الوحدة الثالثة

تمرَّنْ
3–1

دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $y = \sqrt{x^4}$ دالة قوى

(a) (b)

السبب :

$$y = \sqrt{x^4} = x^2$$

(2) $f:[-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5$ دالة فردية

(a) (b)

السبب :

لأن الجزء المرسوم في الربع الأول هو الربع الثالث ، ونقطة الأصل هي نقطة التماثل .

(3) $y = x\sqrt{x}$ دالة زوجية

(a) (b)

السبب :

الدالة ليست فردية ولا زوجية $x \in \mathbb{R}^+$ غيرمعرفة $f(-x) = -x\sqrt{-x}$

(4) $y = (x+4)^2$ دالة زوجية

(a) (b)

السبب :

$$y = (x+4)^4 \implies f(x) = (x+4)^4$$

$$f(-x) = (-x+4)^4 = f(x) = (-(x-4))^4 = f(x) = (x-4)^4$$

أي أن الدالة f الدالة ليست فردية ولا زوجية

(5) المستقيم الذي معادلته $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.

(a) (b)

السبب :

عند إيجاد معكوس العلاقة ر نستبدل النقاط **(a , b)** التي تمثل العلاقةر بالنقاط **(b , a)** والتي تمثل معكوسها .

في التمارين (6–10)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس دالة القوى $y = 0.2x^4$ هو:

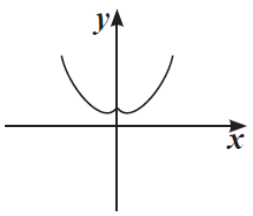
(a) $y = \sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ (b) $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ (c) $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$ (d) $y = -\sqrt[4]{5x}$

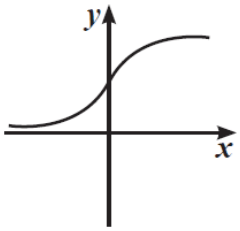
السبب :

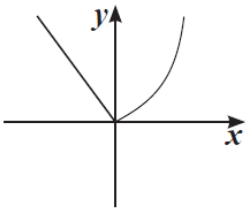
نقوم بتبديل x بالـ y $\quad y = 0.2\,x^4$

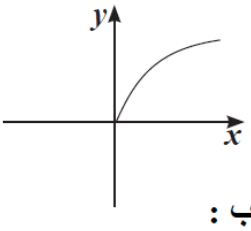
$$x = 0.2\,y^4 \implies y^4 = \frac{x}{0.2} \implies y^4 = 5x \implies y = \pm\sqrt[4]{5x}$$

(7) أي مما يلي تمثل دالة زوجية.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

السبب :

الدالة الزوجية هي الدالة التي محور تماثلها محور الصادات

(8) الدالة $y = 4.9t^2$ دالة زوجية إذا كان مجالها:

(a) $[-4,4)$ (b) $[-4,2)$ (c) $[-2,2]$ (d) $[0,\infty)$

السبب :

الدالة $y = 4.9\,t^2$ دالة زوجية إذا كان مجالها **[- 2 , 2]** لانها يكون محور التماثل محور الصادات

(9) إذا كانت $f:[-4,4] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{64}$ فإن مجال f^{-1} هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $[-4,4]$ (d) $[-1,1]$

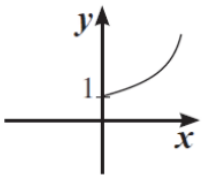
السبب :

$f : [-4\,,4] \longrightarrow \mathbb{R}, f\,(x) = \frac{x^3}{64}$ مدي الدالة **f**

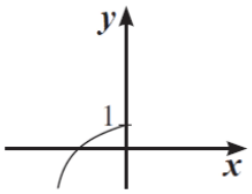
$f\,(4) = \frac{(4)^3}{64} = 1$ ، $f\,(-4) = \frac{(-4)^3}{64} = -1$ مدي الدالة **f يساوي مجال المعكوس**

[-1 , 1]

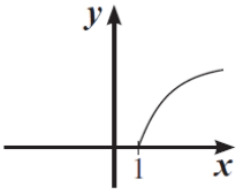
(10) ليكن بيان f^{-1} كما هو موضح في الشكل المقابل. بيان f يمكن أن يكون:



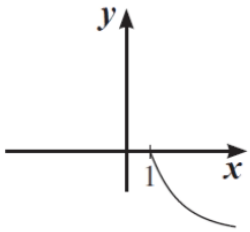
a



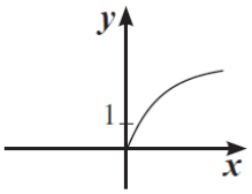
b



c



d



السبب :

بيان الدالة f^{-1} هو صورة بيان الدالة f بالأنعكاس في المستقيم $y = x$

في التمرينين (12–11)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب السؤال في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(11) بيان دالة زوجية متماثل حول: a	(a) المستقيم الذي معادلته $x = 0$
(12) بيان دالة فردية متماثل حول: d	(b) المستقيم الذي معادلته $y = 0$
	(c) المستقيم الذي معادلته $y = x$
	(d) نقطة الأصل

السبب :

(11) بيان الدالة الزوجية متماثل حول المستقيم الذى معادلته $x = 0$ (محور الصادات)

(12) بيان الدالة الفردية متماثل حول نقطة الأصل .

تمرّنْ
3–2

الدوال الحدودية

Polynomial Functions

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) كثيرة الحدود، $\forall a \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + (a+2)x^2 + 5$ هي من الدرجة الثالثة. (a) (b)

السبب :

$$f(x) = a\,x^3 + (a+2)x^2 + 5 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

فتكون $f(x)$ من الدرجة الثالثة ،

وعندما $a = 0$ فأن $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 2x^2 + 5$

أي تكون $f(x)$ من الدرجة الثانية

(2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $f(x) = 2x^5 - 3x^3(1-x^2)$ هو 2 (a) (b)

السبب :

$$f(x) = 2\,x^5 - 3x^3(1-x^2) \Longrightarrow f(x) = 2\,x^5 - 3x^3 + 3\,x^5$$

$$f(x) = 5\,x^5 - 3x^3$$

معامل الحد الرئسي 5 وليس 2

(3) كثيرة الحدود $(1-x^2)^3(x+1)$ هي من الدرجة السابعة. (a) (b)

السبب :

بفك كثيرة الحدود $(1-x^2)^3(x+1) = (1 - 3\,x^2 + 3\,x^4 - x^6)(x+1)$

$$= x - 3\,x^3 + 3\,x^5 - x^7 + 1 - 3\,x^2 + 3\,x^4 - x^6$$

كثيرة حدود من الدرجة السابعة

(4) إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها n حدًّا. (a) (b)

ليس من الضروري أن عدد الحدود يساوي درجة الحدودية

في التمارين (7–5)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) $(x+1)^3$ يساوي:

(a) x^3+1 (b) $(x+1)(x^2+x+1)$

(c) x^3+3x^2+3x+1 (d) x^3+x^2+x+1

السبب:

$$(x+1)^3=(x+1)(x+1)^2=(x+1)(x^2+2x+1)$$
$$=x^3+3x^2+3x+1$$

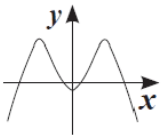
(6) أي مما يلي يساوي $2x^4-3x+6$ ؟

(a) $(x^4-2x^2+3)-(x^4-x^2-9)$ (b) $2x^4-3(x+6)$

(c) $(3x^4-x+3)+(3-2x-x^4)$ (d) $x(2x^3-3x)+6$

السبب :

$$f(x)=(3x^4-x+3)+(3-2x-x^4)=2x^4-3x+6$$

(7) سلوك نهاية الدالة  هو:

(a) $(\nwarrow,\nearrow)$ (b) $(\swarrow,\searrow)$ (c) $(\swarrow,\nearrow)$ (d) $(\nwarrow,\searrow)$

السبب :

من الرسم من اليمن إلي أسفل من اليسار إلي أسفل

في التمارين (11–8) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في من القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
سلوك نهاية الدالة:	(a) $(\nwarrow,\nearrow)$
(8) $f(x)=x^4-2x^5$ — d	(b) $(\swarrow,\searrow)$
(9) $g(x)=2x+x^3+5$ — c	(c) $(\swarrow,\nearrow)$
	(d) $(\nwarrow,\searrow)$
سلوك نهاية الدالة:	(a) $(\nwarrow,\nearrow)$
(10) $f(x)=-x^6+7x$ — b	(b) $(\swarrow,\searrow)$
(11) $g(x)=\frac{1}{2}x^4-2$ — a	(c) $(\swarrow,\nearrow)$
	(d) $(\nwarrow,\searrow)$

(8) $f(x)=x^4-2x^5 \Rightarrow f(x)=-2x^5+x^4$

المعامل الرئيسي هو -2 (عدد سالب) سلوك النهاية من جهة اليمين هو لأسفل

كثيرة الحدود من الدرجة الخامسة (فردي) سلوك النهاية من جهة اليسار معاكس اليمين أي لأعلي

$$g\ (x) = 2x + x^3 + 5 \implies g\ (x) = x^3 + 2x + 5 \quad \textbf{(9)}$$

المعامل الرئيسي هو *1* (عدد موجب) سلوك النهاية من جهة اليمين هو لأعلي

كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي) سلوك النهاية من جهة اليسار معاكس اليمين أي لأسفل

(10)

$$f\ (x) = -x^6 + 7x$$

المعامل الرئيسي هو *1-* (عدد سالب) سلوك النهاية من جهة اليمين هو لأسفل

كثيرة الحدود من الدرجة السادسة (زوجي) سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين أي لأسفل

$$g\ (x) = \frac{1}{2}x^4 - 2 \quad \textbf{(11)}$$

المعامل الرئيسي هو $\frac{1}{2}$ (عدد موجب) سلوك النهاية من جهة اليمين هو لأعلي

كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة (زوجي) سلوك النهاية من جهة اليسار نفس اليمين أي لأعلي

تمرّنْ
3–3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

Linear Factors of Polynomials

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f تقبل القسمة على $(2x+3)$ فإن $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

a b

السبب :

تقبل الدالة **f** القسمة على $(2x+3)$ إذا كان $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$ وليس $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

(2) إذا كانت $(x+2)$ عامل من عوامل الحدودية g فإن $g(-2)=0$

a b

السبب :

عندما يكون $(x+2)$ عامل من عوامل الحدودية ل فإن **2-** صفر من الأصفار أي **f (- 2) = 0**

(3) إذا قبلت $f(x)=x^4-2x^2+k+1$ القسمة على x فإن $k=-1$

a b

السبب :

لان عندما تكون **k = -1** تكون $f(x)=x^4-2x^2$ وهي تقبل القسمة على x

(4) باقي قسمة حدودية من الدرجة n على حدودية من الدرجة الأولى هو عدد ثابت.

a b

السبب :

لان درجة باقي القسمة تكون دائما أقل من درجة المقسوم عليه ٠

(5) $(x+1)$ عامل من عوامل الحدودية: $p(x)=x^3-x^2-2x$

a b

السبب :

عندما يكون **(x+1)** عامل من عوامل الحدودية فإن **x = -1** صفراً لها أي أن

$$p(-1)=(-1)^3-(-1)^2-2(-1)=-1-1+2=0$$

في التمارين (6–13)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $x=-2a$ صفر من أصفار كثيرة حدود فإن أحد عواملها هو:

(a) $(x-2a)$ (b) $(2x+a)$ (c) $(2x-a)$ (d) $(x+2a)$

السبب :

عندما يكون $x=-2a$ صفراً من الأصفار فإن $(x+2a)$ عامل من العوامل

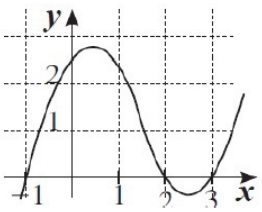
(7) أي من المقادير التالية إذا ضرب في $(x-1)$ يصبح الناتج كثيرة حدود تكعيبية ثلاثية:

(a) $(x-1)^2$ (b) x^2-x (c) x^2-1 (d) x^2+1

السبب:

عندما $(x-1)(x-1)^2=(x-1)(x^2-2x+1)=x^3-3x^2+3x-1$

(8) ليكن بيان f كما في الشكل المرسوم فإن مجموعة حل المعادلة $f(x)=0$ هي:



(a) $\{-1,2,3\}$ (b) $\{1,-2,-3\}$

(c) $\{-1,0,2,3\}$ (d) $\{0\}$

السبب :

محور السينات يتقاطع مع المنحني f عند كلاً من $x=-1\ ,\ x=2\ ,\ x=3$

(9) شبه مكعب أبعاده $3x$, $2x-3$, $2x+3$ فتكون دالة الحجم $f(x)$ تساوي:

(a) $4x^2-9$ (b) $3x(4x^2+9)$ (c) $12x^2-9x$ (d) $12x^3-27x$

السبب :

حجم شبه المكعب $\mathbf{V}$ = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة = الطول × العرض × الأرتفاع

$$V=f(x)=3x\,(2x+3)\,(2x-3)=3x\,(4x^2-9)=12\,x^3-27x$$

(10) قيمة k التي تجعل $(x-1)$ عاملًا من عوامل $f(x)=(x^2+x-2)+2k$ هي:

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

السبب :

عندما يكون $x-1$ عامل من العوامل الحدودية فإن $x=1$ فإن $f(1)=0$

$$(1+1-2)+2k=0 \Rightarrow 2k=0 \Rightarrow k=0$$

تمرّنْ
3–5

حل معادلات كثيرات الحدود

Solving Polynomial Equations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجموعة حل المعادلة $9x^2 + 16 = 0$ هي $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$

(a) (b)

السبب :

بالتعويض المباشر عن قيمة x لا تحقق حل المعادلة

(2) مجموعة حل المعادلة $2x^3 + 2 = 0$، $x \in \mathbb{R}$ هي مجموعة أحادية.

(a) (b)

السبب :

$$2x^3 + 2 = 0 \Rightarrow 2(x^3 + 1) = 0$$

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad or \quad x^2 - x + 1 = 0$$

$x = -1$ $\qquad$ $x^2 - x + 1 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

(3) إذا كانت $2k$ تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة $(4x^2 + 1)\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0$ فإن $k \in \{-1, 1\}$

(a) (b)

السبب :

$$(4x^2 + 1)\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0$$

$\frac{x^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1$ $\qquad$ $4x^2 + 1$ لا توجد جذور حقيقية

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\pm 2 = 2k \Rightarrow k = \pm\frac{2}{2} = \pm 1$ $\qquad$ بالتعويض $x = 2k$

(4) إن $\{1\}$ هي مجموعة حل المعادلة $3x^4 + 12x^2 - 15 = 0$

(a) (b)

السبب :

لحل المعادلة $3x^4 + 12x^2 - 15 = 0 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

$(x^2 + 5)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 + 5 = 0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ $\qquad$ $x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$

مجموعة الحل = $\{-1, 1\}$

b (b) **(5)** يمكن أن يكون $\frac{2}{3}$ صفرًا للحدودية $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 3$ حيث $b, c \in \mathbb{R}$

السبب :

$$f(x) = 2x^2 + b\,x^2 + cx - 3$$

نوجد الأصفار النسبية الممكنة لمعرفة الأجابة الصحيحة

الحد الثابت ٣- عوامل الحد الثابت هي : $\pm 1, \pm 3$

الحد الرئيسى ٢ عوامل الحد الرئيسي هي : $\pm 1, \pm 2$

قسمة عوامل الحد الثابت علي عوامل الحد الرئيسي هي : $\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm 1$

نلاحظ أن $\frac{2}{3}$ ليس ضمن هذه الأصفار النسبية الممكنة

في التمارين (6–8)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) 5 يمكن أن يكون صفرًا من أصفار الحدودية $f(x)$ تساوي:

a $ax^3 + x^4 + 5$ (b) $x^5 - 1$ (c) $5x^3 + 6x - 1$ (d) $(x+5)(x^2+25)$

السبب :

(٦) بالتعويض المباشر أو الأصفار النسبية المحتمل لكل معادلة

$$f(5) = a\,(5)^3 + 5^4 + 5 =$$

$$f(5) = (5)^5 - 1 \neq 0 \quad \text{ليس}$$

$$f(5) = 5(5)^3 + 6(5) - 1 \neq 0 \quad \text{ليس}$$

$$f(5) = (5+5) + (5^2 + 25) \neq 0 \quad \text{ليس}$$

(a) لا توجد غير

(7) أي قيمة مما يلي ليست حلًّا للمعادلة: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

(a) -1 (b) -3 (c) 3 d 2

السبب :

بالتعويض المباشر أو الأصفار النسبية المحتمل لكل معادلة

$$f(2) = 2^4 - 10(2)^2 + 9 = -15 \neq 0$$

$$f(-3) = (-3)^4 - 10(-3)^2 + 9 = 0 = 0$$

$$f(3) = 3^4 - 10(3)^2 + 9 = 17 = 0$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 10(-1)^2 + 9 = 0 = 0$$

(8) إذا كان $f(m) = f(n) = f(-1) = 0$ فإن f ممكن أن تكون:

(a) $f(x) = (x-1)(x+m)(x+n)$

(b) $f(x) = (x-1)(x-m)^2(x-n)$

(c) $f(x) = (x+1)(x-m)(x-n)^2$

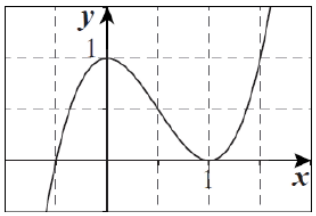
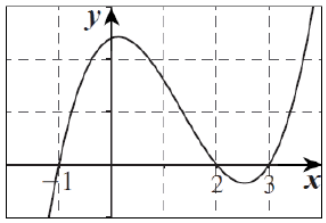
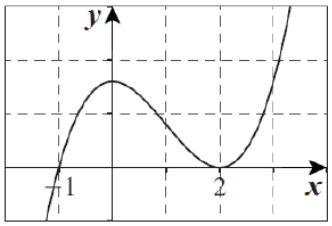
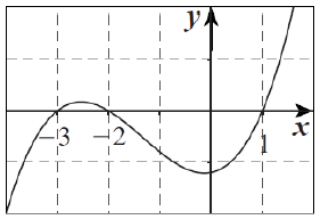
(d) $f(x) = (x+1)(x-mn)$

السبب :

$$f(m) = f(n) = f(-1) = 0$$

$$f(x) = (x - \mathbf{m})(x - n)(x + 1)$$

في التمارين (9–11)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{-1, 2, 3\}$ (b) ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون: لان منحني الدالة $f(x)$ يقطع محور السينات عند كلا من $x = -1 , x = 2 , x = 3$ **(10)** مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{-1, 2\}$ (c) ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون: لان منحني الدالة $f(x)$ يقطع محور السينات عند كلا من $x = -1 , x = 2$ **(11)** مجموعة حل $f(x) = 0$ هي $\{1, -2, -3\}$ (d) ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون: لان منحني الدالة $f(x)$ يقطع محور السينات عند كلا من $x = 1 , x = -2 , x = -3$	(a)  (b)  (c)  (d) 

الوحدة الرابعة

تمرَّنْ
4–1

استكشاف النماذج الأسية
Exploring Exponential Models

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = 3(2)^x$ تمثل تضاؤلًا أسيًّا.

(a) (b●)

السبب : الدالة الأسية $y = 3\,(2)^x$ $\quad a = 3 \;, b = 2 \;, 2 > 1$

الدلة تمثل نمواً أسياً وليس تضاؤلاً أسياً

(2) الدالة $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ تمثل نموًا أسيًّا.

(a●) (b)

السبب :

الدالة الأسية $y = 2\,(\frac{1}{3})^{-x} = 2\,(3)^x$ $\quad a = 2 \;, b = 3 \;, 3 > 1$

الدلة تمثل نمواً أسياً

(3) عامل النمو للدالة $y = \frac{1}{3}(2)^{2x}$ هو 2

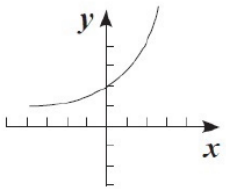
(a) (b●)

السبب

الدالة الأسية $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} = \frac{1}{3}(4)^x$ $\quad a = \frac{1}{3} \;, b = 4$

عامل النمو هو **4**

(4) إذا كان بيان الدالة $y = b^x$ كما في الشكل المقابل فإن $b > 1$



(a●) (b)

السبب :

الدالة الأسية التي تمثيلها البياني بهذا الشكل يكون $b > 1$ لانها ثمل نموا أسياً

في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) عامل النمو للدالة $y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x$ هو:

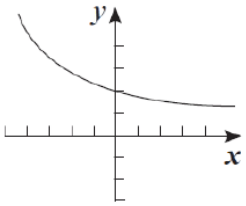
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) 3 (d●) 9

السبب :

$$y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x = ((3)^2)^x = (9)^x$$

(6) ليكن بيان الدالة: $y = 2b^x$ كما في الشكل المقابل:

فإن b يمكن أن تساوي:



(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

السبب :

الدالة الأسية التي تمثيلها البياني بهذا الشكل يكون $b =$ لانها تمثل تضاؤلاً أسياً

$0 < b < 1$ أي أن $0 < \frac{1}{2} < 1$

(7) الدالة الأسية $y = ab^x$ تنمذج التزايد السكاني، إذا كان معدل التزايد السكاني في مدينة ما هو 2.5% فإن عامل النمو يساوي:

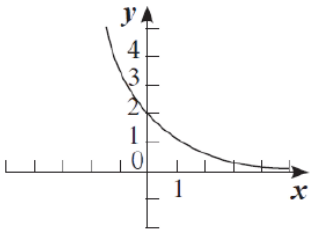
(a) 0.025 (b) 1.25 (c) 1.025 (d) 3.5

السبب :

معدل التغير (I) $=$ **2,5 %** أي أن **I = 2.5 % = 0.025**

b = 1 + 0.025 = 1.025

(8) أي من الدوال الأسية التالية يمكن أن يمثلها الرسم البياني المقابل:



(a) $y = \frac{1}{3}(2)^x$ (b) $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (c) $y = -3(2)^x$ (d) $y = -2(3)^x$

السبب :

بالتعويض عن $x = 0$ $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 2$ منحني الدالة يمر بالنقطة **(0 , 2)**

تمرَّنْ
4–2

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

Exponential Functions and their Graphs

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) جميع الدوال الأسية على الصورة: $y = ab^x \quad a \neq 0 \ , \ b > 0, \ b \neq 1$ متقاطعة.

(a) ● (b)

السبب :

هذا العبارة صحيحة مهما اختلفت قيمة **b** ، وثبت قيمة الـ **a**

(2) بيان الدالة $y = -2^x$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة $y = 2^x$

(a) ● (b)

السبب :

لان بيان الدالة $y = -b^x$ ينتج من أنعكاس الدالة $y = b^x$ في محور السينات .

(3) بيان الدالة $y = -(3)^x$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة $y = -(3)^{-x}$

(a) ● (b)

السبب :

لان بيان $y = -b^{-x}$ ينتج من أنعكاس الدالة $y = -b^x$ في محور محور الصادات

(4) بيان الدالة $y = 3(5)^{x-2}$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = 3(5)^x$ بمقدار وحدتين جهة اليمين.

(a) ● (b)

السبب :

بيان $y = 3\,(5)^{x-2}$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = 3\,(5)^x$ في محور محور الصادات

لأن **h = 2**

(5) بيان الدالة $y = 3(2)^x$ يقطع جزءًا من محور الصادات قدره 3.

(a) ● (b)

السبب :

بيان $y = 3\,(2)^x$ يقطع جزء أ من محور الصادات قدره **3** وحدات .

لأنه عند $x = 0$ تكون $y = 3\,(2)^0 \implies y = 3\,(1) = 3$

في البنود (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 5$ فإن دالة المرجع لها يمكن أن تكون:

(a) $y = 3(2)^x$ ● (b) $y = 3(2)^{-x}$ (c) $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ (d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

السبب :

الدالة $y = 3\,(2)^{-x}$ هي نفسها الدالة $y = 3\,\left(\frac{1}{2}\right)^x$

(7) باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{3}(4)^x$ كدالة مرجع يمكن رسم بيان الدالة:

(a) $y = 3(4)^x$ (b) $y = 3(4)^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} + 1$ (d) $y = \frac{1}{3}(2)^{3x}$

السبب :

الدالة $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} + 1$ هي نفسها الدالة :

$$y = \frac{1}{3}(2^2)^x + 1 = \frac{1}{3}(4)^x + 1$$

(8) قيمة α التي تجعل بيان الدالة $y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+2)x} + 3$ خطًّا أفقيًّا هي:

(a) -3 (b) -2 (c) -8 (d) 0

السبب :

لأنه عند $\mathbf{x = 11}$ تكون $\mathbf{y = 3 + 8 = 11}$

الدالة يمثل خطاً مستقيماً يمر النقطة $(\mathbf{0 , 11})$ وعند الأنسحاب يميناً أو يساراً $\mathbf{y = 11}$

(9) بيان الدالة: $f(x) = 3(5)^x - 1$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة: $g(x) =$

(a) $3(5)^x + 1$ (b) $3(5)^{-x} - 1$ (c) $-3(5)^x + 1$ (d) $3(5)^{-x} + 1$

السبب :

بيان الدالة $f(x) = 3(5)^x$ هو صورة بيان الدالة $g(x) = 3(5)^{-x}$

بالإنعكاس في محور الصادات ، وعند سحب الدالة $f(x)$ وحدة واحدة إلى الأسفل يجب سحب الدالة (x) ل وحدة واحدة إلى الأسفل لكي نحافظ على الأنعكاس .

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^{x+2} - 3$ باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^x$ بانسحاب:

(a) وحدتين جهة اليسار و3 وحدات لأسفل (b) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأسفل

(c) 3 وحدات جهة اليمين ووحدتين لأعلى (d) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأعلى

السبب : **لان : $\mathbf{k = -3}$, $\mathbf{h = -2}$ أي الانسحاب وحدتين يسار و 3 وحدات إلي أسفل**

(11) معادلة الدالة الأسية التي على الصورة $y = a(b)^x$ حيث الأساس يساوي 0.6 ويمر رسمها البياني بالنقطة $(2 , 1.8)$ هي:

(a) $y = 1.8(2)^x$ (b) $y = 0.2(1.8)^x$ (c) $y = 2(0.6)^x$ (d) $y = 5(0.6)^x$

السبب :

بالتعويض عن $\mathbf{x = 2}$, $\mathbf{y = 1.8}$, $\mathbf{b = 0.6}$ في $y = a\,(b)^x$

$$1.8 = a\,(0.6)^2 \implies a = 1.8 \div 0.36 = 5$$

$$y = 5\,(0.6)^x$$

تمرّنْ
4–3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا
Logarithmic Functions and their Graphs

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 3^x$ فإن $x = \log y$ (a) (b)

السبب :

$y = 3^x$ فإن $x = \log_3 y$ ولكن $x = \log y$ للأساس *10* وليس أساس **3**

(2) إذا كانت $\log_2(-y) = x$ فإن $y = 2^{-x}$ (a) (b)

السبب :

$x = \log_2(-y)$ *فإن الصورة الأسية هي* $-y = 2^x$ *وليست* $y = 2^{-x}$

(3) إذا كانت $4^x = 5$ فإن $2x = \log_2 5$. (a) (b)

السبب :

$4^x = 5$ فإن $2^{2x} = 5$ وبالتالي $\log_2 5 = 2x$ أي $2x = \log_2 5$

(4) مجال الدالة $f(x) = \log(x^2)$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

السبب :

مجال الدالة $f(x) = \log(x^2)$ هو $\mathbb{R} - \{0\}$

(5) بيان الدالة $y = \log_3 x$ هو انعكاس في المستقيم $y - x = 0$ لبيان الدالة $y = 3^x$ (a) (b)

السبب :

معكوس الدالة $y = \log_3 x$ نقوم بتبديل **تبديل x بال- y** ثم الحل

$x = \log_3 y \Rightarrow y = 3^x$ أي أن $y = 3^x$ هي معكوس للدالة $y = \log_3 x$

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس الدالة $y = \log_2 x$ هو:

(a) $y = \log_x 2$ (b) $y = x^2$ (c) $y = 2^x$ (d) $y = \log 2^x$

السبب :

معكوس الدالة $y = \log_2 x$ نقوم بتبديل **x بال- y** ثم الحل

$x = \log_2 y \Rightarrow y = 2^x$ أي أن $y = 2^x$ هي معكوس للدالة $y = \log_2 x$

(7) مجال الدالة $y = \log|x-1|$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $(1,\infty)$ (d) $\mathbb{R}/\{1\}$

السبب :

مجال الدالة $g(x) = \log|x-1|$ هو $|x-1| > 0$ مجال الدالة $\mathbb{R} - \{1\} = \mathbf{g}$

(8) مجال الدالة $y = \log(x^2+1)$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $[1,\infty)$ (d) $(1,\infty)$

السبب :

مجال الدالة $f(x) = \log(x^2+1)$ هو $x^2+1 > 0$ مجال الدالة $\mathbb{R} = f$

(9) باستخدام دالة المرجع $y = \log_5 x$ يمكن تمثيل الدالة:

(a) $y = \log(x-1) - 1$ (b) $y = \log_5(5x)$

(c) $y = \log_5(x-1) - 1$ (d) $y = \log_5(x^2+1)$

السبب :

بيان الدالة $y = \log_5(x-1) - 1$ دالة المرجع $y = \log_5 x$

h =1 (موجب) ، **k = -1** (سالب)

أي أن الأنسحاب لبيان دالة المرجع وحدة جهة اليمين وحدة إلى أسفل

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \log(x+1) - 2$ معتبرًا دالة المرجع $y = \log x$ بانسحاب:

(a) وحدة إلى اليسار ووحدتين لأسفل (b) وحدة إلى اليمين ووحدتين لأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين ووحدة لأعلى (d) وحدتين إلى اليسار ووحدة لأعلى

السبب :

بيان الدالة $y = \log_5(x+1) - 2$ دالة المرجع $y = \log_5 x$

h = -1 (**سالب**) ، **k = -2** (سالب)

أي أن الأنسحاب لبيان دالة المرجع وحدة جهة اليسار وحدتين إلى أسفل

(11) يعطى الرقم الهيدروجيني (pH) بالعلاقة: $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ إذا كان تركيز أيون الهيدروجيني $[\text{H}^+]$ في السبانخ هو 4×10^{-6} فإن الرقم الهيدروجيني للسبانخ هو:

(a) -6.6 (b) 6.6 (c) -5.4 (d) 5.4

السبب :

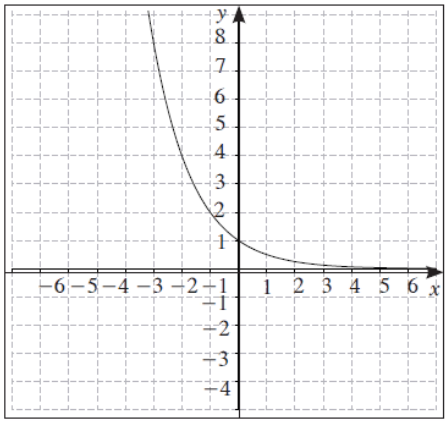
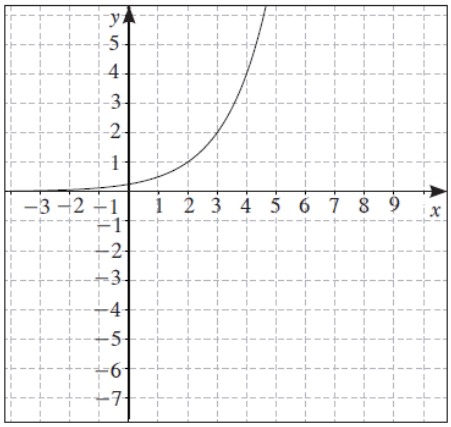
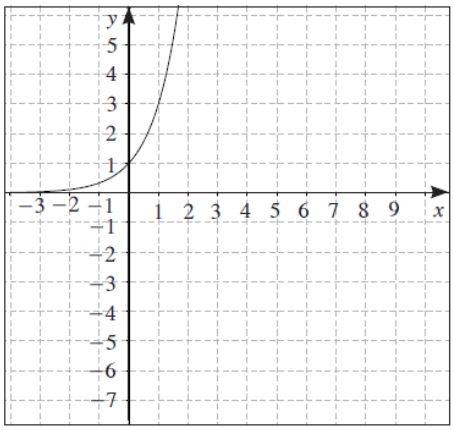
الرقم الهيدوجينى في السبانخ

$$PH = -\log[H^+] \Rightarrow PH = -\log[4 \times 10^{-6}]$$

$$PH = -\log[0.000004] \Rightarrow PH = \log[0.000004]^{-1} \Rightarrow PH \approx 5.4$$

في البنود (12–15)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
معكوس الدالة:	(a) $y = 4^x$
(12) a هو $y = -\log_{\frac{1}{4}} x$	(b) $y = \left(\frac{-1}{4}\right)^{-x}$
(13) c هو $y = -\log_4 x$	(c) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
	(d) $y = (-4)^{-x}$

القائمة (1)	القائمة (2)
بيان معكوس كل دالة مما يلي هو:	(a) 
(14) c $y = \log_3(x)$	(b) 
معكوس الدالة $y = \log_3 x$ نقوم بتبديل x بال y ثم الحل	(c) 
$x = \log_3 y \Rightarrow y = (3)^x$	
أي أن $y = (3)^x$ هي معكوس للدالة $y = \log_3 x$	
(15) b $y = \log_2(4x)$	
معكوس الدالة $y = \log_2(4x)$ نقوم بتبديل x بال y ثم الحل	
$x = \log_2(4y) \Rightarrow 4y = (2)^x$	
أي أن $y = \frac{1}{4}(2)^x \Rightarrow y = (2)^{x-2}$ هي معكوس للدالة $y = \log_2(4x)$	
(12) معكوس الدالة $y = -\log_1 x$ نقوم بتبديل x بال y ثم الحل	
$x = -\log_{\frac{1}{4}} y \Rightarrow y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$	
أي أن $y = (4)^x$ هي معكوس للدالة $y = -\log_{\frac{1}{4}} x$	
(13) معكوس الدالة $y = -\log_4 x$ نقوم بتبديل x بال y ثم الحل	
$x = -\log_4 y \Rightarrow y = (4)^{-x}$	
أي أن $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ هي معكوس للدالة $y = -\log_4 x$	

تمرَّنْ
4–4

خواص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log(x-1)^2 = 2\log|x-1|$ (a) (b)

السبب : من تعريف اللوغاريتم $\log(x-1)^2 = 2\log|x-1|$

مجال كلا منهما $\mathbb{R}-\{1\}$

(2) $\log\frac{1}{x^2} = -2\log x, x>0$ (a) (b)

السبب : حيث $x>0$ أي أن $\log\frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2\log x$

(3) $\log\left(\frac{\sqrt{m}}{n}\right) = \frac{1}{2}\log m - \log n,\ m>0, n>0$ (a) (b)

السبب : $\log\left(\frac{\sqrt{m}}{n}\right) = \log\sqrt{m} - \log m = \log m^{\frac{1}{2}} - \log n = \frac{1}{2}\log m - \log m$

(4) $\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2 8$ (a) (b)

السبب : $\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2\left(\frac{16}{2}\right) = \log_2 8$ أو بأستخدام الآلة الحاسبة

(5) $\log(x-y) = \frac{\log x}{\log y}$, $x,\ y \in \mathbb{R}^+/\{1\}$ (a) (b)

السبب : من خاصية القسمة : $\log x - \log y = \log\frac{x}{y}$, $\log(x-y) \neq \frac{\log x}{\log y}$

(6) $\log_6 4 + \log_6 9 = 2$ (a) (b)

السبب : $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6(4\times 9) = \log_6 36 = 2$ أو بأستخدام الآلة الحاسبة

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) المقدار $2\log_4 8 + \log_5 125$ يساوي:

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 15

السبب :

$2\log_4 8 + \log_5 125 = \log_4(8)^2 + \log_5 5^3$

$= 3 + 3 = 6$ (أو بأستخدام الآلة الحاسبة)

في التمارين (13–7)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان $\log 5 = y$, $\log 3 = x$ فإن $\log 45$ تساوي:

(a) $x + y$ (b) $2x + y$ (c) $2y + x$ (d) $x^2 y$

السبب :

$$\log 45 = \log 5 \times 9 = \log 5 \times 3^2 = \log 5 + \log 3^2$$
$$= \log 5 + 2\log 3 = y + 2x$$

(9) $\log_2 x + \log_2 2x + \log_2 \frac{1}{x^2}, x > 0$ يساوي:

(a) 1 (b) 2 (c) x (d) $2x$

السبب :

$$\log_2 x + \log_2 2x + \log_2 \frac{1}{x^2} = \log_2 x \,.\, 2x \,.\, \frac{1}{x^2} = \log_2 2 = 1$$

(10) إذا كان $\log 3 = n, \log 2 = m$ فإن المقدار $m + n - 1$ يساوي:

(a) $\log 0.06$ (b) $\log 0.6$ (c) $\log 6$ (d) $\log 60$

السبب :

$$m + n - 1 = \log 2 + \log 3 - \log 10 = \log \frac{2\times 3}{10} = \log 0.6$$

(11) عندما $n = 2$, $m = 3$ فإن المقدار الأكبر قيمة فيما يلي هو:

(a) $\log n^2 - \log m^3$ (b) $\log m^2 - \log n^2$ (c) $3\log n - 2\log m$ (d) $2\log m - 3\log n$

السبب :

(a) $\log n^2 - \log m^3 = \log 2^2 - \log 3^3 = \log \frac{4}{27}$

(b) $\log m^2 - \log n^2 = \log 3^2 - \log 2^2 = \log \frac{9}{4}$

(C) $3\log n - 2\log m = \log 2^3 - \log 3^2 = \log \frac{8}{9}$

(d) $2\log m - 3\log n = \log 3^2 - \log 2^3 = \log \frac{9}{8}$

(12) مفكوك المقدار $\log\left(\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}}\right)$ هو:

(a) $3\log \frac{8}{x^3}$ (b) $\frac{1}{3}(\log(8 - x^3))$ (c) $\log 2 - \log x$ (d) $\log 2 - 3\log x$

السبب :

$$\log\left(\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}}\right) = \log\left(\frac{8}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \log\left(\frac{2^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \log\left(\frac{2}{x}\right) = \log 2 - \log x$$

تمرّنْ
4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتيمية

Exponential and Logarithmic Equations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $9^x = 3$ هو $x = \frac{1}{2}$ (a) (b)

السبب : $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (بالتعويض $2\log x = -1 \Rightarrow \log x = -\frac{1}{2} = -0.5$)

(2) حل المعادلة $2\log x = -1$ هو $x = 10^{-0.5}$ (a) (b)

السبب : الصورة الأسية هو حل المعادلة

$$2\log x = -1 \Rightarrow \log x = -\frac{1}{2} = -0.5$$

الصورة الأسية هو حل المعادلة $x = 10^{-0.5}$

(3) إذا كان $\log(x+6) = 0$ فإن $x = -5$ (a) (b)

السبب : $\log(x+6) = 0$ حول إلى الصورة الأسية $x + 6 = 10^0 = 1$

منها $x = 1-6 = -5$

أو بالتعويض عن قيمة $x = -5$ $\log(-5+6) = \log 1 = 0$

(4) حل المعادلة $14^{9x} = 146$ هو $x = \frac{\log 146}{\log 14}$ (a) (b)

السبب : $14^{9x} = 146$ بأخذ لوغاريتم الطرفين $\log 14^{9x} = \log 146$

$$9x \log 14 = \log 146 \Rightarrow 9x = \frac{\log 146}{\log 14} \Rightarrow x = \frac{\log 146}{9 \log 14}$$

(5) حل المعادلة $3\log x - \log 6 + \log 2.4 = 9$ هو 5×10^4 (a) (b)

السبب :

$$3\log x - \log 6 + \log 2.4 = 9$$

$$3\log x - \log 6 + \log \frac{24}{10} = 9 \Rightarrow 3\log x - \log 6 + \log \frac{4\times 6}{10} = 9$$

$$3\log x - \log 6 + \log 4 + \log 6 - \log 10 = 9$$

$$3\log x + \log 4 = 9 + 1 \Rightarrow \log x^3 = \log 10^{10} - \log 4$$

$$\log x^3 = \log \frac{10^{10}}{4} = \log(25 \times 10^8)$$

$$x^3 = 25 \times 10^8 \Rightarrow x \sqrt[3]{25 \times 10^8}$$

أو بالتعويض عن $x = 5 \times 10^4$

$$3\log(5 \times 10^4) - \log 6 + \log 2.4 \approx 14.097 \neq 9$$

في التمارين (6–14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $(1.5)^x = 356$ فإنّ:

(a) $x \approx 15$ (b) $x \approx 14.5$ (c) $x \approx 15.3$ (d) $x \approx 16.3$

السبب :

$$(1.5)^x = 356 \Rightarrow \log(1.5)^x = \log(356)$$

$$x\log 1.5 = \log(356) \Rightarrow x = \frac{\log 356}{\log 1.5} \approx 14.48$$

من خلال التعويض بكل قيمة من القيم

$(a)\ x = 15 \quad (1.5)^{15} = 437.89 \neq 356,$

$(b)\ x = 14.5 \quad (1.5)^{14.5} = 357.538 \approx 357.538$

(7) حل المعادلة $8 + 10^x = 1008$ هو:

(a) $x = 6$ (b) $x \approx 3.5$ (c) $x = 3$ (d) $x = 2$

السبب :

$$8 + 10^x = 1008 \Rightarrow 10^x = 1008 - 8 = 1000 = 10^3$$

$$x = 3$$

(8) إذا كان $2^{x^2} = 512$ فإنّ:

(a) $x = 3$ (b) $x = 9$ (c) $x = 3\ ,\ x = -3$ (d) $x = -9$

السبب :

$$2^{x^2} = 512 \Rightarrow 2^{x^2} = 2^9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

(9) إذا كان $2\log x = -2$ فإنّ:

(a) $x = 10^{-1}$ (b) $x = 10^{0.5}$ (c) $x = 10^{-2}$ (d) $x = 10^{-0.5}$

السبب :

$$2\log x = -2 \Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1}$$

(10) مجموعة حل المعادلة: $\log(x^2+2)=\log(5x-4)$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{3\}$ (c) $\{2,3\}$ (d) $\{-2,-3\}$

السبب :

$$\log(x^2+2)=\log(5x-4) \Rightarrow x^2+2=5x-4$$

$$x^2+5x-6=0 \Rightarrow x=3\,,x=2$$

(11) مجموعة حل المعادلة: $\log_2(x^2-x)=1$ هي:

(a) $\{-1\}$ (b) $\{1,2\}$ (c) $\{-1,2\}$ (d) $\{-1,-2\}$

السبب :

$$\log_2(x^2-x)=1 \Rightarrow \log_2(x^2-x)=\log_2 2$$

$$x^2-x=2 \Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$x=2 \in \mathbb{R}-(0,1) \quad , \quad x=-1 \in \mathbb{R}-(0,1)$$

(12) حل المعادلة $\log(x+21)+\log x=2$ هو:

(a) 4 (b) -25 , 4 (c) 25 (d) 4 , 25

السبب :

$$\log(x+21)+\log(x)=2 \Rightarrow \log\big(x\,(x+21)\big)=\log 100$$

$$x^2+21x=100 \Rightarrow x^2+21x=100 \Rightarrow x^2+21x-100=0$$

$$x=4 \in (0,\infty) \quad , \quad x=-\mathbf{25} \notin (0,\infty)$$

(13) يكون $x=3$ حلًا للمعادلة:

(a) $\log_3(6-x^2)=1$ (b) $\log_x 9=\frac{2}{3}$ (c) $\log_3(x^2+1)=2$ (d) $\log_3 x^3+\log_3 x=4$

السبب :

$$\log_3 x^3+\log_3 x=4 \Rightarrow \log_3 x^4=4 \Rightarrow x^4=3^4 \Rightarrow x=\pm 3$$

(14) حل المعادلة $\log_x 81-\log_x 9=2$ هو:

(a) -3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3 (d) 9

السبب :

$$\log_x 81-\log_x 9=2 \Rightarrow \log_x \tfrac{81}{9}=2 \Rightarrow \log_x 9=2 \Rightarrow 9=x^2 \Rightarrow x=\pm 3$$

تمرّنْ
4–6

اللوغاريتم الطبيعي
Natural Logarithm

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log_4(ln\, e^4) = 1$ (a) (b)

السبب :

$$\log_4(\ln e^4) = \log_4(4 \ln e) = \log_4 4 = 1$$

(باستخدام الآلة الحاسبة)

(2) $4ln8 + ln10 = 4ln80$ (a) (b)

السبب :

$$4 \ln 8 + \ln 10 = \ln 8^4 \times 10 = \ln 40960$$

$$, \ 4 \ln 80 = \ln 80^4 = \ln 40960000$$

$$4 \ln 8 + \ln 10 \neq 4 \ln 80$$

(باستخدام الآلة الحاسبة)

(3) $ln e^2 = 2$ (a) (b)

السبب :

(باستخدام الآلة الحاسبة) أو $\ln e^2 = 2 \ln e = 2$

(4) حل المعادلة: $lnx = -2$ هو e^2 (a) (b)

السبب :

بالتعويض عن $x = e^2$ أو $\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{e^2}$

(5) حل المعادلة: $e^{\frac{x}{5}} + 4 = 7$ هو $5ln3$ (a) (b)

السبب :

$$e^{\frac{x}{5}} + 4 = 7 \Rightarrow e^{\frac{x}{5}} = 3 \Rightarrow \ln e^{\frac{x}{5}} = \ln 3 \Rightarrow \frac{x}{5} = \ln 3 \Rightarrow x = 5 \ln 3$$

(بالتعويض عن $x = 5 \ln 3$ واستخدام الآلة الحاسبة)

في التمارين (6–14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $3\ln 4 - 5\ln 2$ على شكل لوغاريتم واحد تكتب:

(a) $\ln(-18)$ (b) $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$ (c) $\ln 2$ (d) $\ln 32$

السبب :

$$3\ln 4 - 5\ln 2 = \ln 4^3 - \ln 2^5 = \ln\frac{4^3}{2^5} = \ln 2$$

(أ واستخدام الآلة الحاسبة **جرب جميع النواتج**)

(7) $e^{\ln 10}$ تساوي:

(a) 10 (b) e^{10} (c) 0 (d) $\frac{1}{10}$

السبب :

من خواص اللوغاريتم الطبيعي $e^{\ln 10} = 10$

(أ واستخدام الآلة الحاسبة)

(8) حل المعادلة $\ln(2m+3) = 8$ هو:

(a) $e^8 - 3$ (b) $\frac{e^8}{2} - 3$ (c) $\frac{e^8 - 3}{2}$ (d) $e^4 - 3$

السبب :

$$\ln(2m+3) = 8 \Rightarrow 2m+3 = e^8 \Rightarrow 2m = e^8 - 3 \Rightarrow m = \frac{e^8-3}{2}$$

(9) حل المعادلة $\ln 4r^2 = 3$ هو:

(a) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (b) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}, \frac{-e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (c) $\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}$ (d) $e^{\frac{3}{2}}, -e^{\frac{3}{2}}$

السبب :

بالتعويض المباشر عن قيم $\mathbf{x}$ في مجال الدالة أو كما يلي

$\ln 4t^2 = 3$ مجموعة التعويض $4r^2 > 0 \Rightarrow t^2 > 0 \Rightarrow |r| > 0$

مجموعة التعويض $= \mathbb{R} - \{0\}$

$$\ln 4r^2 = 3 \Rightarrow \ln 2^2 r^2 = 3 \Rightarrow \ln(2r)^2 = 3 \Rightarrow 2\ln|2r| = 3$$

$$\ln|2r| = \frac{3}{2} \Rightarrow |2r| = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow |\mathbf{r}| = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2} \Rightarrow r = \pm = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\mathbf{2}}$$

(10) حل المعادلة $e^{2x} = 10$ هو:

(a) $x = \frac{\ln 10}{2}$ (b) $\ln 5$ (c) $\frac{5}{e}$ (d) $2\ln 10$

السبب :

بأخذ لوغاريتم الطرفين $e^{2x} = 10$

$$\ln e^{2x} = \ln 10 \Rightarrow 2x = \ln 10 \Rightarrow x = \frac{\ln 10}{2}$$

(11) $\{e^2\}$ هي مجموعة حل المعادلة:

(a) $\ln x = 2$ (b) $\ln x^2 = 2$ (c) $\ln x^2 = 4$ (d) $\ln x = 4$

السبب :

حول إلي الصورة الأسية $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

(12) حل المعادلة $e^{x+1} = 13$ هو:

(b) $x = \ln 13 + 1$ (b) $x = \ln 13 - 1$ (c) $x = \ln 13$ (d) $x = \ln 12$

السبب :

بأخذ لوغاريتم الطرفين $e^{x+1} = 13$

$$\ln e^{x+1} = \ln 13 \Rightarrow x + 1 = \ln 13 \Rightarrow x = \ln 13 - 1$$

(13) حل المعادلة $\ln(x-2)^2 = 6$ هو:

(a) $2 + e^3$ (b) $2 - e^3$ (c) $2 \pm e^3$ (d) $2 \pm e^6$

السبب :

$$\ln(x-2)^2 = 6 \Rightarrow 2\ln|x-2| = 6 \Rightarrow \ln|x-2| = \frac{6}{2} = 3$$

$$|x-2| = e^3 \Rightarrow x - 2 = \pm e^3 \Rightarrow x = 2 \pm e^3$$

(14) حل المعادلة $e^{\frac{x}{2}+1} + 3 = 8$ هو:

(a) $x = 2\ln 5 - 1$ (b) $x = 2\ln 5 - 2$ (c) $x = 2\ln 4$ (d) $x = \frac{1}{2}(\ln 5 - 1)$

السبب :

بأخذ لوغاريتم الطرفين $e^{\frac{x}{2}+1} + 3 = 8 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}+1} = 8 - 3 = 5$

$$\ln e^{\frac{x}{2}+1} = 5 \Rightarrow \frac{x}{2} + 1 = e^5 \Rightarrow \frac{x}{2} = e^5 - 1 \Rightarrow x = 2(e^5 - 1)$$

$$x = -2 + 2e^5 = 2e^5 - 2$$

الوحدة الخامسة

المتجه في المستوى
The Vector in the Plane

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط التالية: $A(2,1), B(-3,0), C(3,-4), D(x,y)$

(1) الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ $\overrightarrow{BA}$: هو $(-5,-1)$

(a) ● (b)

السبب :

متجه الموضع للقطعة الموجهة $\overrightarrow{BA}$ يمثله الزوج المرتب التالي :

$$(x_A - x_B\ , y_A - y_B) = (2-(-3), 1-0) = (5,1)$$

(2) مركّبات $\overrightarrow{BC}$ هي $< 6,4 >$

(a) ● (b)

السبب :

$$\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle x_C - x_B\ , y_C - y_B \rangle = \langle 3-(-3), -4-0 \rangle = \langle 6,-4 \rangle$$

(3) المثلث ABC هو متطابق الضلعين.

● (a) (b)

السبب :

$$\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle 6,-4 \rangle \ , \langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle -5\ , -1 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{AC} \rangle = \langle x_C - x_A\ , y_C - y_A \rangle = \langle 3-2, -4-1 \rangle = \langle 1,-5 \rangle$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}\ units$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}\ units$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{52}\ units$$

المثلث متطابق الضلعين لأن $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

(4) إذا كان $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$ فإن: $x = -2, y = -5$

● (a) (b)

السبب :

نفرض أن $D(x,y)$

$$\langle \overrightarrow{CD} \rangle = \langle x_D - x_C\ , y_D - y_C \rangle = \langle x-3, y+4 \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{CD} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle \Rightarrow \langle x-3, y+4 \rangle = \langle -5\ , -1 \rangle \Rightarrow x = -2\ , y = -5$$

في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المستوى الإحداثي إذا كان $\vec{u} = \langle -2, 2 \rangle$

فإن قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي:

(a) $45°$ (b) $-45°$ (c) $135°$ (d) $225°$

السبب :

$\vec{u} = \langle -2, 2 \rangle$ $x = -2$ ، $y = 2$ و θ تقع في الربع الثاني

$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{2}{-2} \right| = 45° = \frac{\pi}{4}$ أي $\theta = 180° - 45° = 135°$

(6) لنأخذ في المستوى الإحداثي $\langle \frac{12}{13} , y \rangle = \vec{u}$. إذا كان $\vec{u}$ متجه وحدة فإن y يساوي:

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ (c) $\frac{5}{13}$ (d) $\pm\frac{5}{13}$

السبب :

$\vec{u} = \langle \frac{12}{13} , y \rangle$ متجه وحدة $y = \pm \sqrt{1 - (\frac{12}{13})^2} = \pm \frac{5}{12}$

(7) لتكن في المستوى الإحداثي النقاط: $A(1,3), B(3,2), C(0,-1), D(-4,1)$ فيكون:

(a) $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$ (b) $< \overrightarrow{AB} > = - < \overrightarrow{CD} >$

(c) $< \overrightarrow{CD} > = -2 < \overrightarrow{AB} >$ (d) $< \overrightarrow{AB} > = -2 < \overrightarrow{CD} >$

السبب :

$A(1,3), B(3,2), C(0,-1), D(-4,1)$

$\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle x_B - x_A , y_B - y_A \rangle = \langle 3-1, 2-2 \rangle = \langle 1, -1 \rangle$

$\langle \overrightarrow{CD} \rangle = \langle x_D - x_C , y_D - y_C \rangle = \langle -4-0, 1+1 \rangle = \langle -4, 2 \rangle$

$\langle \overrightarrow{CD} \rangle = -2 \langle \overrightarrow{AB} \rangle$

(8) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(2,4), F(-1,-5), G(x,y)$ إذا كان: $< \overrightarrow{EF} > = < \overrightarrow{EG} >$ فإن (x, y) يساوي:

(a) $(-1,-5)$ (b) $(-5,-13)$ (c) $(5,13)$ (d) $(1,5)$

السبب :

$E(2,4), F(-1,-5), G(x,y)$

$\langle \overrightarrow{EF} \rangle = \langle \overrightarrow{EG} \rangle$

$\langle -3, -9 \rangle = \langle x-2, y-4 \rangle$

$x = -1 \ , \ y = 5 \implies G(-1,-5)$

جمع المتجهات وطرحها
Addition and Subtraction of Vectors

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $< \overrightarrow{AB} > + < \overrightarrow{BC} > = < \overrightarrow{AC} >$ فإن: $AB + BC = AC$

(a) (b)

السبب :

$$\langle \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} \rangle$$

(قاعدة شال تتطبق على المتجهات وليس على القطع المستقيمة)

(2) $< \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{CB} > = \vec{0}$

(a) (b)

السبب :

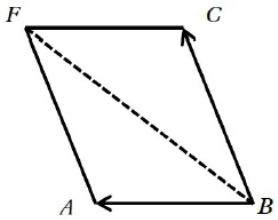
$$\langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle + \langle \overrightarrow{CB} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{CB} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle \overrightarrow{AA} \rangle = 0$$

(3) $ABCF$ متوازي أضلاع حيث: $\overrightarrow{BF} = < 1,4 >$ ، $\overrightarrow{BA} = < -2,3 >$

$\therefore \quad < \overrightarrow{BC} > = < 3,1 >$

(a) (b)

السبب :



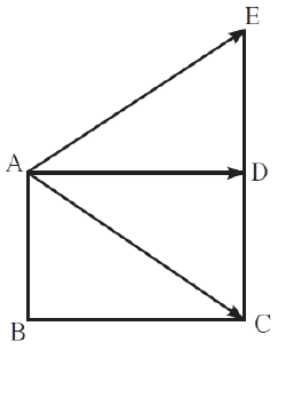
$$\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle \overrightarrow{BF} \rangle - \langle \overrightarrow{BA} \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle 1,4 \rangle - \langle -2,3 \rangle = \langle 1,4 \rangle + \langle 2,-3 \rangle$$

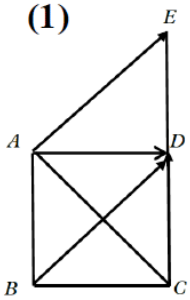
$$\langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle 3,1 \rangle$$

(4) في المستطيل $ABCD$: $< \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{AD} > = < \overrightarrow{AE} >$ إذاً $< \overrightarrow{AE} > = < \overrightarrow{BD} >$

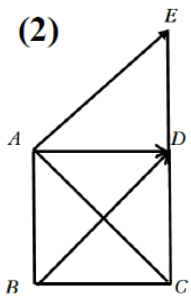
(a) (b)



(1)



(2)



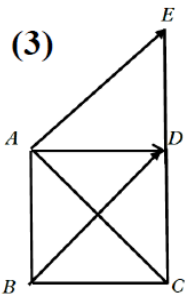
في الشكل رقم **(1)** $\langle \overrightarrow{AF} \rangle = \langle \overrightarrow{BD} \rangle = \langle \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{BA} \rangle$

في الشكل رقم **(2)** $\langle \overrightarrow{AF} \rangle = \langle \overrightarrow{BD} \rangle = \langle \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{CD} \rangle$

في الشكل رقم **(3)** $\langle \overrightarrow{AF} \rangle = \langle \overrightarrow{BD} \rangle = \langle \overrightarrow{BA} \rangle + \langle \overrightarrow{AD} \rangle$

وكل منهما لا يساوي : $\langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AD} \rangle$

(3)



(5) في المثلث ABC: $< \overrightarrow{AB} > - < \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{BC} > - < \overrightarrow{BA} > = < \overrightarrow{AB} >$

(a) (b)

السبب :

$$\langle \overrightarrow{AB} \rangle - \langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} \rangle - \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{AB} \rangle$$

$$= \langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{CB} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle$$

(6) إذا كان $\vec{L} = < \overrightarrow{AC} > + 2 < \overrightarrow{AB} > - < \overrightarrow{BC} >$ فإن:

(a) $\vec{L} = \frac{1}{2} < \overrightarrow{AB} >$ (b) $\vec{L} = -\frac{1}{2} < \overrightarrow{AB} >$

(c) $\vec{L} = 3 < \overrightarrow{AB} >$ (d) $\vec{L} = -3 < \overrightarrow{AB} >$

السبب :

$$\vec{L} = \langle \overrightarrow{AC} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB} \rangle - \langle \overrightarrow{BC} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{CB} \rangle$$

$$= \langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{CB} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AB} \rangle = 3\langle \overrightarrow{AB} \rangle$$

(7) إذا كان $< \overrightarrow{AM} > = 2(3\vec{i} - \vec{j}) + 3(-2\vec{i}) - 2\vec{j}$، فإن $< \overrightarrow{AM} >$ يساوي:

(a) $2\vec{i} - 3\vec{j}$ (b) $3\vec{i} - 2\vec{j}$

(c) $-4\vec{j}$ (d) $6\vec{i} - 6\vec{j}$

السبب :

$$\langle \overrightarrow{AM} \rangle = 2(3\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + 3(-2\vec{\imath}) - 2\vec{\jmath} = (6\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}) + (-6\vec{\imath}) - 2\vec{\jmath} = -4\vec{\jmath}$$

(8) $ABCD$ متوازي أضلاع حيث: $A(-2,1), B(0,-2), C(3,-1)$. إذاً إحداثيات D هي:

(a) $(2,2)$ (b) $(-1,2)$ (c) $(1,2)$ (d) $(1,-2)$

السبب :

نفرض أن $D(x,y)$ ∵ الشكل **ABCD** متوازي أضلاع

$$\therefore \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \langle \overrightarrow{CD} \rangle$$

$$\langle -2,3 \rangle = \langle x-3, y+1 \rangle$$

$$x = -1 \quad , \quad y = 2$$

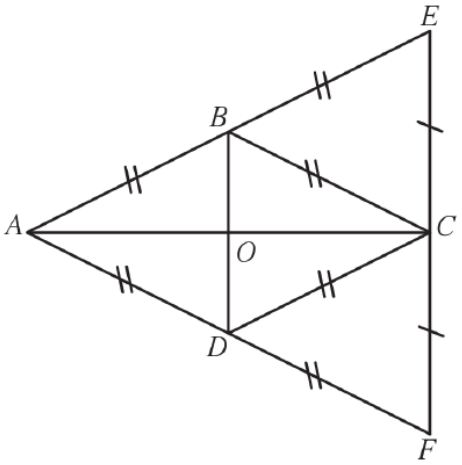
(9) $\vec{V} = x\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{U} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ هما متجهان متوازيان. قيمة x هي:

(a) 2 (b) -2 (c) 8 (d) -8

السبب :

∵ $\vec{V} \;//\; \vec{U}$ فإن $\frac{x_V}{x_U} = \frac{y_V}{y_U}$ أي أن $\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

في التمارين (13–10) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.



من الشكل أعلاه

القائمة (1)		القائمة (2)
(10) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$	b	a $\overrightarrow{BD}$
(11) $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} =$	c	b $\overrightarrow{AC}$
		c $\vec{0}$
		d $\overrightarrow{DB}$

(10) من الشكل $\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle = \langle\overrightarrow{AC}\rangle$ لأن النقطة **c** هي التي تكمل متوازي الأضلاع **ABCD**

(11) من الشكل $\langle\overrightarrow{CE}\rangle + \langle\overrightarrow{CF}\rangle = \vec{0}$ لأن

لأن كل من المتجهين معكوس للآخر

القائمة (1)		القائمة (2)
(12) $\overrightarrow{EA} =$	a	a $2\overrightarrow{BA}$
(13) $2\overrightarrow{OC} =$	c	b $2\overrightarrow{BE}$
		c $-\overrightarrow{CA}$
		d $\overrightarrow{CA}$

(12) من الشكل : $\langle\overrightarrow{EA}\rangle = 2\langle\overrightarrow{BA}\rangle$ لأن النقطة **B** منتصف **AE**

لأن $\langle\overrightarrow{EA}\rangle = \langle\overrightarrow{BA}\rangle$

(13) من الشكل : $2\overrightarrow{oC} = \overrightarrow{AC}$

وبالتالي فإن : $2\overrightarrow{oC} = -\overrightarrow{CA}$

تمرّنْ
5–3

الضرب الداخلي
Scalar Product

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$، فإن $\vec{u}\perp\vec{v}$ (a) (b)

السبب :

من تعريف حاصل ضرب متجهين

(2) إذا كان $\vec{u}\perp\vec{v}$, $\vec{u}=<-2,x>,\vec{v}=<5,1>$، فإن $x=-10$ (a) (b)

السبب : $\because\ \vec{u}\perp\vec{v}$ فإن $\vec{u}\,.\,\vec{v}=0 \Rightarrow -2\times5+x=0 \Longrightarrow -10+x=0$

$$x=10$$

(3) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{w}=-5, \vec{v}\cdot\vec{w}=3$، فإن $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}=-8$ (a) (b)

السبب :

$$(\vec{u}-\vec{v})\,.\,\vec{w}=\vec{u}\,.\,\vec{w}-\vec{v}\,.\,\vec{w}=-5-3=-8$$

(4) إذا كانت $A(-1,2),B(2,3),C(-4,5)$، فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$ (a) (b)

السبب :

$$\overrightarrow{AB}=\langle 2+1\,,3-2\rangle=\langle 3\,,\ 1\rangle$$

$$\overrightarrow{AC}=\langle -4+1\,,5-2\rangle=\langle -3\,,\ 3\rangle$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\langle 3\,,\ 1\rangle\,.\langle -3\,,\ 3\rangle=-9+3=-6$$

(5) إذا كانت $L(-3,4),M(0,5)$، فإن $\|\overrightarrow{LM}\|=10$ (a) (b)

السبب :

$$\overrightarrow{LM}=\langle 0-(-3)\,,\ 5-4\rangle=\langle 3\,,\ 1\rangle$$

$$\|\overrightarrow{LM}\|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

(6) $\vec{A}\,,\vec{B}$ متجهان في المستوى حيث $\vec{A}=<2,-3>,\vec{B}=<1,0>$ (a) (b)

$$\therefore\ \cos(\vec{A},\vec{B})=2\frac{\sqrt{13}}{13}$$

السبب :

$$\cos(\vec{A}\,,\ \vec{B})=\frac{\vec{A}\,.\vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|}=\frac{\langle 2,-3\rangle\,.\langle 1,0\rangle}{\sqrt{4+9}\times\sqrt{1+0}}=\frac{2+0}{\sqrt{13}}=2\,\frac{\sqrt{13}}{13}$$

في التمارين (14–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(7) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$ ، $\vec{v}=<-1,m>$ ، $\vec{u}=<2,-2>$، فإن m تساوي:

(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

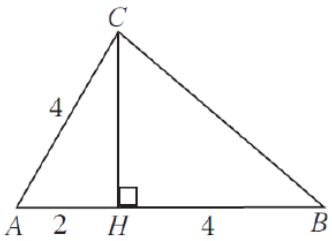
السبب :

$$\vec{u}.\vec{v}=3 \implies \langle 2,-2\rangle.\langle -1,m\rangle = 3 \quad -2-2m=3$$

$$-2-2m=3 \implies -2m=5 \implies m=-\frac{5}{2}$$

(8) في مثلث ABC، H هو المسقط العمودي لـ C على $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$



(a) -6 (b) 12 (c) -12 (d) 6

السبب :

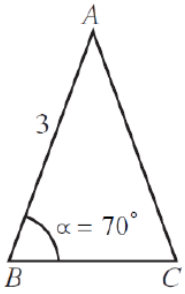
بفرض أن النقطة $A(0,0), H(2,0), B(6,0), C(2,y)$

$$\overrightarrow{AB}=\langle 6,0\rangle \quad , \quad \overrightarrow{AC}=\langle 2,y\rangle$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\langle 6,0\rangle.\langle 2,y\rangle = 12+0=12$$

(9) في الشكل المقابل $AB=AC=3\,cm$ ، $m(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=70^\circ$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ يساوي تقريبًا:



(a) 2.3 (b) 6.89 (c) 3 (d) -2.3

السبب :

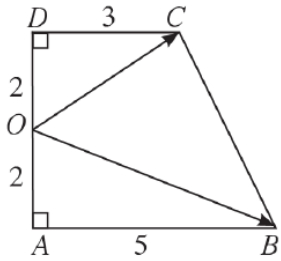
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})=3\times 3\cos(40^\circ)$$

$$=9\cos(40^\circ)\approx \mathbf{6.89}$$

(10) $ABCD$ شبه منحرف قائم (انظر الشكل المقابل) حيث:

$AB = 5\,\text{cm}, AO = 2\,\text{cm}, OD = 2\,\text{cm}, CD = 3\,\text{cm}$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ يساوي:



(a) 11 (b) -11 (c) 12 (d) -12

السبب :

$$\overrightarrow{0B} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \ , \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$$

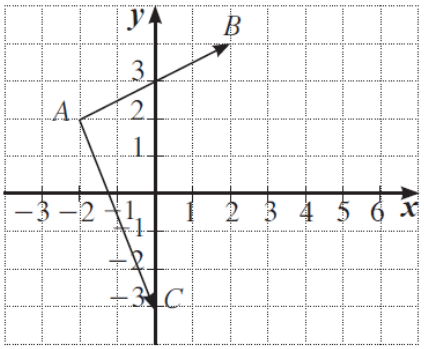
$$\overrightarrow{0B} \,.\, \overrightarrow{0C} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}\right)$$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{DC} = 2 \times 2\cos 180^\circ + 2 \times 3\cos 90^\circ + 2 \times 5\cos 90^\circ$$

$$+2 \times 5\cos 0^\circ = -4 + 0 + 0 + 15 = 11$$

(11) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$



السبب :

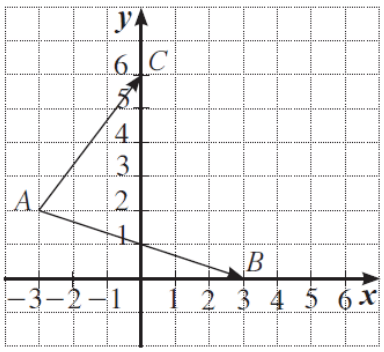
$$\overrightarrow{AB} = \langle 2-(-2), 4-2 \rangle = \langle 4, 2 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 0-(-2), -3-2 \rangle = \langle 2, -5 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \langle 4, 2 \rangle . \langle 2, -5 \rangle = 4 \times 2 + 2 \times (-5) = -2$$

(a) 2 (b) -2 (c) 18 (d) 0

(12) في الشكل المقابل، $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$



السبب :

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3-(-3), 0-2 \rangle = \langle 6, -2 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 0-(-3), 6-2 \rangle = \langle 3, 4 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \langle 6, -2 \rangle . \langle 3, 4 \rangle = 6 \times 3 + 4 \times (-2) = 10$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10} \quad , \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3^2 + (4)^2} = 5$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{10}{2\sqrt{10} \times 5} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

(a) 0 (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(13) إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$ ، $\vec{u} = <-5, m>, \vec{v} = <2, 3>$ فإن m تساوي:

(a) $\frac{10}{3}$ (b) $-\frac{3}{10}$ (c) $\frac{-10}{3}$ (d) $\frac{15}{2}$

السبب :

$\vec{u} \perp \vec{v}$ ∵ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -5 \times 2 + 3m = 0 \Rightarrow -10 + 3m = 0$

$3m = 10 \Rightarrow m = \frac{10}{3}$

(14) إذا كان $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$ فإن $m(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ **لا يمكن** أن يساوي:

(c) 60° (b) 28° (c) 122° (d) 50°

السبب :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2, -2 < 0$ لابد أن $90^\circ < \cos(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) < 180^\circ$

$m(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = 122^\circ$

الوحدة السادسة

تمرَّنْ
6–1

المجتمع الإحصائي والمعاينة
Statistical Population and Sampling

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المواليد في العالم سنة 2010 عبارة عن مجتمع غير منته. (a) (b)

السبب : **لأنه في خلال سنه واحدة يمكن تحديد عدد المواليد في العالم .**

(2) وحدة الدراسة لعدد زوار مركز علمي في يوم واحد هي أي زائر. (a) (b)

السبب :
لأن الدراسة لعدد زوار المركز .

(3) يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة أنواع السمك الموجودة في أحد المحيطات. (a) (b)

السبب :
لانه لايمكن جمع جمع أنواع الأسماك

(4) عدد الصفحات في كتاب ما هو بيانات كمية مستمرة. (a) (b)

السبب :
عدد الصفحات في كتاب ما معلوم عددها وبالتالي فهي بيانات كمية

(5) عند ترتيب الأشياء نستخدم بيانات كيفية مرتبة. (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) البيانات الكيفية تكون:

(a) اسمية أو مرتبة (b) مرتبة فقط
(c) متقطعة (d) اسمية فقط

السبب :
البيانات الكيفية تكون إسمية أو مرئية .

(7) البيانات المستمرة هي بيانات:

(a) اسمية (b) مرتبة (c) كمية (d) كيفية

السبب :
البيانات المستمرة هي بيانات كمية .

في التمارين (10–6)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(8) عند إجراء تحاليل الدم نستخدم:

(a) الحصر الشامل
(b) المعاينة
(c) الحصر الشامل والمعاينة
(d) ليس أيًّا مما سبق

السبب :
عند إجراء تحاليل الدم نستخدم المعاينة .

(9) البيانات الكمية تكون:

(a) اسمية أو مرتبة
(b) مرتبة فقط
(c) متقطعة أو مستمرة
(d) مستمرة فقط

السبب :
من التعريف

(10) عدد المشاهدين في مباراة كرة قدم هو عبارة عن بيانات:

(a) كيفية اسمية
(b) كيفية مرتبة
(c) كمية متقطعة
(d) كمية مستمرة

السبب :
عدد المشاهدين في مبارة كرة قدم هو عبارة عن بيانات كمية متقطعة .
لانه يمكن معرفه عدد المشاهدين من خلال عدد التذاكر المباعة .

تمرّنْ
6–2

العينات
Samples

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) للحصول على أفضل تمثيل للمجتمع نختار العينة بطريقة عشوائية.

(a) (b)

السبب :

لأنه باستخدام العينة العشوائية نكون بعيدين عن التخيز

(2) لا يوجد فرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية.

(a) (b)

العينة العشوائية البسيطة هى عينة جميع مفرداتها متجانسة .

العينة الطبقية هى مجموعات غير متقاطعة أى تتكون من طبقات مختلفة فيما بينها ولكن كل طبقة متجانسة فى داخلها .

(3) حجم المجتمع $= \frac{\text{كسر المعاينة}}{\text{حجم العينة}}$

(a) (b)

السبب :

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائى}}$$

$$\text{حجم المجتمع} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{كسر المعاينة}}$$

(4) حجم المجتمع الإحصائي = طول الفترة × حجم العينة

(a) (b)

السبب :

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائى}}{\text{حجم العينة}}$$

حجم المجتمع الإحصائى = طول الفترة × حجم العينة

(5) إذا كان طول الفترة يساوي 70، والمفردة الأولى تساوي 43، فالمفردة الخامسة تساوي 322

(a) (b)

السبب :

المفردة الأولى = 43 ، المفردة الثانية = 43 + 70

المفردة الثالثة = 43 + 2(70) ، ..... ، المفردة الخامسة = 43 + 4(70)

وبالتالى فإن المفردة الخامسة : 43 + 4(70) = 43 + 280 = 323

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) يتوافر في العينة العشوائية البسيطة:

(a) شرط التحيز
(b) الإتاحة لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور
(c) شرط العشوائية والانتظام
(d) كل مما سبق.

السبب :

يتوافر فى العينة العشوائية البسيطة الإتاحة لكل عنصر فيها الفرصة نفسها فى الظهور .

(7) يتوفر في العينة المنتظمة:

(a) شرط العشوائية والانتظام
(b) شرط الانتظام فقط
(c) شرط العشوائية فقط
(d) ليس أيًّا مما سبق

السبب :

يتوفر فى العينة المنتظمة العشوائية والانتظام .

(8) عند استخدام العينة الطبقية يفضل أن:

(a) تكون عشوائية ومنتظمة
(b) تكون طبقات المجتمع متجانسة بداخلها مختلفة في ما بينها
(c) لا تتيح لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور
(d) ليس أيًّا مما سبق

السبب :

عند استخدام العينة الطبقية يفضل أن تكون طبقات المجتمع متجانسة بداخلها مختلفة فى ما بينها .

(9) إذا كان حجم العينة يساوي 100 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 2 000، فكسر المعاينة يساوي:

(a) 0.3
(b) 0.5
(c) 0.05
(d) 0.02

السبب :

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائى}} = \frac{100}{2000} = 0.05$$

(10) إذا كان طول الفترة يساوي 40 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 1000، فحجم العينة يساوي:

(a) 35
(b) 25
(c) 40
(d) 30

السبب :

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائى}}{\text{حجم العينة}}$$

$$\text{حجم العينة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائى}}{\text{طول الفترة}} = \frac{1000}{40} = 25$$

تمرَّنْ
6–3

أساليب عرض البيانات
Ways to Display Data

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) التكرار النسبي يساوي: قياس الزاوية المركزية لقطاع × 360°

(a) (b)

السبب :

$$\text{قياس الزاوية المركزية لقطاع} = \text{التكرار النسبي} \times 360^\circ$$

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{قياس الزاوية المركزية لقطاع}}{360^\circ}$$

(2) $\text{التكرار النسبي} = \dfrac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{تكرار القيمة}}$

(a) (b)

السبب :

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار القيمة (أو الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

(3) مركز فئة –20 طولها 10 يساوي 30

(a) (b)

السبب :

مركز فئة –20 طولها 10 هو : $\dfrac{20+30}{2} = 25$

(4) لا يمكن رسم المنحنى التكراري قبل المدرج التكراري.

(a) (b)

السبب : لأنه يمكن رسم المنحنى التكرارى قبل المدرج التكرارى وذلك باستخدام مراكز الفئات .

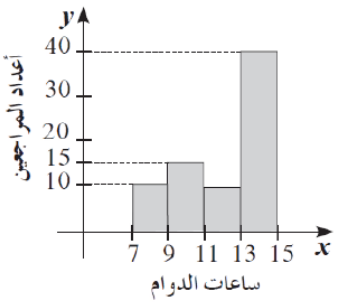
(5) يمكن تمثيل بيانات كمية مستمرة بالقطاعات الدائرية.

(a) (b)

السبب : لأن البيانات الكمية المستمرة غير ثابتة

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

في التمرينين (7–6) استخدم المدرج التكراري المقابل الذي يمثل أعداد المراجعين في إحدى الوزارات خلال ساعات الدوام اليومي في دولة ما.



(6) إجمالي عدد المراجعين هو:

السبب : أجمالي عددالمراجعين = 10 + 15 +10+ 40 = 75

(a) 80 (b) 65 (c) 70 (d) 75

(7) طول الفترة يساوي:

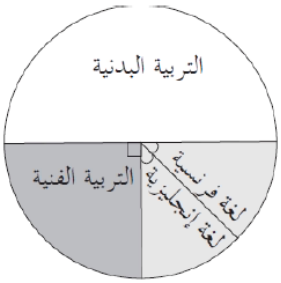
(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

السبب :

طول الفترة = الحد الأعلى لأى فئة – الحد الأدنى لنفس الفئة :

طول الفترة $9 - 7 = 2$

في التمارين (8–10) استخدم الشكل البياني المقابل الذي يمثل المواد الاختيارية المفضلة لدى طلّاب إحدى المدارس البالغ عددهم 200 طالب.



(8) كم يساوي قياس الزاوية المركزية لقطاع التربية البدنية؟

(a) 120° (b) 45° (c) 180° (d) 90°

السبب :

لأن قطاع التربية البدنية يمثل نصف المنطقة الدائرة

(9) كم يبلغ عدد الطلّاب المسجّلين باللّغة الإنجليزية؟

(a) 30 (b) 25 (c) 35 (d) 40

السبب :

قياس زاوية (قطاع المسجلين باللغة الإنجليزية) = 45

$$\text{التكرار النسبى} = \frac{\text{قياس الزاوية المركزية لقطاع}}{360^\circ} = \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}$$

تكرار الفئة = التكرار النسبى × مجموع التكرارات = $\frac{1}{8} \times 200 = 25$ طالب

(10) كم يبلغ عدد الطلّاب المسجلين بالمواد اللغويّة؟

(a) 50 (b) 40 (c) 55 (d) 60

عدد الطلاب المسجلين بالمواد اللغوية يساوى ضعف عدد الطلاب المسجلين باللغة الإنجليزية ، وبالتالى فإن عدد الطلاب المسجلين بالمواد اللغوية يساوى 50 طالب

تمرّنْ
6–5

القاعدة التجريبية
Empirical Rule

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون شكل التوزيع الطبيعيّ جرسًا غير متماثل. (a) (b)

السبب : في التوزيع الطبيعى يكون المنحنى التكرارى متماثل حول المتوسط الحسابى

(2) في التوزيع الطبيعيّ المنوال والوسيط غير متساويين. (a) (b)

السبب لأنه من خواص التوزيع الطبيعى أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابى والوسيط والمنوال

(3) في التوزيع الطبيعيّ الفترة $[\overline{x}-\sigma\ ,\ \overline{x}+\sigma]$ تحتوي على 95% من البيانات. (a) (b)

السبب :
لأن الفترة $[\overline{x}-\sigma\ ,\ \overline{x}+\sigma]$ تحتوى على 68% من قيم البيانات

(4) في التوزيع الطبيعيّ 99.7% من البيانات توجد في الفترة $[\overline{x}-3\sigma\ ,\ \overline{x}+3\sigma]$. (a) (b)

السبب :
العبارة صحيحة

(5) تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة. (a) (b)

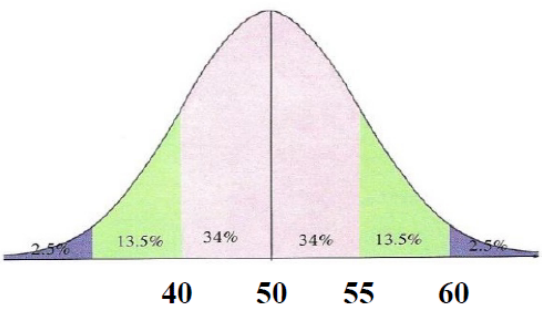
السبب :
العبارة صحيحة

في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) تزعم شركة أن متوسط عمر منتجها هو 50 شهرًا مع انحراف معياري 5 أشهر. النسبة المئوية للمنتجات التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا هي:

(a) 50% (b) 55% (c) 45% (d) 40%

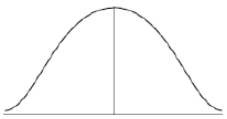
السبب :



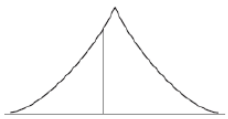
النسبة المئوية للمنتجات التي تزيد عمرها عن 50 شهر =

= 34% + 13.5% + 2.5% = 50%

(7) التمثيل الأفضل للتوزيع الطبيعيّ هو:

a 

b

c 

d

السبب : لأنه على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محور المتوسط الحسابي

(8) الفترة $[\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma]$ تحتوي على:

(a) 68% من البيانات

(b) 99.7% من البيانات

(c) 90% من البيانات

(d) 95% من البيانات

السبب :

لأن الفترة $[\ \bar{\mathbf{x}}-2\sigma\ ,\ \bar{\mathbf{x}}+2\sigma\ ]$ تحتوى على 95% من قيم البيانات

تمرّنْ
6–6

القيمة المعيارية
Standarized Value

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) القيمة المعيارية $= \frac{\overline{x} - x}{\sigma}$ (a) (b)

السبب :

القيمة المعيارية $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$

(2) القيمة المعيارية تؤشر إلى تشتت قيمة عن بقية قيم البيانات. (a) (b)

السبب :

لأن القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن

(3) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\overline{x} = 14$ والانحراف المعياري $\sigma = 4$

فإن القيمة المعيارية للمفردة $x = 16$ هي: $z = 0.5$ (a) (b)

السبب :

القيمة المعيارية للمفردة 16 : $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{16 - 14}{4} = 0.5$

(4) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\overline{x} = 12$ والقيمة المعيارية للمفردة $x = 15$

هي: $z = 0.4$ ، فإن الانحراف المعياري: $\sigma = 7.5$ (a) (b)

السبب :

القيمة المعيارية للمفردة 15 : $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 0.4 = \frac{15 - 12}{\sigma}$

$\therefore \frac{3}{\sigma} = 0.4 \Rightarrow 0.4\sigma = 3 \Rightarrow \sigma = \frac{3}{0.4} = 7.5$

في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) القيمة المعيارية للمفردة 14 مقارنة بقيم بيانات حيث المتوسط الحسابي 12.5 والانحراف المعياري 6 هي:

(a) -0.25 (b) 0.25 (c) 2.5 (d) -2.5

السبب :

$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{14 - 12.5}{6} = 0.25$

(6) القيمة المعيارية لمفردة من بيانات هي 0.625 والمتوسط الحسابي 12 والانحراف المعياري 8 فإن هذه المفردة تساوي:

(a) 7 (b) −7 (c) 17 (d) −17

السبب :

القيمة المعيارية للمفردة x :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 0.625 = \frac{x - 12}{8}$$

$$\therefore x - 12 = 8(0.625) \Rightarrow x - 12 = 5 \Rightarrow x = 5 + 12$$

(7) القيمة المعيارية للمفردة 14 من بيانات هي 0.6 والمتوسط الحسابي 11 فإن الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات هو:

(a) 0.2 (b) −0.2 (c) −5 (d) 5

السبب :

القيمة المعيارية للمفردة 14 :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 0.6 = \frac{14 - 11}{\sigma}$$

$$\therefore \frac{3}{\sigma} = 0.6 \Rightarrow 0.6\sigma = 3 \Rightarrow \sigma = \frac{3}{0.6} = 5$$

(8) القيمة المعيارية للمفردة 18 من بيانات هي 0.75 والانحراف المعياري 8 فإن المتوسط الحسابي هو:

(a) 24 (b) 12 (c) −12 (d) −24

السبب :

القيمة المعيارية للمفردة 18 :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 0.75 = \frac{18 - \bar{x}}{8}$$

$$\therefore 18 - \bar{x} = 8(0.75) \Rightarrow 18 - \bar{x} = 6 \Rightarrow \bar{x} = 18 - 6$$