حل نماذج اختبارات تقويمية
(2)

الرياضيات

الصــف الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

2023 — 2024

Mr. EMAD.I.AMER

نموذج (1)

1) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad x\le 2 \\ 4x-4 & : \quad x>2 \end{cases}$. أوجد $f'(2)$.

الحل :

الدالة f متصلة عند $x=2$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$ إن وجدت :

$$\boxed{f(2)=4}$$

$x<2$:

$f(x)=x^2$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=4 \qquad : x\neq 2$$

$$f'_-(2)=4$$

$x>2$:

$f(x)=4x-4$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-4-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{4(x-2)}{x-2}$$

$$=4 \qquad : x\neq 2$$

$$f'_+(2)=4$$

$$f'_-(2)=f'_+(2)\quad\Rightarrow\quad f'(2)=4$$

2) لتكن: $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

1) f متصلة عند $x=-2$

2) $f(-2)=(-2)^2+5=9$

3) g متصلة عند $x=9\in\mathcal{R}^+$

$\therefore$ $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[1\,,\,3)$, $[3\,,\,5]$ فإن f متصلة على $[1\,,\,5]$ (a) ●

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x)=9-x^2$ عند $x=2$ هو:

(a) -5 ● -4 (c) 4 (d) 5

نموذج (2)

1) لتكن: $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

1) g متصلة عند $x = 1$

2) $g(1) = 2(1) + 3 = 5$

3) نفرض : $f(x) = \frac{|x|}{x+2} = \frac{a(x)}{b(x)}$

- a متصلة عند $x = 5$
- b متصلة عند $x = 5$
- $b(5) = 5 + 2 = 7 \quad , 7 \neq 0$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 5$

$\therefore$ $f \circ g$ متصلة عند $x = 1$

2) باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $b\neq 0$, $x=b$

الحل :

$$f'(b)=\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{x-b}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{\frac{b-x}{xb}}{x-b}=\frac{b-x}{xb(x-b)}$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{-1}{xb}$$

$$=\frac{-1}{b^2}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

المقام :

$$\lim_{x\to b}(xb)=b^2\neq 0$$

$: b\neq 0$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

الدالة f : $f(x)=x^2-|x|$ متصلة لكل قيم $x\in\mathbb{R}$ (a) (b)

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

إن الدالة f : $f(x)=x+\sqrt{x^2+2}$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x=0$ والسبب هو:

(a) ناب

(b) ركن

(c) مماس عمودي

(d) غير متصلة

نموذج (3)

1) لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

إن وجدت :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2 + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2 - x^2 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) \quad : h \neq 0$$

$$= 2x$$

2) لتكن: $f(x)=|x^2-3x+2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

نفرض : $g(x) = |x|$, $h(x) = x^2 - 5x + 6$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 - 5x + 6) = |x^2 + 2x - 5| = f(x)$$

$$\therefore (g \circ h)(x) = f(x)$$

1) h متصلة عند $x = 2$

2) $h(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 0$

3) g متصلة عند $x = 0$

$\therefore$ $g \circ h$ متصلة عند $x = 2$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 2$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$ (a) ●

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x=3$ فيما يلي هي:

(a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

(b) $\sqrt{3-x}$

(c) $\begin{cases} 3x-1 & : \quad x \leqslant 3 \\ 1 & : \quad x > 3 \end{cases}$

● $\sqrt[3]{x+2}$

نموذج (4)

1) ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث: $f(x)=\begin{cases}2 & : x=1\\ \frac{x^2+1}{x} & : 1<x<5\\ \frac{26}{5} & : x=5\end{cases}$

الحل : مجال الدالة f : $D_f=\{1\}\cup(1,5)\cup\{5\}=[1,5]$

نفرض أن : $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$

g حدودية نسبية متصلة $\forall\, x\in\mathcal{R}-\{0\}$

$\because f(x)=g(x)\ \forall\ x\in(1\ ,\ 5)$

$\therefore$ f متصلة على $(1\ ,\ 5)$ ⟵ **(1)**

- **نبحث اتصال الدالة f عند $x=1$ من اليمين :**

المقام: $\lim\limits_{x\to1^+} x=1\ ,1\neq0$

$f(1)=2\ ,$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+1}{x}=\frac{(1)^2+1}{1}=2=f(1)$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين ⟵ **(2)**

- **نبحث اتصال الدالة f عند $x=5$ من اليسار:**

المقام: $\lim\limits_{x\to5^-} x=5\ ,5\neq0$

$f(5)=\frac{26}{5}\ ,$

$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\frac{x^2+1}{x}=\frac{(5)^2+1}{5}=\frac{26}{5}=f(5)$

$\therefore$ f متصلة عند $x=5$ من اليسار ⟵ **(3)**

من (1) ، (2) ، (3)

$\therefore$ f متصلة على $[1\ ,5\ ]$

2) لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & : x \geq 2 \\ -(x-2) & : x < 2 \end{cases}$$

إن وجدت : $$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$

$x < 2$ ⟵ $f(2) = 0$ ⟶ $x > 2$

$x > 2$	$x < 2$
$f(x) = (x-2)$	$f(x) = -(x-2)$
$f'_{+}(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$	$f'_{-}(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$
$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2) - 0}{x-2}$	$= \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2) - 0}{x-2}$
$= \lim_{x\to 0^+} 1 : x \neq 2$	$= \lim_{x\to 2^-} -1 \quad : x \neq 2$
$f'_{+}(2) = 1$	$f'_{-}(2) = -1$

$\because f'_{-}(2) \neq f'_{+}(2) \Rightarrow \therefore f'(2)$ غير موجودة

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

الدالة f : $f(x) = x^2 + |x-1|$ متصلة عند $x = 3$ ● (b)

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

إذا كانت $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال f' هو:

● $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ (b) $\mathbb{R} - \{-2\}$

(c) $\mathbb{R} - \{2\}$ (d) $\mathbb{R} - (-2, 2)$

نموذج (5)

(1 استخدم التعريف: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

الحل :

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x^3 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} 2(x^2 + x + 1)$$

$$= 2((1)^2 + (1) + 1) = 6$$

2) ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad , \quad [0, 2]$$

$\because$ f حدودية نسبية ،

$$x^2 - 1 = 0 \quad \forall\, x \in \{-1, 1\}$$

$\therefore$ f متصلة $\forall x \in \mathcal{R} - \{-1, 1\}$

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x = 1$

، $1 \in [0, 2]$

$\therefore$ f متصلة $\forall\, x \in [0, 2] - \{1\}$

أي أن f متصلة على كل من $[0, 1), (1, 2]$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

الدالة f : $f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$ (a)

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

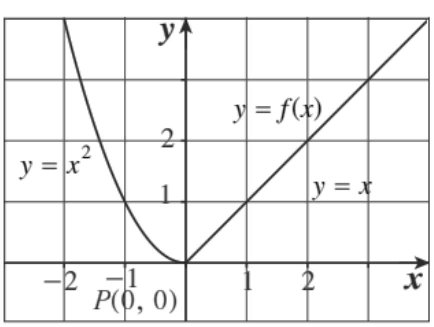
في الشكل المقابل، عند النقطة P :

(a) المشتقة جهة اليسار موجبة.

(b) المشتقة جهة اليمين سالبة.

(c) الدالة قابلة للإشتقاق.

ليس أيّ مما سبق.



نموذج (6)

1) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث: $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$

مجال الدالة f : $D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathcal{R}$

- نفرض أن : $g(x)=x+3$

g كثيرة حدود متصلة على $\mathcal{R}$

$\because f(x)=g(x)\ \forall\ x\in(-\infty,-1]$

$\therefore$ f متصلة على $(-\infty,-1]$ ⟵ **(1)**

نفرض أن : $h(x)=\frac{4}{x+3}$

h حدودية نسبية متصلة $\forall\ x\in\mathcal{R}-\{-3\}$

$\because f(x)=h(x)\ \forall\ x\in(-1,\infty)$

$\therefore$ f متصلة على $(-1,\infty)$ ⟵ **(2)**

- نبحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ من اليمين :

$f(-1)=(-1)+3=2$,

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{4}{x+3}=\frac{4}{2}=2=f(-1)$

المقام:

$\lim_{x\to-1^-}(x+3)=2$

$,2\neq 0$

$\therefore$ f متصلة عند $x=-1$ من اليمين ⟵ **(3)**

من (1) ، (2) ، (3)

$\therefore$ f متصلة على $(-\infty,\infty)$

$\therefore$ f متصلة على $\mathcal{R}$

2) باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحل :

إن وجدت $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$a = -2$

$f(-2) = 3(-2)^2 = 12$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(-2+h)^2 - 12}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(4-4h+h^2) - 12}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{12 - 12h + 3h^2 - 12}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-12h + 3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-12+3h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-12+3h) : h \neq 0$$

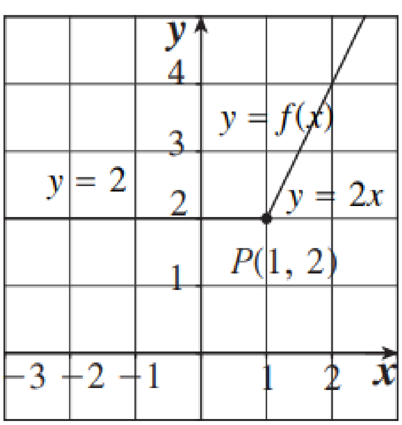
$$= -12$$

===

ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x = 0$ ● (b)

ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.



في الشكل المقابل، عند النقطة P:

(a) $f'_+(1) = 1$

● $f'_-(1) = 0$

(c) $f'_-(1) = 2$

(d) f قابلة للاشتقاق

نموذج (7)

1) بيّن أن الدالة التالية لها مشتقّة لجهة اليمين و مشتقّة لجهّة اليسار عند $x = 0$، لكن ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \le 0 \\ 2x & : \quad x > 0 \end{cases}$$

الحل :

إن وجدت :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$f(0) = 0$$

$x < 0$:

$$f(x) = x^2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} x \quad : x \neq 0$$

$$f'_-(0) = 0$$

$x > 0$:

$$f(x) = 2x$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 2 = 2$$

$$f'_+(0) = 2$$

$$\because \ f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

$\therefore \ f'(0)$ غير موجودة

2) لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$
متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

$\because$ f متصلة على $\mathcal{R}$

$\therefore$ f متصلة عند $x=0$

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\because f(0)=2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-a)=-a \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b$$

$$\therefore -a=2 \Rightarrow a=-2 \quad , \qquad b=2$$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

الدالة f : $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & : \quad x<4 \\ x^2-9 & : \quad x>4 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=4$.

(a) ●

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

لتكن الدالة f : $f(x)=x^2+3, x\neq 0$ ، الدالة g : $g(x)=\frac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g\circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\frac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$ (b) $\frac{x^2}{x^2-3}$ ● $\frac{x^2+3}{x^2}$ (d) $\frac{x^2}{x^2+3}$

نموذج (8)

1) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x+5 & : \ x \leqslant 3 \\ x^2-1 & : \ x>3 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحل :

الدالة f متصلة عند $x = 3$

إن وجدت : $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$x<3 \longleftarrow \boxed{f(3)=8} \longrightarrow x>3$

$f(x)=x+5$

$$f'_{-}(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+5-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}1 \quad : x\neq 3$$

$$=1$$

$$f'_{-}(3)=1$$

$f(x)=x^2-1$

$$f'_{+}(1)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-1-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6 \quad : x\neq 3$$

$$f'_{+}(3)=6$$

$f'_{-}(3)\neq f'_{+}(3) \Rightarrow f'(3)$ غير موجودة

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 3$

2) لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}5 & : \quad x=1\\ ax+b & : \quad 1<x<4\\ b+8 & : \quad x=4\end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين $a\,,b$

$\because$ f متصلة على $[1,4]$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين ، متصلة عند $x=4$ من اليسار

$$\therefore f(1)=\lim_{x\to1^+}f(x)$$

$$\therefore 5=\lim_{x\to1^+}(ax+b)$$

$$5=a+b$$

$$\because a=2$$

$$\therefore 5=2+b$$

$$\therefore f(4)=\lim_{x\to4^-}f(x)$$

$$\therefore b+8=\lim_{x\to4^-}(ax+b)$$

$$b+8=4a+b$$

$$8=4a$$

$$\therefore a=2$$

$$\therefore b=3$$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

الدالة f : $f(x)=x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x\in\mathbb{R}$.

(a) ●

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\frac{1}{g(x)}$

(c) $\frac{g(x)}{x-2}$ ● $|g(x)|$

نموذج (9)

1) لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

نفرض أن : $f(x) = \sqrt{x^2-7x+10} = \sqrt{g(x)}$

$g(x) = x^2-7x+10$

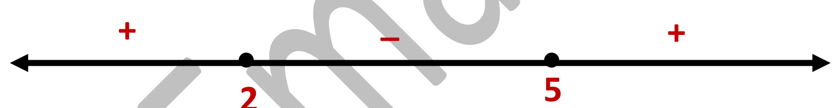
$D_f = \{ x : g(x) \geq 0 \}$

$x^2-7x+10 \geq 0$

المعادلة المناظرة :

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0 \quad \Rightarrow x=2 \quad or \quad x=5$



$D_f = (-\infty , 2\,] \cup [5,\infty)$

g متصلة على كل من : $[5,\infty)$, $(-\infty,2\,]$

1) $g(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (-\infty, 2\,] \cup [5,\infty)$

$\therefore$ f متصلة على كل من : $[5,\infty)$, $(-\infty,2\,]$

$\because [\,6,10\,] \subseteq D_f$

$\therefore$ f متصلة على $[\,6,10\,]$

2) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = \dfrac{3}{x}$ عند $x = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$ إن وجدت

$a = 3$,

$f(3) = 1$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{3+h}-(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3-3-h}{3+h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{3+h} = \frac{-1}{3}$$

المقام :

$\lim\limits_{h\to 0}(3+h) = 3$

$, 3 \neq 0$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

إذا كانت f: $f(x) = 3x - 12$ فإن $f'(x) = 3$. ● (b)

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

إذا كانت الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - a}$ متصلة عند $x = 3$ فإن a يمكن أن تساوي:

● 4 (b) 9

(c) 16 (d) 25

نموذج (10)

1) لتكن f : $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$.

نفرض أن : $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3} = \sqrt{g(x)}$

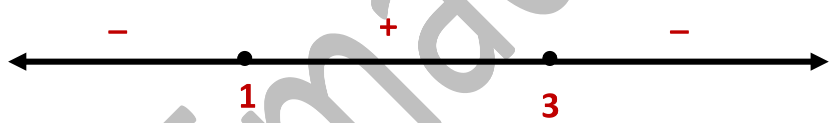
$$g(x) = -x^2+4x-3$$

$$D_f = \{\, x : g(x) \geq 0 \,\}$$

$$-x^2+4x-3 \geq 0$$

المعادلة المناظرة : $-x^2+4x-3 = 0$

$$\Longrightarrow x = 1 \quad or \quad x = 3$$



$$D_f = [1\,,3\,]$$

1) g متصلة على : $[1\,,3\,])$

2) $g\,(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [1\,,3\,]$

$\therefore$ f متصلة على : $[1\,,3\,]$

1) باستخدام التعريف اوجد ميل المماس للقطع المكافئ

$y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1,3)$

الحل :

بفرض أن : $y = f(x) = (x-2)^2 + 2$

إن وجدت $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$a = 1$, $f(1) = 3$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h-2)^2 + 2 - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h-1)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h-2) = -2$$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

يكون مماس منحنى الدالة f : $f(x) = 4$ عند النقطة $(-1 , 4)$ موازيًا لمحور السينات. ● (b)

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ ، g : $g(x) = x^2 - 3$ فإن: $(f \circ g)(0)$ يساوي:

(b) -4	● 4
(d) -1	(c) 1

نموذج (11)

1) لتكن f:
$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x & : \quad x\le 1\\ 4x-1 & : \quad x>1\end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x=1$.

الحل :

الدالة f متصلة عند $x=1$

إن وجدت :
$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$x<1 \longleftarrow \boxed{f(1)=3} \longrightarrow x>1$

$f(x)=x^2+2x$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}(x+3) \quad : x\ne 1$$
$$=4$$
$$f'_-(1)=4$$

$f(x)=4x-1$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{4x-1-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{4x-4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{4(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}4=4 \quad : x\ne 1$$
$$f'_+(1)=4$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)\ \Rightarrow\ f'(1)=4$$

2) لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

نفرض أن :

$$h(x) = -x^2 + x + 5 \;,\; g(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$(g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = g(-x^2 + x + 5)$$

$$= \sqrt[3]{-x^2 + x + 5} = f(x)$$

$$\therefore (g \circ h)(x) = f(x)$$

$\because$ الدالة : h متصلة على $\mathcal{R}$

، الدالة : g متصلة على $\mathcal{R}$

$\therefore$ الدالة : f متصلة على $\mathcal{R}$ (تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathcal{R}$)

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = x^2$ عند $x = -2$ هو 4 — (a) ●

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) $x = 3$

(b) $x = -3$

(c) $x = 2$

● لا يوجد نقاط انفصال

نموذج (12)

1) ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \left|\sqrt{x-3}\right|$ عند $x = 4$

نفرض : $g(x) = |x|$, $h(x) = \sqrt{x-3}$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x-3}) = \left|\sqrt{x-3}\right| = f(x)$$

$$\therefore (g \circ h)(x) = f(x)$$

1) بحث اتصال الدالة h عند $x = 4$

نفرض : $h(x) = \sqrt{x-3} = \sqrt{K(x)}$

- K متصلة عند $x = 4$
- $1 > 0$, $K(4) = 4 - 3 = 1$

$\therefore$ h متصلة عند $x = 4$

2) $h(4) = \sqrt{4-3} = 1$

3) بحث اتصال الدالة g عند $x = 1$

g متصلة عند $x = 1$

$\therefore$ $g \circ h$ متصلة عند $x = 4$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 4$

2) باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

الحل :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\ :x\neq a$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}1}{\lim\limits_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

المقام :

$$\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})$$

$$=\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\lim_{x\to a}\sqrt{a}=2\sqrt{a}$$

$:a>0$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة $(c\ ,\ f(c))$ هو $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ● (a)

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

(a) $(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}]$ ● $(5\ ,\ \infty)$

(c) $\mathbb{R}$ (d) $(-5\ ,\ 5)$

نموذج (13)

1) لتكن: $f(x)=2x^2-3$ ، $g(x)=\sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

1) f متصلة عند $x=-2$

2) $f(-2)=2(-2)^2-3=5$

3) نفرض : $g(x)=\sqrt{x+4}=\sqrt{h(x)}$

$h(x)=x+4$

- h متصلة عند $x=5$
- $h(5)=5+4=9\ \ ,9>0$

$\therefore$ g متصلة عند $x=5$

$\therefore$ $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$

2) لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

إن وجدت :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h) - x][(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[h][(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] \ : h \neq 0$$

$$= [\lim_{h\to 0}(x+h)]^2 + \lim_{h\to 0} x \left(\lim_{h\to 0}(x+h)\right) + \lim_{h\to 0} x^2$$

$$= x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

---

1) ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

إن الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4x - 5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط. (a) (b)

2) ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ ، g : $g(x) = x^2 - 3$ فإن: $(f \circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4 (b) -4

(c) 1 (d) -1