (c) الحصر الشامل.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المواليد في العالم سنة 2010 عبارة عن مجتمع غير منته. (a) (b)

(2) وحدة الدراسة لعدد زوار مركز علمي في يوم واحد هي أي زائر. (a) (b)

(3) يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة أنواع السمك الموجودة في أحد المحيطات. (a) (b)

(4) عدد الصفحات في كتاب ما هو بيانات كمية مستمرة. (a) (b)

(5) عند ترتيب الأشياء نستخدم بيانات كيفية مرتبة. (a) (b)

85

اختبار سريع

في دراسة لوسائل النقل التي يستخدمها طلاب المرحلة الثانوية في إحدى مدارس الدولة، أجب عن الاسئلة التالية:

(a) ما هو المجتمع محل الدراسة؟

طلاب المرحلة الثانوية في إحدى مدارس الدولة.

(b) هل هذا المجتمع منتهٍ أو غير منتهٍ؟ لماذا؟

مجتمع منته، لأن عدد الطلاب محدد.

(c) ما هو المتغير محل الدراسة؟

وسيلة النقل المستخدمة في الذهاب والإياب.

(d) إذا شمل السؤال كافة طلاب المرحلة الثانوية في الدولة، فهل يعتبر ذلك حصرًا شاملًا؟

نعم.

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

3 – 1 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** نوعه: مجتمع منته

وحدة الدراسة: لاعب

(b) نوعه: غير منته

وحدة الدراسة: سمكة

2 **(a)** تتنوع الإجابات: إجابة ممكنة:

المعلمون في إحدى مدارس الدولة.

(b) تتنوع الإجابات: إجابة ممكنة:

الأعشاب في ملعب كرة القدم.

3 **(a)** كمية، متقطعة

(b) كيفية إسمية

(c) كمية مستمرة

(d) كيفية مرتبة

الحل:

a كمية متقطعة.

b كيفية مرتبة.

c كمية مستمرة.

d كيفية اسمية.

حاول أن تحل

3 حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

a عدد أعضاء فريق كرة القدم.

b الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)

c أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.

d تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

طرق جمع البيانات Ways To Collect Data

عند جمع البيانات يمكن استخدام طرائق متنوعة وذلك بحسب ما هو متوفر وما هو أسهل وهي:

- المشاهدة والملاحظة
- الاستبانة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- المقابلة الشخصية
- الوثائق والسجلات
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- قواعد البيانات
- مواقع التواصل الإجتماعي

201

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) البيانات الكيفية تكون:

a اسمية أو مرتبة b مرتبة فقط

c متقطعة d اسمية فقط

(7) البيانات المستمرة هي بيانات:

a اسمية b مرتبة c كمية d كيفية

(8) عند إجراء تحاليل الدم نستخدم:

a الحصر الشامل b المعاينة

c الحصر الشامل والمعاينة d ليس أيًّا مما سبق

(9) البيانات الكمية تكون:

a اسمية أو مرتبة b مرتبة فقط

c متقطعة أو مستمرة d مستمرة فقط

(10) عدد المشاهدين في مباراة كرة قدم هو عبارة عن بيانات:

a كيفية اسمية b كيفية مرتبة

c كمية متقطعة d كمية مستمرة

86

6–2: العينات

1 الأهداف

- يتعرف العينة العشوائية البسيطة ويطبقها.
- يتعرف العينة العشوائية الطبقية ويطبقها.
- يتعرف العينة العشوائية المنتظمة ويطبقها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

عينة – عينة عشوائية – عينة عشوائية بسيطة – عينة عشوائية طبقية – عينة عشوائية منتظمة – كسر المعاينة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

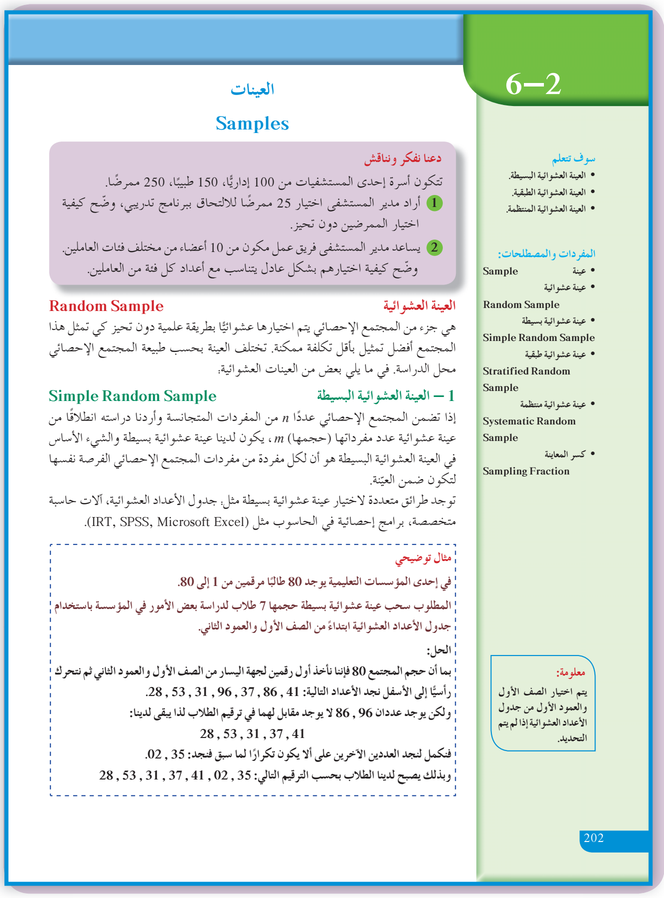
4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) هل يمكن استخدام الحصر الشامل لمعرفة البرامج التلفزيونية المفضلة لدى سكان دولة الكويت؟

(b) اعرض بعض المتغيرات التي يمكن دراستها في غرفة الصف.

(c) أعطِ أمثلة عن بيانات كمية وبيانات كيفية.



6–2

سوف تتعلم

- العينة العشوائية البسيطة.
- العينة العشوائية الطبقية.
- العينة العشوائية المنتظمة.

المفردات والمصطلحات:

- عينة Sample
- عينة عشوائية Random Sample
- عينة عشوائية بسيطة Simple Random Sample
- عينة عشوائية طبقية Stratified Random Sample
- عينة عشوائية منتظمة Systematic Random Sample
- كسر المعاينة Sampling Fraction

العينات

Samples

دعنا نفكر ونناقش

تتكون أسرة إحدى المستشفيات من 100 إداريًا، 150 طبيبًا، 250 ممرضًا.

1 أراد مدير المستشفى اختيار 25 ممرضًا للالتحاق ببرنامج تدريبي، وضّح كيفية اختيار الممرضين دون تحيز.

2 يساعد مدير المستشفى فريق عمل مكون من 10 أعضاء من مختلف فئات العاملين. وضّح كيفية اختيارهم بشكل عادل يتناسب مع أعداد كل فئة من العاملين.

العينة العشوائية Random Sample

هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًّا بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل تكلفة ممكنة. تختلف العينة بحسب طبيعة المجتمع الإحصائي محل الدراسة. في ما يلي بعض من العينات العشوائية:

1 – العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample

إذا تضمن المجتمع الإحصائي عددًا n من المفردات المتجانسة وأردنا دراسته انطلاقًا من عينة عشوائية عدد مفرداتها (حجمها) m، يكون لدينا عينة عشوائية بسيطة والشيء الأساس في العينة العشوائية البسيطة هو أن لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي الفرصة نفسها لتكون ضمن العيّنة.

توجد طرائق متعددة لاختيار عينة عشوائية بسيطة مثل: جدول الأعداد العشوائية، آلات حاسبة متخصصة، برامج إحصائية في الحاسوب مثل (IRT, SPSS, Microsoft Excel).

مثال توضيحي

في إحدى المؤسسات التعليمية يوجد 80 طالبًا مرقمين من 1 إلى 80.

المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها 7 طلاب لدراسة بعض الأمور في المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الأول والعمود الثاني.

الحل:

بما أن حجم المجتمع 80 فإننا نأخذ أول رقمين لجهة اليسار من الصف الأول والعمود الثاني ثم نتحرك رأسيًّا إلى الأسفل نجد الأعداد التالية: 41 , 86 , 37 , 96 , 31 , 53 , 28.

ولكن يوجد عددان 96 , 86 لا يوجد مقابل لهما في ترقيم الطلاب لذا يبقى لدينا:

28 , 53 , 31 , 37 , 41

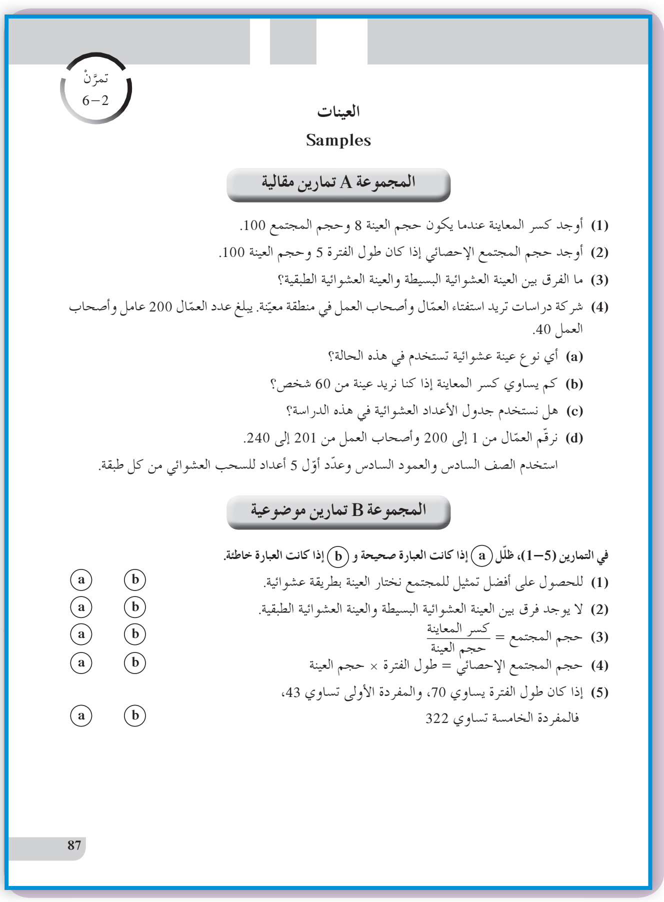
فنكمل لنجد العددين الآخرين على ألا يكون تكرارًا لما سبق فنجد: 35 , 02.

وبذلك يصبح لدينا الطلاب بحسب الترقيم التالي: 35 , 02 , 41 , 37 , 31 , 53 , 28

معلومة:

يتم اختيار الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية إذا لم يتم التحديد.

202



تمرَّنْ 6–2

العينات

Samples

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد كسر المعاينة عندما يكون حجم العينة 8 وحجم المجتمع 100.

(2) أوجد حجم المجتمع الإحصائي إذا كان طول الفترة 5 وحجم العينة 100.

(3) ما الفرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية؟

(4) شركة دراسات تريد استفتاء العمّال وأصحاب العمل في منطقة معيّنة. يبلغ عدد العمّال 200 عامل وأصحاب العمل 40.

(a) أي نوع عينة عشوائية تستخدم في هذه الحالة؟

(b) كم يساوي كسر المعاينة إذا كنا نريد عينة من 60 شخص؟

(c) هل نستخدم جدول الأعداد العشوائية في هذه الدراسة؟

(d) نرقّم العمّال من 1 إلى 200 وأصحاب العمل من 201 إلى 240.

استخدم الصف السادس والعمود السادس وعدّد أوّل 5 أعداد للسحب العشوائي من كل طبقة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) للحصول على أفضل تمثيل للمجتمع نختار العينة بطريقة عشوائية. (a) (b)

(2) لا يوجد فرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية. (a) (b)

(3) حجم المجتمع = $\frac{\text{كسر المعاينة}}{\text{حجم العينة}}$ (a) (b)

(4) حجم المجتمع الإحصائي = طول الفترة × حجم العينة (a) (b)

(5) إذا كان طول الفترة يساوي 70، والمفردة الأولى تساوي 43، فالمفردة الخامسة تساوي 322 (a) (b)

87

5 التدريس

إن إجراء دراسات عن مجتمعات إحصائية كبيرة العدد لا يمكن أن يتم عمليًّا إلا عن طريق المعاينة، وبالتالي على جزء محدود من هذا المجتمع الذي يتكون من مفردات تمثله وتحقق أهداف هذه الدراسات.

في المثال (1)

اشرح للطلاب أن استخدام العينة العشوائية البسيطة يعود إلى أن كل فرد في هذه المؤسسة له الفرصة ليكون واحدًا من 7 لهم الحظ بالذهاب لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة. نستخدم جدول الأعداد العشوائية البسيطة ابتداءً من الصف الأول والعمود الأول ما لم يحدد.

في المثالين (3) , (2)

ناقش مع الطلاب الفرق بين المجتمع الإحصائي في المثال (1) والمجتمع الإحصائي في المثالين (3) , (2). أكّد لهم أن العينة العشوائية البسيطة لا يصح استخدامها. فالمجتمع الإحصائي في المثالين (3) , (2) يتكون من فئات مختلفة، ويجب التعرف على أدائهم وكفاءتهم. لذا كان لا بد من إيجاد كسر المعاينة، ثم إيجاد حجم العينة من كل طبقة في المجتمع الإحصائي محل الدراسة، وبعد ذلك نستخدم جدول الأعداد العشوائية.

في المثالين (5) , (4)

أخبر الطلاب أنه في البدء، يجب احتساب طول الفترة في العينة العشوائية المنتظمة علمًا بأن جميع أفراد هذه العينة يجب أن يكون لهم الفرصة نفسها، وبالتالي فإن العينة العشوائية المنتظمة مشابهة للعينة العشوائية البسيطة إلى حد ما ولكنهما يختلفان من حيث التركيب، إذ في العينة البسيطة نختار الأعداد العشوائية بحسب الترقيم في العينة، أما في العينة المنتظمة فيضاف طول الفترة بالتتابع انطلاقًا من أول عدد على جدول الأعداد العشوائية على أن يكون أصغر من طول الفترة.

مثال (1)

عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفًا مرقمين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

الحل:

بما أن حجم المجتمع = 90

فإننا نأخذ أوّل رقمين لجهة اليسار من الصف السادس والعمود الرابع ثم نتحرك رأسيًّا إلى الأسفل ونختار الأرقام بحيث لا يتجاوز العدد 90 ولا يتكرر.

وبذلك يصبح لدينا الموظفين الذين أرقامهم: 59 , 61 , 3 , 24 , 77 , 70 , 10

حاول أن تحل

1 في مثال (1) إذا كان المطلوب سحب العينة من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف العاشر والعمود الخامس فما هي الأعداد التي سوف يحصل عليها؟

2 – العينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sample

يوجد مجتمعات إحصائية تتكون من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها بعضًا لذا نأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة فنحصل على عينة عشوائية طبقية تمثل المجتمع الإحصائي محل الدراسة.

لسحب عينة عشوائية طبقية حجمها m من مجتمع إحصائي حجمه n، حيث $m \leq n$ يكون:

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{m}{n}$$

حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

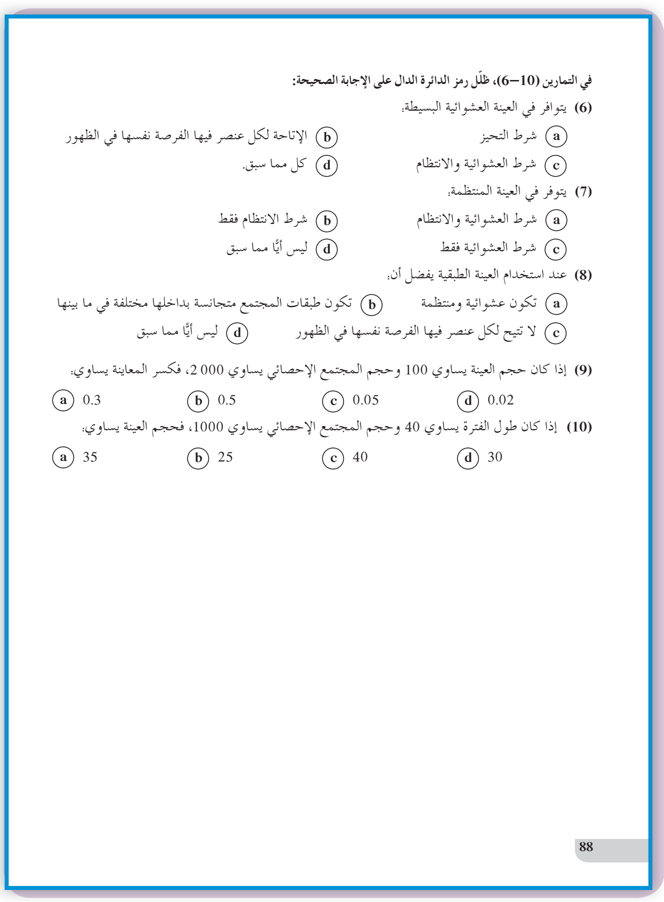
مثال (2)

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة عند الموظفين في إحدى المؤسسات، تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 80 فردًا من أصل 1 600 موظف موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	عمال ومستخدمون	تقنيون وفنيون	إداريون
1 600	1 200	300	100

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

203



في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) يتوافر في العينة العشوائية البسيطة:

(a) شرط التحيز
(b) الإتاحة لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور
(c) شرط العشوائية والانتظام
(d) كل مما سبق.

(7) يتوفر في العينة المنتظمة:

(a) شرط العشوائية والانتظام
(b) شرط الانتظام فقط
(c) شرط العشوائية فقط
(d) ليس أيًّا مما سبق

(8) عند استخدام العينة الطبقية يفضل أن:

(a) تكون عشوائية ومنتظمة
(b) تكون طبقات المجتمع متجانسة بداخلها مختلفة في ما بينها
(c) لا تتيح لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور
(d) ليس أيًّا مما سبق

(9) إذا كان حجم العينة يساوي 100 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 2 000، فكسر المعاينة يساوي:

(a) 0.3 (b) 0.5 (c) 0.05 (d) 0.02

(10) إذا كان طول الفترة يساوي 40 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 1000، فحجم العينة يساوي:

(a) 35 (b) 25 (c) 40 (d) 30

88

6 الربط

جميع الأمثلة الموجودة في هذا الدرس ترتبط مباشرة بحالات حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

تكمن الأخطاء في تحديد الأعداد على جدول الأعداد العشوائية.

ساعد الطلاب على التعامل بدقة عند تحديد الصف والعمود، ومن ثم كتابة الأعداد المطلوبة بحسب الشروط.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتقف على حسن أدائهم في مفاهيم هذا الدرس ومهارته.

اختبار سريع

في أحد الفنادق 80 نزيلًا. أرادت إدارة الفندق تقديم وجبة طعام مجانية لـِ 8 منهم.

المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة تمثل هؤلاء النزلاء علمًا بأنه جرى ترقيم كافة النزلاء من 1 إلى 80 وذلك باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

نوجد طول الفترة: $10 = \frac{80}{8}$

بما أنه لم يتم تحديد الصف والعمود، لذا نأخذ الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية، ثم نأخذ عددًا من رقمين لجهة اليسار على أن يكون العدد أصغر من 10، فنجد النزلاء حاملي الأرقام التالية:

1 , 11 , 21 , 31 , 41 , 51 , 61 , 71

الحل:

كسر المعاينة $= \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{80}{1\,600} = 0.05$

لإيجاد حجم العينة الطبقية نأخذ القاعدة:

حجم العينة الطبقية = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة.

نوجد إذًا حجم العينة لكل طبقة في المؤسسة:

حجم عينة الإداريين: $100 \times 0.05 = 5$

حجم عينة التقنيين والفنيين: $300 \times 0.05 = 15$

حجم عينة العمال والمستخدمين: $1\,200 \times 0.05 = 60$

وبالتالي تكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من: 5 (إداريين)، 15 (تقنيًا وفنيًا)، 60 (عاملًا ومستخدمًا).

حاول أن تحل

2 لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفًا موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

ملاحظة: يمكن استخدام جدول الأعداد العشوائية لسحب عينة عشوائية طبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة.

مثال (3)

في إحدى المؤسسات يوجد 100 إداري مرقمين من 100 إلى 199، 200 مهندس وتقني مرقمين من 200 إلى 399، 600 عامل ومستخدم مرقمين من 400 إلى 999. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 18 فردًا لدراسة كفاءة العاملين في هذه المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الرابع والعمود الرابع.

الحل:

أولًا: نوجد كسر المعاينة $= \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{18}{900} = 0.02$

ثانيًا: نوجد حجم كل عينة بسيطة.

حجم عينة الإداريين: $100 \times 0.02 = 2$

حجم عينة المهندسين والتقنيين: $200 \times 0.02 = 4$

حجم عينة العمال والمستخدمين: $600 \times 0.02 = 12$

204

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة كما يلي:

2 (إداريين)، 4 (مهندسين وتقنيين)، 12 (عاملًا ومستخدمًا).

ثالثًا: نستخدم جدول الأعداد العشوائية لإيجاد أرقام:

2 إداريين من بين الأعداد 100 إلى 199

4 مهندسين وتقنيين من بين الأعداد 200 إلى 399

12 عاملًا ومستخدمًا من بين الأعداد 400 إلى 999

الإداريين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع، والعمود الرابع ثم نتحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 159 , 103

المهندسين والتقنيين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع والعمود الرابع ثم نتحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 246 , 383 , 349 , 341

العمال والمستخدمين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع والعمود الرابع، ثم نتحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 780 , 595 , 617 , 770 , 926 , 709 , 447 , 690 , 652 , 803 , 465 , 531

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة بحسب الترقيم التالي:

للإداريين: 159 , 103

للمهندسين والتقنيين: 246 , 383 , 349 , 341

للعمال والمستخدمين: 780 , 595 , 617 , 770 , 926 , 709 , 447 , 690 , 652 , 803 , 465 , 531

حاول أن تحل

3 في إحدى المستشفيات يوجد 80 إداريًا مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيبًا مرقمين من 81 إلى 220 ، 240 ممرضًا مرقمين من 221 إلى 460، 40 عاملًا مرقمين من 461 إلى 500.

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فردًا لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

3 — العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

واحدة من العينات الأكثر استخدامًا هي العينة العشوائية المنتظمة حيث يتم سحب مفرداتها بحسب نظام ثابت ومنتظم. ترقم هذه المفردات ترقيمًا متسلسلًا ثم يقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول بعدد مفردات العينة تسمى **فترة المعاينة**.

نستخدم العينة العشوائية المنتظمة في المجتمع الإحصائي حيث تكون جميع المفردة متجانسة، ولإيجاد طول الفترة نستخدم القاعدة التالية:

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

205

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

2 – 1 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 $58 , 12 , 49 , 01 , 46 , 64 , 17$

2 كسر المعاينة $= \frac{7}{35} = 0.2$

حجم عينة مدراء الأقسام: $0.2 \times 10 = 2$

حجم عينة المحاسبين والمدققين: $0.2 \times 20 = 4$

حجم عينة المستخدمين: $0.2 \times 5 = 1$

3 كسر المعاينة $= \frac{25}{500} = 0.05$

لم يحدد الصف والعمود لذا نأخذ الصف الأول والعمود الأول.

حجم عينة الإداريين: $0.05 \times 80 = 4$

يحملون الأرقام: $28 , 01 , 59 , 79$

حجم عينة الأطباء: $0.05 \times 140 = 7$

يحملون الأرقام: $201 , 209 , 85 , 212 , 161 , 135 , 96$

حجم عينة الممرضين: $0.05 \times 240 = 12$

يحملون الأرقام:

$281 , 412 , 315 , 227 , 360 , 359 , 414 , 234 ,$
$280 , 274 , 444 , 415$

حجم عينة العمال: $0.05 \times 40 = 2$

يحملون الأرقام: $468 , 462$

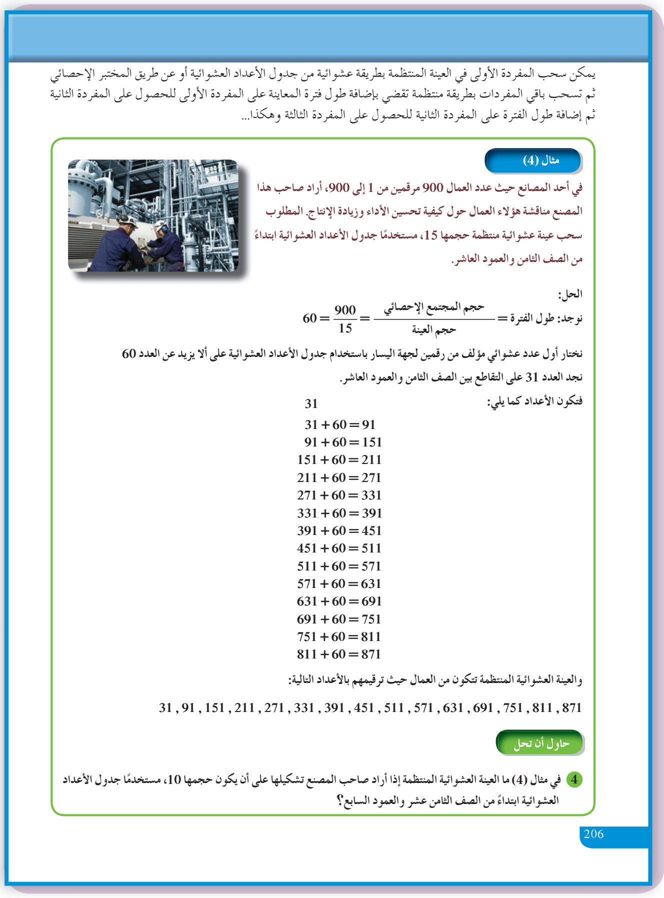
4 طول الفترة $= \frac{900}{10} = 90$

نوجد العدد الأول أصغر من 90، فنحصل على الأعداد التالية:

$75 , 165 , 255 , 345 , 435 , 525 , 615 , 705 ,$
$795 , 885$

5 نوجد طول الفترة $= \frac{140}{7} = 20$

نوجد العدد الأول أصغر من 20، فنحصل على الأعداد التالية: $15 , 35 , 55 , 75 , 95 , 115 , 135$



يمكن سحب المفردة الأولى في العينة المنتظمة بطريقة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية أو عن طريق المختبر الإحصائي ثم تسحب باقي المفردات بطريقة منتظمة تقضي بإضافة طول فترة المعاينة على المفردة الأولى للحصول على المفردة الثانية ثم إضافة طول الفترة على المفردة الثانية للحصول على المفردة الثالثة وهكذا...

مثال (4)

في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 15، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

الحل:

نوجد: طول الفترة $= \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{900}{15} = 60$

نختار أول عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية على ألا يزيد عن العدد 60

نجد العدد 31 على التقاطع بين الصف الثامن والعمود العاشر.

فتكون الأعداد كما يلي:

31
$31 + 60 = 91$
$91 + 60 = 151$
$151 + 60 = 211$
$211 + 60 = 271$
$271 + 60 = 331$
$331 + 60 = 391$
$391 + 60 = 451$
$451 + 60 = 511$
$511 + 60 = 571$
$571 + 60 = 631$
$631 + 60 = 691$
$691 + 60 = 751$
$751 + 60 = 811$
$811 + 60 = 871$

والعينة العشوائية المنتظمة تتكون من العمال حيث ترقيمهم بالأعداد التالية:

$31 , 91 , 151 , 211 , 271 , 331 , 391 , 451 , 511 , 571 , 631 , 691 , 751 , 811 , 871$

حاول أن تحل

4 في مثال (4) ما العينة العشوائية المنتظمة إذا أراد صاحب المصنع تشكيلها على أن يكون حجمها 10، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن عشر والعمود السابع؟

206

مثال (5)

يبلغ عدد طلاب إحدى مدارس الكويت 700 طالب مرقمين من 1 إلى 700. أراد مدير المدرسة إرسال 10 طلاب لحضور ندوة حول «حماية الحيوانات المهددة بالانقراض». المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث.

الحل:

نوجد طول الفترة $= \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{700}{10} = 70$

نختار أوّل عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية بحيث لا يزيد عن طول الفترة (70) ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث فنجد العدد 38.

38
$38 + 70 = 108$
$108 + 70 = 178$
$178 + 70 = 248$
$248 + 70 = 318$
$318 + 70 = 388$
$338 + 70 = 458$
$458 + 70 = 528$
$528 + 70 = 598$
$598 + 70 = 668$

تتكون العينة العشوائية من الطلاب حيث ترقيمهم بالأعداد التالية:

$.38 , 108 , 178 , 248 , 318 , 388 , 458 , 528 , 598 , 668$

حاول أن تحل

5 يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبًا مرقمين من 1 إلى 140. المطلوب سحب عيّنة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

207

6–3: أساليب عرض البيانات

1 الأهداف

- يوجد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- يمثل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- يمثل البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري ويربط بينهما.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

التكرار – التكرار النسبي – التكرار المئوي – تمثيل بياني بالقطاعات الدائرية – المدرج التكراري – المنحنى التكراري – مركز الفئة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – مسطرة – منقلة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) في البيانات التالية: 7 , 5 , 6 , 8 , 7 , 9 , 7 أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

(b) أوجد النسبة المئوية للعدد 6 من 25

5 التدريس

يتابع الطالب بناء معارفه ومهاراته في علم الإحصاء، فيتعرف في هذا الدرس على أساليب جديدة في عرض البيانات تضاف إلى مكتسباته السابقة.

6–3

أساليب عرض البيانات

Ways to Display Data

سوف تتعلم

- إيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- تمثيل البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري والربط بينهما.

المفردات والمصطلحات:

- التكرار Frequency
- التكرار النسبي Rational Frequency
- التكرار المئوي Percent Frequency
- تمثيل بياني بالقطاعات الدائرية Pie Chart
- المدرج التكراري Histogram
- المنحنى التكراري Frequency Curve
- مركز الفئة Center of Interval

عمل تعاوني

يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات 50 طالبًا في المرحلة الثانوية بالسنتيمتر (cm)

الفئة	150–	155–	160–	165–	170–	175–	180–
التكرار	2	8	6	8	13	7	6

1 ما هي النسبة المئوية للطلاب الذين تقل أطوال قاماتهم عن 170 cm؟

2 ما هي النسبة المئوية للطلاب الذين أطوال قاماتهم 170 cm فأكثر؟

علمت فيما سبق أن البيانات التي يمكن الحصول عليها من مصادر مختلفة تصنف إلى نوعين: **كيفية وكمية.**

وهناك طرق متعددة لعرض البيانات مثل الجداول التكرارية والأعمدة والأعمدة المزدوجة والخط المنكسر والنقاط المجمعة...

القطاعات الدائرية Pie Chart

يمكن تمثيل البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية.

نستخدم التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية لعرض التوزيع التكراري لبيانات كيفية وتكون هذه البيانات مقسمة إلى فئات متعددة. عند صنع القطاعات الدائرية تقسّم الدائرة إلى قطاعات عددها يساوي عدد الفئات في البيانات ويمثل كل قطاع دائري واحدة من هذه الفئات، قياس الزاوية المركزية لكل قطاع يعطى بالقاعدة:

قياس الزاوية المركزية لقطاع = التكرار النسبي × 360°

حيث التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار القيمة (أو الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}}$

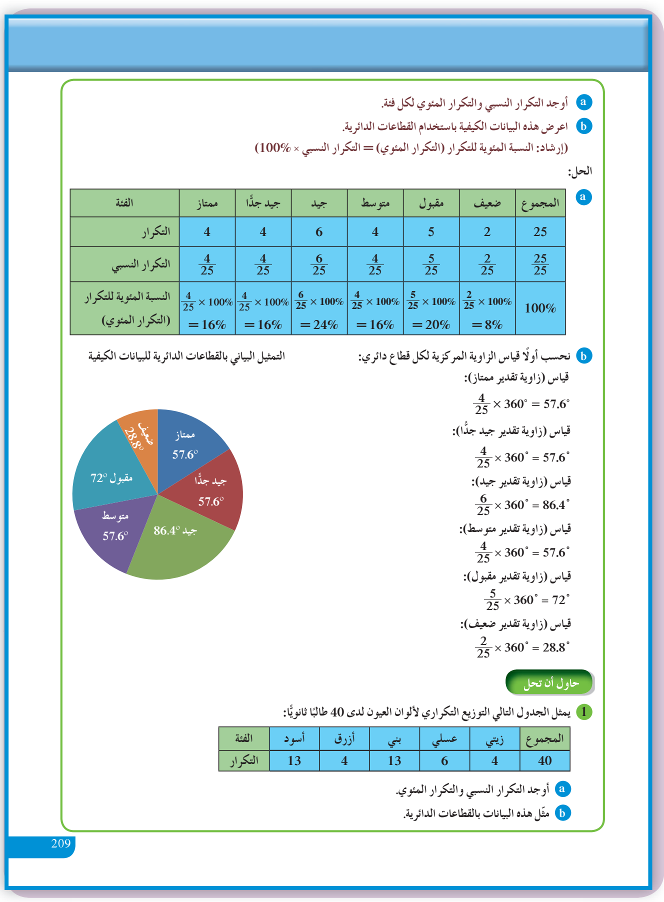
وكل قطاع من الدائرة يأخذ لونًا أو تظليلًا مختلفًا عن الآخر.

مثال (1)

في أحد الاختبارات لم يقيّم الأستاذ طلابه بالدرجات، بل استخدم مفردات تقديرية كما في الجدول التالي:

الفئة	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	مقبول	ضعيف	المجموع
التكرار	4	4	6	4	5	2	25

208



a أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

b اعرض هذه البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية.

(إرشاد: النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي) = التكرار النسبي × 100%)

الحل:

a

الفئة	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	مقبول	ضعيف	المجموع
التكرار	4	4	6	4	5	2	25
التكرار النسبي	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{25}{25}$
النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي)	$\frac{4}{25}\times 100\% = 16\%$	$\frac{4}{25}\times 100\% = 16\%$	$\frac{6}{25}\times 100\% = 24\%$	$\frac{4}{25}\times 100\% = 16\%$	$\frac{5}{25}\times 100\% = 20\%$	$\frac{2}{25}\times 100\% = 8\%$	100%

b نحسب أولًا قياس الزاوية المركزية لكل قطاع دائري:

قياس (زاوية تقدير ممتاز):

$\frac{4}{25}\times 360^\circ = 57.6^\circ$

قياس (زاوية تقدير جيد جدًّا):

$\frac{4}{25}\times 360^\circ = 57.6^\circ$

قياس (زاوية تقدير جيد):

$\frac{6}{25}\times 360^\circ = 86.4^\circ$

قياس (زاوية تقدير متوسط):

$\frac{4}{25}\times 360^\circ = 57.6^\circ$

قياس (زاوية تقدير مقبول):

$\frac{5}{25}\times 360^\circ = 72^\circ$

قياس (زاوية تقدير ضعيف):

$\frac{2}{25}\times 360^\circ = 28.8^\circ$

التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية للبيانات الكيفية

حاول أن تحل

1 يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لألوان العيون لدى 40 طالبًا ثانويًا:

الفئة	أسود	أزرق	بني	عسلي	زيتي	المجموع
التكرار	13	4	13	6	4	40

a أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي.

b مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

209

المنحنى التكراري والمدرج التكراري
Frequency Curve and Histogram

يستخدم المدرج التكراري والمنحنى التكراري في تمثيل جدول تكراري ذي فئات بحيث إن كل مستطيل يمثل فئة من الفئات.

قاعدة المستطيل على الخط الأفقي هي طول الفئة، وارتفاعه الرأسي يساوي قيمة تكرار الفئة.

مثال (2)

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لنتائج تحليل مادة النيترات في 40 وحدة ماء معدة للخدمات المشتركة في المنازل (غير الصالحة للشرب) وذلك خلال شهر واحد (mg/L).

الفئة	–15	–20	–25	–30	–35	–40	–45	–50	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40

a أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

b ارسم المنحنى التكراري.

c ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

الحل:

a نوجد مراكز الفئات:

مركز الفئة –15 هو: $\frac{15+20}{2} = 17.5$

مركز الفئة –20 هو: $\frac{20+25}{2} = 22.5$

مركز الفئة –25 هو: $\frac{25+30}{2} = 27.5$

مركز الفئة –30 هو: $\frac{30+35}{2} = 32.5$

مركز الفئة –35 هو: $\frac{35+40}{2} = 37.5$

مركز الفئة –40 هو: $\frac{40+45}{2} = 42.5$

مركز الفئة –45 هو: $\frac{45+50}{2} = 47.5$

مركز الفئة –50 هو: $\frac{50+55}{2} = 52.5$

معلومة:

يتأثر استهلاك مياه الخدمات المشتركة في دولة الكويت بالعوامل التالية:

1 – كمية المطر المتساقطة على مدار السنة هي شبه ثابتة حيث إنها تتراوح سنويًّا بين 70 ملم – 130 ملم. وهذا يشكل جزءًا من رصيد المياه في الدولة.

2 – مصروف المياه هو تصاعدي وذلك نتيجة العوامل الاجتماعية والاقتصادية:

(a) عدد السكان في ازدياد حيث بلغت نسبة الزيادة السكانية في السنوات الأخيرة حوالى 4%.

(b) الرغبة في الإقامة داخل المدن وذلك يتطلب استهلاكًا أكثر لكمية المياه.

(c) نمو الصناعة والزراعة وري الحدائق العامة.

210

في المثال (1)

قد تكون البيانات الكيفية أكثر سهولة من البيانات الكمية عند فرزها، لذلك يمكن تنظيمها سريعًا وإيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار، ومن ثم إيجاد قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري الذي يمثل كل متغير كيفي. تأكد من أنهم قادرون على استخدام القاعدة لإيجاد قياس الزاوية المركزية في القطاعات الدائرية .
اطلب إلى أكثر من طالب الذهاب إلى السبورة وكتابة:
قياس (الزاوية المركزية) = التكرار النسبي × $360°$، ثم ساعدهم على استخدام المنقلة في رسم كل قطاع.

في المثال (2)

يساعد المدرج التكراري على المقارنة بين الفئات، وهو يشبه إلى حد كبير التمثيل البياني بالأعمدة، وأما هنا فنستخدم الفئات، لذا كانت المستطيلات متصلة بعضها بعضًا. وعندما نرسم المنحنى التكراري نأخذ منتصف القطع المستقيمة العليا لكل مستطيل، ثم نوصلها بمنحنى قريب جدًّا من القطعة المستقيمة وتكون نهاية هذا المنحنى دائمًا عند منتصف الفئة ما قبل الفئة الأولى حيث تكرارها الصفر، وعند منتصف الفئة التي تلي مباشرة الفئة الأخيرة حيث تكرارها الصفر.

6 الربط

إن الأمثلة الموجودة في هذا الدرس هي ربط بين حالات حياتية وأساليب عرض البيانات.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في رسم المنحنى التكراري باستخدام المدرج التكراري. ركّز انتباه الطلاب إلى ضرورة ربط منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات بمنحنيات للحصول على المنحنى التكراري.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتقف على إمكانياتهم في التعامل مع أساليب عرض البيانات، وتحقق من فهمهم لما عليهم إيجاده.

اختبار سريع

سجلت إدارة الأرصاد الجوية في دولة الكويت لشهر يوليو من سنة 2012 أعلى درجة حرارة، إذ بلغت حوالي 48° مئوية، وكانت درجات الحرارة القصوى كما يلي:

47, 46, 45, 39, 42, 43, 40, 44, 47, 45, 48, 43, 40, 41, 38, 42, 47, 45, 46, 47, 43, 44, 46, 43, 45, 41, 46, 47, 42، 45, 48.

نظّم هذه البيانات في جدول مبينًا: التكرار، التكرار النسبي، النسبة المئوية للتكرار، ثم مثّلها على مدرج تكراري، ومنحنى تكراري، وبالقطاعات الدائرية.

نوجد المدى: $48 - 38 = 10$

نأخذ 5 فئات طول كل فئة 2.

الجدول:

الفئة	38–	40–	42–	44–	46–48
التكرار	2	4	7	7	11
التكرار النسبي	$\frac{2}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{11}{31}$
النسبة المئوية للتكرار	6.45%	12.9%	22.58%	22.58%	35.49%

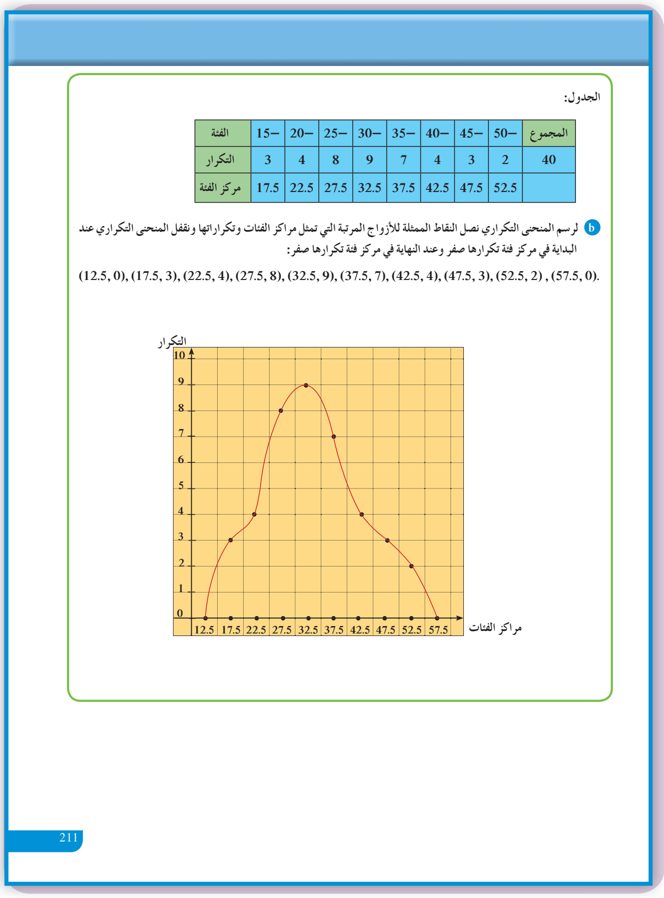
$\frac{2}{31} \times 360° \approx 23°$

$\frac{4}{31} \times 360° \approx 46°$

$\frac{7}{31} \times 360° \approx 81.5°$

$\frac{7}{31} \times 360° \approx 81.5°$

$\frac{11}{31} \times 360° \approx 128°$



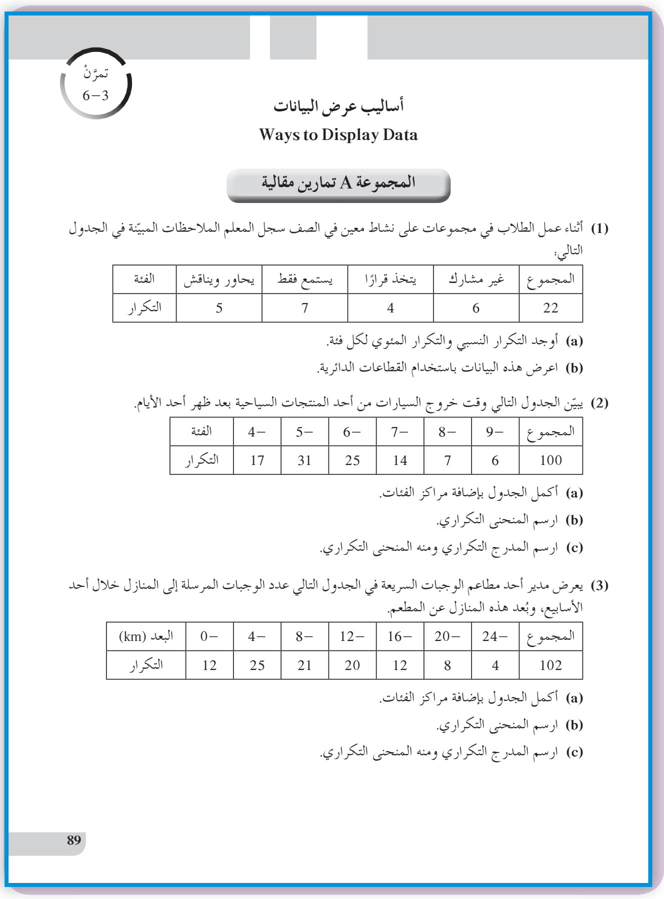
الجدول:

الفئة	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40
مركز الفئة	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	

(b) لرسم المنحنى التكراري نصل النقاط الممثلة للأزواج المرتبة التي تمثل مراكز الفئات وتكراراتها ونقفل المنحنى التكراري عند البداية في مركز فئة تكرارها صفر وعند النهاية في مركز فئة تكرارها صفر:

(12.5, 0), (17.5, 3), (22.5, 4), (27.5, 8), (32.5, 9), (37.5, 7), (42.5, 4), (47.5, 3), (52.5, 2) , (57.5, 0).

211



تمرَّنْ 6–3

أساليب عرض البيانات
Ways to Display Data

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثناء عمل الطلاب في مجموعات على نشاط معين في الصف سجل المعلم الملاحظات المبيّنة في الجدول التالي:

الفئة	يحاور ويناقش	يستمع فقط	يتخذ قرارًا	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22

(a) أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

(b) اعرض هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائرية.

(2) يبيّن الجدول التالي وقت خروج السيارات من أحد المنتجات السياحية بعد ظهر أحد الأيام.

الفئة	4–	5–	6–	7–	8–	9–	المجموع
التكرار	17	31	25	14	7	6	100

(a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

(3) يعرض مدير أحد مطاعم الوجبات السريعة في الجدول التالي عدد الوجبات المرسلة إلى المنازل خلال أحد الأسابيع، وبُعد هذه المنازل عن المطعم.

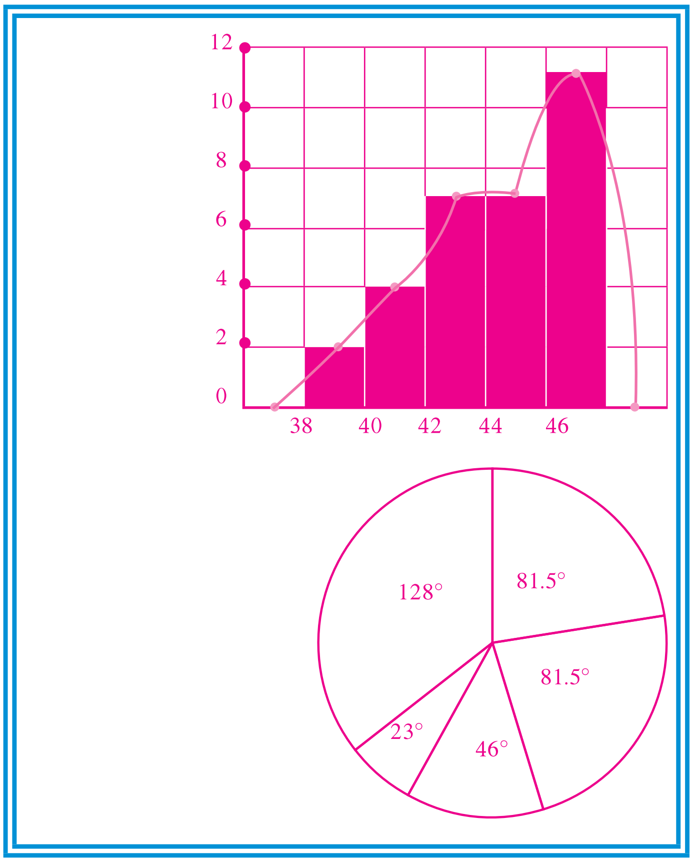
البعد (km)	0–	4–	8–	12–	16–	20–	24–	المجموع
التكرار	12	25	21	20	12	8	4	102

(a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

89



9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 النسبة: $\frac{24}{50}$،

النسبة المئوية: $\frac{24}{50} \times 100\% = 48\%$

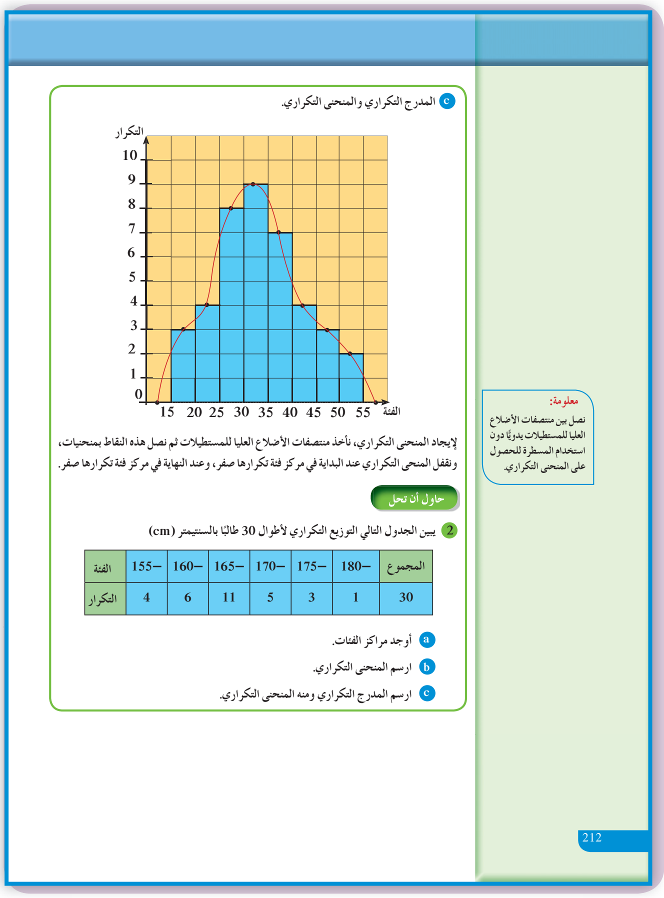
2 النسبة: $\frac{26}{50}$،

النسبة المئوية: $\frac{26}{50} \times 100\% = 52\%$

«حاول أن تحل»

1 (a)

اللون	أسود	أزرق	بني	عسلي	زيتي	المجموع
التكرار	13	4	13	6	4	40
التكرار النسبي	$\frac{13}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{4}{40}$	1
النسبة المئوية للتكرار	32.5%	10%	32.5%	15%	10%	100%



(c) المدرج التكراري والمنحنى التكراري.

لإيجاد المنحنى التكراري، نأخذ منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات ثم نصل هذه النقاط بمنحنيات، ونقفل المنحنى التكراري عند البداية في مركز فئة تكرارها صفر، وعند النهاية في مركز فئة تكرارها صفر.

معلومة: نصل بين منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات يدويًا دون استخدام المسطرة للحصول على المنحنى التكراري.

حاول أن تحل

2 يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال 30 طالبًا بالسنتيمتر (cm)

الفئة	155–	160–	165–	170–	175–	180–	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30

(a) أوجد مراكز الفئات.

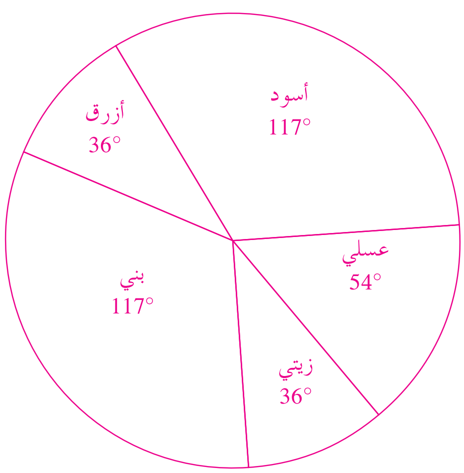
(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

212

$$\frac{13}{40} \times 360° = 117°$$
$$\frac{4}{40} \times 360° = 36°$$
$$\frac{13}{40} \times 360° = 117°$$
$$\frac{6}{40} \times 360° = 54°$$
$$\frac{4}{40} \times 360° = 36°$$

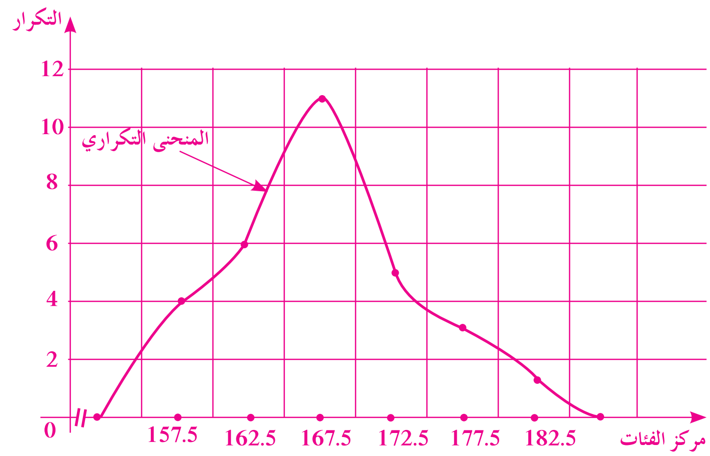
(b)



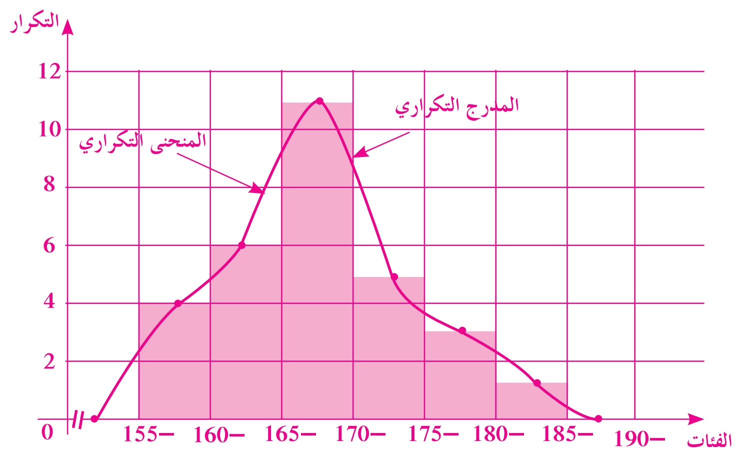
2 (a) الجدول مع مركز الفئات

الفئة	–155	–160	–165	–170	–175	–180	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30
مركز الفئة	157.5	162.5	167.5	172.5	177.5	182.5	

(b) المنحنى التكراري باستخدام مراكز الفئات



(c) المدرج التكراري والمنحنى التكراري



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) التكرار النسبي يساوي: قياس الزاوية المركزية لقطاع × °360 (a) (b)

(2) التكرار النسبي = $\dfrac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{تكرار القيمة}}$ (a) (b)

(3) مركز فئة –20 طولها 10 يساوي 30 (a) (b)

(4) لا يمكن رسم المنحنى التكراري قبل المدرج التكراري. (a) (b)

(5) يمكن تمثيل بيانات كمية مستمرة بالقطاعات الدائرية. (b) (a)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

في التمرينين (7–6) استخدم المدرج التكراري المقابل الذي يمثل أعداد المراجعين في إحدى الوزارات خلال ساعات الدوام اليومي في دولة ما.

(6) إجمالي عدد المراجعين هو:

(a) 80 (b) 65 (c) 70 (d) 75

(7) طول الفترة يساوي:

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

في التمارين (10–8) استخدم الشكل البياني المقابل الذي يمثل المواد الاختيارية المفضلّة لدى طلّاب إحدى المدارس البالغ عددهم 200 طالب.

(8) كم يساوي قياس الزاوية المركزية لقطاع التربية البدنية؟

(a) 120° (b) 45° (c) 180° (d) 90°

(9) كم يبلغ عدد الطلّاب المسجّلين باللّغة الإنجليزية؟

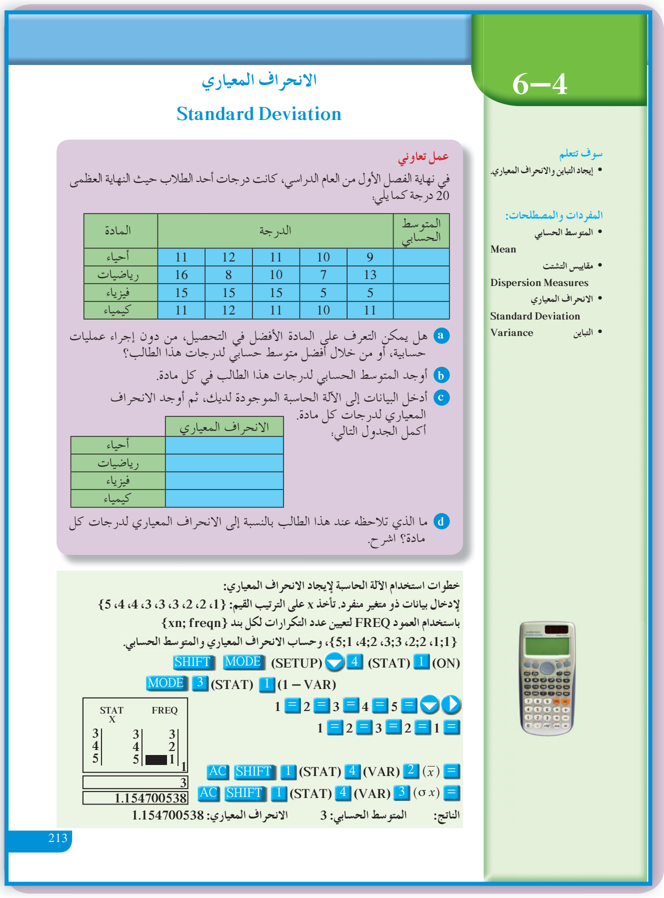
(a) 30 (b) 25 (c) 35 (d) 40

(10) كم يبلغ عدد الطلّاب المسجلين بالمواد اللغويّة؟

(a) 50 (b) 40 (c) 55 (d) 60

90

6–4: الانحراف المعياري



6–4

سوف تتعلم

- إيجاد التباين والانحراف المعياري.

المفردات والمصطلحات:

- المتوسط الحسابي Mean
- مقاييس التشتت Dispersion Measures
- الانحراف المعياري Standard Deviation
- التباين Variance

الانحراف المعياري

Standard Deviation

عمل تعاوني

في نهاية الفصل الأول من العام الدراسي، كانت درجات أحد الطلاب حيث النهاية العظمى 20 درجة كما يلي:

المادة	الدرجة					المتوسط الحسابي
أحياء	11	12	11	10	9	
رياضيات	16	8	10	7	13	
فيزياء	15	15	15	5	5	
كيمياء	11	12	11	10	11	

a هل يمكن التعرف على المادة الأفضل في التحصيل، من دون إجراء عمليات حسابية، أو من خلال أفضل متوسط حسابي لدرجات هذا الطالب؟

b أوجد المتوسط الحسابي لدرجات هذا الطالب في كل مادة.

c أدخل البيانات إلى الآلة الحاسبة الموجودة لديك، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات كل مادة.
أكمل الجدول التالي:

	الانحراف المعياري
أحياء	
رياضيات	
فيزياء	
كيمياء	

d ما الذي تلاحظه عند هذا الطالب بالنسبة إلى الانحراف المعياري لدرجات كل مادة؟ اشرح.

خطوات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الانحراف المعياري:

لإدخال بيانات ذو متغير منفرد. تأخذ x على الترتيب القيم: {1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 4، 5}

باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند {xn; freqn}

{1;1، 2;2، 3;3، 4;2، 5;1}، وحساب الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي.

SHIFT MODE (SETUP) ▽ 4 (STAT) 1 (ON)

MODE 3 (STAT) 1 (1 – VAR)

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ▽ ▷

1 = 2 = 3 = 2 = 1 =

AC SHIFT 1 (STAT) 4 (VAR) 2 $(\bar{x})$ =

AC SHIFT 1 (STAT) 4 (VAR) 3 (σx) =

STAT X FREQ

3 3 3

4 4 2

5 5 1

3

1.154700538

الناتج: المتوسط الحسابي: 3 الانحراف المعياري: 1.154700538

213

1 الأهداف

- يوجد التباين والانحراف المعياري.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المتوسط الحسابي – مقاييس التشتت – الانحراف المعياري – التباين.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

نأخذ البيانات التالية:

15 , 14 , 18 , 17 , 15 , 11 , 16 , 15 , 12 , 14 , 16 , 12 , 13 , 11 , 10 , 13 , 14 , 12 , 15 , 17.

(a) كوّن جدولًا لهذه البيانات باستخدام فئات متساوية الطول من 2 تبيّن فيه : التكرار – التكرار النسبي – النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي)–مراكز الفئات.

(b) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري وبالمنحنى التكراري.

(c) استخدم مراكز الفئات لترسم المنحنى التكراري.

(d) مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

(e) أوجد الجذر التربيعي لكل عدد مما يلي:

629 , 230 , 196 , 49

5 التدريس

تعرّف الطالب في مراحل سابقة على طرائق متعددة لوصف جميع البيانات. كانت تستخدم في بيانات حيث المتغير فيها هو متقطع.

في هذا الدرس سوف يبني المتعلم مفاهيم ومهارات متقدمة في علم الإحصاء. فهو سوف يتعامل مع مقاييس تساعده على اتخاذ قرارات سليمة، وفي بعض الأحيان يمكن أن يضع توقعات مستقبلية معقولة.

في المثال (1)

يعتبر الانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت المستخدمة في علم الإحصاء، حيث يؤشر إلى مدى تشتت البيانات مقارنة بالمتوسط الحسابي لقيم هذه البيانات. كلما كان الانحراف المعياري صغيرًا، كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي.
شجع الطلاب على استخدام الآلة الحاسبة، لأنها تساعد كثيرًا على إيجاد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري.
كما أنه من المهم جدًّا أن يتعرف الطالب كيفية تكوين جدول يبيّن العمليات الحسابية المستخدمة لإيجاد التباين v ومن ثم الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$.

6 الربط

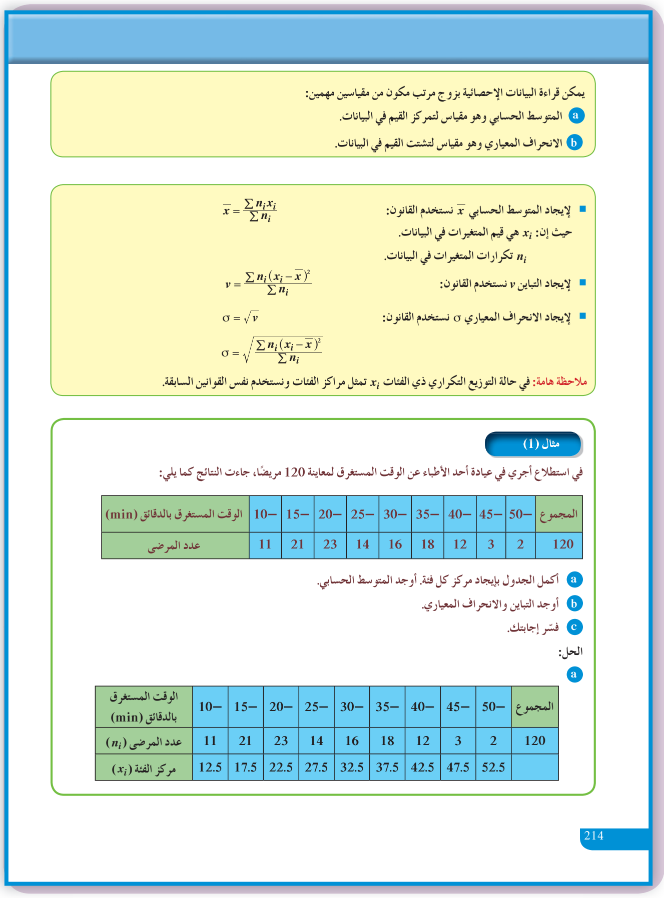
يؤكد المثال (1) الربط بالواقع الحياتي.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطالب في إدخال البيانات إلى الآلة الحاسبة.
تجوّل بين الطلاب، وتابع معهم إدخال البيانات آخذًا في الاعتبار البرنامج الإحصائي لكل آلة حاسبة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرة «حاول أن تحل» لتتأكّد من حسن أدائهم في الإجابة عن الأسئلة كلها.



يمكن قراءة البيانات الإحصائية بزوج مرتب مكون من مقياسين مهمين:

a المتوسط الحسابي وهو مقياس لتمركز القيم في البيانات.

b الانحراف المعياري وهو مقياس لتشتت القيم في البيانات.

- لإيجاد المتوسط الحسابي $\overline{x}$ نستخدم القانون: $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$
حيث إن: x_i هي قيم المتغيرات في البيانات.
n_i تكرارات المتغيرات في البيانات.
- لإيجاد التباين v نستخدم القانون: $v = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}$
- لإيجاد الانحراف المعياري σ نستخدم القانون: $\sigma = \sqrt{v}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}}$$

ملاحظة هامة: في حالة التوزيع التكراري ذي الفئات x_i تمثل مراكز الفئات ونستخدم نفس القوانين السابقة.

مثال (1)

في استطلاع أجري في عيادة أحد الأطباء عن الوقت المستغرق لمعاينة 120 مريضًا، جاءت النتائج كما يلي:

الوقت المستغرق بالدقائق (min)	10–	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	المجموع
عدد المرضى	11	21	23	14	16	18	12	3	2	120

a أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة. أوجد المتوسط الحسابي.

b أوجد التباين والانحراف المعياري.

c فسّر إجابتك.

الحل:

a

الوقت المستغرق بالدقائق (min)	10–	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	المجموع
عدد المرضى (n_i)	11	21	23	14	16	18	12	3	2	120
مركز الفئة (x_i)	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	

214

اختبار سريع

جاءت درجات طلاب الصف الحادي عشر في اختبار للرياضيات حيث النهاية العظمى 20 درجة كما يلي:

11 , 12 , 9 , 10 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 8 ,
10 , 11 , 12 , 14 , 15 , 14 , 13 , 16 , 7 , 9 ,
8 , 14 , 15 , 16 , 12.

(a) كوّن جدولًا يبيّن التكرار، ومركز الفئة.

الفئة	7–	9–	11–	13–	15– 17
التكرار	3	4	5	6	7
مركز الفئة	8	10	12	14	16

(b) أوجد المتوسط الحسابي $\overline{x}$ والانحراف المعياري σ بدون استخدام برنامج إحصائي.

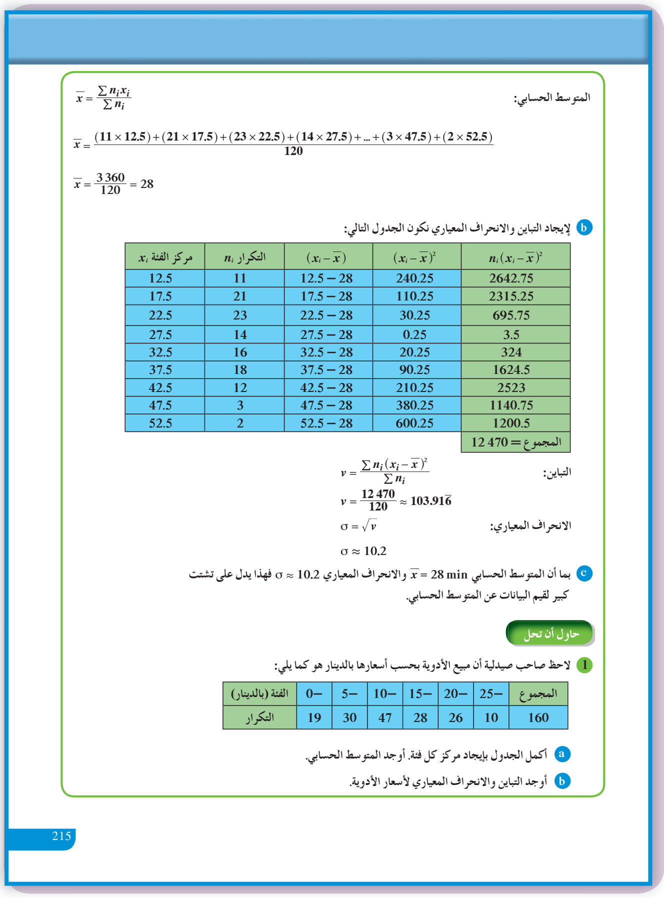
المتوسط الحسابي: $\overline{x} = \dfrac{320}{25} = 12.8$

x_i	$n_i(x_i - \overline{x})$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$
8	$3(8 - 12.8)$	69.12
10	$4(10 - 12.8)$	31.36
12	$5(12 - 12.8)$	3.2
14	$6(14 - 12.8)$	8.64
16	$7(16 - 12.8)$	71.68
		المجموع = 184

التباين: $v = \dfrac{184}{25} = 7.36$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$

$\sigma = \sqrt{7.36} \approx 2.7$



المتوسط الحسابي: $\overline{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$

$\overline{x} = \dfrac{(11 \times 12.5) + (21 \times 17.5) + (23 \times 22.5) + (14 \times 27.5) + ... + (3 \times 47.5) + (2 \times 52.5)}{120}$

$\overline{x} = \dfrac{3\,360}{120} = 28$

b لإيجاد التباين والانحراف المعياري نكون الجدول التالي:

مركز الفئة x_i	التكرار n_i	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$
12.5	11	$12.5 - 28$	240.25	2642.75
17.5	21	$17.5 - 28$	110.25	2315.25
22.5	23	$22.5 - 28$	30.25	695.75
27.5	14	$27.5 - 28$	0.25	3.5
32.5	16	$32.5 - 28$	20.25	324
37.5	18	$37.5 - 28$	90.25	1624.5
42.5	12	$42.5 - 28$	210.25	2523
47.5	3	$47.5 - 28$	380.25	1140.75
52.5	2	$52.5 - 28$	600.25	1200.5
				المجموع = 12 470

التباين: $v = \dfrac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}$

$v = \dfrac{12\,470}{120} \approx 103.91\overline{6}$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$

$\sigma \approx 10.2$

c بما أن المتوسط الحسابي $\overline{x} = 28$ min والانحراف المعياري $\sigma \approx 10.2$ فهذا يدل على تشتت كبير لقيم البيانات عن المتوسط الحسابي.

حاول أن تحل

1 لاحظ صاحب صيدلية أن مبيع الأدوية بحسب أسعارها بالدينار هو كما يلي:

الفئة (بالدينار)	0–	5–	10–	15–	20–	25–	المجموع
التكرار	19	30	47	28	26	10	160

a أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة. أوجد المتوسط الحسابي.

b أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار الأدوية.

215

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(a) تتنوع الإجابات.

(b) أحياء: 10.6

رياضيات: 10.8

فيزياء: 11

كيمياء: 11

(c)

	الانحراف المعياري
أحياء	1.02
رياضيات	3.3
فيزياء	4.9
كيمياء	0.63

(d) التشتت الأكبر يطال الفيزياء. يوجد تقارب كبير جدًّا بالنسبة إلى درجات الكيمياء مع المتوسط الحسابي.

«حاول أن تحل»

1 (a)

الفئة	$0-$	$5-$	$10-$	$15-$	$20-$	$25-$
التكرار	19	30	47	28	26	10
مركز الفئة	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5

المتوسط الحسابي: $\bar{x} = \frac{2\,210}{160} \approx 13.8$

(b) التباين: $v \approx 49.56$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v} = 7.04$

تمرَّنْ 6–4

الانحراف المعياري
Standard Deviation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية: 5 , 5 , 5 , 5. فسّر إجابتك.

(2) سجّل صاحب متجر أن مبيع السلع بحسب أسعارها هو كما يلي:

الفئة (بالدينار)	$0-$	$10-$	$20-$	$30-$	$40-$	$50-$	المجموع
التكرار	190	300	470	280	260	100	1 600

(a) أوجد المتوسّط الحسابي.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار السلع.

(3) تصنع مؤسسة عبوات لحفظ الأجبان على أن تحتوي العلبة الواحدة على 170 g من الجبنة. ولكن عند وزن 200 علبة، جاءت الأوزان كما يبين الجدول التكراري التالي:

الوزن g	167	168	169	170	171	172	173	174	المجموع
التكرار	10	15	24	55	48	34	8	6	200

(a) أوجد المتوسّط الحسابي لهذه الأوزان.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه الأوزان.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا أضفنا العدد نفسه على جميع الأعداد في البيانات، نحصل على الانحراف المعياري نفسه. (a) (b)

(2) إذا ضربنا الأعداد في البيانات بالعدد نفسه، لا يتغيّر الانحراف المعياري. (a) (b)

(3) الانحراف المعياري يكون دائمًا أصغر من المتوسّط الحسابي. (a) (b)

(4) الانحراف المعياري يكون دائمًا موجبًا. (a) (b)

91

في التمارين (5–9)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كان التباين يساوي 100، الانحراف المعياري يساوي:

(a) ±10 (b) −10 (c) 10 (d) ليس أيًا مما سبق

(6) الانحراف المعياري للبيانات التالية: 6 , 5 , 5 , 4 , 4 , 3 , 2 , 1 يساوي:

(a) 0.78 (b) 1.56 (c) 2.78 (d) 3.78

(7) الانحراف المعياري يساوي صفرًا إذا كانت البيانات:

(a) متساوية (b) نصفها هو المعكوس الضربي للنصف الآخر

(c) نصفها هو المعكوس الجمعي للنصف الآخر (d) لا يمكن أن يساوي الانحراف المعياري صفرًا.

(8) الانحراف المعياري هو مقياس:

(a) تمركز القيم في البيانات (b) تشتت القيم في البيانات

(c) انحراف القيم في البيانات (d) ليس أيًّا مما سبق

(9) يساوي انحراف معياري لبيانات معيّنة 4. بعد ضرب البيانات في العدد 3، يصبح الانحراف المعياري:

(a) 13 (b) 12 (c) 11 (d) 10

92

5–6: القاعدة التجريبية

1 الأهداف

- استخدام القاعدة التجريبية

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قاعدة تجريبية – التوزيع الطبيعي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

نأخذ البيانات التالية:

12 , 14 , 17 , 13 , 15 , 18 , 11 , 16

(a) أوجد المتوسط الحسابي $\overline{x}$ لقيم هذه البيانات.

(b) كوّن جدولًا يبين x_i، $n_i(x_i-\overline{x})$، $n_i(x_i-\overline{x})^2$.

(c) استنتج قيم التباين v والانحراف المعياري σ لهذه البيانات.

(d) أوجد: $[\overline{x}-\sigma \ , \ \overline{x}+\sigma]$

$[\overline{x}-2\sigma \ , \ \overline{x}+2\sigma]$

$[\overline{x}-3\sigma \ , \overline{x}+3\sigma]$

5 التدريس

تعتبر القاعدة التجريبية واحدة من مقاييس التشتت المهمة حيث تساعد الإحصائي على التطبيق على إحدى الفترات $[\overline{x}-\sigma \ , \ \overline{x}+\sigma]$ أو $[\overline{x}-2\sigma \ , \ \overline{x}+2\sigma]$ أو $[\overline{x}-3\sigma \ , \ \overline{x}+3\sigma]$ وهذا يتدرج ضمن شروط محددة. ومن الواضح أن هذه القاعدة تحتاج إلى قيمتين هما: المتوسط الحسابي $\overline{x}$، والانحراف المعياري σ.

6–5

القاعدة التجريبية

Empirical Rule

سوف تتعلم

- استخدام القاعدة التجريبية.

المفردات والمصطلحات:

- قاعدة تجريبية Empirical Rule
- التوزيع الطبيعي Normal Distribution

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمنا سابقًا أن المدى يقيس تشتت قيم البيانات، إذا كانت قيمة المدى صغيرة فنستطيع القول إن قيم البيانات قريبة من بعضها بعضًا ولكن إذا كانت قيمة المدى كبيرة فإن قيم البيانات بعيدة عن بعضها بعضًا أو يوجد فيها قيم متطرفة. كما أن الانحراف المعياري يقيس مدى تشتت قيم البيانات بالمقارنة مع المتوسط الحسابي، إذا كانت قيمة الانحراف المعياري صغيرة تكون قيم البيانات قريبة جدًّا من قيمة المتوسط الحسابي أما إذا كانت قيمة الانحراف المعياري كبيرة فتكون قيم البيانات بعيدة عن قيمة المتوسط الحسابي.

فمثلًا في البيانات: 14، 15، 16، 17، 18 نجد أن المدى = 4،

المتوسط الحسابي: $\overline{x}=16$

والانحراف المعياري $\sigma_1 \approx 1.414$

وفي البيانات: 3، 9، 17، 23، 28 نجد أن المدى = 25

المتوسط الحسابي: $\overline{y}=16$ والانحراف المعياري: $\sigma_2 \approx 9.077$

من الملاحظ أن البيانات الأولى لها متوسط حسابي $\overline{x}=16$ وانحراف معياري $\sigma_1 \approx 1.414$ أي أن قيم هذه البيانات تتجمع حول المتوسط الحسابي.

في البيانات الثانية المتوسط الحسابي $\overline{y}=16$ والانحراف المعياري $\sigma_2 \approx 9.077$ أي أن هذه البيانات تبتعد عن المتوسط الحسابي.

أوجد الإحصائيون قواعد أخرى لدراسة تشتت قيم البيانات عندما تتوزع بطريقة معينة تعرف بالتوزيع الطبيعي وذلك من خلال استخدام القاعدة التجريبية التي سنوضحها في هذا البند.

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعلمت سابقًا توزيع قيم البيانات بحسب قيم المتوسط الحسابي والوسيط مقارنة مع قيمة المنوال.

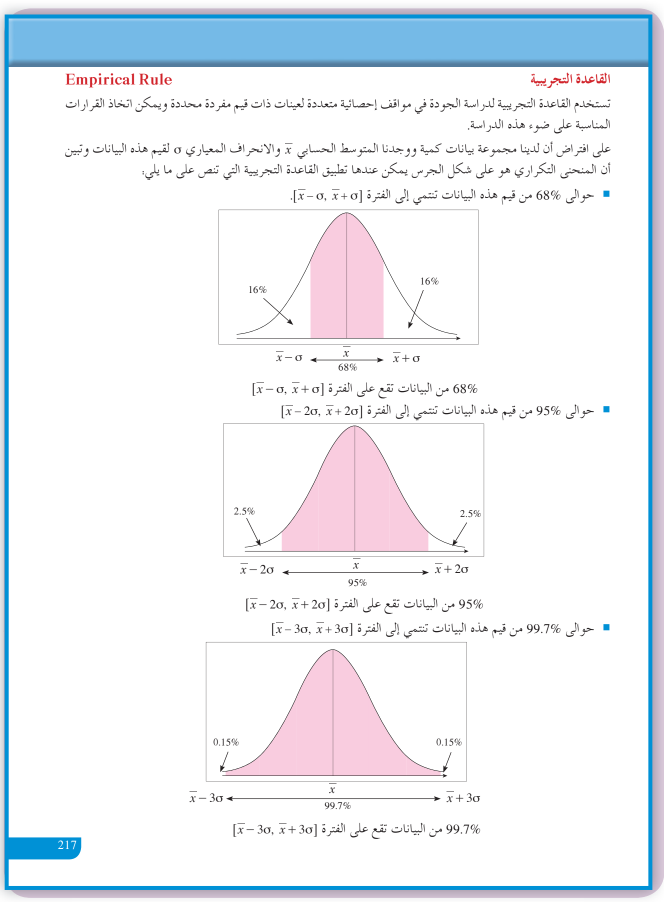
والتوزيع الطبيعي هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات يأخذ شكل الجرس كما في الشكل التالي:

من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجيًّا ويمتدان إلى ما لانهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.

$\overline{x}$

216



القاعدة التجريبية Empirical Rule

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة محددة ويمكن اتخاذ القرارات المناسبة على ضوء هذه الدراسة.

على افتراض أن لدينا مجموعة بيانات كمية ووجدنا المتوسط الحسابي $\overline{x}$ والانحراف المعياري σ لقيم هذه البيانات وتبين أن المنحنى التكراري هو على شكل الجرس يمكن عندها تطبيق القاعدة التجريبية التي تنص على ما يلي:

- حوالى 68% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma]$.

68% من البيانات تقع على الفترة $[\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma]$

- حوالى 95% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma]$

95% من البيانات تقع على الفترة $[\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma]$

- حوالى 99.7% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\overline{x}-3\sigma, \overline{x}+3\sigma]$

99.7% من البيانات تقع على الفترة $[\overline{x}-3\sigma, \overline{x}+3\sigma]$

217

في المثال (1)

يعالج هذا المثال أرباح شركة بتطبيق القاعدة التجريبية. ركّز على العلاقة بين كل نسبة مئوية والفترة المناظرة لها. أخبرهم أن حوالي 68% يجب أن تكون على الفترة $[\overline{x}-\sigma\ ,\ \overline{x}+\sigma]$ وأن 95% يجب أن تكون على الفترة $[\overline{x}-2\sigma\ ,\ \overline{x}+2\sigma]$ وأن 99.7% يجب أن تكون على الفترة $[\overline{x}-3\sigma\ ,\ \overline{x}+3\sigma]$.

في المثال (2)

يبيّن هذا المثال كيفية تطبيق القاعدة التجريبية للتأكد من مواصفات منتج ضمن شروط تعلن عنها مراكز الإنتاج. ساعد الطلاب بأمثلة بديلة على فهم أهمية تطبيق القاعدة التجريبية وشروط استخدامها عندما يقترب المنحنى الممثل للبيانات من التوزيع الطبيعي. ركّز معهم على فكرة الرسم كشكل جرس، والتوزيعات بالنسب المئوية إلى يمين المتوسط الحسابي ويساره.

6 الربط

تحقق الأمثلة الموجودة في هذا الدرس الربط بمواقف حياتية.

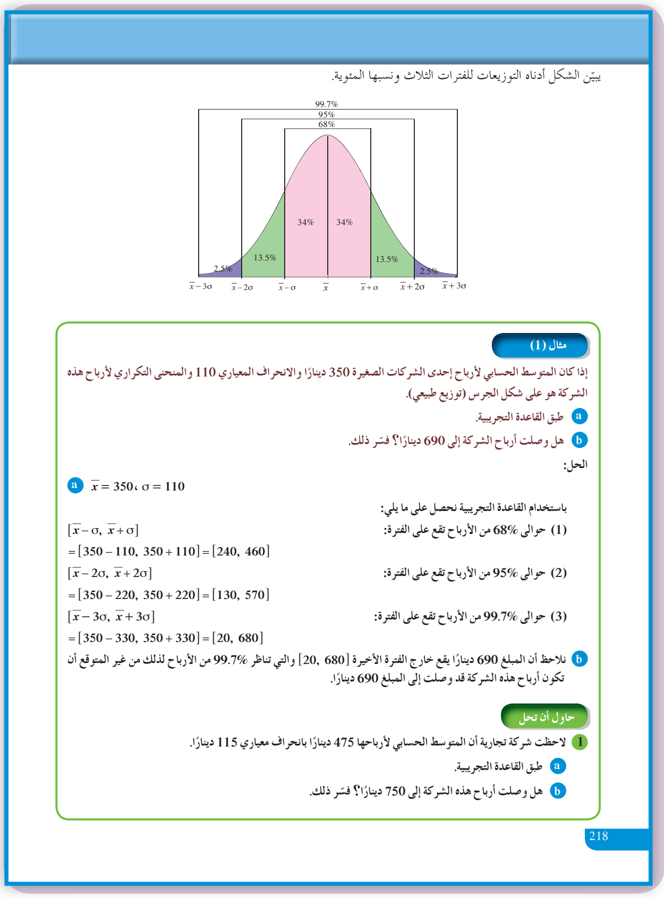
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في تحديد عدد القيم على الفترة المطلوبة.

ساعدهم بأمثلة على إيجاد الفترة $[\overline{x}-\sigma\ ,\ \overline{x}+\sigma]$ كحالة خاصة أولًا، ثم كيفية تحديد القيم عليها.

8 التقييم

تابع مع الطلاب بالحوار والنقاش ما ينجزونه في فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من حسن أدائهم وفهمهم لما ورد في هذا الدرس.



يبيّن الشكل أدناه التوزيعات للفترات الثلاث ونسبها المئوية.

مثال (1)

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة 350 دينارًا والانحراف المعياري 110 والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) هل وصلت أرباح الشركة إلى 690 دينارًا؟ فسّر ذلك.

الحل:

(a) $\overline{x}=350$، $\sigma=110$

باستخدام القاعدة التجريبية نحصل على ما يلي:

(1) حوالى 68% من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{x}-\sigma,\ \overline{x}+\sigma]$

$=[350-110,\ 350+110]=[240,\ 460]$

(2) حوالى 95% من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{x}-2\sigma,\ \overline{x}+2\sigma]$

$=[350-220,\ 350+220]=[130,\ 570]$

(3) حوالى 99.7% من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{x}-3\sigma,\ \overline{x}+3\sigma]$

$=[350-330,\ 350+330]=[20,\ 680]$

(b) نلاحظ أن المبلغ 690 دينارًا يقع خارج الفترة الأخيرة $[20,\ 680]$ والتي تناظر 99.7% من الأرباح لذلك من غير المتوقع أن تكون أرباح هذه الشركة قد وصلت إلى المبلغ 690 دينارًا.

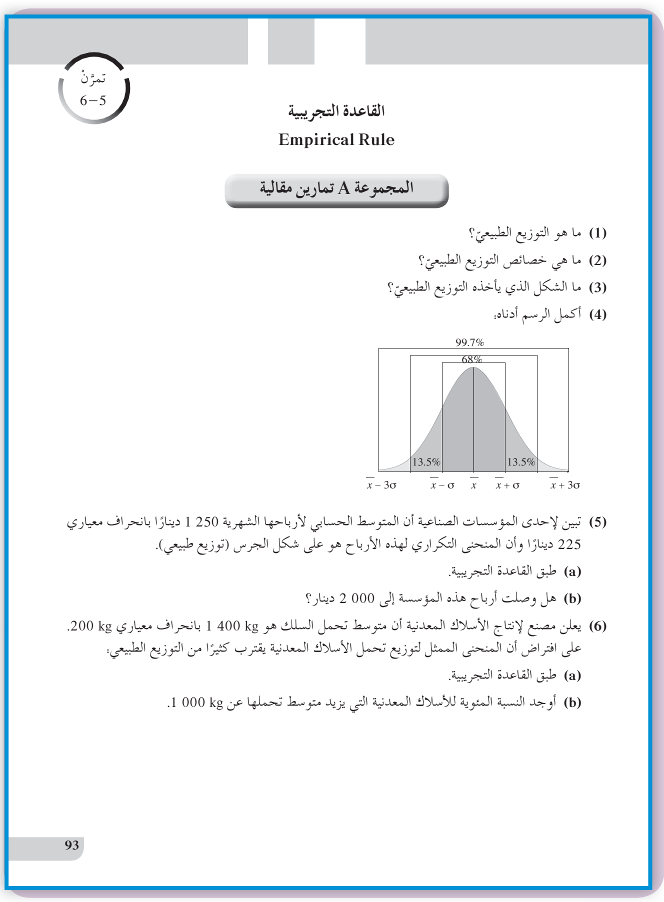
حاول أن تحل

(1) لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 دينارًا بانحراف معياري 115 دينارًا.

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 750 دينارًا؟ فسّر ذلك.

218



تمرَّنْ 6–5

القاعدة التجريبية

Empirical Rule

المجموعة A تمارين مقالية

(1) ما هو التوزيع الطبيعيّ؟

(2) ما هي خصائص التوزيع الطبيعيّ؟

(3) ما الشكل الذي يأخذه التوزيع الطبيعيّ؟

(4) أكمل الرسم أدناه:

(5) تبين لإحدى المؤسسات الصناعية أن المتوسط الحسابي لأرباحها الشهرية 1 250 دينارًا بانحراف معياري 225 دينارًا وأن المنحنى التكراري لهذه الأرباح هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) هل وصلت أرباح هذه المؤسسة إلى 2 000 دينار؟

(6) يعلن مصنع لإنتاج الأسلاك المعدنية أن متوسط تحمل السلك هو 1 400 kg بانحراف معياري 200 kg. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع تحمل الأسلاك المعدنية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي:

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) أوجد النسبة المئوية للأسلاك المعدنية التي يزيد متوسط تحملها عن 1 000 kg.

93

اختبار سريع

1 أرادت مؤسسة تجارية شراء كمية معلبة من منتج حيث وزن كل عبوة 90 g، ولكن جاءت دراسة المحتويات لعينة من 500 عبوة لتبين أن المتوسط الحسابي للأوزان: $\overline{x} = 89.5\,g$ والانحراف المعياري $\sigma = 1.2\text{ g}$ والمنحنى التكراري لتوزيع أوزان العبوات هو على شكل جرس (توزيع طبيعي).

(a) طبّق القاعدة التجريبية.

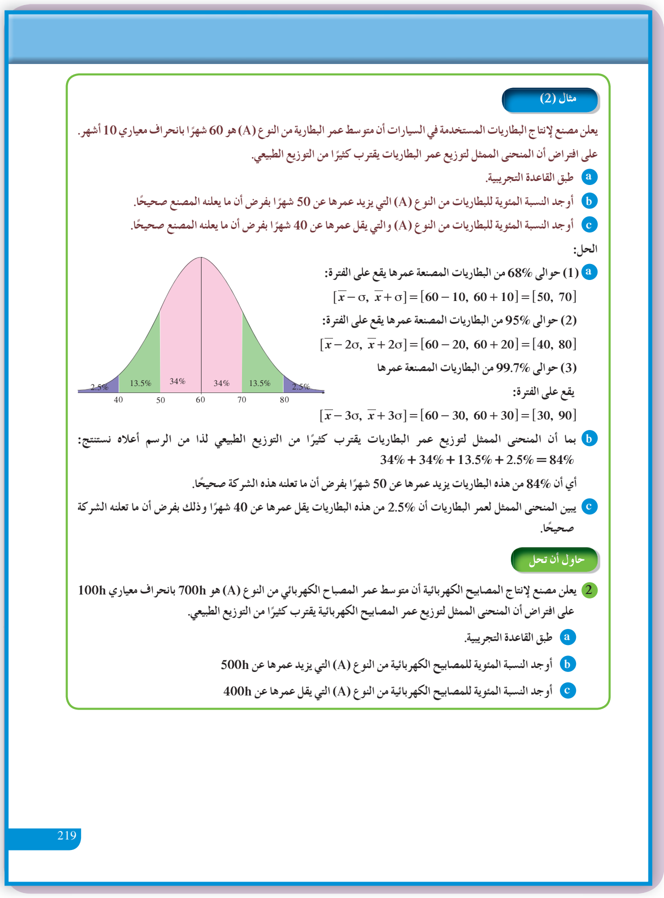
(b) هل تشتري هذه المؤسسة كمية من هذا المنتج تحت شرط ألا يصل الحد الأدنى للمتوسط الحسابي إلى 86.5 g؟

(a) (1) حوالي 68% من العبوات على الفترة:
$[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma] = [88.3, 90.7]$ أي 340 عبوة تقع أوزانها على $[88.3, 90.7]$

(2) حوالي 95% من العبوات على الفترة:
$[\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma] = [87.1, 91.9]$ أي 457 عبوة تقع أوزانها على $[87.1, 91.9]$

(3) حوالي 99% من العبوات على الفترة
$[\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma] = [85.9, 93.1]$
أي حوالي 495 عبوة تقع أوزانها على الفترة $[85.9, 93.1]$

(b) بما أن $\overline{x} = 86.5$ تقع على الفترة $[85.9, 93.1]$، لذا يمكن للمؤسسة شراء كمية من العبوات.


مثال (2)

يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (A) هو 60 شهرًا بانحراف معياري 10 أشهر. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

c أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) والتي يقل عمرها عن 40 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

الحل:

a (1) حوالى 68% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:
$[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma] = [60 - 10, 60 + 10] = [50, 70]$

(2) حوالى 95% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:
$[\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma] = [60 - 20, 60 + 20] = [40, 80]$

(3) حوالى 99.7% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:
$[\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma] = [60 - 30, 60 + 30] = [30, 90]$

b بما أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي لذا من الرسم أعلاه نستنتج:
$34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 84\%$
أي أن 84% من هذه البطاريات يزيد عمرها عن 50 شهرًا بفرض أن ما تعلنه هذه الشركة صحيحًا.

c يبين المنحنى الممثل لعمر البطاريات أن 2.5% من هذه البطاريات يقل عمرها عن 40 شهرًا وذلك بفرض أن ما تعلنه الشركة صحيحًا.

حاول أن تحل

2 يعلن مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (A) هو 700h بانحراف معياري 100h على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 500h

c أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يقل عمرها عن 400h

219

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) تطبيق القاعدة التجريبية:

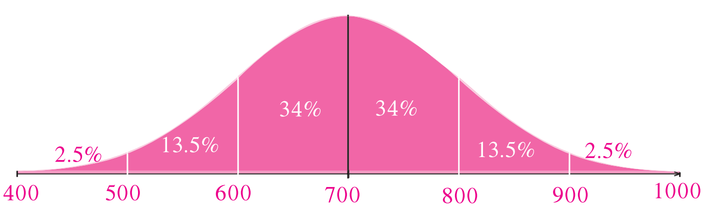
- حوالي 68% على الفترة $[\overline{x}-\sigma\ ,\ \overline{x}+\sigma]$ أي على الفترة $[360\ ,\ 590]$
- حوالي 95% على الفترة $[\overline{x}-2\sigma\ ,\ \overline{x}+2\sigma]$ أي 95% على الفترة $[245,705]$
- حوالي 99.7% على الفترة: $[\overline{x}-3\sigma\ ,\ \overline{x}+3\sigma]$ أي 99.7% على الفترة $[130,820]$

(b) نعم، لأن المبلغ 750 موجود على الفترة $[130,820]$ وبالتالي وصلت أرباح الشركة إلى 750 دينارًا.

2 (a) تطبيق القاعدة التجريبية:

- حوالي 68% على الفترة $[600\ ,\ 800]$
- حوالي 95% على الفترة $[500\ ,\ 900]$
- حوالي 99.7% على الفترة $[400\ ,\ 1000]$

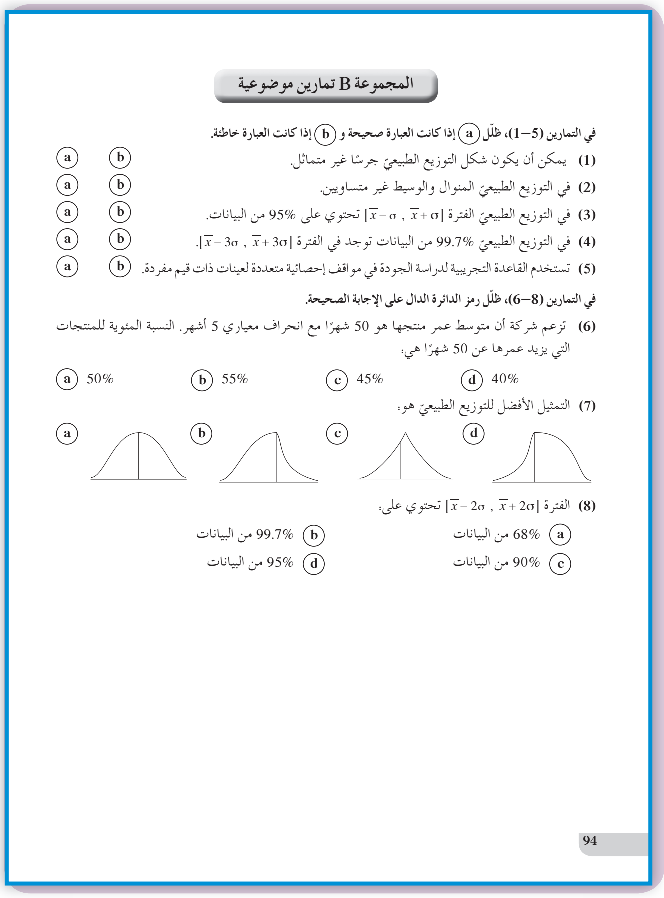
(b) باستخدام المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية على افتراض أنه توزيع طبيعي نجد التالي:



النسبة المئوية للمصابيح التي يزيد عمرها عن 500 ساعة:

$$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 97.5\%$$

(c) لا يوجد.



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يمكن أن يكون شكل التوزيع الطبيعيّ جرسًا غير متماثل. (a) (b)

(2) في التوزيع الطبيعيّ المنوال والوسيط غير متساويين. (a) (b)

(3) في التوزيع الطبيعيّ الفترة $[\overline{x}-\sigma\ ,\ \overline{x}+\sigma]$ تحتوي على 95% من البيانات. (a) (b)

(4) في التوزيع الطبيعيّ 99.7% من البيانات توجد في الفترة $[\overline{x}-3\sigma\ ,\ \overline{x}+3\sigma]$. (a) (b)

(5) تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة. (a) (b)

في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) تزعم شركة أن متوسط عمر منتجها هو 50 شهرًا مع انحراف معياري 5 أشهر. النسبة المئوية للمنتجات التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا هي:

(a) 50% (b) 55% (c) 45% (d) 40%

(7) التمثيل الأفضل للتوزيع الطبيعيّ هو:

(a) (b) (c) (d)

(8) الفترة $[\overline{x}-2\sigma\ ,\ \overline{x}+2\sigma]$ تحتوي على:

(a) 68% من البيانات (b) 99.7% من البيانات

(c) 90% من البيانات (d) 95% من البيانات

94

6–6: القيمة المعيارية

1 الأهداف

• استخدام القيمة المعيارية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قيمة معيارية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

لنأخذ البيانات التالية: $2, 3, 4, 5, 6, 8, 7$

(a) أوجد المتوسط الحسابي $\overline{x}$ لقيم هذه البيانات.

(b) أوجد التباين v والانحراف المعياري σ.

5 التدريس

تقارن القيمة المعيارية لقيمة محددة من البيانات بباقي هذه القيم، كما أنها تقارن بقيم أكثر في بيانات أخرى. فمثلًا، درجة معينة في مادة دراسية قد تكون قيمتها أفضل في مادة دراسية أخرى إذا ما قارنتها ببقية الدرجات في المادتين.

في المثال (1)

يبيّن كيف أن درجة 16 من 20 في مادتين مختلفتين هي أفضل في مادة من الأخرى، وهذا باستخدام قاعدة القيمة المعيارية، والتي تساعد على مقارنة هذه الدرجة مع بقية الدرجات.

في المثال (2)

يبيّن هذا المثال كيفية استخدام القيمة المعيارية لمقارنة درجتين مختلفتين في مادتين مختلفتين وذلك بدرجات كل مادة.

6–6

القيمة المعيارية

Standardized Value

سوف تتعلم

• استخدام القيمة المعيارية.

المفردات والمصطلحات:

• قيمة معيارية

Standardized Value

دعنا نفكر ونتناقش

قد يحصل طالب خلال السنة الدراسية على درجات مختلفة في كل مادة كما أنه من الممكن أن يحصل على الدرجة نفسها في أكثر من مادة. والسؤال: كيف يقيم الطالب هذه الدرجة في كل مادة مع بقية الدرجات؟

للإجابة عن هذا السؤال تستخدم القيمة المعيارية.

القيمة المعيارية Standardized Value

هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة محددة فإنه لا يكفي إحصائيًّا مقارنة قيم هذه المفردات ببعضها بعضًا بل يجب الأخذ بعين الاعتبار المتوسط الحسابي لكل مجموعة من البيانات وانحرافها المعياري. ويتطلب منا هذا الأمر تحويل القيم المقاسة بوحدات قياس عادية إلى قيم معيارية مناظرة بعدد من الانحرافات المعيارية، وذلك باستخدام القاعدة:

القيمة المعيارية = (قيمة المفردة – المتوسط الحسابي) / الانحراف المعياري $\quad z = \dfrac{x-\overline{x}}{\sigma}$

مثال (1)

في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة 16 من 20 في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 5 ونال أيضًا 16 من 20 في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 4.

ما القيمة المعيارية للدرجة 16مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الحل:

القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الرياضيات: $z_1 = \dfrac{x-\overline{x}}{\sigma} = \dfrac{16-13}{5} = 0.6$

القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الكيمياء: $z_2 = \dfrac{x-\overline{x}}{\sigma} = \dfrac{16-14}{4} = 0.5$

$\because\ 0.5 < 0.6$

$\therefore$ القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الرياضيات أفضل من القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الكيمياء.

وبالتالي الدرجة 16 في مادة الرياضيات أفضل من الدرجة 16 في مادة الكيمياء.

220

6 الربط

الأمثلة في هذا الدرس هي ربط مباشر بمواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في استخدام قاعدة القيمة المعيارية، فيكتبون: $z = \dfrac{\overline{x}-x}{\sigma}$. أعطهم أمثلة متعددة تبين لهم أن: $z = \dfrac{x-\overline{x}}{\sigma}$.

8 التقييم

تابع الطلاب بدقة وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من حسن استخدامهم القاعدة: $z = \dfrac{x-\overline{x}}{\sigma}$ وأنهم احتسبوا أولًا قيم $\overline{x}$, σ من بيانات معطاة.

اختبار سريع

يبيّن الجدول التالي الرواتب الشهرية بالدينار لبعض الموظفين في مؤسستين A , B.

الموظف	مدير إداري	مدير مبيعات	محاسب	عامل تقني	عامل تنظيفات
المؤسسة A	800	700	450	300	200
المؤسسة B	850	700	500	275	225

أوجد القيمة المعيارية للراتب المشترك 700 دينار كويتي مقارنة بالرواتب في كل مؤسسة.

المتوسط الحسابي للرواتب في المؤسسة A: $\overline{x} = 490$

المتوسط الحسابي للرواتب في المؤسسة B: $\overline{y} = 510$

الانحراف المعياري في المؤسسة A: $\sigma_1 = 229$

الانحراف المعياري في المؤسسة B: $\sigma_2 = 240$

القيمة المعيارية للراتب 700 في المؤسسة A:

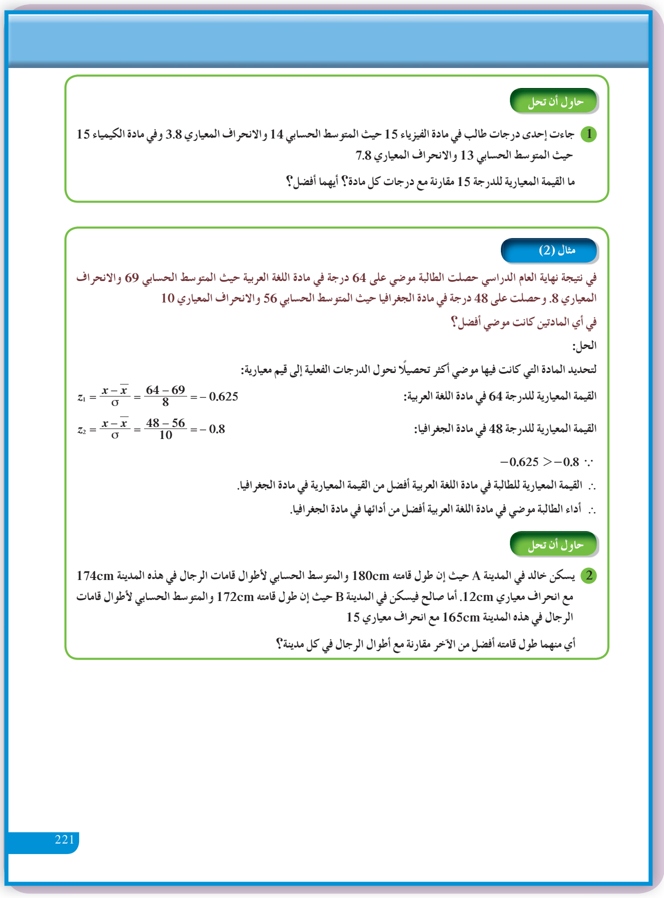
$$z_1 = \frac{700 - 490}{229} \approx 0.917$$

القيمة المعيارية للراتب 700 في المؤسسة B:

$$z_2 = \frac{700 - 510}{240} \approx 0.792$$

نلاحظ أن: $0.792 < 0.917$

أي أن الراتب 700 دينار في المؤسسة A أفضل منه في المؤسسة B مقارنة برواتب الموظفين في كل مؤسسة.



حاول أن تحل

1 جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8

ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

مثال (2)

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة موضي على 64 درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي 69 والانحراف المعياري 8. وحصلت على 48 درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي 56 والانحراف المعياري 10

في أي المادتين كانت موضي أفضل؟

الحل:

لتحديد المادة التي كانت فيها موضي أكثر تحصيلًا نحول الدرجات الفعلية إلى قيم معيارية:

القيمة المعيارية للدرجة 64 في مادة اللغة العربية: $z_1 = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{64 - 69}{8} = -0.625$

القيمة المعيارية للدرجة 48 في مادة الجغرافيا: $z_2 = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{48 - 56}{10} = -0.8$

$\because -0.625 > -0.8$

$\therefore$ القيمة المعيارية للطالبة في مادة اللغة العربية أفضل من القيمة المعيارية في مادة الجغرافيا.

$\therefore$ أداء الطالبة موضي في مادة اللغة العربية أفضل من أدائها في مادة الجغرافيا.

حاول أن تحل

2 يسكن خالد في المدينة A حيث إن طول قامته 180cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 174cm مع انحراف معياري 12cm. أما صالح فيسكن في المدينة B حيث إن طول قامته 172cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 165cm مع انحراف معياري 15

أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

221

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 نوجد القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الفيزياء:

$$z_1 = \frac{15 - 14}{3.8} \approx 0.2632$$

نوجد القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الكيمياء:

$$z_2 = \frac{15 - 13}{7.8} \approx 0.2564$$

بما أن $0.2632 > 0.2564$، فإن الدرجة 15 في مادة الفيزياء هي أفضل من الدرجة 15 في مادة الكيمياء مقارنة بدرجات كل مادة.

2 نوجد القيمة المعيارية لطول قامة خالد في المدينة A:

$$z_1 = \frac{180 - 174}{12} = 0.5$$

نوجد القيمة المعيارية لطول قامة صالح في المدينة B:

$$z_2 = \frac{172 - 165}{15} \approx 0.4\overline{6}$$

نلاحظ أن: $0.5 > 0.4\overline{6}$ ، وبالتالي طول قامة خالد في المدينة A مقارنة بأطوال قامات رجال هذه المدينة أفضل من طول قامة صالح في المدينة B مقارنة بأطوال قامات رجال هذه المدينة.

تمرَّنْ 6–6

القيمة المعيارية
Standarized Value

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أكمل الجملة التالية:

القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على .... قيمة مفردة من بيانات عن ....

وذلك باستخدام .... لقيم هذه البيانات.

(2) في أحد الاختبارات حيث الدرجة العظمى 20، جاءت درجة أحد الطلاب 15 مع متوسط حسابي 14 وانحراف معياري 4. ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة ببقية درجات هذا الاختبار؟

(3) لنأخذ البيانات: 7، 7، 6، 5، 5.

(a) أوجد: المتوسط الحسابي $\overline{x}$، والانحراف المعياري σ لهذه البيانات.

(b) أوجد القيمة المعيارية لهذه البيانات.

(4) في المدينة A يزن أحد الرجال 75 kg مع متوسط حسابي للرجال 70 kg وانحراف معياري 5 kg.

وفي المدينة B يزن أحد الرجال 80 kg مع متوسط حسابي للرجال 76 kg وانحراف معياري 8 kg.

أوجد القيمة المعيارية z_1 لوزن 75 kg في المدينة A والقيمة المعيارية z_2 لوزن 80 kg في المدينة B.

(5) في اختبارات مادة الرياضيات نال خالد الدرجات التالية من 20: 17، 16، 15، 12.

أما في اختبارات مادة الكيمياء فقد نال الدرجات التالية من 20: 9، 15، 13، 11.

(a) أوجد القيمة المعيارية z_1 للدرجة 15 في مادة الرياضيات والقيمة المعيارية z_2 للدرجة 15 في مادة الكيمياء.

(b) في أيّ مادة كانت الدرجة 15 هي أفضل مقارنة ببقية الدرجات؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) القيمة المعيارية $= \frac{\overline{x} - x}{\sigma}$ (a) (b)

(2) القيمة المعيارية تؤشر إلى تشتت قيمة عن بقية قيم البيانات. (a) (b)

(3) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\overline{x} = 14$ والانحراف المعياري $\sigma = 4$ فإن القيمة المعيارية للمفردة $x = 16$ هي: $z = 0.5$ (a) (b)

95

(4) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\overline{x} = 12$ والقيمة المعيارية للمفردة $x = 15$ هي: $z = 0.4$ ، فإن الانحراف المعياري: $\sigma = 7.5$ (a) (b)

في التمارين (5–8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) القيمة المعيارية للمفردة 14 مقارنة بقيم بيانات حيث المتوسط الحسابي 12.5 والانحراف المعياري 6 هي:

(a) -0.25 (b) 0.25 (c) 2.5 (d) -2.5

(6) القيمة المعيارية لمفردة من بيانات هي 0.625 والمتوسط الحسابي 12 والانحراف المعياري 8 فإن هذه المفردة تساوي:

(a) 7 (b) -7 (c) 17 (d) -17

(7) القيمة المعيارية للمفردة 14 من بيانات هي 0.6 والمتوسط الحسابي 11 فإن الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات هو:

(a) 0.2 (b) -0.2 (c) -5 (d) 5

(8) القيمة المعيارية للمفردة 18 من بيانات هي 0.75 والانحراف المعياري 8 فإن المتوسط الحسابي هو:

(a) 24 (b) 12 (c) -12 (d) -24

96

المرشد لحل المسائل

إجابات «مسألة إضافية»

1 مجموعة (a): $\overline{x} = 6.07$

مجموعة (b): $\overline{x} = 6.07$

2 مجموعة (a):

القيمة	3	5	6	7	8	9
التكرار	4	1	2	2	3	2

$\sigma_1 = 2.22$

مجموعة (b):

القيمة	3	4	5	6	7	8	9
التكرار	1	1	2	5	3	1	1

$\sigma_2 = 1.49$

أستنتج أن تشتت القيم في البيانات (a) أكبر منه في البيانات (b)، لأن الانحراف المعياري $2.22 > 1.49$

المرشد لحل المسائل

في سوق العمل، ثمة شركتان تعملان في المجال نفسه. الرواتب الشهرية المدفوعة بالدينار لموظفي كل شركة مبينة على الجدولين الآتيين:

الراتب في الشركة (a)	600	700	1 200	1 750	2 250
التكرار	13	4	1	1	1

الراتب في الشركة (b)	700	800	1 100	1 300	1 500
التكرار	13	4	1	1	1

1 بالنظر إلى الجدولين، أيّ الشركتين تبدو أفضل من حيث الرواتب؟

2 a احسب المتوسط الحسابي $\overline{x}$، $\overline{y}$ للرواتب في كل جدول.

b هل تحققت من التوقعات التي وضعتها في السؤال 1؟ اشرح.

c هل إيجاد المتوسط الحسابي يكفي وحده لمقارنة الرواتب الشهرية في الشركتين؟

3 احسب الانحراف المعياري σ_2 , σ_1 لرواتب الموظفين في كل شركة. ماذا تستنتج؟

الحل:

1 نلاحظ أن الرواتب الصغيرة والتي تكرارها 4 , 13 على الترتيب في الشركة (b) أفضل من تلك التي في الشركة (a) ولكن الرواتب الكبيرة والتي تكرارها 1 , 1 , 1 على الترتيب في الشركة (a) أفضل من تلك التي في الشركة (b)، وبالتالي رواتب العاملين في الشركة (b) أفضل، لكن رواتب الإداريين في الشركة (a) أفضل.

2 a المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين في الشركة (a):

$$\overline{x} = 790 \text{ KD}$$

المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين في الشركة (b):

$$\overline{y} = 810 \text{ KD}$$

b يبدو من خلال النتائج الحسابية أن المتوسط الحسابي للرواتب في الشركة (b) أفضل من المتوسط الحسابي للرواتب في الشركة (a).

c لا تكفي معرفة المتوسط الحسابي عند المقارنة بين الرواتب لوجود قيم متطرفة في الجدولين.

222

3 الانحراف المعياري للرواتب في الشركة (a):

$$\sigma_1 \approx 431.45$$

الانحراف المعياري للرواتب في الشركة (b):

$$\sigma_2 \approx 218.86$$

نستنتج أن الرواتب للموظفين في الشركة (b) تتقارب من المتوسط الحسابي أكثر ممّا تتقارب رواتب الموظفين في الشركة (a). والملاحظ أن $\sigma_1 \approx 2\sigma_2$

مسألة إضافية

في أحد الاختبارات، أراد الأستاذ المقارنة بين درجات مجموعتين من الطلاب حيث النهاية العظمى 10 درجات. يبين الجدول التالي ما يلي:

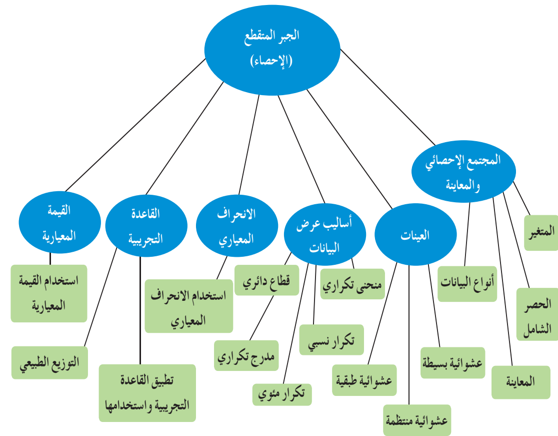
مجموعة (a)	8	3	7	3	5	7	9	6	8	3	3	8	6	9
مجموعة (b)	6	7	3	5	6	6	8	4	7	9	6	7	5	6

1 أوجد لكل مجموعة المتوسط الحسابي.

2 كوّن جدولًا تكراريًا لكل مجموعة، ثم أوجد: σ_1 الانحراف المعياري للمجموعة (a)، σ_2 الانحراف المعياري للمجموعة (b). ماذا تستنتج؟ اشرح.

223

مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص

- المجتمع الإحصائي هو مجموعة كل المفردات(الوحدات) قيد الدراسة ولها خصائص مشتركة.
- المتغير هو الصفة (أو الصفات) محور الدراسة في مجتمع إحصائي معين.
- الحصر الشامل هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة.
- المعاينة هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.
- تصنف البيانات إلى نوعين: كيفي وكمي.
- العينة هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًّا بطريقة علمية كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل كلفة ممكنة.
- العينة العشوائية البسيطة هي عينة حيث إن كل مفردة منها لها الفرصة نفسها في الظهور وتمثل المجتمع الإحصائي الذي أخذت منه.

224

- العينة العشوائية الطبقية هي عينة تتكون من عينات عشوائية بسيطة وتستخدم في مجتمع إحصائي مكون من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها بعضًا.
- لإيجاد العينة العشوائية الطبقية نوجد أوّلًا:

  a كسر المعاينة $= \dfrac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \dfrac{m}{n}$

  b حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة
- العينة العشوائية المنتظمة هي عينة تقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول وعددها يساوي حجم العينة ويكون طول الفترة $= \dfrac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$
- تستخدم الجداول التكرارية في تحديد عدد ظهور كل قيمة في البيانات.
- نستخدم التكرار النسبي لمقارنة ظهور كل قيمة بالنسبة إلى مجموع قيم البيانات.
- نستخدم النسبة المئوية لظهور كل قيمة لمعرفة نسبتها المئوية من الكل.
- توفر التمثيلات البيانية بالقطاعات الدائرية معرفة حجم كل قيمة بالنسبة إلى الكل.
- يبيّن المدرج التكراري حجم كل فئة مقارنة ببقية الفئات ويساعد على إيجاد قيمة تقريبية للمنوال.
- المدى = القيمة العظمى من البيانات − القيمة الصغرى من البيانات.
- المتوسط الحسابي: $\overline{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$
- التباين: $v = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$، حيث n_i التكرار، $\overline{x}$ = المتوسط الحسابي.
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$
- يؤشر الانحراف المعياري إلى تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي، كلما كان أصغر كان التشتت أقل.
- القيمة المعيارية $= \dfrac{x - \overline{x}}{\sigma}$، توفر القيمة المعيارية مقارنة قيمة معينة ببقية القيم في عدد من البيانات.
- نستخدم القاعدة التجريبية: $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$، $[\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma]$، $[\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma]$ لإيجاد عدد القيم من البيانات في كل فئة والنسبة المئوية لهذه القيم.

225

جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	28138	28596	04819	50138	12598	96878	55684	01488	58963	25896	36987	47856	20150	18965
2	01055	53625	47739	51063	08445	33254	22542	50954	73949	11945	29947	86107	35420	77076
3	79603	31075	71532	38497	08236	78411	18237	48743	81472	31761	49582	70411	64708	59416
4	79261	96010	82558	15977	15827	55768	29668	73188	65198	24483	16219	63827	05092	47495
5	00005	37153	07206	78041	09457	97003	49739	75180	74018	90951	96161	31749	23314	55471
6	59282	86004	13259	59537	75702	66287	77941	27095	46176	67215	93007	84125	89302	92843
7	20119	41234	01600	61772	57765	43965	60952	86606	47653	71502	85121	56804	03494	98302
8	67205	41113	34514	03273	95516	68365	79855	50202	66262	31348	37260	56557	15116	38645
9	06244	02595	08941	24615	92256	43007	05022	48195	91554	42525	30499	92203	70717	92685
10	46210	35683	67486	77091	58196	08010	54826	97006	76740	76343	93982	66126	91164	53560
11	80851	80252	02993	92649	12421	00480	53258	45140	57226	10428	36478	24600	01401	29179
12	74684	98726	87312	70956	49731	45504	70689	57849	77383	53581	05100	07629	04450	54826
13	82136	32120	31733	10371	01132	25110	67123	59517	89996	58905	75260	21509	87839	68376
14	73419	88893	89748	44745	46390	54781	31307	62656	69777	24494	91659	29133	46122	75769
15	66082	76594	77480	38397	64521	18712	50625	39027	39168	07835	13446	17758	19166	86050
16	72300	93912	87548	69024	17509	52647	64335	84663	79524	34618	72718	51651	10486	81509
17	46805	82648	27550	65291	27181	92637	13539	87601	15442	70131	62278	99491	41647	11029
18	59068	93270	15829	34926	46252	90487	92734	04850	90175	84906	46435	91518	86972	25705
19	63089	93954	30250	80347	81506	53768	75611	62054	89867	16083	45585	39555	96236	37875
20	54384	64888	28929	46575	08301	86288	52656	19225	65019	74795	25915	71637	49063	17695
21	41219	63211	39429	15290	78067	66741	08485	64653	87698	04983	47255	72768	90770	82930
22	20939	02271	71831	53134	73002	86087	98213	24484	08574	34915	03881	26259	83583	55337
23	66587	02998	73357	00128	97188	71660	47602	52022	28157	21602	30212	53762	94149	66526
24	71255	04641	38419	79552	62599	76281	10226	60287	16627	85028	41218	20667	63917	49254
25	08584	91510	57892	75011	49221	69960	90413	62400	23239	76854	66983	15964	70808	41341
26	31552	70340	48274	81006	74831	19177	49160	50762	89666	93535	12381	29770	33895	90381
27	02779	92197	83606	60964	65448	64964	19444	31357	16774	68021	46076	43831	09372	71527
28	22739	38348	29275	50087	91312	68984	37018	03447	05352	00798	61243	86397	98949	07622
29	21255	64526	97920	04791	77315	49905	74232	67222	89562	14683	81533	60057	31164	21824
30	95796	88317	77167	07879	03499	00804	27377	18693	75652	32509	38279	28588	16753	86119
31	75902	33821	35579	75020	78575	43912	99570	79216	04682	53316	95976	11938	56490	43868
32	36028	73731	05339	82203	22856	72459	00237	17627	50326	98629	71967	48402	61549	83717
33	06836	03795	80497	34107	29215	17117	69538	63274	96690	78884	38149	84592	67096	84551
34	35984	71052	01657	19690	99783	13513	37517	96508	49098	86592	10874	18125	00876	14549
35	87635	49443	55077	18157	20552	27316	12591	68157	34316	20447	53989	40096	69123	74210
36	41484	58832	43633	92072	54522	60783	05639	78371	20340	90174	90549	60250	80858	97632
37	65736	34031	37846	47294	50168	96397	50329	17390	04554	96190	02594	44229	24198	03064
38	16118	88260	28975	20036	77353	96179	08143	29222	57871	01292	52420	07130	11896	94088
39	62064	36947	31193	72328	10262	75428	50450	31620	17855	27018	75910	60965	39988	73389
40	23472	61332	48829	99113	90538	74066	38628	09270	72856	71411	78860	50745	42966	27424
41	05654	41781	99888	60787	56313	83221	82631	91989	32577	68175	24897	23456	16419	41727
42	83428	17512	78322	01942	42061	60659	32746	95367	20551	99885	79334	03732	97058	80356
43	65126	87369	56266	48697	33094	07522	92724	05676	91022	64262	24239	60242	01049	42945
44	28042	84729	34846	05880	34188	27048	30623	23204	05034	93136	19192	91674	47022	48523
45	53148	70847	48117	16103	83773	13224	76143	39148	06742	08298	52014	61711	79466	78334

تابع جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
46	13560	38973	76536	54464	57626	10247	67051	83850	93002	30930	83842	09990	39203	85693
47	74560	04842	75720	98173	35124	18019	70681	73624	86300	76894	55504	20022	27144	03239
48	27449	10887	55047	76702	62587	20131	63452	96127	15802	65271	74663	37237	95812	19427
49	44413	47571	63342	67062	19900	42511	71024	44364	02775	41081	33177	09580	71047	33820
50	64512	50481	41107	21553	86471	16380	45959	16065	75195	31120	33822	43200	82566	43078
51	00095	29635	33618	55201	12075	97285	80296	92250	92579	69296	68423	91353	35553	77036
52	09638	68500	84152	55279	29481	48723	87785	06304	53198	79425	41344	87395	54720	72911
53	08589	28972	20500	26761	61852	87387	17967	50345	20479	37841	16337	88163	38585	02798
54	54883	36854	75468	31821	08464	13393	24322	56872	39507	16845	92039	13209	47035	57686
55	15444	18858	69256	81949	85766	20284	15914	76382	25665	84484	36409	87271	14949	12069
56	71565	25235	48604	04697	60513	89675	34337	06619	67509	03365	67431	43725	60359	33823
57	92871	06972	97272	98081	58945	98039	47815	55173	93203	03385	58309	47970	27985	73782
58	68849	33525	22034	44200	90628	39212	75363	00247	96303	51838	99956	34321	85809	87275
59	98827	81751	86350	27162	56861	00566	32360	52560	05152	97370	29229	98503	44100	59854
60	66803	20412	23097	36884	14158	51578	82839	04323	01877	91180	22403	31175	67942	14508
61	41516	62122	37492	78385	08100	01107	49028	80607	92813	75169	25796	12643	75026	04170
62	12162	72695	70213	28844	94220	04677	63128	96254	60006	42148	63974	24739	46064	93416
63	13274	51517	40925	25926	47062	06867	80018	43394	68316	19197	74832	95805	26126	29623
64	52918	26336	17452	70092	22425	68294	14624	12683	60030	18091	76824	45533	29768	59678
65	30361	58894	77995	22650	20266	21791	25773	37748	38058	73835	57440	33610	24749	56691
66	46377	07121	20251	41301	07635	66029	80470	25523	16429	40640	40041	79302	98712	95368
67	27423	28968	39623	90457	26780	14540	15082	90327	56459	77107	60727	26328	59556	93557
68	73886	44934	65197	86001	51613	92940	24998	35378	35732	05469	05791	07309	23107	37543
69	70336	30279	09961	58625	11044	73699	32481	85490	58333	12277	98355	86413	87883	23945
70	97903	34498	31282	11249	13179	41489	87962	89071	61922	02704	83626	67269	26568	09110
71	86205	97851	61543	40666	78098	05621	86072	21202	84985	65253	09306	56791	86227	73343
72	70718	31353	96295	21718	03495	83149	48733	21496	68430	91459	18409	86552	53261	30280
73	79073	05288	57087	27201	29661	08888	42984	96272	93656	50805	32057	36231	03532	64408
74	37479	85240	68508	36333	90080	46063	78129	96854	65844	71369	15432	66145	29223	87139
75	56009	81470	06181	98341	92406	61704	57770	28984	92858	88178	80042	83674	23736	64497
76	97012	75201	16764	31720	59414	81005	63959	15445	12347	71939	23651	29846	20962	77463
77	89839	94534	78223	94989	54376	61163	21914	19430	86856	38116	83201	10117	77879	04504
78	81048	37891	24924	18757	54550	54788	72430	24611	18643	55647	11806	78567	76679	58222
79	96743	96838	50696	57648	15325	72557	77193	50894	33206	44420	37986	84257	02031	65384
80	87649	00751	47483	48564	13103	20941	49793	68972	27994	75845	84616	37040	97110	95953
81	18173	87553	45854	18750	16506	57202	60428	61710	35887	19879	49893	04512	62556	63742
82	27613	72032	94334	38239	00395	05486	96365	01758	99314	41866	25760	74573	72169	25744
83	67517	04195	89100	21434	52923	90818	09206	19493	00233	62413	39127	76457	39419	35023
84	23574	88907	08133	85126	84643	94128	89259	18791	71035	84179	82500	92193	31383	34150
85	98721	90145	05695	14882	11827	56881	14143	68069	88481	08328	58607	81737	11660	96892
86	85556	83652	92934	55451	94792	45056	50732	83305	46303	37510	15539	52534	47250	75231
87	63282	48334	46961	05993	16605	63422	23375	44298	16226	10617	96722	42776	53376	94366
88	34033	36344	41107	77495	73985	79352	14844	44334	30781	16339	38031	28104	60054	05725
89	75567	31423	72507	48162	30150	44912	76250	12017	12136	47687	90279	67127	83889	87957
90	45101	69475	96924	76548	57756	14741	26052	42807	52824	61981	87866	35512	23771	43130

اختبار الوحدة السادسة

(1) هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اشرح السبب.

(a) دراسة كمية السكر الموجودة في الدم عند أحد الأشخاص.

(b) إيجاد المتوسط الحسابي لأوزان طلاب صفك.

(2) في إحدى المؤسسات تمّ سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 70 فردًا وكسر المعاينة لهذه العينة 0.08

(a) أوجد عدد الأفراد العاملين في هذه المؤسسة (المجتمع الإحصائي).

(b) علمًا أن المؤسسة مكونة من ثلاث فئات: الفئة A حيث حجم العينة الطبقية 30 ، الفئة B حيث حجم العينة الطبقية 30، الفئة C حيث حجم العينة الطبقية 10، أوجد حجم العينة المناظرة لكلّ فئة.

(3) في إحدى الشركات تمّ سحب عينة عشوائية منتظمة مكونة من 25 فردًا بحيث إن طول الفترة 50،
أوجد حجم المجتمع الاحصائي (عدد أفراد العاملين في الشركة).

(4) في استطلاع أجري على الصف الثاني عشر علمي لمعرفة آرائهم حول مهنة المستقبل جاءت الإجابات كما يبيّن الجدول التالي:

المهنة	معلم	ضابط	مهندس	طبيب	محام	رجل أعمال	المجموع
التكرار	2	3	6	7	5	2	25

(a) أكمل الجدول لإيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.

(b) مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

(5) في البيانات التالية: 3، 9، 4، 5، 6، 8، 7. أوجد المتوسط الحسابي $\overline{x}$، التباين v والانحراف المعياري σ

(6) على افتراض أن المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات هو 850 دينارًا والانحراف المعياري 175 دينارًا والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل جرس (توزيع طبيعي).

(a) طبّق القاعدة التجريبية على المتوسط الحسابي لأرباح هذه الشركة.

(b) هل انخفضت أرباح هذه الشركة إلى 300 دينار؟ اشرح ذلك.

(c) هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 1400 دينار؟ اشرح ذلك.

97

(7) نال الطالب سالم 15 من 20 في اختبار مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي للدرجات 13 والانحراف المعياري 2.5 وقد نال أيضًا 13 من 20 في اختبار مادة الفيزياء حيث المتوسط الحسابي للدرجات 11.5 والانحراف المعياري 2.4

في أي مادة تعتبر درجة سالم هي الأفضل مقارنة بدرجات كل مادة؟ اشرح.

(8) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان طلّاب الصف الحادي عشر بالكيلوجرام (kg).

الفئة	–64	–68	–72	–76	–80	المجموع
التكرار	4	5	7	6	3	25

(a) أكمل الجدول لإيجاد مراكز الفئات.

(b) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري والمضلع التكراري.

98

تمارين إثرائية

(1) هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية، أم لا؟ مع ذكر السبب.

(a) دراسة أنواع الحشرات في دولة الكويت.

(b) دراسة نسبة عدد الإناث إلى عدد الذكور العاملين في أحد المصارف في دولة الكويت.

(2) **الكتابة في الرياضيات:** اذكر أمثلة تتضمن ما يلي:

(a) مجتمع إحصائي منته – وحدة الدراسة – المتغير المراد دراسته.

(b) مجتمع إحصائي غير منته – وحدة الدراسة – المتغير المراد دراسته.

(3) في أحد مصانع غزل النسيج، الذي يحوي 600 عامل مرقمين من 1 إلى 600. أراد صاحب المصنع مناقشة عدد من العمال في كيفية تحسين الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة مكونة من 15 عاملًا باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

(4) أراد مدير عام شركة كبرى لإنتاج مواد الدهان تقييم أداء كافة الموظفين، علمًا أن الشركة تضم 80 مهندسًا تمّ ترقيمهم من 201 إلى 280، 120 اختصاصي مختبر تمّ ترقيمهم من 301 إلى 420، وأخيرًا 220 عاملًا تمّ ترقيمهم من 501 إلى 720. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 21 فردًا تمثل جميع العاملين باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السابع والعمود الأوّل.

(5) أراد معلم في أصول تعليم القرآن الكريم تشكيل مجموعات في الصفوف الثانوية لإحدى المدارس التي تحوي 144 طالبًا مرقمين من 1 إلى 144. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة مكونة من 16 طالبًا باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثالث والعمود الثالث.

(6) يتألف فريق العمل في إحدى الشركات من 360 موظفًا وهم من الجنسين أي ذكور وإناث ويعملون إما بدوام كامل أو بدوام جزئي كما هو مبيّن في الجدول التالي:

ذكور/دوام كامل	180 مرقمين من 1 إلى 180
ذكور/دوام جزئي	36 مرقمين من 181 إلى 217
إناث/دوام كامل	18 مرقمين من 218 إلى 236
إناث/دوام جزئي	126 مرقمين من 237 إلى 363

المطلوب أخذ عينة طبقية حجمها 40 موظفًا، وفقًا للفئات أعلاه باستخدام برنامج إحصائي.

99

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) 20 (b) 40 (c) 10^2 (d) 0.1 (e) 0.5
(f) 0.08 (g) لا يوجد (h) $\frac{1}{5}$ (i) $\frac{2}{7}$ (j) 30
(k) لا يوجد (l) 150

(2) (a) 3 (b) 10 (c) -4 (d) 0.5 (e) $\frac{2}{5}$
(f) 42 (g) $\frac{-5}{2}$ (h) 0 (i) $6\sqrt[3]{25}$ أو حوالي 17.54

(3) (a) $4|x| = \begin{cases} 4x : x \geq 0 \\ -4x : x < 0 \end{cases}$ (b) $0.5|x^3| = \begin{cases} 0.5x^3 : x \geq 0 \\ -0.5x^3 : x < 0 \end{cases}$ (c) $x^4|y^9| = \begin{cases} x^4y^9 : & y \geq 0 \\ -x^4y^9 : & y < 0 \end{cases}$
(d) $2x\sqrt{2x}$
(e) $\frac{1}{5}xy^2\sqrt{y}$ (f) $100x$ (g) $-5y^2$ (h) $3\sqrt[3]{3x^2}$
(i) $-5x^2y\sqrt{2y^2}$ (j) $14xy$ (k) $\frac{4u}{v^3}$

(4) (a) $10\sqrt{2}$ (b) $4\sqrt[3]{5}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $5+5\sqrt{3}$
(e) $5-2\sqrt{6}$ (f) $10+7\sqrt{2}$ (g) $69+20\sqrt{11}$ (h) 300
(i) $-2\sqrt[3]{2}$ (j) $5\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ (k) $12\sqrt[3]{3}-9\sqrt[3]{2}$ (l) 6
(m) $27+4\sqrt{7}$

(5) (a) $4\sqrt{7}+10\sqrt{21}$ m (b) $70\sqrt{3}$ m^2

(6) (a) $\frac{7}{6}$ (b) $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ (c) $\frac{12\sqrt{3}+8}{23}$ (d) $\frac{-11-8\sqrt{2}}{14}$
(e) $\frac{-35-19\sqrt{5}}{29}$ (f) 0 (g) 4 (h) $\frac{11\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{10}$
(i) $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$ (j) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

(7) $2\sqrt{5}$ (8) 2

(9) $E = 41+24\sqrt{2}$; $F = 114-56\sqrt{2}$ (10) 2

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)
(6) (c)	**(7)** (b)	**(8)** (b)	**(9)** (b)	**(10)** (a)
(11) (b)	**(12)** (d)			

تمرَّنْ 2–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) **(a)** -3 **(b)** لا يوجد **(c)** $6\sqrt[4]{3}$ **(d)** 2 **(e)** $2y^2$

(f) $-x^4$ **(g)** 0.4 **(h)** $3(\sqrt{3}+1)$ **(i)** $\frac{2x^6}{y^3}\sqrt[4]{x}$

(2) **(a)** $\sqrt[6]{x}$ **(b)** $\sqrt[7]{x^2}$ **(c)** $\frac{1}{\sqrt[8]{y^9}} = \frac{1}{y\sqrt[8]{y}}$

(d) $\sqrt{x^3} = (\sqrt{x})^3$ **(e)** $\sqrt[4]{x^3}$ **(f)** $\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$

(g) $y^2|y|\sqrt[5]{y}$ **(h)** $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$

(3) **(a)** 16 **(b)** $\frac{1}{16}$ **(c)** 8

(4) **(a)** $7^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ **(b)** $7^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ **(c)** $7^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$

(d) $25x^2y^2$ **(e)** $3x^{\frac{3}{4}}$ **(f)** $0.07t^{26}$ **(g)** 64

(5) **(a)** 16 **(b)** $\frac{1}{81}$ **(c)** -3

(d) $x^{\frac{1}{2}}$ **(e)** $x^{\frac{1}{2}}$ **(f)** $x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{4}}$

(g) $x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{1}{6}}$ **(h)** $3x^{-\frac{1}{3}}$ **(i)** t^2

(6) **(a)** $2|x|$ **(b)** 1 **(c)** 1

(d) -2 **(e)** $2^{\frac{1}{6}}$ **(f)** 0

(7) تختلف الإجابات: $4-\sqrt{5}$ **(8)** 768

(9) $5 \times 5^{\frac{1}{2}}$ تساوي $5^{\frac{3}{2}}$ وليس $25^{\frac{1}{2}}$ **(10)** حوالي 636

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (a) (4) (b) (5) (b)

(6) (b) (7) (c) (8) (b) (9) (a) (10) (a)

(11) (c) (12) (c)

حل المعادلات — تمرَّنْ 3–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) **(a)** 16 **(b)** 22 **(c)** $3;-13$ **(d)** 8

(e) $-\frac{1}{4}$ **(f)** 6 **(g)** لا يوجد

(2) **(a)** $d \approx 9.33\,m$ **(b)** 0.10 m

(3) **(a)** 3 **(b)** $\{-3;-4\}$ **(c)** -2 **(d)** 1

(e) -3 **(f)** $x = 10$ **(g)** 5 **(h)** $x = 25$

(i) $\frac{13}{2}$ **(j)** $9, -7$ **(k)** 2 **(l)** -1

(m) $\frac{5}{4}$ **(n)** -2

(4) **(a)** $x = \frac{\sqrt{2S\sqrt{3}}}{3}$ **(b)** $\approx 8.77\,\text{cm}\,;15.2\,\text{cm}$

(5) ≈ 5.3 m

(6) **(a)** $x^3 - y^3$ **(b)** $3^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$

(7) **(a)** 3 **(b)** -1 **(c)** $\{-2,2\}$ **(d)** $\{1,4\}$ **(e)** 0

(f) 2 **(g)** $\frac{7}{2}$ **(h)** $\{0,3\}$ **(i)** $\{0,3\}$ **(j)** $+\frac{1}{4}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (b) (5) (b)

(6) (d) (7) (d) (8) (a) (9) (a) (10) (c)

اختبار الوحدة الأولى

(1) **(a)** $11|x^{45}| = \begin{cases} 11x^{45} : x \geq 0 \\ -11x^{45} : x < 0 \end{cases}$ **(b)** $-4y^{27}$ **(c)** $2y^5$ **(d)** $0.09x^{30}$

(e) $4x^{18}y^{48}$ **(f)** $8\sqrt{3}+24$ **(g)** $12x^3|y|\sqrt{35} \begin{cases} 12x^3y\sqrt{35} : y \geq 0 \\ -12x^3y\sqrt{35} : y < 0 \end{cases}$

(h) 4 **(i)** $2x$

(2) **(a)** $\frac{-1}{7}$ **(b)** $\frac{20\sqrt{7}-25}{87}$

(c) $-\frac{4+6\sqrt{5}+2\sqrt{10}+15\sqrt{2}}{41}$ **(d)** $\frac{10-8\sqrt{2}}{7}$

(3) **(a)** 16 **(b)** 125 **(c)** $6\sqrt{2}$

(d) $\frac{1}{3}$ **(e)** 4 **(f)** $\frac{4}{7}$

(4) **(a)** 4

(b) $x^2 = 4$ إذا $x = 2$ أو $x = -2$. بما أن x هو عدد سالب فيكون $x = -2$

(5) **(a)** $\sqrt[7]{x^5}$ **(b)** $\frac{1}{\sqrt[9]{y^2}}$ **(c)** $\sqrt[5]{x^2}$

(d) $\sqrt{2}$ **(e)** $10\sqrt[4]{3^3}$ **(f)** $6\sqrt[6]{x^5}$

(g) $2\sqrt[12]{3}$ **(h)** $100\sqrt[12]{10}$ **(i)** $\frac{1}{3}$

(6) **(a)** $64y^4$ **(b)** $\frac{4|x^7|}{9|y^9|}$ **(c)** $x^{\frac{1}{3}}$ **(d)** $x^{-\frac{1}{6}} \times y^{\frac{-5}{4}}$

(7) في المرحلة الثانية، توزعت الأسس بشكل خطأ أي: $(x-y)^{-2} \neq x^{-2}-y^{-2}$

(8) **(a)** $\frac{1}{25}$ **(b)** 2 **(c)** 12 **(d)** 10

(e) $\frac{81}{16}$ **(f)** 13

(9) $m = \frac{V^2}{64}$ **(10)** 2 **(11)** **(a)** $3, -3$ **(b)** $-1, 2$

تمارين إثرائية

(1) (a) -7 (b) 30 (c) 3 (d) -9

(e) -0.1 (f) $8-5\sqrt{3}$ (g) $\frac{2^{10}}{3^{10}\times 5^{7}}$ (h) $2^6\times 3^6$

(2) (a) $-2+3\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}$ (b) 7 (c) 13

(3) (a) $\frac{4x^4\sqrt[3]{x^2}}{9y^6}$ (b) $y^4\times x^{-6}$ (c) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{xy}$ (d) x

(4) (a) $\frac{8+5\sqrt{3}}{11}$ (b) $2\sqrt{5}$

(5) (a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (b) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ (c) $\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$

(6) 0

(7) ليس كل من $\sqrt{-8}, \sqrt{-2}$ عددًا حقيقيًّا

(8) $32^{-0.8}$

(9) (a) x^{a+b} (b) 2 (c) $\frac{\sqrt{x}\times\sqrt[3]{y^2}}{y}$

(10) (a) 3 (b) 2 (c) $\{1,4\}$

(d) $\{0,2\}$ (e) $\{1,4\}$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) نعم (2) لا (3) نعم (4) لا (5) لا (6) لا

(7) $\mathbb{R}$ (8) $\left[\frac{7}{3},\infty\right)$ (9) $(-\infty,0]$

(10) $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)$ (11) $\mathbb{R}$ (12) $(-3,\infty)$

(13) $[2,\infty)$ (14) $\left[-\frac{3}{4},\infty\right)-\left\{\frac{5}{3}\right\}$ (15) $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ (16) $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (a) (4) (b)

(5) (a) (6) (b) (7) (d) (8) (a)

(9) (d) (10) (d) (11) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) خطية (2) تربيعية (3) تربيعية (4) خطية (5) خطية

(6) تربيعية (7) خطية (8) خطية (9) 3 أزواج

(10) $y = 2x^2 - 5x - 3$ (11) $y = x^2 + 2x$ (12) $y = -3x^2 + 20$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (b)

(6) (a) (7) (d) (8) (c) (9) (b) (10) (d)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y=\frac{2}{9}x^2$ ، إلى أعلى

(2) $y=\frac{-3}{16}x^2$ ، إلى أسفل

(3) $y=\frac{-1}{18}x^2$ ، إلى أسفل

(4) $y=\frac{5}{4}x^2$ ، إلى أعلى

(5) $y=-x^2+4$

(6) $y=\frac{1}{4}x^2$

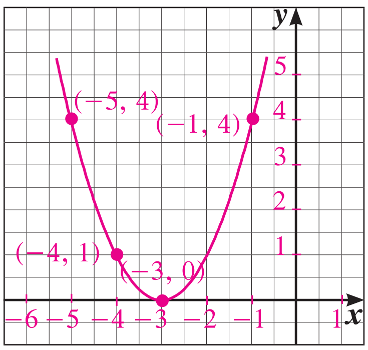
(7) $y=-(x-2)^2$

(8) $y=-(x+2)^2$

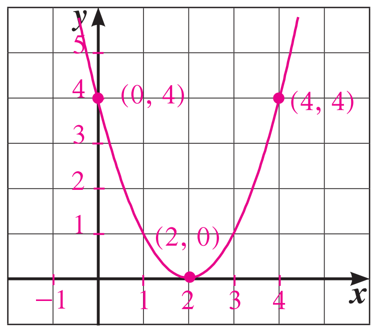
(9) $y=-(x-1)^2+2$

(10) $y=6(x+3)^2-2$

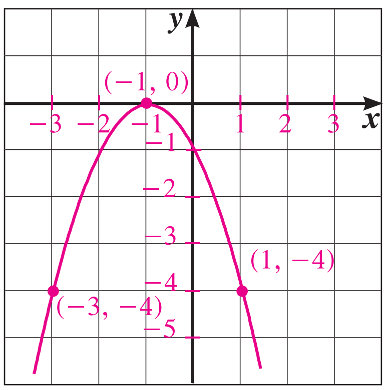
(11)



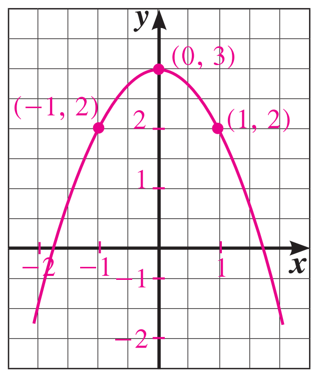
(12)



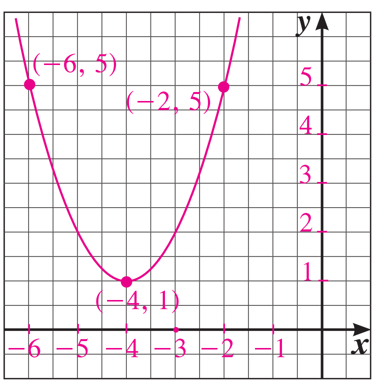
(13)



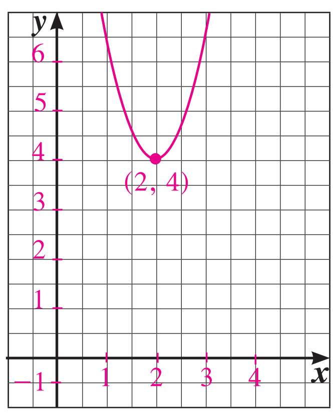
(14)



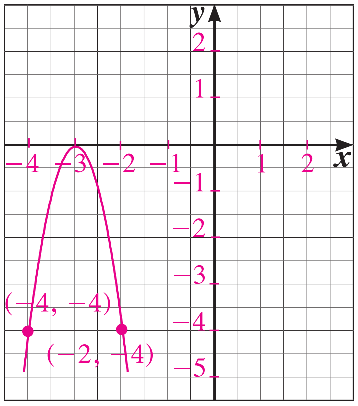
(15)



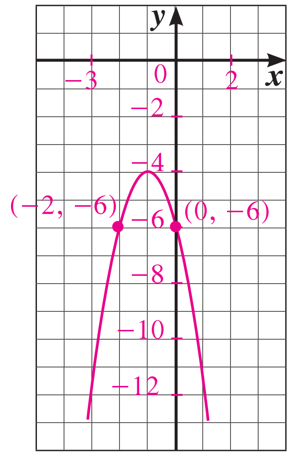
(16)



(17)



(18)

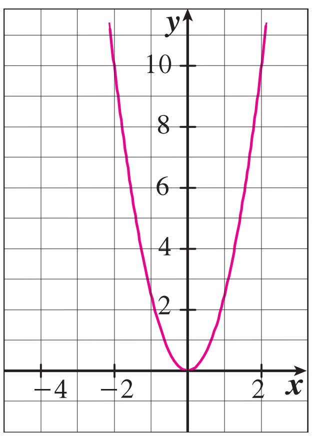


(19) قد تختلف الإجابات. مثلًا: ارسم نقطة الرأس (4 ,3). ارسم محور التماثل: $x = 3$.

ارسم النقطة (4 ,2)، ثم ارسم النقطة المناظرة (2 ,12).

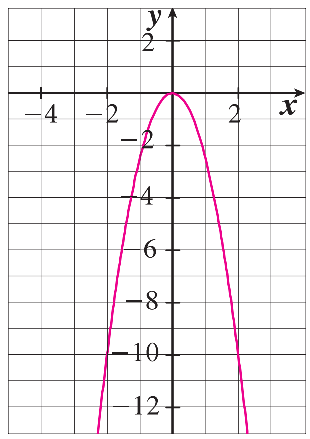
(20) تتنوع الإجابات مثل: $y = -2(x+2)^2$

(21)



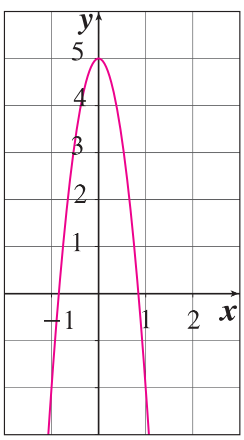
$y = \frac{5}{2}x^2$

(22)



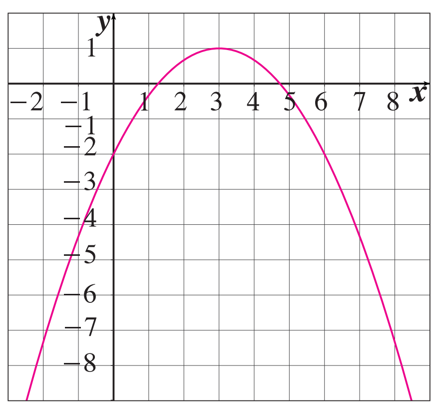
$y = -\frac{5}{2}x^2$

(23)



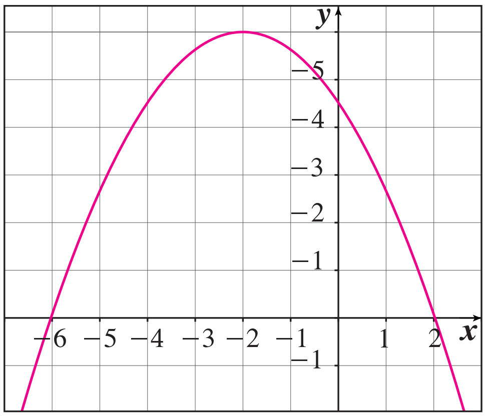
$y = -2x^2 + 5$

(24)



$y = \frac{-(x-3)^2}{3} + 1$

(25)



$y = \dfrac{-3(x+2)^2}{8} + 6$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (a) **(5)** (a)

(6) (d) **(7)** (c) **(8)** (d) **(9)** (c) **(10)** (a)

(11) (b)

مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة تمرَّنْ 4–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y = (x-2)^2 + 2$

(2) $y = (x+1)^2 + 4$

(3) $y = 4\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{16}$

(4) $y = -2(x-0)^2 + 35$

(5) $y = -8(x-0)^2 + 0$

(6) $y = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

(7) $y = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$

(8) $y = x^2 + 6x + 5$

(9) $y = 2x^2 - 8x + 13$

(10) $y = -x^2 + 14x - 39$

(11) $y = 25x^2 + 60x + 27$

(12) $y = -9x^2 + 24x - 10$

(13) $y = -2x^2 - 6x$

(14) $y = -x^2 + 8x - 14$

(15) $c = 23$

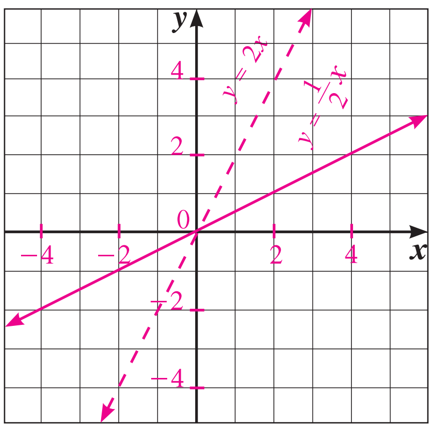
(16) $a = 3, b = -12$

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (b)
(6) (c)	**(7)** (b)	**(8)** (b)	**(9)** (c)	**(10)** (b)
(11) (b)	**(12)** (b)	**(13)** (b)	**(14)** (d)	**(15)** (a)

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي — تمرَّنْ 5–2

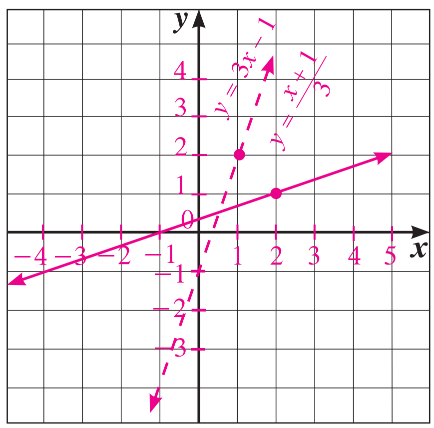
المجموعة A تمارين مقالية

(1)



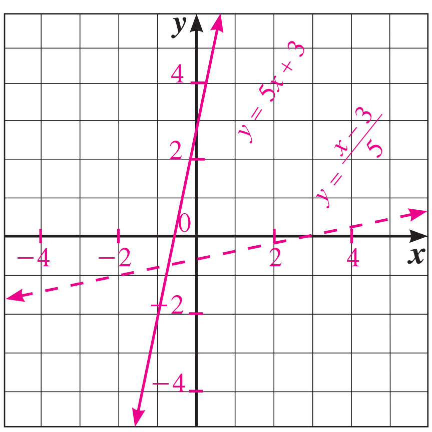
$y = 2x$

(2)



$y = 3x - 1$

(3)

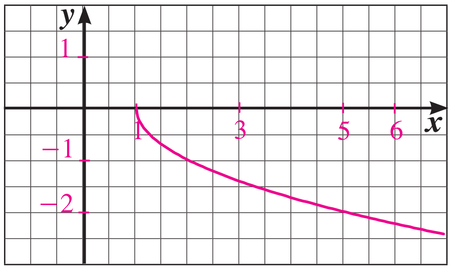


$y = \frac{x-3}{5}$

(4) $y = \pm\sqrt{2x}$ (5) $y = \pm\sqrt{x+1}$ (6) $y = \pm\sqrt{y-1} + 2$

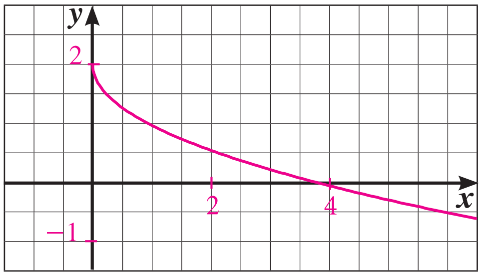
(7) $y = 3x - 5$ (8) $y = \dfrac{x-2}{6}$ (9) $y = \pm\sqrt{x+3}$ (10) $y = \pm\sqrt{y-2} - 5$

(11)



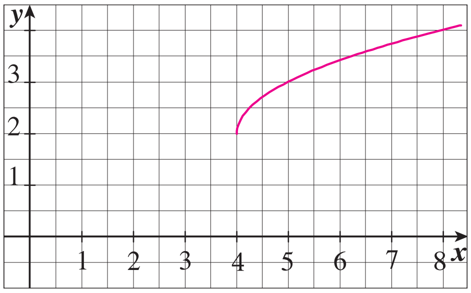
$x \geq 1;\ y \leq 0$

(12)



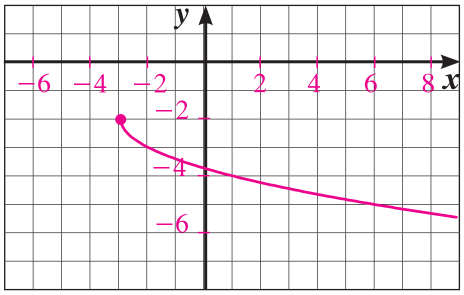
$x \geq 0;\ y \leq 2$

(13)



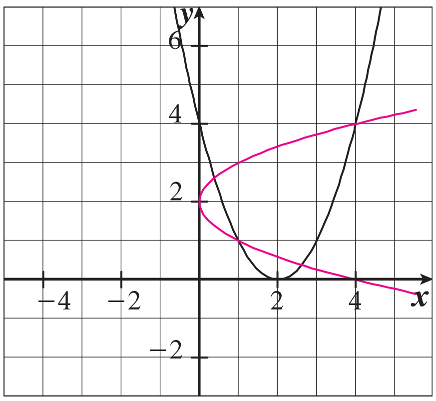
$x \geq 4;\ y \geq 2$

(14)



$x \geq -3;\ y \leq -2$

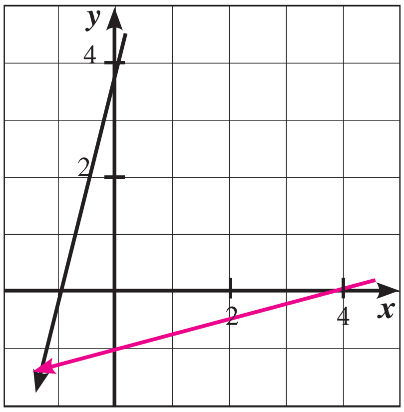
(15)



$y = (x-2)^2$

$y = \pm\sqrt{x} + 2$

(16)



$y = 4x + 4$

$y = \dfrac{1}{4}x - 1$

(17) (a) $y = 0.8x$ (b) $y = 1.25x$

(c) إيجاد السعر الأصلي إذا ما أعطي ثمن البيع.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (a) (3) (a) (4) (a) (5) (b)

(6) (d) (7) (b) (8) (c) (9) (b) (10) (d)

حل المتباينات تمرَّنْ 6–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) **(a)** $x \in \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$ **(b)** $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$ **(c)** $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$

(d) $x \in (-\infty, \infty)$ **(e)** $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ **(f)** $x \in (-3, 7)$

(2) **(a)** عرض المستطيل > 0، $x - 2 > 0$، $x > 2$.

(b) $y = 2x^2 - 4x$

(c) $x = 8$، الطول $= 16\,\text{cm}$، والعرض $8\,\text{cm}$.

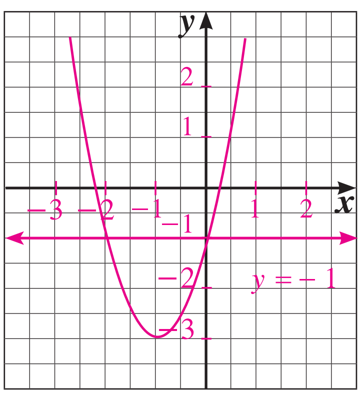
(3) $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$ **(4)** $[-1, 1]$ **(5)** $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

(6) $(-\infty, -1) \cup [1, 3)$ **(7)** $(-\infty, -5) \cup (-2, 1)$ **(8)** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

***(9)** $[-1, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

(10) عمر أحمد 10 سنوات وعمر جده 80 سنة.

(11) **(a)**

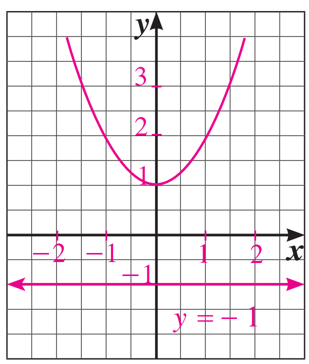


$x = 0, x = -2$

$f(x) > y \therefore x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

$f(x) < y \therefore x \in (-2, 0)$

(b)

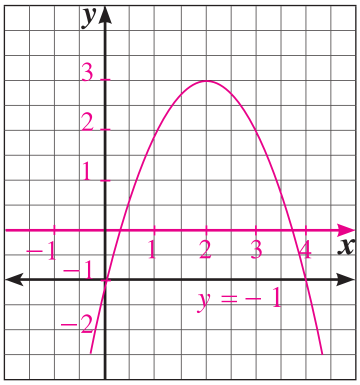


$f(x) = y$ لا حل لها

$f(x) > y \therefore x \in (-\infty, \infty)$

$f(x) < y$ لا حل لها

(c)

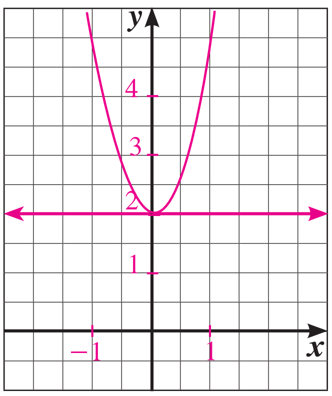


$f(x) = y \;\therefore\; x = 4 , x = 0$

$f(x) > y \;\therefore\; x \in (0 , 4)$

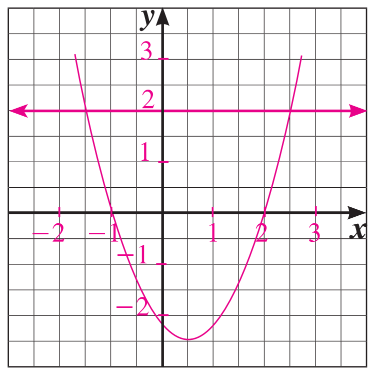
$f(x) < y \;\therefore\; x \in (-\infty , 0) \cup (4 , \infty)$

(12) (a)



$f(x) \geq y \;\therefore\; x \in (-\infty , \infty)$

$f(x) > y$ لا حل لها



$f(x) > y$

$\therefore\; x \in \left(-\infty , \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2} , \infty\right)$

$f(x) < y \;\therefore\; x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2} , \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

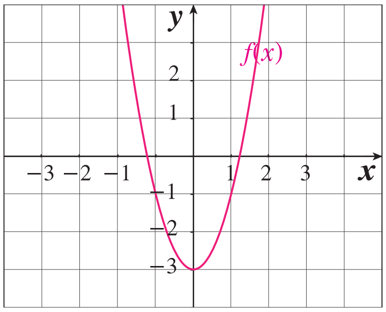
المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)	**(5)** (b)
(6) (b)	**(7)** (b)	**(8)** (c)	**(9)** (b)	**(10)** (c)
(11) (b)	**(12)** (c)	**(13)** (d)		

اختبار الوحدة الثانية

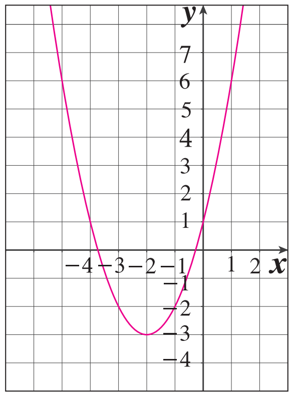
(1) $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$ **(2)** $(-\infty,-2)$ **(3)** x^2-4x+3

(4)



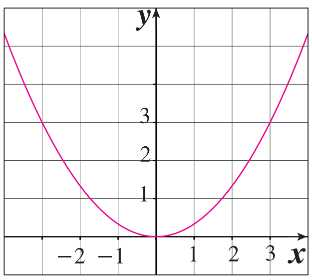
$y=2x^2-3$ ، تربيعية

(5)



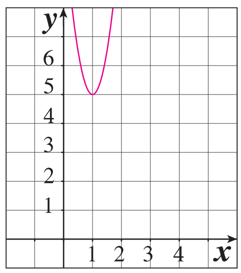
$y=x^2+4x+1$ ، تربيعية

(6)



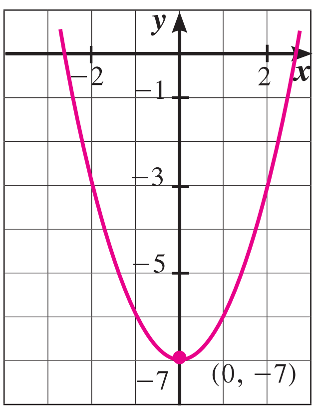
$y=\frac{1}{3}x^2$

(7)



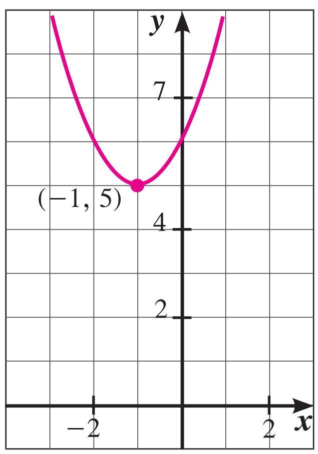
$y=6(x-1)^2+5$

(8)



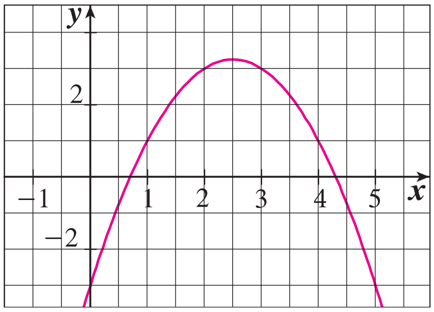
الرأس $(0,-7)$

(9)



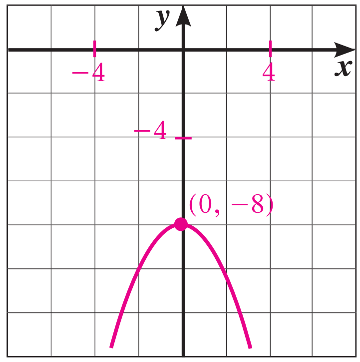
$(-1,5)$

(10)



$\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right)$

(11)



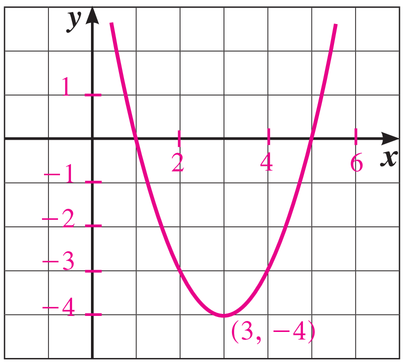
$(0, -8)$

(12) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ **(13)** $y = \frac{3}{2}x + 9$

(14) $y = \pm\sqrt{x+10}$ **(15)** $y = \pm\sqrt{x+3} - 2$

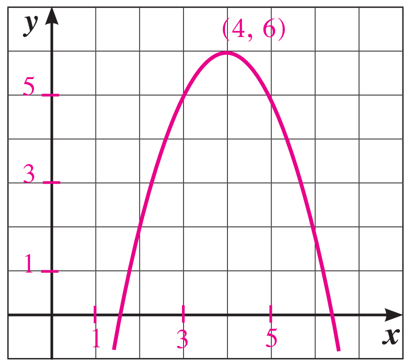
(16) تتنوّع الإجابات: إجابة ممكنة: $y = \sqrt{x}$

(17)



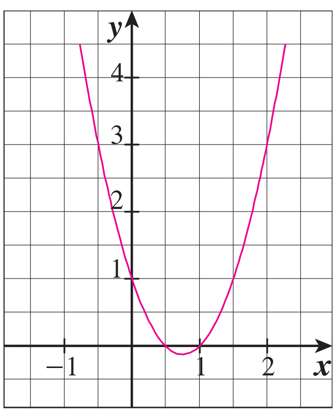
$y = (x-3)^2 - 4, (3, -4)$

(18)



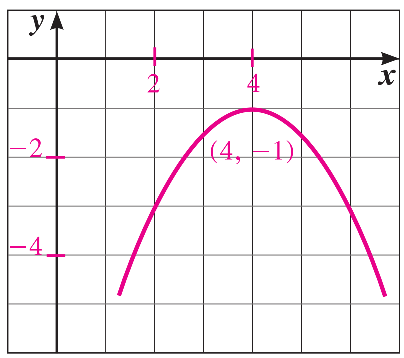
$y = (x-4)^2 + 6, (4, 6)$

(19)



$y = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}, \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{8}\right)$

(20)

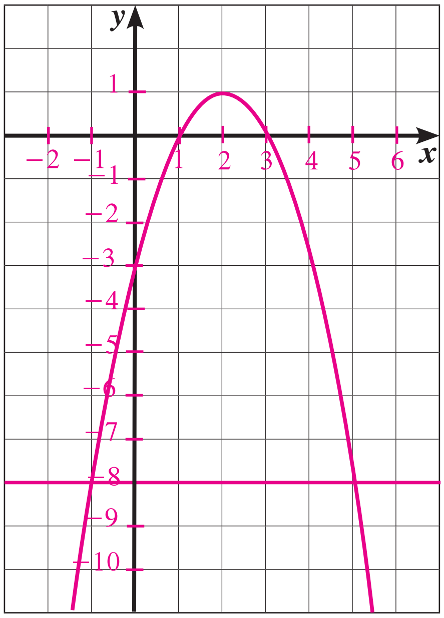


$y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 - 1, (4, -1)$

(21) المساحة: $\frac{1}{2}x(120-3x)$ لها قيمة عظمى عند $x = 20$، وقيمتها $600\ m^2$.

(22) **(a)** $x \in [3, 5]$ **(b)** $\mathbb{R}$ **(c)** $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup (2, \infty)$

(23) **(a)**



(b) $f(x)=-8$ تعطي $x=-1$ أو $x=5$، $f(x)>-8$ تعطي $x\in(-1,5)$،

$f(x)<-8$ تعطي $x\in(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$.

(c) $-x^2+4x-3=-8; -x^2+4x+5=0$

$h(x)=-x^2+4x+5=(x+1)(-x+5)$

x	$-\infty$	-1		5	∞
$x+1$	$-$	•	$+$		$+$
$-x+5$	$+$		$+$	•	$-$
$h(x)$	$-$	•	$+$	•	$-$

نحصل على النتيجة السابقة نفسها.

تمارين إثرائية

(1) $[0,3)$

(2) $(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

(3) **(a)** $0=a(0-10)^2+3, a=-0.03$

(b) يقف الحارس على بعد 7 m، $y=-0.03(7-10)^2+3$ ومنه $y=2.73>2.53$

لذا تتخطى الكرة حارس المرمى.

من ناحية ثانية المرمى على بعد 16 m. $y=-0.03(16-10)^2+3=1.92$

أي $1.92<2.44$، لذا سوف تدخل الكرة في المرمى وسيسجل اللاعب هدفًا.

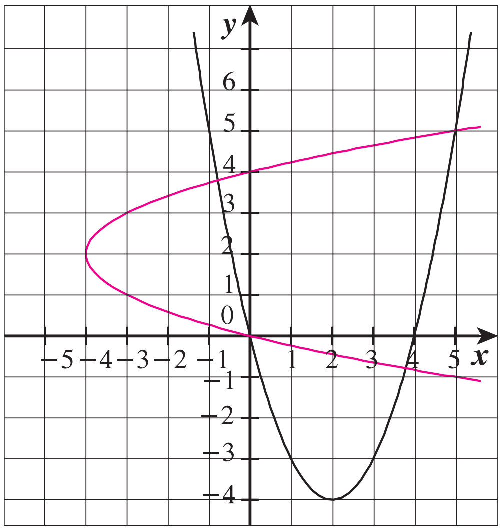
(4) (a) إحداثيات نقطة الانطلاق $(0, 1)$، وبالتعويض نجد: $k = 7.48$.

(b) إحداثيات رأس القطع المكافئ $(9, 7.48)$، فيكون الارتفاع الأقصى $7.48\,\text{m}$.

(c) يقف اللاعب المنافس على بعد $3\,\text{m}$ من الشبكة أي 14.9 عن اللاعب الثاني إذا $x = 14.9$ ومنه $y \simeq 4.7\,\text{m}$، وحيث إن $3.3 < 4.7$ لذا ستتخطى الكرة اللاعب المنافس.

(d) عند سقوط الكرة على أرض الملعب يكون $y = 0$ أي $-0.08(x-9)^2 + 7.48 = 0$، ومنه نحصل على $x = 18.67$، وحيث إن $23.8 > 18.67$، لذا ستسقط الكرة داخل ملعب اللاعب المنافس.

(5) (a)



(b) $y - x^2 - 4x$ ، $x - y^2 - 4y$ ، $y^2 - 4y - x = 0$ ، $y_1 = 2 + \sqrt{x+4}$ ، $y_2 = 2 - \sqrt{x+4}$

(6) لا حل لها

(7) $\left[-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right]$

(8) $(3, \infty)$

(9) $(5,6) \cup (6,\infty)$

(10) $\left[\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$

(11) (a)

جدول (1)

5	4	3	2	1	0	x
10	8	6	4	2	0	$y = 2x$
	2	2	2	2	2	الفرق

جدول (2)

5	4	3	2	1	0	x
50	32	18	8	2	0	$y = 2x^2$
	18	14	10	6	2	الفرق

(b) $y = 2x^2$

(c) كل الفروق في الجدول الأول تساوي 2، وفي الثاني يزيد الفرق 4 من منزلة إلى أخرى.

(d)

x	0	1	2	3	4	5
$y = -x + 4$	4	3	2	1	0	-1
		-1	-1	-1	-1	-1

الفرق هو نفسه

x	0	1	2	3	4	5
$y = -x^2 + 4$	4	3	0	-5	-12	-21
الفرق		-1	-3	-5	-7	-9

يتناقص الفرق 2− من منزلة إلى أخرى نمطيًّا

(e) قد تختلف الإجابات. مثلاً: إذا كان الفرق بين قيم y المناظرة لقيم x ثابتًا، فعندئذ، النموذج الخطي سيكون أفضل أما إذا كان الفرق تزايديًّا أو تناقصيًّا في نمط منتظم، فإن النموذج التربيعي ربما يكون هو الأفضل.

(12) $y = 0.1x^2$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) المحور الصادي هو محور تماثل ∴ الدالة زوجية.

(2) نقطة الأصل هي نقطة تماثل ∴ الدالة فردية.

(3) ليس لها نقطة تماثل ولا محور تماثل ∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية.

(4) الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(5) فردية.

(6) ليست فردية وليست زوجية.

(7) زوجية. **(8)** زوجية. **(9)** ليست فردية وليست زوجية.

(10) $y = \sqrt[3]{3x}$ **(11)** $y = \left(\frac{x}{2}\right)^4 ; \ x \geq 0$ **(12)** $y = \pm\sqrt[4]{3x}$

(13) $y = (3x)^3$ **(14)** $y = x^3 + 1$ **(15)** $y = \pm\sqrt[4]{x+3} - 2$

(16) **(a)** $4\,096 \text{ g} \approx 4.1 \text{ kg}$

(b) $p = 5\sqrt[3]{M}$

(c) 74.1 cm تقريبًا.

(17) تتنوّع الإجابات: مثال: $y = -x^3$

(18) **(a)** $V = 2\pi^2(3R_2)(R_2^2) = 6\pi^2 R_2^3$ **(b)** 121.3 cm^3

(19) الجذر التربيعي لعدد سالب ليس عددًا حقيقيًا، في حين أن الجذر التكعيبي لعدد سالب هو عدد حقيقي.

(20) **(a)** الرسم البياني مفتوح إلى أعلى، المحور الصادي محور التماثل، زوجية.

(b) الرسم البياني مفتوح إلى أسفل، المحور الصادي محور التماثل، زوجية.

(c) الرسم البياني ممتد إلى الربعين الأول والثالث، فردية.

(d) الرسم البياني ممتد إلى الربعين الثاني والرابع، فردية.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (b) **(5)** (a)

(6) (b) **(7)** (a) **(8)** (c) **(9)** (d) **(10)** (b)

(11) (a) **(12)** (d)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $-x^2 + 16$ (تربيعية، ثنائية الحدّ)

(2) $16x^2 - x - 5$ (تربيعية، ثلاثية الحدود)

(3) $2x^3 + 9x^2 + 21x + 27$ (تكعيبية، رباعية الحدود)

(4) $80x^3 - 109x^2 - 68x$ (تكعيبية، ثلاثية الحدود)

(5) $\frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}x$ (من الدرجة الخامسة، ثنائية الحد)

(6) $30x^3 - 10x^2$ (تكعيبية، ثنائية الحدّ)

(7) $x^4 + 2x^2 + 1$ (من الدرجة الرابعة، ثلاثية الحدود)

(8) $8c^3 - 26c + 12$ (تكعيبية، ثلاثية الحدود)

(9) $w^4 - 4w^3 + 6w^2 - 4w + 1$ (من الدرجة الرابعة، خماسية الحدود)

(10) **(a)** $v = 10\pi R^2$

(b) $\frac{2}{3}\pi R^3$

(c) $\frac{2}{3}\pi R^3 + 10\pi R^2$

(11) $(\swarrow, \nearrow)$

(12) $(\swarrow, \searrow)$

(13) $(\nwarrow, \nearrow)$

(14) $(\swarrow, \nearrow)$

(15) $(\nwarrow, \searrow)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (b)

(5) (c) **(6)** (c) **(7)** (b) **(8)** (d)

(9) (c) **(10)** (b) **(11)** (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $y = x^3 + 12x^2 + 47x + 60$ (تكعيبية)

(2) $y = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ (تكعيبية)

(3) $y = x^3 - x$ (تكعيبية)

(4) 2 كتلة x^3 ، 15 كتلة x^2 ، 31 كتلة x ، 12 كتلة الوحدة.

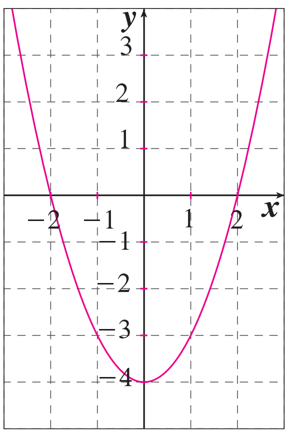
(5) $12x^3 - 27x$

(6) $1, -2$

(7) -3 (مكرّر ثلاث مرات)

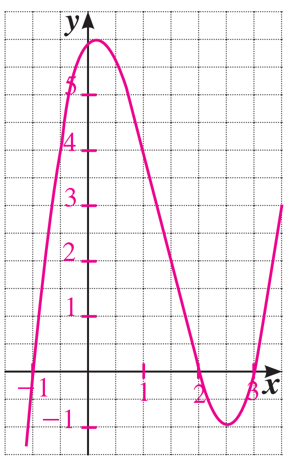
(8) $+2$ (مكرّر مرتين)، -9، صفر

(9)



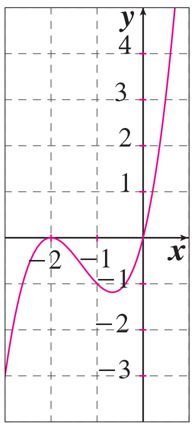
$2, -2$

(10)



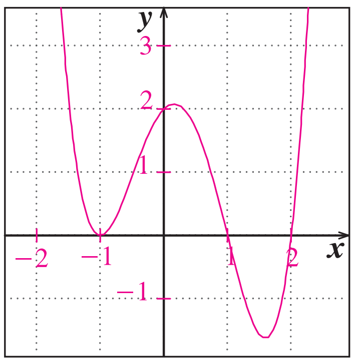
$-1, 2, 3$

(11)



0, −2 (مكرر مرتين)

(12)



−1 (مكرر مرتين), 1, 2

(13) قد تختلف الإجابات. مثلًا: اكتب كثيرة الحدود في الصورة العامة، عندئذ يكون الحد الثابت هو قيمة الجزء المقطوع من محور الصادات.

(14) **(a)** $A = -x^3 + 2x^2 + 4x$

(b) $6\frac{7}{8}$

(15) قد تختلف الإجابات. مثلًا: $y = x(x-1)(x+2)^2$

(16) **(a)** $2x^3 + 15x^2 + 31x + 12$ ، $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$

(b) $8x^2 + 24x + 10$

(17) قد تختلف الإجابات. مثلًا: $y = x^2 - 1$

(18) قد تختلف الإجابات. مثلًا: $y = x^3 - 3x^2 + 2x$

(19) قد تختلف الإجابات. مثلًا: $y = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

(20) قد تختلف الإجابات. مثلًا: $y = 4x^4 - 16x^3 + 15x^2 + 4x - 4$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (a) (3) (a) (4) (a) (5) (a)

(6) (d) (7) (b) (8) (a) (9) (d) (10) (c)

(11) (d) (12) (b) (13) (c)

قسمة كثيرات الحدود تمرَّنْ 4–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $x - 8$

(2) $x^2 + 4x + 3,\ 5$ الباقي

(3) $x^2 + 4x + 3$

(4) $3x^2 - 7x + 2$

(5) كلا

(6) نعم

(7) $x^2 + 4x + 3$

(8) $-2x^2 + 9x - 19,\ 40$ الباقي

(9) $2x^3 + 5x - 15$

(10) $x^2 + 2x + 5$

(11) $2x^2 + 10x + 20,\ 51$ الباقي

(12) $y = (x+1)(x+3)(x-2)$

(13) $y = (x+3)(x-4)(x-3)$

(14) إجابة ممكنة. الطول: $x + 3$، العمق: $x - 2$، الارتفاع: x

(15) 18 **(16)** 0 **(17)** 10 **(18)** 0

(19) **(a)** $f(a) = 0$, $(x - a)$ عامل من عوامل $f(x)$

(b) من نظرية العامل، بما أن $y = x^2 + 1$ ليست لها أصفار حقيقية فلذلك $x^2 + 1$ لسيت لها عوامل خطية باستخدام الأعداد الحقيقية.

(c) $f(-1) = 0 \quad \therefore \quad (x+1)$ هو عامل وليس $x - 1$ حيث $f(1) = -2 \neq 0 \therefore$ يوجد باقي وهو $-2 \therefore (x-1)$ ليس عاملًا

(20) $x^2 + 4x + 5$

(21) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(22) $x^3 - x^2 + 1$

(23) $x + 1$

(24) $x^2 + x + 1$

(25) $x^3 + x^2 + x + 1$

(26) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(27) $x^2 - x + 1$

(28) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(29) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(30) $x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (a)
(5) (b)	(6) (b)	(7) (d)	(8) (a)
(9) (b)	(10) (c)	(11) (d)	

حل معادلات كثيرات الحدود

تمرَّنْ 5–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $0, 8$

(2) $0, 3, -1$

(3) $0,\ 2\frac{1}{2}$ (مكرر)

(4) $0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}$

(5) 0 (مكرر مرتين) , $3, -\frac{1}{2}$

(6) 0 (مكرر ثلاث مرات) , -9

(7) $3-\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3},\ 0$

(8) $5+2\sqrt{3},\ 5-2\sqrt{3},\ 0$

(9) $0,\ 4,\ -\frac{3}{2}$

(10) $1,\ -1,\ 2$

(11) $-2,\ 2,\ -3$

(12) $1,\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(13) -1 (مكرر مرتين), $-2, 2$

(14) $-2, 1$ (مكرر مرتين)

(15) $3, -2$ (مكرر مرتين)

(16) $1, 2, -3$

(17) $2, 1, -2$ (مكرر مرتين)

(18) تحقق من عمل الطلاب

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (b)
(5) (b)	(6) (a)	(7) (d)	(8) (c)
(9) (b)	(10) (c)	(11) (d)	

اختبار الوحدة الثالثة

(1) $y = \pm\sqrt[4]{2x}\ ,\ x \geqslant 0$

(2) $y = \sqrt[3]{x} - 1$

(3) $y = \pm\sqrt{x+3} - 1\ ,\ x \geqslant -3$

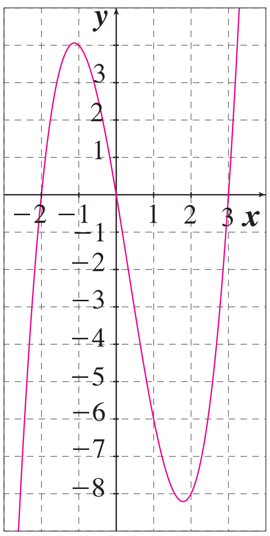
(4) $y = x^2 - 5\ ,\ x \geq -5$

(5) $f(x) = -8x^4 + 3x^2 + 9$, من الدرجة الرابعة، ثلاثية

(6) $f(x) = 8x^2 + 8x$, تربيعية، ثنائية

(7) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$, تكعيبية، ثلاثية

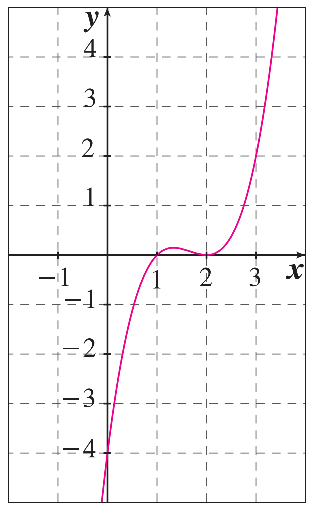
(8)



$-2, 0, 3$

$(\swarrow, \nearrow)$

(9)



$1, 2$

$(\swarrow, \nearrow)$

(10) $3,\ 1,\ -4$

(11) $-2,\ \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

(12) $2,\ -1,\ 1$

(13) $1,\ \approx 1.2$

(14) $x^3 - 2x^2 - 8x$

(15) $x^3 - 3x - 2$

(16) $x^2 + 4x - 12$

(17) $x^2 + 5x - 15,\ 24$ الباقي

(18) $x^2 + 4x + 13,\ 25$ الباقي

(19) $x^3 - x^2 - 4x + 8,\ 4$ الباقي

(20) $\dfrac{-64}{81}$

(21) 0

تمارين إثرائية

(1) $g\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ (m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^3+11\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)-4=0,\ m=-7$

(2) (a) $(x-1)^2(x+3)(2x-1)=0$, $\{1$ (مكرر مرتين) , $-3, \frac{1}{2}\}$

(b) $(x-1)(2x+3)(2x^2-x+3)$, $\left\{1, \frac{-3}{2}\right\}$

(3) باستخدام القسمة التركيبية وقسمة $f(x)$ على $(x+1)$ مرتين متتاليتين نحصل على الباقي $(-a+6)$ $-a+6=0,\ a=6$

(4) $\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(x^2+1)}=\frac{x-1}{x^2+1}$ $(x\neq 2\ ,\ x\neq -3)$

(5) (a) $g(x)=(x-1)(x-2)(4x^2+x-7)$

(b) $\{1, 2, 1.2, -1.45\}$

(6) (a) $\begin{cases}2a+b=1\\5a+3b=4\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$

(b) $f(x)=x(x-1)(x-2)$

(7) $f(x)=g(x+5)(2x-1),\ g=1,\ f(x)=(x+5)(2x-1)$

(8) (a) $x=-2$

(b) $(x+2)(x^2-2x+4)$

(9) (a) $x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2$

(b) $a=3,\ b=-1,\ f(x)=(x^2+3x-1)^2$

(10) $y=x^3-2x^2$

$y(17)=4335$

(11) $V\approx 2.5\times 10^8\ \text{cm}^3$

(12) لنفرض أن الطول $x=$ ، $V=x(x-1)(x-2),\ x=5\ \text{m}$

(13) $V=(120+x)(100+x)(90+x)$، حوالي $26.5\ \text{cm}$

(14) $(n-1)(n)(n+1)=210$، الأعداد هي: $5, 6, 7$

(15) $x(x+3)(x+5)=70$، الأبعاد هي: $2, 5, 7$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) نموًّا أسيًّا، 63%

(2) نموًّا أسيًّا، 30%

(3) تضاؤلًا أسيًّا، 35%

(4) تضاؤلًا أسيًّا، 87.5%

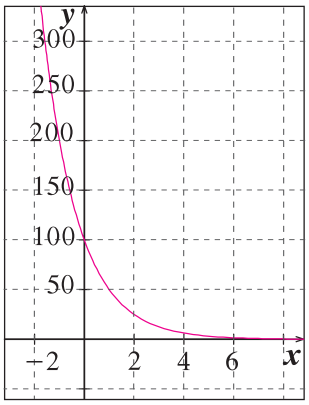
(5) نموًّا أسيًّا، 500%

(6) **(a)** $y = 26\,518\,000(1.014)^x$, $y = 16\,271\,000(1.003)^x$

$y = 16\,110\,000(1.02)^x$, $y = 15\,525\,000(1.007)^x$

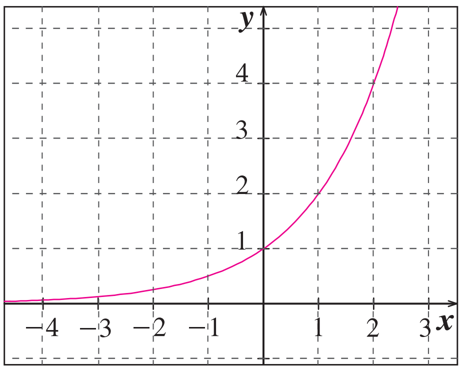
(b) 30 473 000, 16 766 000, 19 638 000, 16 647 000. نعم

(7)



تضاؤلًا، العامل 0.5

(8)



نموًّا، العامل 2

(9) تحقق من عمل الطلّاب.

(10) حوالى 1843 دينارًا.

(11) $676,\ y = 250(1.22)^x$

(12) $50,\ y = 35(1.075)^x$

(13) $977.2,\ y = 1750(0.89)^x$

(14) $108,\ y = 115(0.9875)^x$

(15) السيارة رقم (1).

المجموعة B تمارين موضوعية

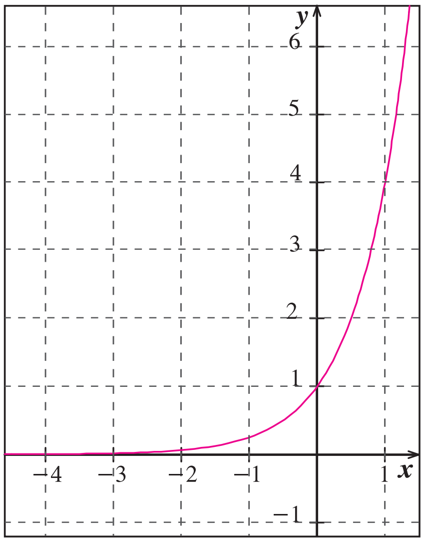
(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (a) **(5)** (d)

(6) (c) **(7)** (c) **(8)** (b) **(9)** (d) **(10)** (a)

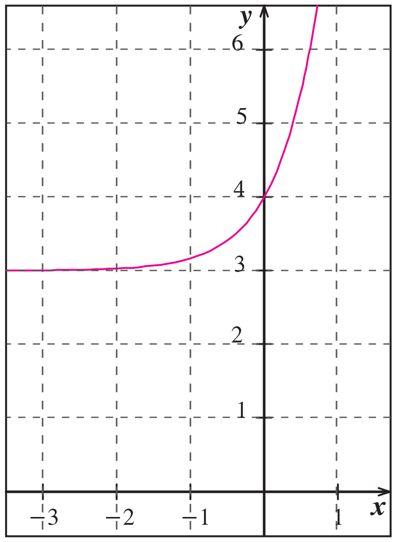
(11) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

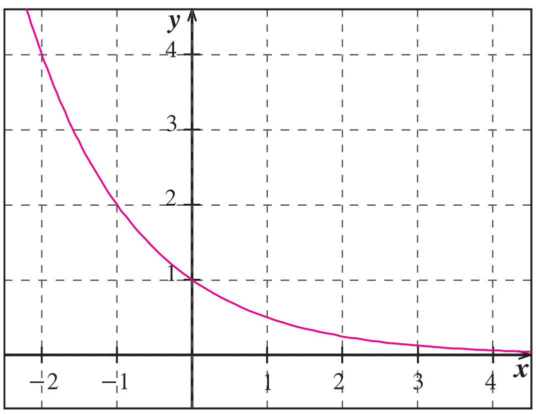
(1)



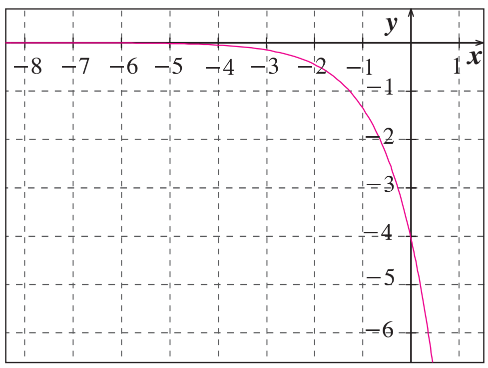
(2)



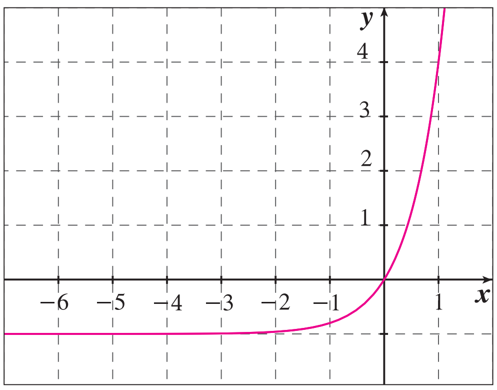
(3)



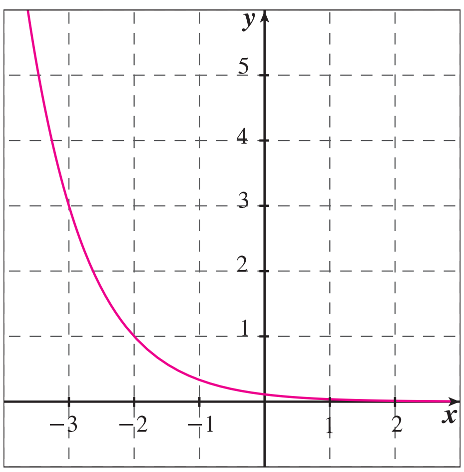
(4)



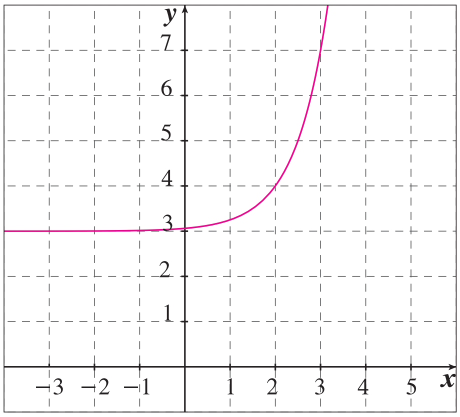
(5)



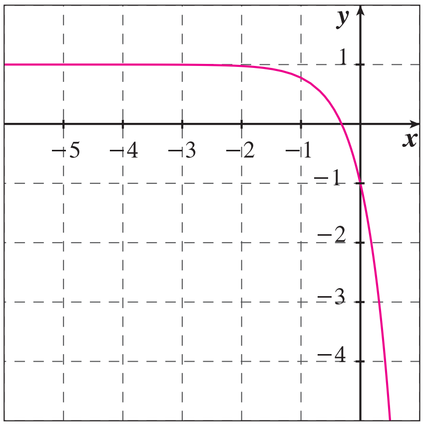
(6)



(7)



(8)



(9) 20.0855 **(10)** 2 017.1440 **(11)** 2.0609

(12) 0.0099 **(13)** 15.1543 **(14)** $a = 0$

(15) (a)

الكمية الأولية من المادة (P)	السنوات (t)	الكمية المتبقية من المادة (A)
10 000	5	9 995
7 500	5	7 496.25
6 000	5	5 997
5 000	5	4 997.5
2 500	5	2 498.75
2 000	5	1 999

(b) تقترب قيم A من قيم P.

(16) (a) 5.73% **(b)** 0.00267%

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (a) **(3)** (a) **(4)** (a) **(5)** (a)

(6) (b) **(7)** (c) **(8)** (b) **(9)** (b) **(10)** (a)

(11) (d) **(12)** (b)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\log_4 16 = 2$ (2) $\log_7 343 = 3$ (3) $\log_{\frac{1}{2}}(4) = -2$ (4) $\log_8\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{3}$

(5) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{27}\right) = 3$ (6) $\log 0.01 = -2$ (7) $\log_6(6\sqrt{6}) = \frac{3}{2}$ (8) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$

(9) $2^7 = 128$ (10) $4^3 = 64$ (11) $10^2 = 100$ (12) $3^{-2} = \frac{1}{9}$

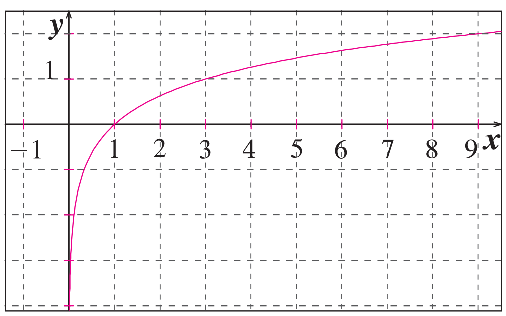
(13) $10^{-4} = 0.0001$ (14) $3^{-5} = \frac{1}{243}$ (15) 2 (16) 3

(17) 1 (18) 5 (19) 1 (20) -2

(21) $(-1, \infty)$ (22) $(0, \infty)$ (23) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

(24) 1.9 (25) 7.94×10^{-4}

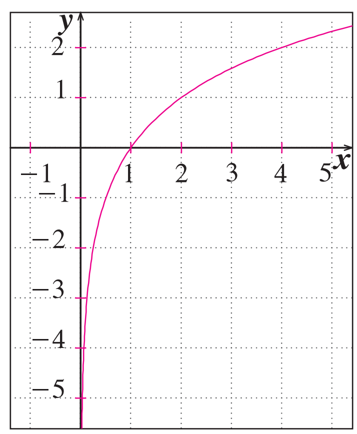
(26)



المجال: $x > 0$

المدى: $\mathbb{R}$

(27)



المجال: $x > 1$

المدى: $\mathbb{R}$

(28) إذا كان $y = \log_1(x)$، إذًا $1^y = x$، $x = 1$ مهما كانت y.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (a) (4) (b) (5) (a)

(6) (c) (7) (d) (8) (a) (9) (c) (10) (a)

(11) (d) (12) (a) (13) (c) (14) (c) (15) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\log 14$
(2) $\log_4 \frac{\sqrt{y}}{x}$
(3) $\log \frac{M^4}{N}$
(4) $\log(x\,y\,z)$
(5) $\log\left(\frac{ab}{6c}\right)$
(6) $\log(ab^3)$
(7) $\log_7 \frac{\sqrt{xy}}{a^3}$
(8) $\log \frac{r^7 n}{x}$
(9) $\log_5 y - \log_5 x$
(10) $3\log x + y^5$
(11) $\log_3 7 + 2\log_3(2x-3)$
(12) $2\log a + 3\log b - 4\log c$
(13) $\log 3 + 4\log M - 2\log N$
(14) $\log_4 5 + \frac{1}{2}\log_4 x$
(15) $3\log 2 + 3\log(x+1)$
(16) $\frac{1}{2}(\log 2 + \log x - \log y)$
(17) $\begin{cases} 6\log 2 \\ \log 4 + \log 16 \\ 2\log 8 \\ 3\log 4 \end{cases}$

(18) قد تختلف الإجابات. مثلًا: $\log(5\times 2) = \log 5 + \log 2$، خاصية الضرب.

(19) -2 (20) -2 (21) 1 (22) 2 (23) 1 (24) 1.301
(25) 1.204 (26) 0.097 (27) 2.097 (28) -1.556

(29)

نوع الصوت	الشدة W/m^2	مستوى شدة الصوت (ديسيبل dB)
صوت عالٍ	1	120
صوت آلة ثقب	10^{-2}	100
صوت شارع مزدحم	10^{-5}	70
صوت محادثة	10^{-6}	60
صوت همس	10^{-10}	20
حفيف أوراق الأشجار	10^{-11}	10
صوت بالكاد مسموع	10^{-12}	0

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (a) (3) (a) (4) (a) (5) (b)
(6) (a) (7) (c) (8) (b) (9) (a) (10) (b)
(11) (b) (12) (c) (13) (d) (14) (c) (15) (d)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $0.953;\ 9^{2\times0.953} = 9^{1.906} \approx 66$

(2) $3.206; 12^{3.206-2} = 12^{1.206} \approx 20$

(3) $3.465\ ;\ 5 - 3^{3.465} = 5 - 45 = -40$

(4) $0.272\ ;\ 25^{1.544} = 144$

(5) $3\sqrt[3]{3};\ 3\times(3\sqrt[3]{3})^{\frac{3}{2}} = 3\times(3^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} = 27$

(6) $\sqrt[5]{3^3};\ 2+8(3^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = 2+8\times3 = 26$

(7) $17\sqrt[3]{17};\ (17\sqrt[3]{17})^{\frac{2}{7}} - 12 = (17^{\frac{7}{2}})^{\frac{2}{7}} - 12 = 17-12 = 5$

(8) $18\sqrt[3]{18};\ -3+2(18\sqrt[3]{18})^{\frac{3}{4}} = -3+2(18^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}} = -3+36 = 33$

(9) 2.807　**(10)** 3.183　**(11)** -0.8097

(12) 3.874　**(13)** 0.0792

(14) **(a)** 18.966

(b) 18.966

(c) قد تختلف الإجابات. مثلًا: الأساس 10، حيث إنك لا تحتاج إلى استخدام قاعدة تغيير الأساس.

(15) $\frac{1}{60}$　**(16)** 3×10^8　**(17)** $\frac{7}{3}$

(18) 4　**(19)** 4　**(20)** 4

(21) **(a)** 56

(b) 47 سنة

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)　**(2)** (a)　**(3)** (a)　**(4)** (b)　**(5)** (b)

(6) (b)　**(7)** (c)　**(8)** (c)　**(9)** (a)　**(10)** (c)

(11) (c)　**(12)** (a)　**(13)** (d)　**(14)** (c)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $ln\ 125$ (2) $ln\ 4$ (3) $ln\frac{1}{81}$ (4) $ln(m^5 \cdot n^3)$

(5) $ln\ 1 = 0$ (6) $ln\, e^7$ (7) $ln\frac{a\sqrt{c}}{b^2}$ (8) $ln\frac{\sqrt[3]{xy}}{c^4}$

(9) 20.92 (10) 24.13 (11) 7.79 km/s (12) ≈ 10.44

(13) $ln\ 2$ (14) $ln\ 30 - 1$ (15) $9 \times ln\ 14$ (16) $3\ ln\ 2 - 2$

(17) $\frac{2 + ln\,6}{3}$ (18) 2 (19) $\frac{e^6}{3}$ (20) $\frac{1+e^{36}}{4}$

(21) $1 \pm \sqrt{e^3}$ (22) $1 + 2e^4$ (23) $= \pm\sqrt{\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}}$ (24) $3^3 \times e^3$

(25) $\frac{9e^6}{4}$ (26) $\pm e^{2.45}$ (27) 1 (28) $\frac{3+e^6}{5}$

(29) كلّا، لأن $\log_2 10$ تكتب $\frac{ln\ 10}{ln\ 2}$ ولا يمكن التحويل إلى لوغاريتم واحد.

(30) 294 يومًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

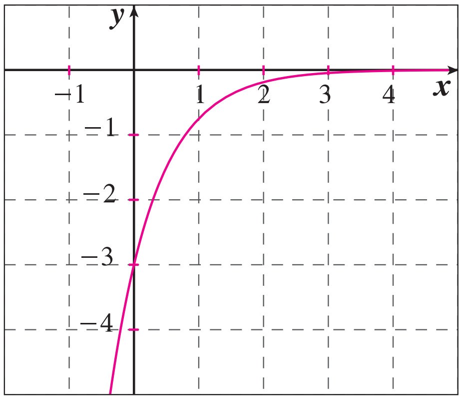
(1) (a) (2) (b) (3) (a) (4) (b) (5) (a)

(6) (c) (7) (a) (8) (c) (9) (b) (10) (a)

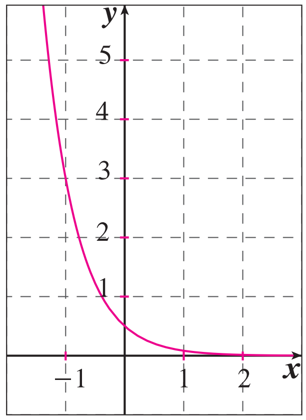
(11) (a) (12) (b) (13) (c) (14) (b)

اختبار الوحدة الرابعة

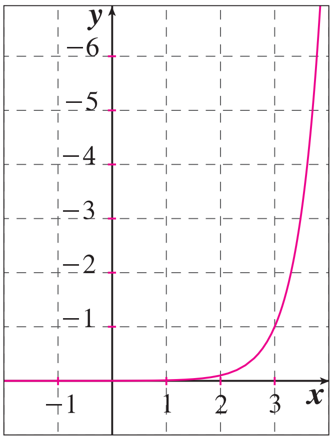
(1)



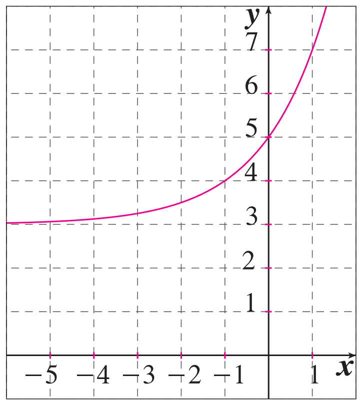
(2)



(3)



(4)

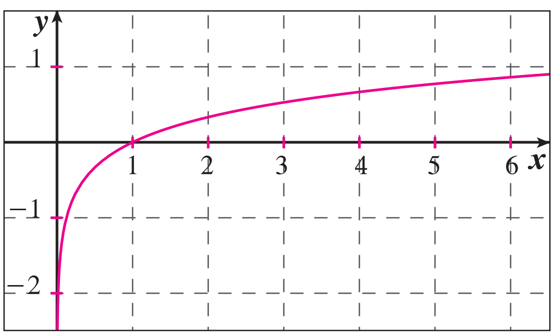


(5) راجع عمل الطلاب.

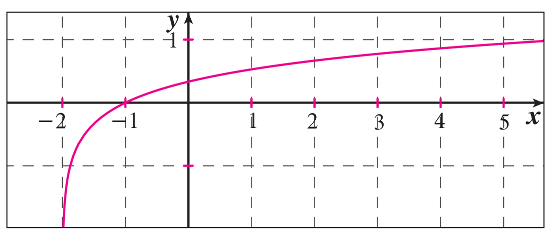
(6) $y = \frac{1}{3}(3)^x$ **(7)** $y = 4(4)^x$ **(8)** $y = 3(2)^x$

(9) حوالى 1 800 مرة.

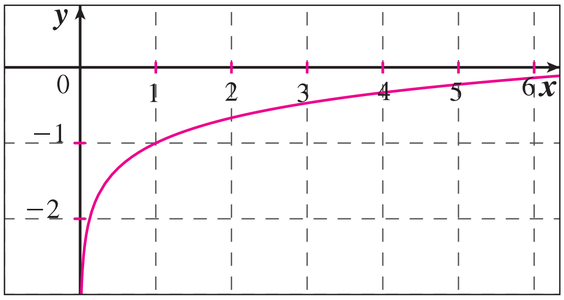
(10)



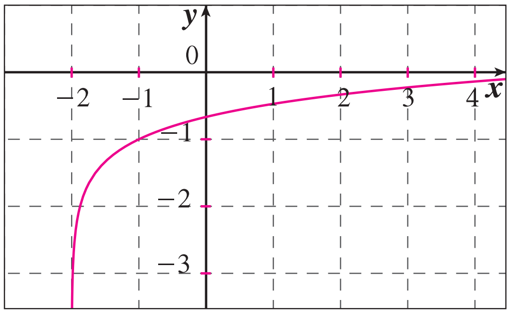
(a)



(b)



(c)



(11) $2\log_4 r + \log_4 n$ **(12)** $2\log_2(x+1)$ **(13)** $\log_7 a - \log_7 b$

(14) $\log 3 + 3\log x + 2\log y$ **(15)** 1 **(16)** 11

(17) -1 **(18)** 3

(19) تتنوّع الإجابات.

(20) 350.467 **(21)** 4 **(22)** 250 **(23)** 0.01

(24) $\sqrt{5}$ **(25)** $\frac{10}{9}$ **(26)** 4 **(27)** $1+\sqrt{1+e}$

(28) $\sqrt{1+e^4}$ **(29)** $\frac{1+\sqrt{8e^7+1}}{4}$ **(30)** $e\sqrt[3]{2e}$

(31) 42 140 دينارًا.

(32) **(a)** حوالى 16.5 مليونًا.

(b) 3.9%

(c) حوالى عام 1997

(33) **(a)** $y = (5.63)(1.02)^x$ (بالبليون)

(b) يتضاعف.

(c) يتزايد بأقل من النصف.

تمارين إثرائية

(1) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

$(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$ مجموعة الحل: $\{0,\ ln\ 3\}$

(2) $x = ln\left(\frac{4}{3}\right)$, مجموعة الحل $= \left\{ln\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$

(3) شرط: $x > 2$

$ln(3x-1)(x-1) = ln(x-2)$

$(3x-1)(x-1) = (x-2)$

$\therefore \Delta < 0$ لا يوجد حل للمعادلة.

(4) $ln(a^{ln\,b}) = ln\,b \times ln\,a$, $ln(b^{ln\,a}) = ln\,a \times ln\,b$، إذًا فهي صحيحة.

(5) $\frac{4}{1+3e^{-2x}} = \frac{4}{1+3\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{4}{\frac{e^{2x}+3}{e^{2x}}} = \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+3}$

(6) $e^x + 2e^{-x} = 3$ ،$e^x + \frac{2}{e^x} = 3$ ،$e^{2x} + 2 = 3e^x$

$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ (معادلة من الدرجة الثانية في e^x)

$e^x = 1$ أو $e^x = 2$

$x = 0$ أو $x = ln\,2$، إذًا مجموعة الحل: $\{0, ln\,2\}$

(7) نحل المعادلة: $2(ln\ x)^2 - 5ln\ x - 3 = 0$

$e^x = 3$ أو $ln\ x = -\frac{1}{2}$

$x = e^3$ أو $x = e^{-\frac{1}{2}}$، إذًا مجموعة الحل: $\{e^{\frac{-1}{2}}, e^3\}$

(8) 15%

(9) $\log_b \frac{M}{N} = \log_b\left(\frac{b^{\log_b M}}{b^{\log_b N}}\right) = \log_b b^{\log_b M - \log_b N} = \log_b M - \log_b N$

$\log_b M^x = \log_b (b^{\log_b M})^x = \log_b b^{x\log_b M} = x\log_b M$

(10) (a) $x = \frac{\log_b}{\log_a}$ (b) $x = \log_a b$ (c) $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

(11) 1.207 mm

(12) (a) 1995

(b) 1.3 سنة

(c) $x = 1.825\,ln\,f - 0.4928$

(d) إجابة ممكنة: في (a) عوض عن f بـ 13، وأوجد قيمة x، $x = 4.2$

في (b) عوض عن f بـ 2.62، وأوجد قيمة x، $x = 1.3$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $<\overrightarrow{AB}> = <5, -5>$

$<\overrightarrow{BC}> = <1, 6>$

$<\overrightarrow{CA}> = <-6, -1>$

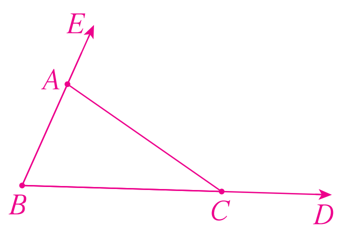
(b) $E(6, 2)$

(2) $<\overrightarrow{EF}> = <5, -3>$

$<\overrightarrow{GF}> = <-2, 1>$

$<\overrightarrow{EG}> = <7, -4>$

(3) (a)



(b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$, $\theta = 33^{\circ}\ 41'\ 24.2''$

$\|\vec{v}\| = 2\sqrt{5}$, $\theta = 116^{\circ}\ 33'\ 54.18''$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{13}$, $\theta = 213^{\circ}\ 41'\ 24.42''$

$\|\vec{t}\| = \sqrt{13}$, $\theta = 303^{\circ}\ 41'\ 24.24''$

(4) $x = \pm\frac{4}{5}$

(5) $<\overrightarrow{AB}> = <2, -3>, <\overrightarrow{CD}> = <2, -3> \ \therefore\ <\overrightarrow{AB}> = <\overrightarrow{CD}>$

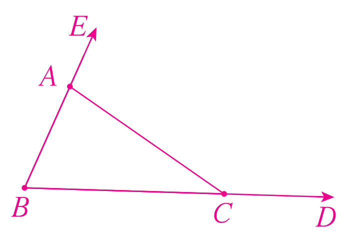
(6) $x = 2$, $y = -1$

(7) $<\overrightarrow{AB}> = <-7\ ,\ 4>\ ,\ <\overrightarrow{CD}> = <7\ ,\ -4>\ \therefore <\overrightarrow{CD}> = -<\overrightarrow{AB}>$

(8) $<\overrightarrow{AB}> = 3<\overrightarrow{AC}>$

$\therefore$ على استقامة واحدة A, B, C

(9)



(10) (a) $D\left(0\ ,\ \frac{13}{2}\right)$ **(b)** $E(9\ ,\ 5)$ **(c)** $<\overrightarrow{DE}> = \frac{-3}{2}<\overrightarrow{BC}>$

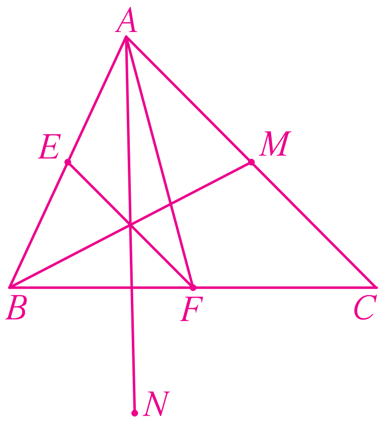
المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)
(5) (c)	**(6)** (d)	**(7)** (c)	**(8)** (a)

جمع المتجهات وطرحها — تمرَّنْ 2–5

المجموعة A تمارين مقالية

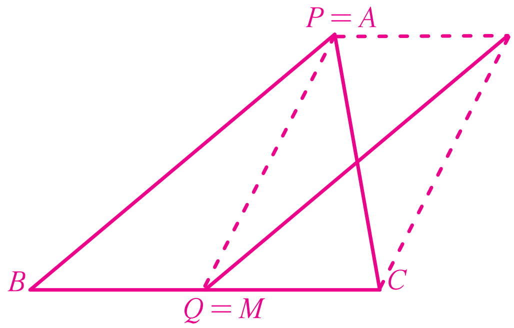
(1) (a) – (b)



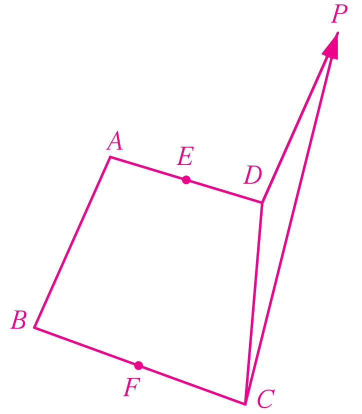
(c) $<\overrightarrow{MN}> = <\overrightarrow{MA}> + <\overrightarrow{AN}> = <\overrightarrow{MA}> + <\overrightarrow{AE}> + <\overrightarrow{AF}>$

$= <\overrightarrow{MF}> + <\overrightarrow{AE}> = 2 <\overrightarrow{AE}> = <\overrightarrow{AB}>$

(2)



(3) (a)



(b) $<\overrightarrow{CP}> = <\overrightarrow{CD}> + <\overrightarrow{BA}> = <\overrightarrow{CE}> + <\overrightarrow{ED}> + <\overrightarrow{BE}> + <\overrightarrow{EA}>$

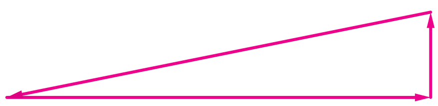
$= <\overrightarrow{CE}> + <\overrightarrow{BE}> + \overrightarrow{O} = <\overrightarrow{CE}> + <\overrightarrow{BE}>$

(c) $<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{DC}> = <\overrightarrow{AE}> + <\overrightarrow{EF}> + <\overrightarrow{FB}> + <\overrightarrow{DE}> + <\overrightarrow{EF}> + <\overrightarrow{FC}>$

$= <\overrightarrow{EF}> + <\overrightarrow{EF}> = 2 <\overrightarrow{EF}>$

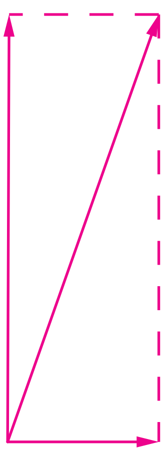
(4) (a) $2 <\overrightarrow{BC}>$ **(b)** $3 <\overrightarrow{CD}>$

(5) (a)



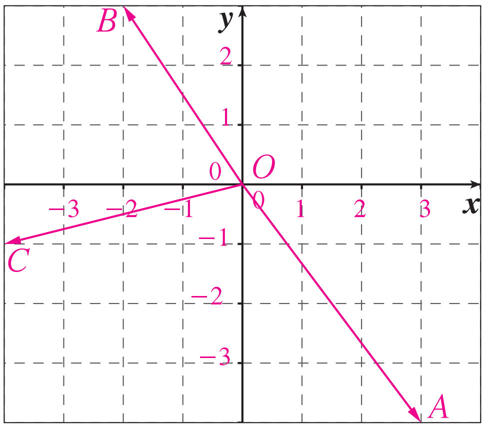
(b) حوالى 5 ساعات.

(6) (a)



(b) متوسط السرعة: $\sqrt{35^2 + 12^2} = 37\ \text{km/h}$

(7)



المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (a)
(6) (c)	**(7)** (c)	**(8)** (c)	**(9)** (a)	**(10)** (b)
(11) (c)	**(12)** (a)	**(13)** (c)		

الضرب الداخلي تمرَّنْ 3–5

المجموعة A تمارين مقالية

(1) **(a)** 6 **(b)** 15

(2) **(a)** -8 **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** 48 **(e)** 96

(3) **(a)** 217 **(b)** -188

(4) **(a)** $x = 6$ **(b)** $x = \pm 3$

(5) 120°

(6) **(a)** $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 4\sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{10}$

(b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ∴ المثلث قائم الزاوية A ,

(7) $3\sqrt{3}$ **(8)** -5 **(9)** $-4\sqrt{3}$ **(10)** 0

(11) $-4\sqrt{3}$ **(12)** 4 **(13)** 16 **(14)** 16

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)	**(5)** (b)
(6) (a)	**(7)** (a)	**(8)** (b)	**(9)** (b)	**(10)** (a)
(11) (b)	**(12)** (d)	**(13)** (a)	**(14)** (c)	

اختبار الوحدة الخامسة

(1) **(a)** $< 3 , -2 >$ **(b)** $M(1 , -7)$

(2) $\| \vec{u} \| = 2\sqrt{2}$

$\theta = 315^{\circ}$

(3) $y = \pm \frac{1}{3}$

(4) **(a)** $< \overrightarrow{AN} > = < \overrightarrow{AD} > + < \overrightarrow{DC} > + < \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{AB} >$

(b) $< \overrightarrow{AN} > = < \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{AB} >, < \overrightarrow{AN} > - < \overrightarrow{AC} > = < \overrightarrow{AB} >$

$< \overrightarrow{CN} > = < \overrightarrow{AB} >$

$\therefore$ $ABNC$ متوازي الأضلاع.

(5) **(a)** $< \overrightarrow{AM} > = < \overrightarrow{NM} > - < \overrightarrow{NA} >$

(b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NA}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{AB} \|^2$

(6) $m(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}) = 30^{\circ}$

(7) **(a)** لا يوجد **(b)** $x = 2$

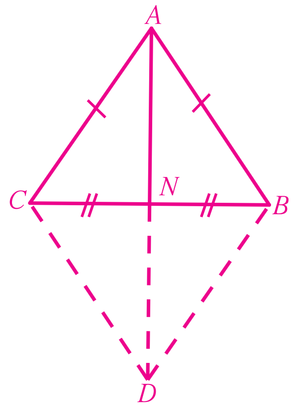
(8) **(a)** 0 **(b)** 5 **(c)** 20 **(d)** 0

(9) $D\left(0 , -\frac{3}{2}\right)$

(10) **(a)** $< \overrightarrow{CB} > = - < \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{AB} > = -\vec{b} + \vec{a}$

$\| \vec{a} - \vec{b} \| = \| \overrightarrow{CB} \| = 4$

(b)



(c) معين.

(d) $\|\vec{a}+\vec{b}\| = 2\|\overrightarrow{AM}\|$

$= 2\|\vec{a}+\vec{b}\| = 4\sqrt{3}$

(11) **(a)** $<\overrightarrow{ON}> = <\overrightarrow{OD}> + <\overrightarrow{DN}> = <\overrightarrow{BO}> + <\overrightarrow{OC}> = <\overrightarrow{BC}>$

(b) $<\overrightarrow{ON}> = <\overrightarrow{OC}> + <\overrightarrow{OD}> = <\overrightarrow{BC}>$

(c) $<\overrightarrow{OM}> = -\frac{1}{2} <\overrightarrow{BC}> = -\frac{1}{2} <\overrightarrow{ON}>$

$\therefore$ OMN على استقامة واحدة.

(12) $\cos\theta = \dfrac{4\times(-2)+6(-2)}{\sqrt{40}\times\sqrt{20}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = 135°$

(13) $<\overrightarrow{AB}> = <3,1>, <\overrightarrow{BC}> = <2,-6>$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 3\times 2 + 1\times(-6) = 0$

$\therefore$ $<\overrightarrow{AB}>$ و $<\overrightarrow{BC}>$ متعامدان.

$\therefore$ المثلث ABC قائم الزاوية في B.

(14) **(a)** $\vec{B} = <-1, -3>$, $\vec{C} = <-5, 5>$ $\therefore$ $\vec{B} \neq \vec{C}$

(b) $\vec{A}\cdot\vec{B} = (-4)(-1)+(-2)(-3) = 4+6 = 10$

$\vec{A}\cdot\vec{C} = (-4)(-5)+(-2)(5) = 20-10 = 10$

(c) $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{C}$

(15) (c)

تمارين إثرائية

(1) (a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(2-m) + 3 - (2) = 0$

$-2 - 2m = 0$

$m = -1$

(b) $<\overrightarrow{AB}> = <2\ ,\ 3>\ ,\ <\overrightarrow{AC}> = <3\ ,\ -2>$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{13}$

$\therefore$ ABC مثلث متطابق الضلعين في A .

(2) $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{RQ}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$

$= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{DR} \cdot \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{QR}$

$= \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{RQ}$

$= (5-x)(-x) + 5x - x^2$

$= 0$

$\therefore$ $<\overrightarrow{PR}>, <\overrightarrow{CQ}>$ متعامدان.

(3) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) - a^2$

$= MI^2 - a^2$

(4) $-\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{w}$

$\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{w}$

$\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{w}$

$\overrightarrow{B} = \frac{2}{3}\overrightarrow{w}$

$\therefore$ $\overrightarrow{A}\ ,\ \overrightarrow{B}$ لهما الاتجاه نفسه.

(5) فليكن $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ فنحصل على:

$<\overrightarrow{AC}> = <5,2>\ ,\ <\overrightarrow{DE}> = <2.5\ ,\ -2>$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = 12.5 - 4 = 8.5$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{29}\ ,\ \|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{10.25}$

$\cos\theta = \dfrac{8.5}{\sqrt{29}\sqrt{10.25}}$

$\theta \approx 60°27'40.38''$

المجموعة A تمارين مقالية

(1) جمع البيانات – عرض البيانات – وصف البيانات وتحليلها – تفسير النتائج واتخاذ قرارات.

(2) المشاهدة والملاحظة – البريد العادي والإلكتروني – المقابلة الشخصية – الأبحاث التاريخية والأرشيف – مواقع التواصل الاجتماعي – الاستبانة – الهاتف المنزلي أو الجوال – الوثائق والسجلات – قواعد البيانات.

(3) كمية متقطعة (4) كيفية إسمية

(5) (a) كمية مستمرة (b) كيفية إسمية

(c) كمية مستمرة (d) كيفية إسمية

(6) المجتمع المنتهي هو المجتمع الذي عدد وحداته محدود.

المجتمع غير المنتهي هو المجتمع الذي عدد وحداته غير محدود.

(7) (a) علم الإحصاء هو علم أساسي في مجال الرياضيات التطبيقية يهتم بتفسير كمية من البيانات.

(b) المجتمع الإحصائي هو مجموعة كل المفردات قيد الدراسة.

(c) الحصر الشامل هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (a) (3) (b) (4) (b) (5) (b)

(6) (a) (7) (c) (8) (b) (9) (c) (10) (c)

العينات تمرَّنْ 2–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) 0.08 (2) 500

(3) في العينة العشوائية الطبقية مجموعات لا تتقاطع مع بعضها أما في العينة العشوائية البسيطة المفردات متجانسة.

(4) (a) عينة عشوائية طبقية (b) $\frac{60}{240} = 0.25$ (c) نعم

(d) العمال: 80 , 4 , 187 , 191 , 8

أصحاب العمل: 201 , 202 , 217 , 209 , 225

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (b)

(6) (b) (7) (a) (8) (b) (9) (c) (10) (b)

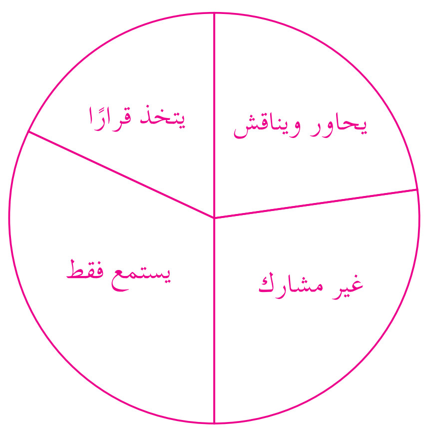
أساليب عرض البيانات تمرَّنْ 3–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a)

المجموع	غير مشارك	يتخذ قرارًا	يستمع فقط	يحاور ويناقش	الفئة
22	6	4	7	5	التكرار
$\frac{22}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{4}{22}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{5}{22}$	التكرار النسبي
100%	$\frac{6}{22} \times 100\%$ $= 27.27\%$	$\frac{4}{22} \times 100\%$ $= 18.18\%$	$\frac{7}{22} \times 100\%$ $= 31.8\%$	$\frac{5}{22} \times 100\%$ $= 22.72\%$	النسبة المئوية للتكرار

(b)



يحاور ويناقش: $\frac{5}{22} \times 360° \simeq 81.82°$

يستمع فقط: $\frac{7}{22} \times 360° \simeq 114.55°$

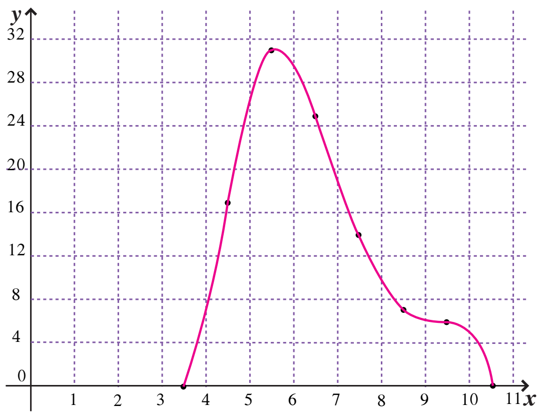
يتخذ قرارًا: $\frac{4}{22} \times 360° \simeq 65.45°$

غير مشارك: $\frac{6}{22} \times 360° \simeq 98.18°$

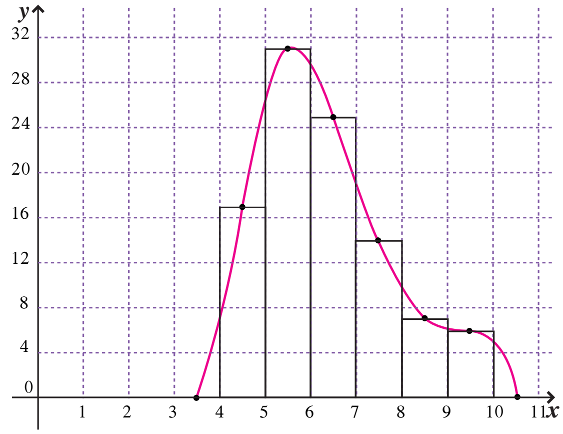
(a) (2)

الفئة	4−	5−	6−	7−	8−	9−	المجموع
التكرار	17	31	25	14	7	6	100
مركز الفئة	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	

(b)



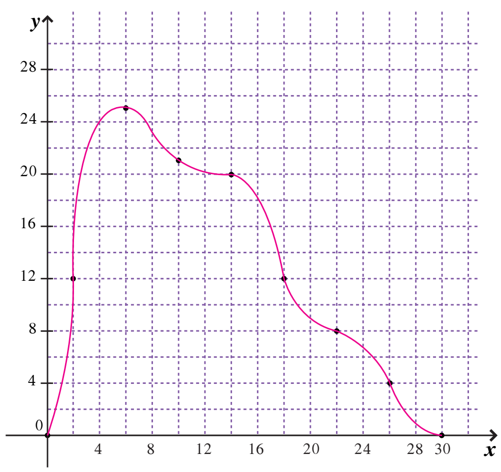
(c)



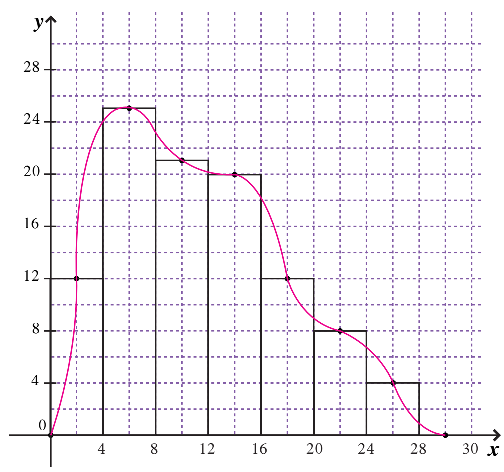
(a) (3)

البعد	0−	4−	8−	12−	16−	20−	24−	المجموع
التكرار	12	25	21	20	12	8	4	102
مركز الفئة	2	6	10	14	18	22	26	

(b)



(c)



المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (b) **(5)** (b)

(6) (d) **(7)** (c) **(8)** (c) **(9)** (b) **(10)** (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\sigma = 0$، لأن البيانات متساوية والمتوسط الحسابي يساوي كلّ من البيانات. إذًا لا يوجد تشتت للبيانات عن المتوسط الحسابي.

(2) (a) $\bar{x} = 27.625$

(b) التباين: $v = 198.11$

$\sigma = 14.075$

(3) (a) $\bar{x} = \frac{34080}{200} = 170.4$

(b) $v = \frac{494}{200} = 2.47$

$\sigma = 1.57$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (c)

(6) (b) (7) (a) (8) (b) (9) (b)

القاعدة التجريبية تمرَّنْ 5–6

المجموعة A تمارين مقالية

(1) هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات.

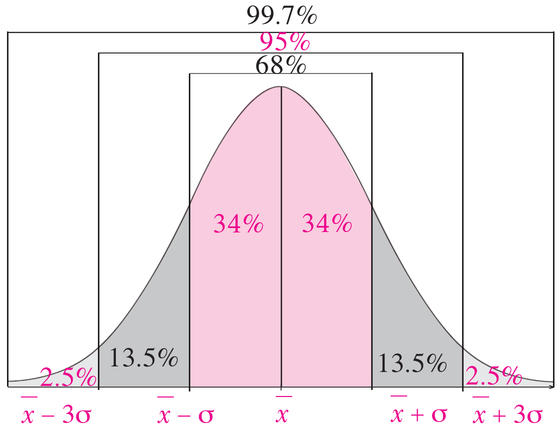
(2) * يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.

* تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

* ينحدر طرفاه تدريجيًّا ويمتدان إلى ما لا نهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.

(3) شكل الناقوس أو الجرس.

(4)



(5) $\bar{x} = 1250$, $\sigma = 225$

(a) حوالى 68% من الأرباح تقع على الفترة $[\bar{x}-\sigma , \bar{x}+\sigma]$

$[1025 , 1475] = [1250 - 225 , 1250 + 225]$

حوالى 95% من الأرباح تقع على الفترة $[\bar{x}-2\sigma , \bar{x}+2\sigma]$

$[800 , 1700] = [1250 - 450 , 1250 + 450]$

حوالى 99.7% من الأرباح تقع على الفترة $[\bar{x}-3\sigma , \bar{x}+3\sigma]$

$[575 , 1925] = [1250 - 675 , 1250 + 675]$

(b) نلاحظ أن المبلغ 2000 يقع خارج الفترة الأخيرة [575 , 1925] التي تناظر 99.7% من الأرباح. لذلك من غير المتوقع أن تصل أرباح الشركة إلى 2 000 دينار.

(6) **(a)** $\bar{x} = 1400$, $\sigma = 200$

حوالى 68% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة $[\bar{x}-\sigma , \bar{x}+\sigma]$

$[1400 - 200 , 1400 + 200] = [1200 , 1600]$

حوالى 95% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة $[\bar{x}-2\sigma , \bar{x}+2\sigma]$

$[1400 - 400 , 1400 + 400] = [1000 , 1800]$

حوالى 99.7% من الأسلاك المعدنية المصنعة تقع على الفترة $[\bar{x}-3\sigma , \bar{x}+3\sigma]$

$[1400 - 600 , 1400 + 600] = [800 , 2000]$

(b) نستنتج أن النسبة المئوية هي: $13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 97.5\%$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (b) **(4)** (a) **(5)** (a)

(6) (a) **(7)** (a) **(8)** (d)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) انحراف، المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري.

(2) القيمة المعيارية = $\frac{15-14}{4}$

القيمة المعيارية = 0.25

(3) (a) المتوسط الحسابي: $\overline{x} = 6$

الانحراف المعياري: $\sigma \approx 0.9$

(b) $\frac{-1}{0.9} \approx -1.11\ ,\ 0\ ,\ \frac{+1}{0.9} \approx 1.11$

(4) $z_1 = \frac{75-70}{5} = 1$

$z_2 = \frac{80-76}{8} = 0.5$

(5) (a) $\overline{x_1} = 15$، القيمة المعيارية: $z_1 = 0$

$\overline{x_2} = 12$ ، $\sigma_2 \approx 2.23$ ، $z_2 = \frac{15-12}{2.23} \approx 1.345$

(b) في مادة الكيمياء.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (a)	(5) (b)
(6) (c)	(7) (d)	(8) (b)		

اختبار الوحدة السادسة

(1) (a) كلا، لأننا لا نستطيع سحب كمية الموجودة في جسم هذا الشخص.

(b) نعم، نستطيع إيجاد أوزان كل طلاب الصف وحساب المتوسط الحسابي.

(2) (a) 875

(b) الفئة A : 375

الفئة B : 375

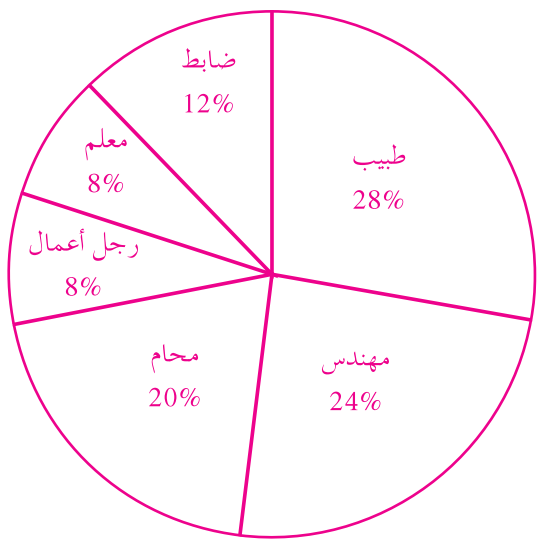
الفئة C : 125

(3) 1250

(4) (a)

المهنة	معلم	ضابط	مهندس	طبيب	محام	رجل أعمال	المجموع
التكرار	2	3	6	7	5	2	25
التكرار النسبي	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{25}{25}$
النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي)	$\frac{2}{25} \times 100\%$ $= 8\%$	$\frac{3}{25} \times 100\%$ $= 12\%$	$\frac{6}{25} \times 100\%$ $= 24\%$	$\frac{7}{25} \times 100\%$ $= 28\%$	$\frac{5}{25} \times 100\%$ $= 20\%$	$\frac{2}{25} \times 100\%$ $= 8\%$	100%

(b)



(5) $\overline{x} = 6$

$v = 4$

$\sigma = 2$

(6) **(a)** $\overline{x} = 850$ ، $\sigma = 175$

حوالى 68% من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{x} - \sigma \, , \, \overline{x} + \sigma]$

$[850 - 175 \, , \, 850 + 175] = [675 \, , \, 1025]$

حوالى 95% من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{x} - 2\sigma \, , \, \overline{x} + 2\sigma]$

$[850 - 350 \, , \, 850 + 350] = [500 \, , \, 1200]$

حوالى 99.7% من الأرباح تقع على الفترة $[\overline{x} - 3\sigma \, , \, \overline{x} + 3\sigma]$

$[850 - 525 \, , \, 850 + 525] = [325 \, , \, 1375]$

(b) نلاحظ أن المبلغ 300 دينار لا يقع ضمن الفترة [325 , 1375] التي تناظر 99.7% لذلك لن تنخفض الأرباح إلى 300.

(c) نلاحظ أن المبلغ 1 400 يقع خارج الفترة [325 , 1375] التي تناظر 99.7% لذلك من غير المتوقع الوصول إلى ربح 1 400 دينار.

(7) القيمة المعيارية في الرياضيات: $z_M = \dfrac{15 - 13}{2.5} = 0.8$

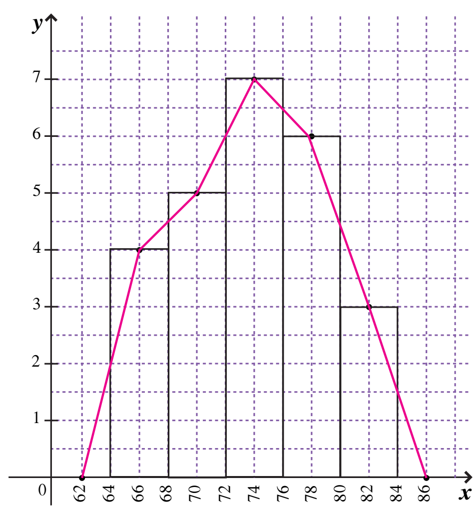
القيمة المعيارية في الفيزياء: $z_p = \dfrac{13 - 11.5}{2.4} = 0.625$

لذلك الدرجة 15 في الرياضيات أفضل من 13 في الفيزياء.

(8) **(a)**

الفئة	64–	68–	72–	76–	80–	المجموع
التكرار	4	5	7	6	3	25
مركز الفئة	66	70	74	78	82	

(b)



تمارين إثرائية

(1) **(a)** لا، لأنّ عدد الحشرات في الكويت لا يمكن تعداده.

(b) نعم، لأنّ عدد العاملين في أحد المصارف يمكن معرفته.

(2) **(a)** موظفين في إحدى الشركات – الموظف – وزن الفرد.

(b) الأبنية في دولة الكويت – المبنى – ارتفاع المبنى.

(3) يبدأ الطالب من جدول الأعداد العشوائية انطلاقًا من الصف الأول والعمود الأول فيجد الأعداد التالية:

281، 010، 592، 201، 062، 462، 468، 590، 543، 412، 209، 085، 315، 027، 227.

وبذلك يصبح لدينا الموظفين الذين أرقامهم واردة أعلاه.

(4) كسر المعاينة: $\frac{21}{420} = 0.05$

حجم عينة المهندسين: $80 \times 0.05 = 4$

حجم عينة اختصاصي المختبر: $120 \times 0.05 = 6$

حجم عينة العمال: $220 \times 0.05 = 11$

باستخدام جدول الأعداد العشوائية نجد:

المهندسون حاملي الأرقام: 201، 209، 227، 212

اختصاصيو المختبر حاملي الأرقام: 412، 315، 360، 359، 414، 415

العمال حاملي الأرقام: 672، 660، 590، 630، 543، 665، 712، 620، 651، 531، 645

(5) العدد في الصف الثالث والعمود الثالث أصغر من 9 هو 7 والعينة المنتظمة مكونة من الطلاب :

7، 16، 25، 34، 43، 52، 61، 70، 79، 88، 97، 106، 115، 124، 133، 142

(6) نجد كسر المعاينة: $\frac{40}{360} = \frac{1}{9}$

نوجد حجم كل عينة بسيطة:

حجم ذكور/دوام كامل: $\frac{1}{9} \times 180 = 20$

حجم ذكور/دوام جزئي: $\frac{1}{9} \times 36 = 4$

حجم إناث/دوام كامل: $\frac{1}{9} \times 18 = 2$

حجم إناث/دوام جزئي: $\frac{1}{9} \times 126 = 14$

من ثمّ نستخدم جدول الأعداد العشوائية لسحب عينة من كل فئة.

نأخذ الصف الأول والعمود الأول

ذكور/ دوام كامل حاملي الأرقام: 010، 062، 085، 027، 068، 056، 135، 096، 085، 154، 121، 132، ...

ذكور/ دوام جزئي حاملي الأرقام: 201، 209، 212، 181

إناث/ دوام كامل حاملي الأرقام: 227، 234

إناث/ دوام جزئي حاملي الأرقام: 281، 315، 360، 359، 280، 274، 303، 276، 340، ...

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٥٥) بتاريخ ١٠/ ٥ / ٢٠١٥ م

شركة مطابع الرسالة - الكويت